DESARROLLO DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO MEDIANTE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Javier Alberto Gutiérrez Chaparro

Colegio Reino de Holanda I.E.D

ALCALDÍA MAYOR DE BOGOTÁ D.C.
EDUCACIÓN
Instituto para la Investigación Educativa y el Desarrollo Pedagógico

BOG BOGOTÁ POSITIVA
GOBIERNO DE LA CIUDAD

Página legal

Samuel Moreno Rojas
Alcalde Mayor de Bogotá

Instituto para la Investigación Educativa y el Desarrollo Pedagógico, IDEP

Olmedo Vargas Hernández
Director General

Luz Stella Olaya Rico
Subdirectora Académica
Jorge Alirio Ortega Cerón
Subdirector Administrativo, financiero y de control interno
Luisa Fernanda Acuña Beltrán
Profesional Especializado Subdirección Académica
Supervisora del Proyecto
Andrea Bustamante Ramírez
Profesional Subdirección Académica
Giovanna Castiblanco Alvarez
Juliana Cubides Martínez
Darcy Milena Barrios Martínez
Zulma Patricia Zuluaga
Investigadoras Principales – Asesoría en la sistematización de las 18 experiencias pedagógicas

Coordinación editorial y audiovisual
Ramiro Leguìzamo Serna, Edilson Silva Lièvano
Editorial Sumasaberes Limitada

Ilustración
Daniela del Pilar Albarracín Moreno, Lina Marcela Otálora Serna, Pedro Steven Villabón Lozano

Corrección de estilo
Eduard Arriaga, Yamilet Angulo Noguera, Carlos Hernando Rico Sánchez, Edith Johana Barrero Santiago

Diseño gráfico y montaje
Jhon E. Florez Rivera, Elkin Hernández Mendoza

Título
Desarrollo del pensamiento matemático mediante la resolución de problemas

Autor
Javier Alberto Gutiérrez Chaparro

ISBN
978-958-8066-70-7
Avenida El Dorado No. 66 - 63
Tels. (57 1) 324 1000 (57 1) 324 1000 Ext. 9012 / 9006
www.idep.edu.co
Bogotá D.C.
IDEP- 2010

ALCALDÍA MAYOR DE BOGOTÁ D.C.
EDUCACIÓN
Instituto para la Investigación Educativa y el Desarrollo Pedagógico

BOG BOGOTÁ POSITIVA
GOBIERNO DE LA CIUDAD

Prólogo

En la actualidad diferentes instancias educativas y gubernamentales están interesadas en promover la sistematización como otra posible forma de hacer investigación. Considero que la intención de estas líneas de acción es impulsar a los docentes de las instituciones educativas a que escriban y reflexionen sobre su quehacer pedagógico, por tanto, a poder cualificar sus prácticas.

También, la sistematización hace que sus actores se apropien más de su propuesta, la transformen, la ajusten y se den cuenta de los alcances pedagógicos que tiene y sobre todo de reconocerse como docente investigador e innovador. Además, ésta es una manera de rescatar de la memoria o de los recuerdos todo el saber cuasi empírico que habita en la mente de maestras y maestros y que proviene de las experiencias diarias de clases cuando se tiene claro un enfoque y unos principios que orientan la acción.

Por otra parte, todo proceso de sistematización ha de integrar una concepción investigativa del docente, un enfoque interpretativo de la evaluación y un vínculo constante entre la teoría y la práctica, de modo que el aula se convierta en laboratorio viviente de innovaciones, aprendizajes y saberes con un rigor flexible y consistente. De ahí que ahora se haga público para que, en primera instancia los docentes de cada institución a la que pertenece este docente, se enteren de su trabajo, lo valoren y se colaboren para hacerlo cada vez más pertinente y consistente; en segunda instancia, para que transcienda de los muros de cada aula y enriquezca las actuaciones de otros docentes en el aula, en la región y en el país e incluso fuera de él.

En esta sistematización "Desarrollo del pensamiento matemático mediante la resolución de problemas", se abordan temas de interés para los docentes en matemáticas desde la metodología de resolución de problemas y sus implicaciones. Esta intención, además, conduce a pensar en la naturaleza del conocimiento matemático y sus diferentes matices: asumido como saber puro, saber aplicado, comprendido en relación con los saberes cotidianos y los saberes escolares.

Este trabajo pone en evidencia la brecha que existe, y que por cierto es cada vez más grande, entre los desarrollos contemporáneos del saber disciplinar, lo abordado en educación matemática y el saber del profesor en torno a lo que se debe enseñar y aprender de las matemáticas.

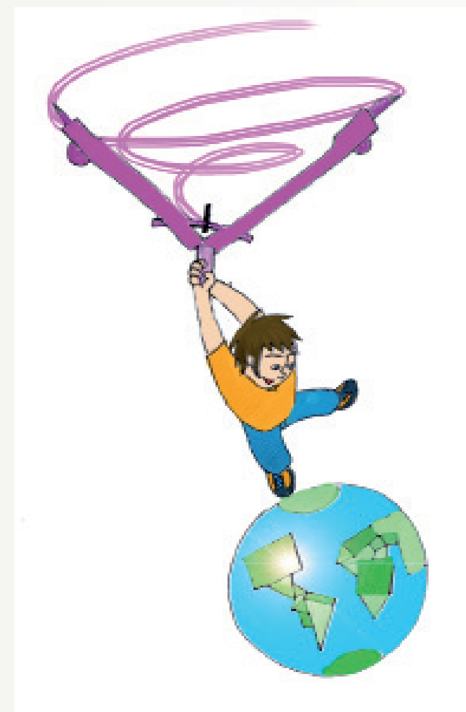
Siguiendo este horizonte, postula a la metodología de resolución de problemas como una posible vía para cerrar está brecha. La experiencia va mostrando porque mediante este enfoque es posible acercar y poner a dialogar en las prácticas docentes y los saberes producidos por los tres horizontes de trabajo antes mencionados.

Además, es interesante el vínculo que establece con algunos elementos de la Escuela Francesa como la situación fundamental, a-didáctica y didáctica que son caminos que el profesor utiliza para analizar y organizar las actividades de clase. Es decir, esta experiencia aporta ciertos conocimientos que permiten dilucidar la importancia de acabar con estas tensiones entre estos tres ámbitos de la investigación matemática. Es interesante como el docente investigador, en este caso, logra presentar a través de una propuesta para grado séptimo esta articulación.

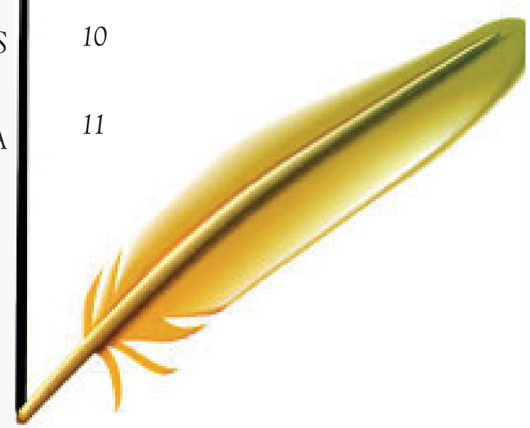
Es decir, deja ver que el antagonismo entre aquel que se considera matemático puro y aquel que se dedica a la educación matemática como campo específico, quizá de orden secundario frente al primero, es un anacronismo ya para estos tiempos en que el saber matemático, la misma disciplina y las teoría sobre educación con énfasis en el aprendizaje, se han transformado. En este sentido, el papel de los contextos es decisivo, pues genera infinitas posibilidades para los niños, niñas y jóvenes que se encuentran con un docente que, además de saber matemáticas, propicia su aprendizaje metódicamente, mediante la resolución de problemas.

Dedicatorias

A mis estudiantes del Colegio Reino de Holanda, gracias por sus enseñanzas.



ÍNDICE



Transmedia

http://www.youtube.com/watch?v=1tfCgH9atIc

http://www.youtube.com/watch?v=_JyGFrUnSI0

http://www.youtube.com/watch?v=WteQcUbCHdg

http://www.youtube.com/watch?v=mgycVVu0nvA

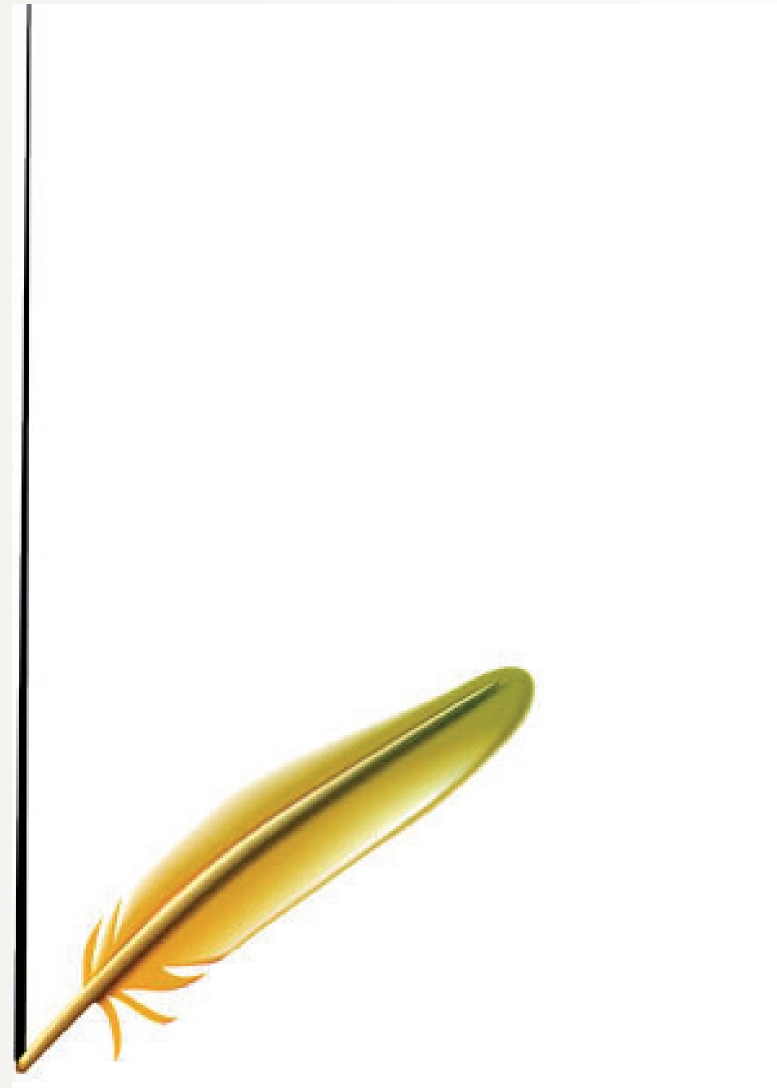
http://www.youtube.com/watch?v=vy-LrYaNfO4

http://www.youtube.com/watch?v=HNY6148IIlc

http://www.youtube.com/watch?v=bg3rlNF3WtE

http://www.youtube.com/watch?v=Gbevge9JhCo

http://www.youtube.com/watch?v=rDnIIuPp5YY



Transmedia

http://www.youtube.com/watch?v=Kj_X4gF35fs

http://www.youtube.com/watch?v=_mmtk4x9n4w

http://www.youtube.com/watch?v=SAtjm9bRuwc

http://www.youtube.com/watch?v=RVtvLctkZcE

http://www.youtube.com/watch?v=PGnSgZ6aN_o

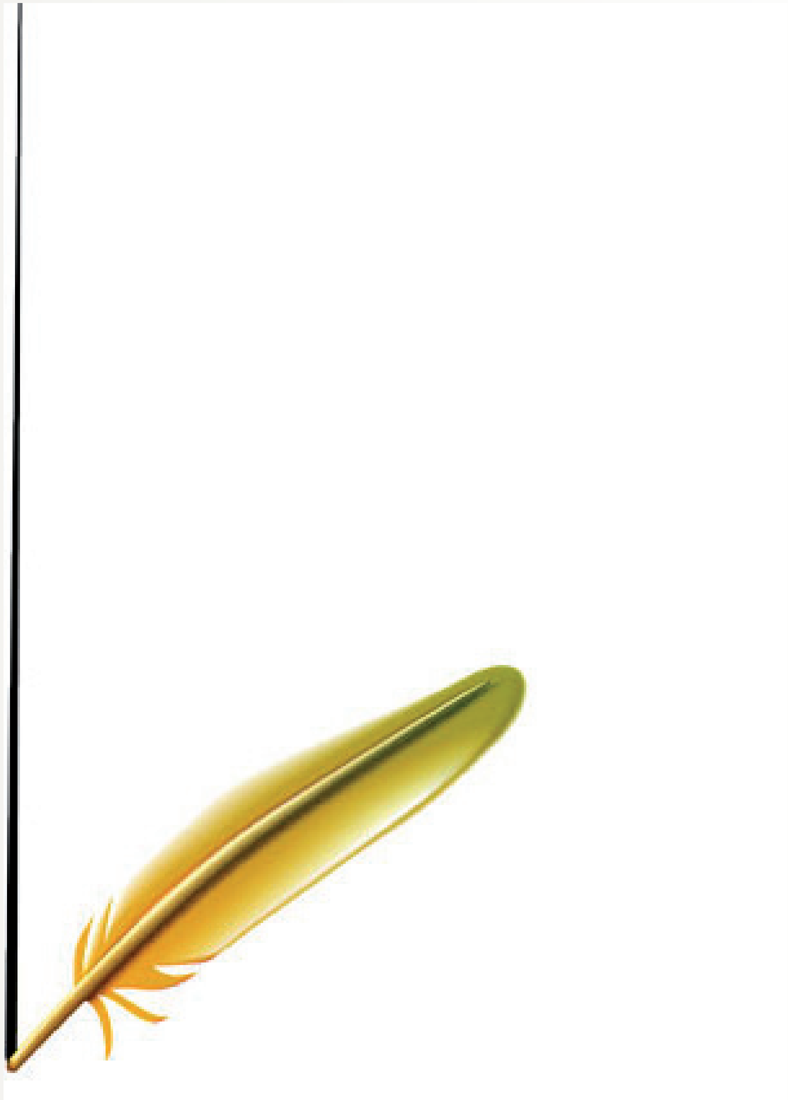
http://www.youtube.com/watch?v=hWOiFeaA6iI

http://www.youtube.com/watch?v=yzGkPDbBU-8

http://www.youtube.com/watch?v=xwSfZ7tjB4s

http://www.youtube.com/watch?v=oycS8EPSr2Q

http://www.youtube.com/watch?v=wGjfx7sYEG4

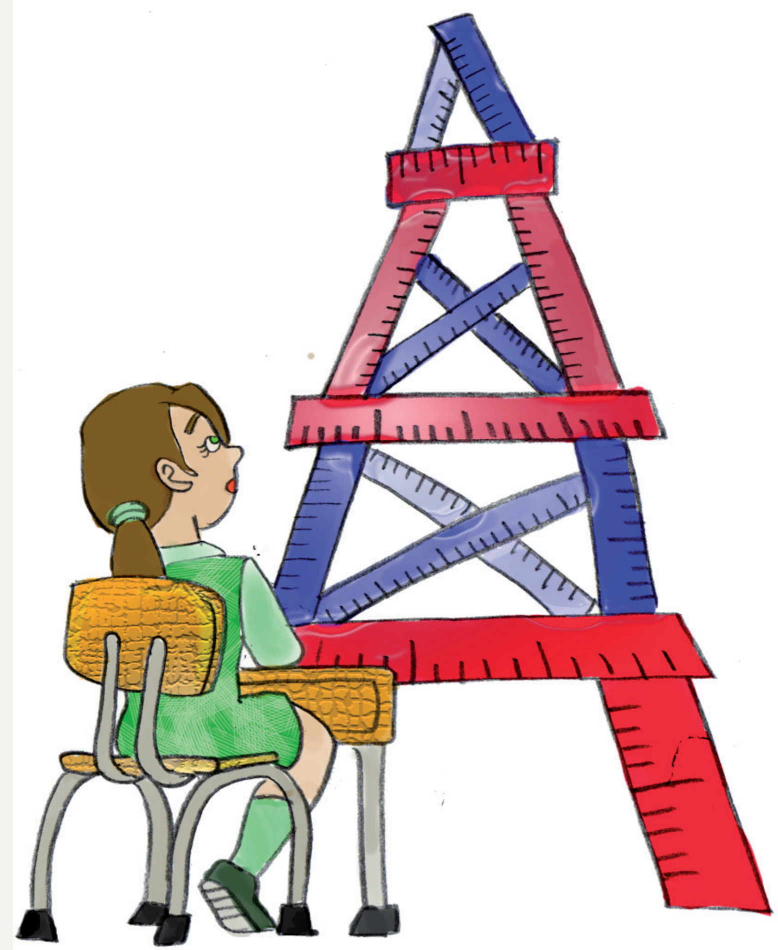


Presentación

La metodología de resolución de problemas, a partir de la publicación de los Lineamientos Curriculares para Matemáticas en 1998, dibuja desde lo legal unos parámetros hacia una innovación metodológica en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. Sin embargo, debido a las múltiples variables que dificultan este trazo, ésta aún no logra el impacto esperado. Entre estas dificultades está la pregunta ¿cómo un educador matemático logra implementar una clase en resolución de problemas? El hecho es que aún no tiene una respuesta socialmente aceptada (hablando en términos generales). De hecho, gran parte de nuestros docentes de matemáticas no ven en este cuestionamiento la clave para actualizar y mejorar sus prácticas de enseñanza.

El presente trabajo de sistematización pretende responder a este cuestionamiento. Por ello, se describen y analizan algunos aspectos de una propuesta de aprendizaje en torno al objeto matemático fracción, desarrollada en el marco del proyecto "Desarrollo del pensamiento matemático mediante la resolución de problemas", que se adelanta desde hace más de tres años en la Institución Educativa Distrital Reino de Holanda.

Debe puntualizarse que la presente experiencia deja, adicionalmente a todos sus logros, problemas de investigación en educación matemática y proyecciones para hacer de ella un proyecto de carácter más general.

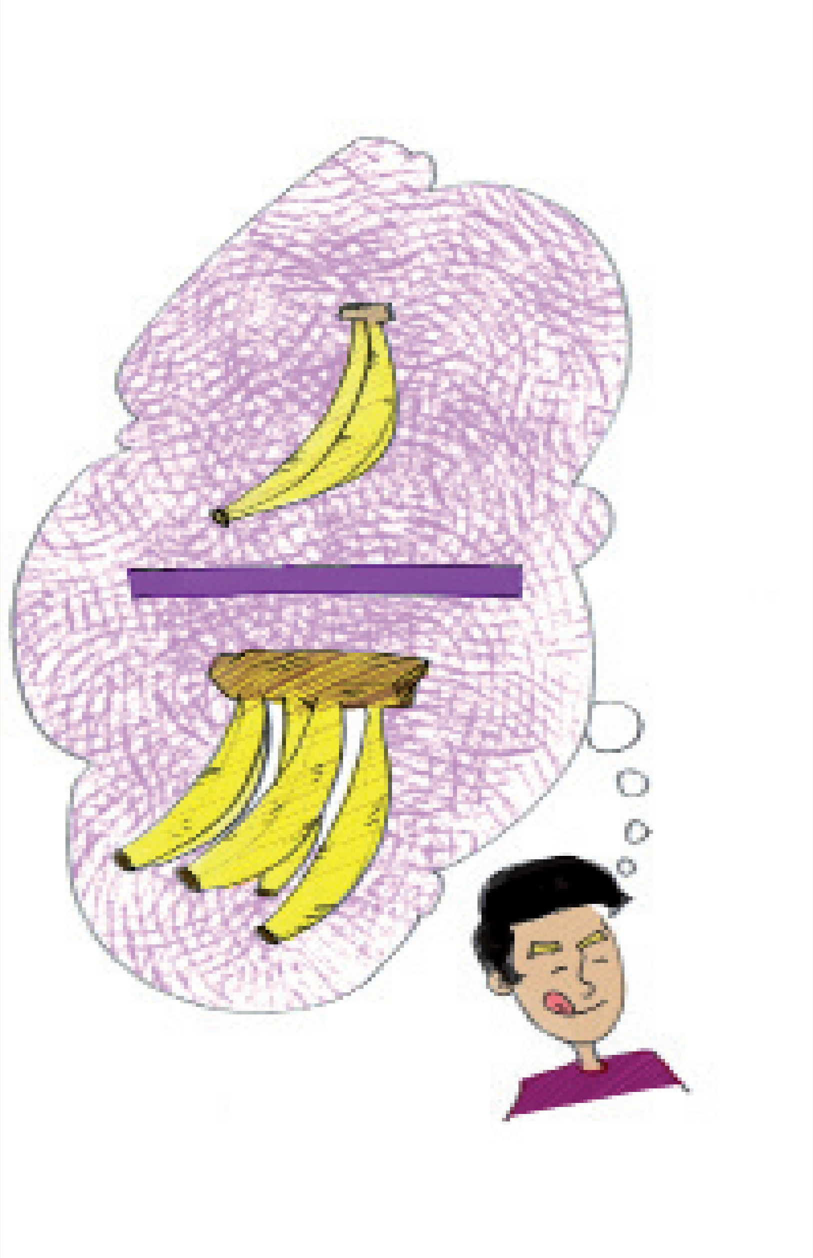


Introducción

El presente texto sistematiza, describe y analiza, la experiencia que se implementó en el colegio Reino de Holanda IED, al interior de las clases de matemáticas de grado séptimo. Se inscribe en el proyecto “Desarrollo del pensamiento mediante la resolución de problemas”, también dirigido por el autor. Los beneficiarios del proyecto son algunos profesores de matemáticas y estudiantes de esta institución.

Los objetivos del proyecto se encaminan principalmente a realizar trabajos de socialización y divulgación de propuestas metodológicas en resolución de problemas. Hasta el momento los resultados más importantes que se perciben se refieren al diseño y la implementación de actividades para la clase de matemáticas con la metodología en resolución de problemas. En tal sentido, se ha diseñado este plan de área: en grado sexto se trabaja en torno a teoría de números, en séptimo a fracciones, en octavo a isometrías del plano, poliedros y probabilidad, en noveno a regresión lineal y en décimo a trigonometría, teoría de números y manejo de aula virtual. A su vez, se han desarrollado varias conferencias dirigidas a profesores de matemáticas del colegio y de la localidad. Sin embargo, este escrito presenta principalmente de manera analítica el diseño pedagógico y resultados correspondientes a grado séptimo.

El promedio de edad de estos estudiantes es de 12 años; la mayoría se ubica en estrato uno y poseen problemáticas familiares difíciles. En general, son respetuosos, identifican las normas y reconocen la autoridad. Existen varios casos de estudiantes que no cumplen con sus deberes académicos; sin embargo, en las clases participan y hacen buenos aportes. La propuesta en este grado cumple en el 2010 su cuarto año de implementación.



El proyecto

En los últimos quince años se ha visto una producción teórica extensa en relación a la didáctica de las matemáticas. Nuestro país no se encuentra alejado de estos desarrollos, afortunadamente existen varios grupos de investigación en educación matemática. Por ejemplo, los resultados de investigación de muchos de ellos se muestran en la reunión anual organizada por **ASOCOLME**[1] , asociación que nace para apoyar al enriquecimiento de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en nuestro país.

A pesar de lo anterior, se percibe que los resultados de investigación en educación matemática aún no alcanzan a impactar, contundentemente, las prácticas de aula de muchos docentes del país. Tal vez sea apresurado esperar resultados en tan poco tiempo[2] , pero tampoco se debe mirar con despreocupación esta situación.

A continuación, se hace una clasificación de los saberes matemáticos con el fin de acotar una de las principales causas que han hecho que se tarde en llegar la influencia de los nuevos desarrollos en educación matemática a las aulas de colombianas.

1. **Matemáticas puras o disciplinares**. Se entenderán como ese cuerpo de conocimientos que han elaborado y elaboran los matemáticos puros. Ejemplos: topología algebraica, etc.

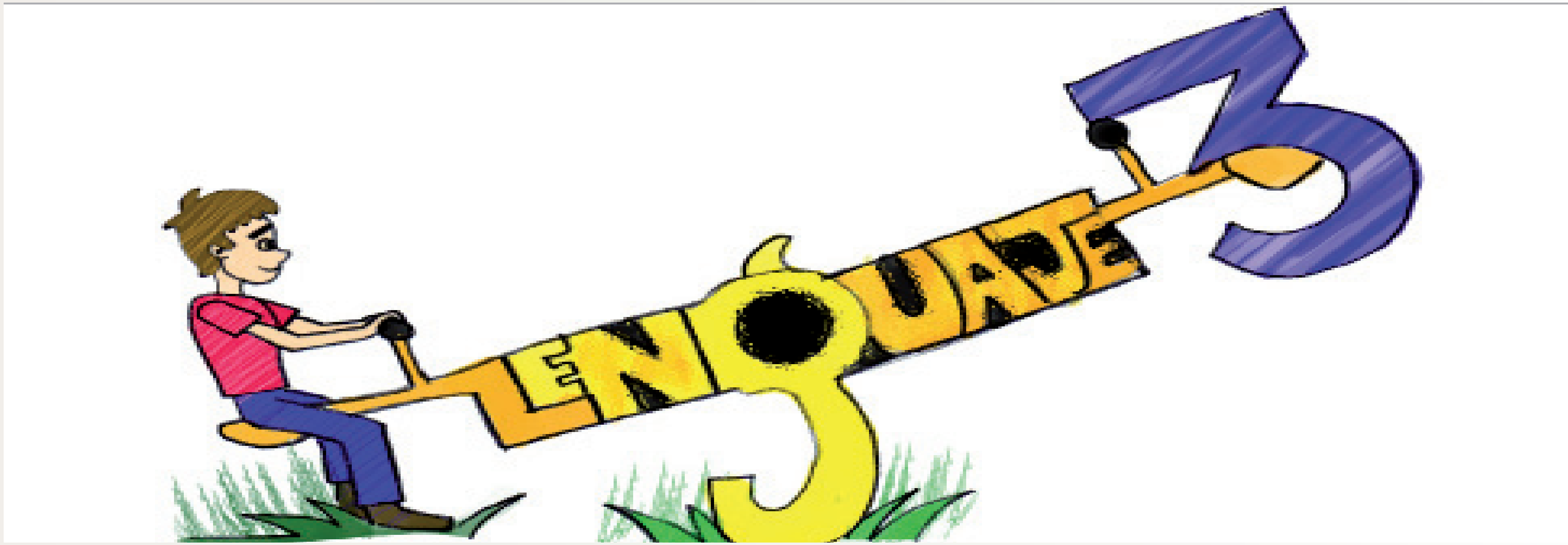
2. **Matemáticas aplicadas.** Se referirá a aquellas matemáticas que se construyen con el único objetivo de comprender algún fenómeno real. Ejemplos: modelos de fenómenos económicos, físicos-teóricos o experimentales- etc

3. **Matemáticas cotidianas (contenidas en las aplicadas)**. Son aquellas matemáticas que usan todos los ciudadanos en su vida diaria. Ejemplos: cuentas, porcentajes, fracciones, etc.

4. **Matemáticas escolares. Son aquellas matemáticas que se en**señan o aprenden, en instituciones educativas de educación básica[3] . Ejemplo: fracciones, diferenciación, geometría plana, etc.

La anterior clasificación es un simple mecanismo de organización que ayuda a plantear las siguientes ideas; no pretende ni ser exhaustiva ni excluyente, sólo pone de manifiesto la existencia de algunos lugares en donde las matemáticas se piensan y usan de manera distinta.

1 Asociación Colombiana de Matemática Educativa.
2 En ocasiones los cambios paradigmáticos en educación pueden tomar hasta 40 años
3 Es decir instituciones de enseñanza primaria y secundaria



Debido a la importancia social que se les otorga a las matemáticas desde hace varios años y en distintas partes del mundo, hoy en día es indiscutible la importancia de enseñar a la sociedad unas "buenas" matemáticas, que sirvan generación tras generación al desarrollo económico, cultural y científico de un país. Razón que ha generado que surjan instituciones dedicadas a investigar sobre la naturaleza de las matemáticas escolares, las maneras convenientes de enseñar y aprender matemáticas, entre otros aspectos. Dichas instituciones reciben el nombre de educadores matemáticos o didactas de las matemáticas y al cuerpo de conocimientos que ellos generan se llama de igual manera. En este trabajo se nombrará indistintamente didáctica de las matemáticas o educación matemática.

Por otro lado, están los matemáticos que mediante demostraciones resuelven problemas y construyen teorías de interés para las mismas matemáticas. Algunos de ellos consideran que la enseñanza de las matemáticas debería hacerse a través de formalismos, mientras que otros postulan que debería hacerse desde sus aplicaciones; en fin, cualquiera que sea el camino, éste debe proporcionar a los estudiantes formas de aprenderlas y construirlas de manera autónoma. Sin embargo, no suelen saber cómo lograrlo, especialmente con estudiantes que no desean aprenderlas y en muchos casos se menosprecia el conocimiento de la didáctica aunque afirmen respetarlo.

También, está el punto de vista de las personas que no pertenecen al grupo de didactas ni al de matemáticos; ellos consideran que un buen matemático es aquel que realiza operaciones numéricas rápidamente o hace cálculos de varios estados sin equivocarse. Por ello, es común considerar como hitos de buenos matemáticos a los ingenieros o contadores, aún por encima de los mismos matemáticos; debido a que tienen la percepción de que el matemático realiza cosas extrañas que sólo él entiende y que lo mantienen al borde de la locura; se menosprecia su trabajo formal, ya que se percibe alejado del mundo real y sin utilidad.

Los didactas tienen una posición frente a cómo los estudiantes deben aprender las matemáticas. En la actualidad consideran que éstas deben aprenderse en contextos que incentiven en los estudiantes el desarrollo de un pensamiento crítico, creativo y relacional con el fin de que puedan desempeñarse adecuadamente tanto en lo social como en lo académico; en contraposición a la adquisición de rutinas de cálculo, definiciones, esquemas rígidos de solución de problemas; es decir, a que se priorice la memorización de conocimientos sin un para qué.

A su vez, los didactas –en varios casos– consideran a un buen matemático como aquel que tiene ese talento natural para estructurar, transferir y relacionar conceptos en la resolución de problemas. A pesar de esto, en muchas de sus propuestas se observa un tratamiento reducido de los conceptos matemáticos, debido a que se da prioridad al método, a la forma y no al fondo, es decir al desarrollo matemático de los conceptos involucrados (establecer relaciones, situaciones de uso y diferentes representaciones) en dichas propuestas; de esta manera, se sigue perpetuando prácticas de enseñanza y aprendizaje en las que las matemáticas son vistas como un conjunto de técnicas que no se relacionan entre sí y que sólo sirve aprenderlas para aprobar el año escolar. Además, en la actualidad se observan unas matemáticas escolares envejecidas y poco renovadas. Es importante que los educadores matemáticos investiguen cómo actualizar los planes de estudio, pues, las matemáticas propuestas en los currículos corresponden a las que se desarrollaron hace tres o más siglos. Esto genera que los estudiantes no aprendan unas matemáticas que estén cercanas a lo que viven y ven socialmente, tal vez ésta sea una razón más para que no se interesen en su estudio.

En este sentido, basta con ver algunos de los currículos escolares de colegios o entrevistar a algunos docentes para entrever que el modelo de un estudiante destacado en matemáticas es aquel que maneja hábilmente el cálculo diferencial o la factorización de polinomios. Así, dejan de lado áreas tan importantes en la actualidad como la geometría, la topología, el álgebra y demás ramas de esta disciplina, que hoy por hoy son las bases de las investigaciones en matemáticas; campos que pueden abordarse en las matemáticas escolares desde un enfoque en resolución de problemas (Gutiérrez, 2010).

Resumiendo, existen graves quiebres y tensiones alrededor de las personas que hacen y enseñan las matemáticas. Los matemáticos suelen –sin generalizar– considerar que la educación matemática carece del saber disciplinar que enseña, los investigadores en didáctica no creen que los matemáticos sepan sobre la complejidad del proceso de aprendizaje y muchos de los educadores desconocen el desarrollo que existe en los otros dos campos. Esta última tensión es la más delicada, porque los profesores son los que hacen realidad las investigaciones de los didactas y perpetuán el conocimiento matemático. En aras de aportar conocimiento, experiencias que permitan dilucidar la importancia de acabar con estas tensiones, de investigar sobre los elementos que dificultan el cambio de paradigma educativo alrededor de la educación matemática y teniendo en cuenta la fuerza que en este momento tiene la metodología de resolución de problemas (aporte dado por la educación matemática), nace el proyecto “Desarrollo del pensamiento matemático mediante la resolución de problemas”. Este cuenta con diversas propuestas que recorren diversos mundos y que se contextualizan en diversas actividades propias de la labor docente.

El siguiente gráfico muestra los cinco ejes que articulan el proyecto.

Durante el proyecto se hicieron trabajos en cada uno de estos componentes que podrían generar por lo menos un escrito de sistematización. En lo que sigue de este capítulo, se presentarán diversos comentarios que muestran las ventajas de la metodología de resolución de problemas y la importancia de acabar con la tensión entre los saberes matemáticos descritos anteriormente.

Situaciones enmarcadas en resolución de problemas

Durante tres años en diferentes grados de escolaridad se han realizado propuestas enmarcadas en la resolución de problemas; a continuación se presenta una síntesis de cada una, posteriormente se ampliará la propuesta desarrollada en el grado séptimo.

Grado sexto.

Objetivos.

- Habituar a los estudiantes a la metodología de resolución de problemas y romper con ciertos mitos acerca de las matemáticas y su aprendizaje.
    - En matemáticas no es mejor el que realiza las cosas más rápido.
    - Empezar a trabajar autónomamente en la resolución de problemas.
    - Las matemáticas no son sólo números y cálculos.

- Eliminar modelos primitivos [4] asociados a la multiplicación que usan los estudiantes.
    - La multiplicación agranda, la división achica.
    - La división siempre es un proceso de reparto.
    - La multiplicación es únicamente una suma repetida.
    - El residuo de una división carece de importancia.
    - Identificación de las ventajas del aprendizaje de la teoría de números.
- Dilucidar algunos elementos del teorema fundamental de la aritmética.
    - La finitud del conjunto de divisores de un número entero positivo y la infinitud de los divisores del cero.
    - La infinitud del conjunto de múltiplos de un entero positivo y la finitud de los múltiplos del cero.
- La imposibilidad de la división por cero.
    - Descripción

Ampliar el reconocimiento de los fenómenos modelados por la multiplicación con respecto a la educación tradicional, en el que se privilegia la enseñanza de problemas multiplicativos de grupos iguales, medidas iguales, conversión de medidas, área rectangular y proporción, requiere plantear situaciones problema de cambio multiplicativo, comparación multiplicativa (Greer, 1992) y aquellos que la escuela tradicional llama de mínimo común múltiplo y máximo común divisor; así como también, los que posibiliten mediante la multiplicación la compresión numérica sobre la estructura de los números enteros y los números primos (Gutiérrez, 2006).

Algunos de los problemas trabajados en este curso son:

M.C.D.

> Lisa desea realizar collares exactamente iguales con 120 perlas amarillas, 96 rojas y 72 azules, sin que le sobren ni necesite más perlas. Dibuja los collares de Lisa.

Comprensión numérica.

Construye todos los posibles rectángulos que se puedan hacer con n puntitos. Recuerda usar únicamente la cuadricula del cuaderno y no dejar espacios vacíos al interior del rectángulo.

4 Por modelo primitivo se entiende aquella concepción errónea que poseen los estudiantes frente a un objeto matemático

Cambio multiplicativo.

Tengo un caucho sin estirar de 10 cm de largo. Y quiero saber la cantidad de veces exacta que él puede estirarse antes de romperse.

Comparación multiplicativa.

Averigua cuántas veces más rápido que tú corre el deportista record mundial de atletismo, en la prueba de los 100 metros planos.

Uno de los principales logros ha sido que los estudiantes amplían sus estrategias de solución a las representaciones externas[5] . Al cabo de un mes la gran mayoría no tiene problema para exponer frente al grupo y empieza a identificar en su estrategia su originalidad, exploran de manera autónoma la generación de conocimientos y amplían la comprensión que puedan tener de los números. También, reconocen a las matemáticas como un conocimiento dinámico, posible de acceder y no como un área que se reduce a la memorización de ciertas técnicas aprendidas sólo por aquellas mentes "especiales".

Esta experiencia fue socializada frente a los demás profesores del colegio y la localidad. Sirvió como punto de apoyo para la explicación de las ventajas del trabajo en resolución de problemas y su diferencia con la educación tradicional.

Grado séptimo

Objetivos

Reforzar la metodología en resolución problemas.

- Romper ciertos modelos primitivos sobre el objeto matemático fracción.
  - No existen fracciones cuyo denominador es más grade que el numerador.
  - Un denominador jamás es uno.
  - Para comparar fracciones se hace lo mismo que al ordenar números enteros positivos.
  - Puedo sumar fracciones numerador a numerador y denominador a denominador.
  - Las fracciones pueden sólo ser vistas en contextos continuos.
  - No es posible dividir un número menor entre otro.
- Romper ciertos modelos primitivos que se tienen frente a la potenciación[6] .
  - No todo se comporta proporcionalmente.
  - No todo es representado linealmente.
  - No todo es susceptible de solucionarse usando regla de tres.
  - Instaurar representaciones externas para situaciones que se modelan exponencialmente.
- Romper modelos primitivos sobre los números enteros negativos.
  - No existen cantidades menores a cero.
  - La palabra diferencia siempre nos indica una resta de números enteros positivos.
  - Únicamente podemos restar una cantidad mayor con respecto a una menor.

Descripción

Más adelante se describirán con detalle los elementos, resultados y actividades correspondientes al objeto matemático fracción.

Tal vez el número entero negativo es el primer objeto que se enseña en educación básica que posee elementos abstractos. De hecho, actualmente se encuentran más aplicaciones de los números complejos a situaciones reales que de los números enteros negativos[7] . Penrose (2006) muestra que los enteros negativos pueden ser usados para representar las cargas eléctricas de ciertas partículas físicas y que prácticamente no se utilizan en otro fenómeno físico de importancia. Sin embargo, para los números complejos muestra en el trascurso del libro varios ejemplos.

5 Entiéndase por aquellos diagramas, tablas u esquemas que inventan los estudiantes para representar las soluciones, aunque las operaciones numéricas también son representaciones externas, se usará el término para referir sólo a las primeras que se mencionó.

6 Generalmente estos se originan por que se trabaja con los estudiantes únicamente problemas de proporcionalidad.

7 Por ejemplo, en Penrose (2006) se aportan argumentos que sustentan esta idea, mencionan fenómenos en los que físicamente se utilizan los números enteros y complejos.

Lo anterior pone en evidencia que la fenomenología del número negativo es muy restringida, por esta razón se inicia el trabajo con los estudiantes, con situaciones que usan el número relativo (Glaeser, 1992). Por ejemplo:

El GMT (Global Meridiane Time) es un sistema que permite establecer las diferencias horarias entre países en todo el planeta.

Los muchachos se enfrentan a situaciones sobre este fenómeno, en las que calculan e interpretan estados con cantidades negativas.

En cuanto a la potenciación, el trabajo se dirige principalmente al análisis variacional de situaciones que utilicen crecimientos exponenciales. Aquí principalmente interesa combatir el modelo tradicional en el que se aprende la potenciación como únicamente una "operación". También se proponen situaciones en las que el uso de los exponentes es conveniente ya que permite expresar y utilizar cantidades grandes y calcular entre ellas de forma "sencilla". Luego de estos análisis de situaciones, los estudiantes aprenden el manejo algorítmico de las propiedades de las potencias y resuelven ejercicios de cálculo.

Grado octavo

En este grado las actividades realizadas se encaminan principalmente al establecimiento de ciertas nociones geométricas y aleatorias de manera lúdica. En Gutiérrez (2010) se muestra en detalle las actividades realizadas en geometría de grado octavo, en resolución de problemas. En ese documento se presenta una estrategia que intenta cerrar la brecha entre las matemáticas disciplinares y las matemáticas escolares, al mostrar que sí es posible que los estudiantes aprendan geometrías no euclidianas en la educación básica, por medio de la resolución de problemas.

Objetivos Geometría

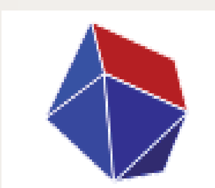
- Comprender las transformaciones de figuras en el plano, mediante la realización de teselados.
- Identificar el teorema de Euler para poliedros convexos.

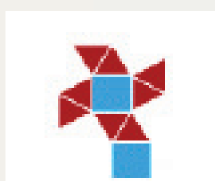
- Utilizar software dinámico para la identificación de propiedades en los poliedros.
- Conocer la posibilidad de construcción de teselados en geometrías no euclidianas.

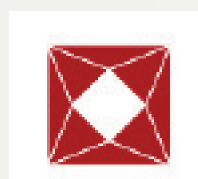
Los poliedros poseen una representación diferente a las usuales de un objeto en tres dimensiones. A esta representación se le llama grafo e informalmente es una proyección de las aristas y vértices del poliedro en el plano euclídeo, de tal manera que no se intercepten aristas. Debemos tener en cuenta que esta proyección es una deformación continua del poliedro, salvo en una cara, con lo que el grafo conserva algunas propiedades topológicas del poliedro, mas no necesariamente geométricas.

Las características que relacionan el poliedro con el grafo fueron estudiadas en este grado: la cantidad de polígonos conexos en el grafo es C-1, donde C representa la cantidad de caras del poliedro, la cantidad de segmentos que conforman el grafo coincide con la cantidad de aristas (A) del poliedro y, de la misma forma, la cantidad de vértices del grafo es igual a los vértices (V) del poliedro. Con esto, es posible verificar el teorema de Euler[8] de manera gráfica sobre el grafo.

Ejemplo: Antiprisma cuadrado.







Con los teselados, los estudiantes profundizan y amplían su compresión frente a las transformaciones rígidas en el plano euclídeo (rotaciones, translaciones y reflexiones). A la vez que elaboran un trabajo original y artístico, que en casi todos los casos es estéticamente bonito y agradable. (Para observar algunos de los trabajos de los estudiantes haga click aquí link 1).

8 El número de las caras de un poliedro sumado con los vértices menos las aristas es siempre igual a 2.

Note que las actividades pretenden desarrollar pensamiento espacial y geométrico, pero también nociones topológicas. Entonces, esta tarea es apenas una muestra de cómo es posible "renovar" las matemáticas escolares en cuanto a los conceptos a abordar, metodología y habilidades. Es decir, los conceptos tratados en los colegios deben corresponder con el desarrollo actual o cercano de las matemáticas, claro está que se deben realizar los análisis didácticos y pedagógicos antes de incluirlos en los currículos. Por ejemplo, la topología hoy en día es una rama de las matemáticas tan importante como el álgebra, el análisis o la geometría; posee varias aplicaciones en física y química (entre otras cosas), por lo que se convierte en prioridad su enseñanza.

Objetivos Estadística.

- A través de situaciones lúdicas establecer nociones sobre el azar y la probabilidad.
  - Aquí se presentan situaciones de juego en donde los estudiantes generan estrategias de ganancia alrededor de la probabilidad. Por ejemplo, en una cuadrícula de 10cm× 11cm centímetros reticulada en centímetros cuadrados, juegan dos jugadores, en la fila de la base llamada salida están los números del 2 al 12. Cada jugador sucesivamente lanza dos dados y colorea un centímetro cuadrado de los que se encuentra encima del número que obtuvo en los dados. Sin embargo, cada jugador escoge al principio los números con los que él quiere jugar. Luego, juegan y gana el primero que complete 10 apariciones en alguno de los números que escogió[9] . Note que el estudiante debe escoger adecuadamente los números para poder ganar; esta escogencia debe basarla en intuiciones de azar, que luego formalizará en el curso la probabilidad.

Meta										
					x					
					x					
			x		x					
			x	x	x					
			x	x	x	x				
			x	x	x	x				
	x		x	x	x	x		x		
	x	x	x	x	x	x	x	x		
x	x	x	x	x	x	x	x	x		
x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

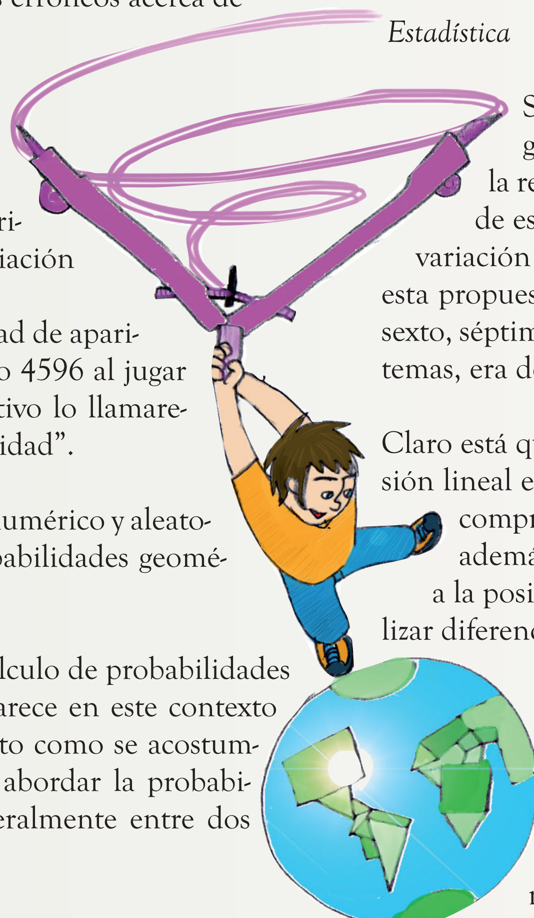
9 Variación de un juego publicado en (Batanero y otros, 1994)

- Mediante la solución de problemas y actividades lúdicas generar estrategias de conteos por parte de los estudiantes.
    - Se emplean situaciones, entre ellas, dominó combinatorio[10] , que consiste en determinar todas las posibles combinaciones de diseños que se pueden lograr al usar cuadrados divididos en cuatro partes coloreadas. Los "diseños" se construyen similarmente a un dominó y dos diseños son iguales sí y sólo sí, tienen la misma forma y las mismas secuencias de colores. (Ver ejemplos de diseños hechos por los estudiantes en el siguiente link2).
- Romper con algunos modelos primitivos erróneos acerca de la concepción de probabilidad.
    - Considerar que es lo mismo sacar 1 y 2 que 2 y 1 al lanzar dos dados, o al lanzar una moneda es igual cara-sello que sello-cara. Este tipo de modelo primitivo lo llamaremos de "no diferenciación de sucesos".
    - Considerar que hay menos probabilidad de aparición del número 1111 que del número 4596 al jugar la lotería. Este tipo de modelo primitivo lo llamaremos "rompimiento de la equiprobabilidad".
- Relacionar el pensamiento geométrico, numérico y aleatorio mediante el establecimiento de probabilidades geométricas (Grupo Imago, 2002).

El grupo Imago plantea las ventajas de usar el cálculo de probabilidades geométricas, al mostrar que la probabilidad aparece en este contexto sobre un espacio muestral continuo y no discreto como se acostumbra a trabajar con los estudiantes. Además de abordar la probabilidad como la razón entre dos áreas, más generalmente entre dos n-volúmenes.

Algunos logros

10 Basado en el Puzzle combinatorio publicado en (Suma, 2003)



Los estudiantes conocen una rama más de las matemáticas, la probabilidad; empiezan a asociar la palabra posibilidades con el valor de probabilidad. Además, reconocen que el azar también es cuantificable y que la ignorancia sobre él permite que personas mal intencionadas fácilmente lo usen para engañar a los incautos.

Esta experiencia se presentó a los profesores de la localidad Uribe Uribe y generó un gran interés sobre las situaciones y sobre la metodología de resolución de problemas (Gutiérrez, 2008).

Grado noveno.

Estadística

Se considera que se inició la actualización del plan de estudios de grado noveno al introducir algunos elementos relacionados con la regresión lineal, ya que el tratamiento usual que se hace de la clase de estadística incorpora el análisis de medidas de tendencia central y variación sobre datos agrupados. El grupo de estudiantes que participó en esta propuesta, ya había visto estos conceptos en sus clases de estadística de sexto, séptimo y octavo. De manera que, volver en grado noveno a tratar estos temas, era demasiado redundante e innecesario.

Claro está que esta no fue la única razón para introducir conceptos de regresión lineal en el trabajo de aula. Pues, no hay que olvidar que estos aportan compresión de aspectos variacionales, entre variables proporcionales, además que introduce una componente inferencial importante frente a la posible relación de dos conjuntos de datos. También, es posible analizar diferencias entre las medidas de variación entre dos conjuntos de datos.

Algunos logros

La mayoría de los estudiantes llegó a establecer mediante un diagrama de puntos si dos variables se correlacionan, además, hallaron e interpretaron el modelo lineal que se ajustaba de mejor manera a una posible predicción. Un logro a resaltar está relacionado con el cambio de concepción de los estudiantes frente a lo que es una encuesta, pues dejo de ser para los estudiantes un superfluo instrumento de indagación, para ser un sofisticado instrumento de recolección de información en el que cada pregunta tiene un sentido y está determinada de manera precisa mediante un objetivo de análisis de información.

Grado décimo. Matemáticas énfasis.

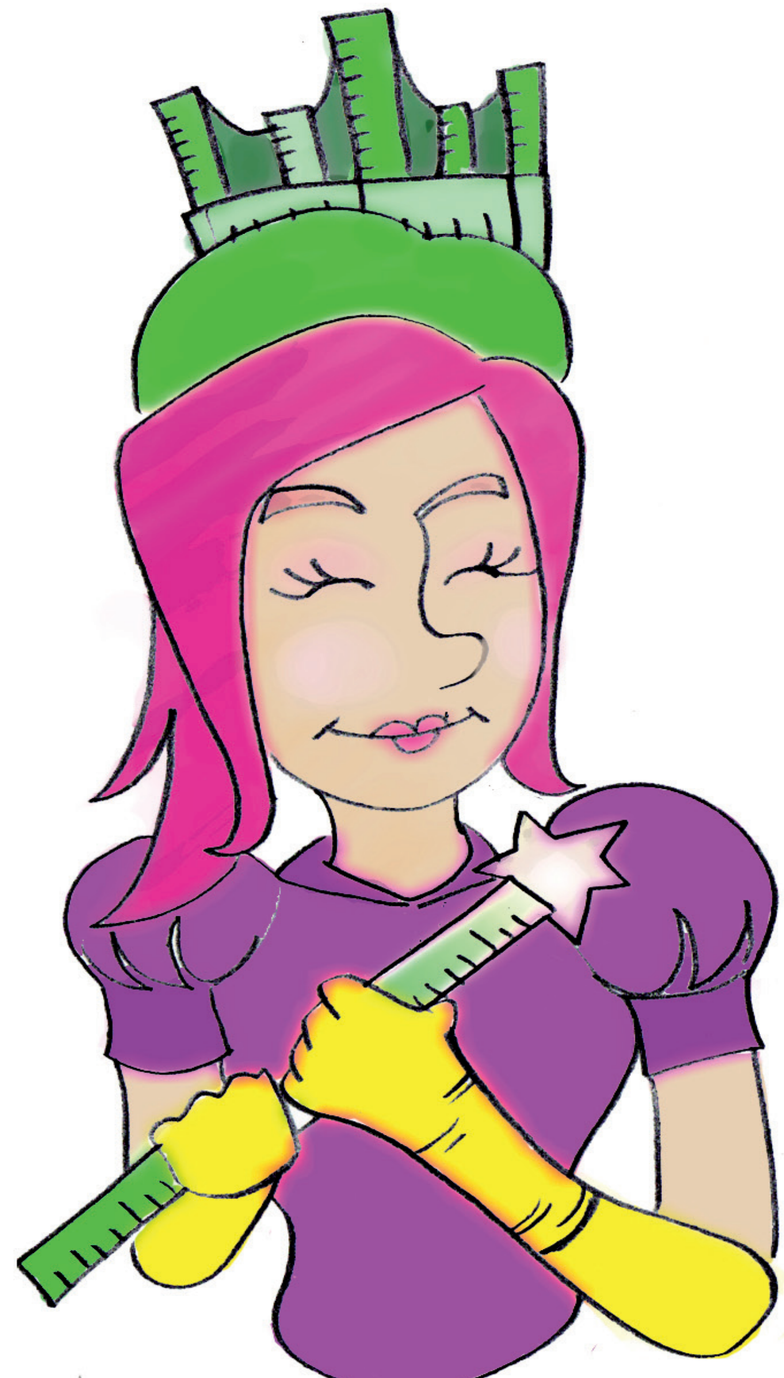
Objetivos.

- Hacer que los estudiantes usen la tecnología como herramienta de aprendizaje.
- Potenciar habilidades lectoras en textos electrónicos y espacios no usuales de lectura.
- Desarrollar habilidades en los estudiantes sobre procesos de pruebas, refutaciones, establecimiento de casos particulares, generalizaciones, analogías, argumentaciones y autonomía de trabajo.
- Solucionar situaciones problema en contextos puramente matemáticos.
- Mejorar la comprensión del concepto de número.
- Ampliar el plan de estudios mediante la elaboración del proyecto de grado. El cual les exige a los estudiantes consultar sobre temas que usualmente no son tratados en las clases.

El trabajo con los muchachos de décimo consistió en fundamentar y crear el énfasis en matemáticas en la institución. Desafortunadamente, esta propuesta no siguió adelante porque las directivas decidieron terminar con el proyecto, debido a discrepancias entre los docentes sobre la manera de entender y enseñar las matemáticas.

En cuanto a los logros de la propuesta, se destacan los siguientes:

1. Identificación del grupo con las matemáticas: los estudiantes ahora poseen una buena actitud hacia el aprendizaje de las matemáticas, la mayoría piensa que puede aprenderlas, con esfuerzo y dedicación. También las consideran importantes para un futuro desarrollo pro-



fesional; en general, no sienten la necesidad de buscar carreras profesionales alejadas de las matemáticas como suele suceder en un alto porcentaje de estudiantes de undécimo grado de otros colegios.

2. Los estudiantes aprendieron a concentrarse en la resolución de un sólo problema matemático por un tiempo mayor a 30 minutos, exploraban soluciones, contrastaban hipótesis y diseñaban estrategias. Se esperaba en grado once lograr habilidades de tipo meta-cognitivo en la solución de un problema, con el fin de resaltar habilidades de trabajo autónomo.

3. La realización de un trabajo de grado esperaba lograr que los estudiantes pudieran diseñar una investigación tipo consulta frente a un contenido especial no incluido en el plan de estudios. Así que los temas fueron escogidos teniendo en cuenta el nivel de los estudiantes, la tecnología y la relación con otras áreas.

   Al consultar el *siguiente link3*[11] , se puede observar una lista detallada de los temas para proyecto de grado de los estudiantes. Los temas incluían entre otros, fractales, teoría de juegos, filosofía y matemáticas, biología y matemáticas, software educativo, origami, análisis del concepto de infinito, entre otros. Cada uno fue escogido por un grupo de estudiantes luego de una exposición por parte del docente, en la que se les contaba a grosso modo la intención de cada uno de los temas. Al finalizar el año, los estudiantes tenían planteados los objetivos para la realización del proyecto de grado y construido un estado del arte que les permitiría consultar e investigar sobre la temática escogida. También frente a las exposiciones que cada uno de los grupos realizó se fundamentaron habilidades de comunicación, diseño de exposiciones y apropiación de un tema (para más detalles ver el siguiente video link 4).

   Por medio de la socialización de los temas, los estudiantes visualizaron la gran versatilidad de las matemáticas y su gran poder como ciencia deductiva. Por primera vez, los muchachos observaron las matemáticas aplicadas a un gran número de hechos y observaron cómo ellas son más que cálculos y algoritmos.

4. El establecimiento del aula virtual fue un logro considerable: los estudiantes crearon su correo electrónico, ingresaron al grupo y aprendieron la dinámica de la interacción virtual en un medio académico no social[12] . Realizaron tareas de tipo no tradicional, muchas de ellas pueden visualizarse en el link del grupo http://groups.google.com.co/group/matematicas-enfasis-rh?hl=es. Un ejemplo de una de ellas, es que en el aula virtual se colgaron links de videos acerca del teorema de Pitágoras en español, inglés y portugués. Los estudiantes debían verlos y escucharlos para luego realizar un escrito con las impresiones acerca de estos. La motivación fue total, los muchachos sintieron temor al saber que los videos eran en otros idiomas, pero luego de verlos perdieron el miedo al ver que podían entender lo que allí exponían, es decir, realizaron otro tipo de lectura, una no basada en el reconocimiento de símbolos sino en el reconocimiento de imágenes.

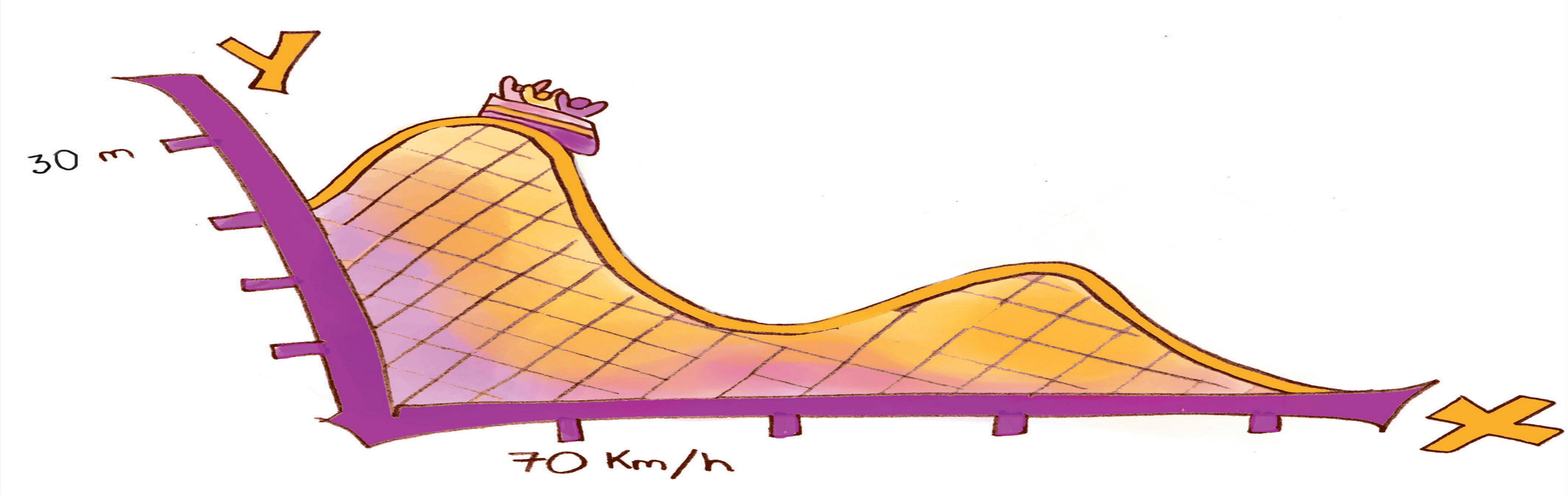
Para concluir, con lo realizado en el proyecto vale la pena reiterar que con las situaciones enunciadas anteriormente y la metodología de resolución de problemas se amplía la concepción que tienen los estudiantes a cerca de las matemáticas; perciben otras maneras de relacionarse entre ellos y con el conocimiento; y recuperan (si es que los han perdido) o refuerzan la seguridad y el entusiasmo por aprender, en este caso matemáticas.

El estudiante deja de ser un simple receptor de técnicas y definiciones, para pasar a ser una persona que discute alrededor de la comprensión de una situación determinada, que usa diferentes representaciones y estrategias cognitivas para entender o resolver la situación. En este sentido, Brousseau (1986) afirma que,

> "sólo se hacen matemáticas cuando nos ocupamos de problemas, pero se olvida a veces que resolver un problema no es más que una parte del trabajo; encontrar buenas preguntas es tan importante

11 http://matematicas-enfasis-rh.googlegroups.com/web/Proyectos%20de%20grado.pdf?gda=TlejIksAAABHJjlzKFaTdKKuEwHzU4p-rqlv8qHaW8T5Efwusd-3BOfeVeUDKK94-hOGxZg-B8lWmwwmmjY8lLEkm5GsdcWpfr5cM59V0mQAqL2ijM-uzPg&hl=es

12 Me refiero a un medio virtual diferente a MSN, Facebook o Twitter.



como encontrar soluciones. Una buena reproducción por el alumno de una actividad científica exigiría que intervenga, que formule, que pruebe, que construya modelos, lenguajes, conceptos, teorías, que los intercambie con otros, que reconozca los que están conformes con la cultura, que tome los que son útiles, etc".

Por otro lado, se evidenció en casi todas las propuestas para los grados anteriormente mencionados que la metodología de resolución de problemas conduce a dinamizar el currículo, en el sentido que elimina el carácter absoluto y acabado de las matemáticas.

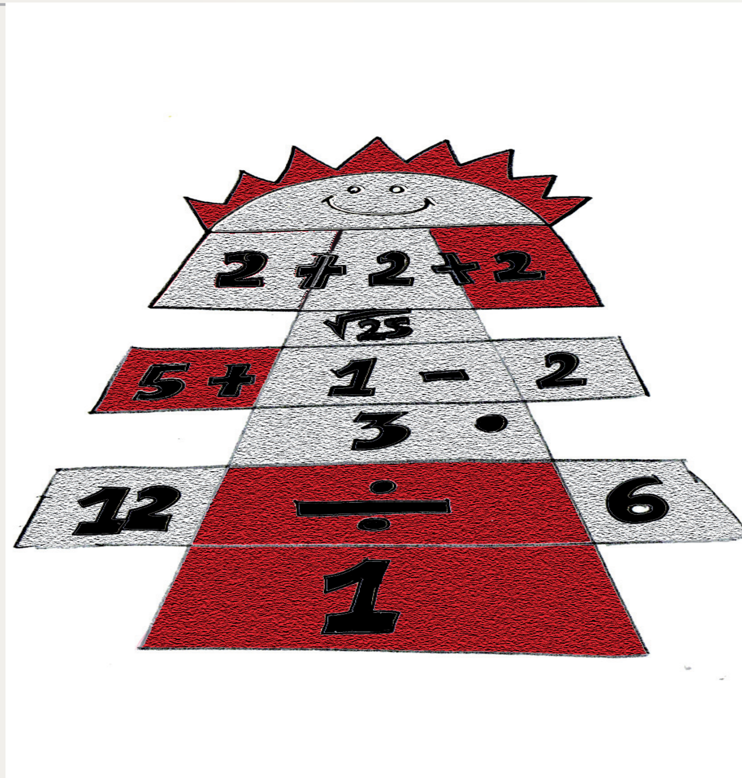
Es por ello, que a continuación se presentan los fundamentos que estructuran el proyecto desde la perspectiva filosófica, pragmática y teórica.

Fundamentos filosóficos, pragmáticos y teóricos.
La importancia de la filosofía de las matemáticas en una innovación.

Las matemáticas durante siglos han intervenido en la forma en que conocemos y manipulamos nuestro mundo. Ellas exaltan el entendimiento humano y adornan eso que llamamos inteligencia, a la vez que construyen herramientas de pensamiento que le han ayudado al ser humano a dominar aspectos de la naturaleza[13].

Debido a que lo seres humanos consideran a las matemáticas como una de las ciencias más importantes, también muchos de ellos durante años, han tratado de aclarar ¿qué son verdaderamente las matemáticas? Existen varias posiciones frente a este cuestionamiento; son conocidas clásicamente escuelas como la platónica, la logicista, la formalista, la constructivista y desde una perspectiva más reciente encontramos posiciones socioculturales (De Lorenzo, 2000). La filosofía de las matemáticas intenta responder preguntas relacionadas con la naturaleza de los objetos matemáticos y las matemáticas, así como las relacionadas con la verdad en matemáticas.

13 No se pretende tomar posiciones morales.



Encontramos actualmente dos formas diferentes de hacer filosofía de las matemáticas, por un lado, la forma analítica y por otro la manera sintética (Zalamea, 2009). La intención del presente escrito no es profundizar en estas ideas, solamente introducir generalidades en esta dirección, las suficientes para justificar el título del presente capítulo.

Por un lado, encontramos la manera analítica de hacer filosofía y, por otro, la manera sintética; básicamente en la analítica consideramos aspectos como lo particular, lo discreto o lo específico, entre otros. En cambio, en la visión sintética se consideran en contraposición lo general, lo continuo y lo mixto. Es indiscutible que la manera como un profesor considere las matemáticas, determina la postura en que trasmite sus ideas frente a ésta a sus estudiantes. Si por un lado las consideramos como un conocimiento acabado cuyos últimos descubrimientos fueron aquellos relacionados con el cálculo diferencial e integral, el profesor propondrá el aprendizaje de unas matemáticas agotadas y envejecidas, mostrará conocimientos estáticos y no posibilitará unas clases dinámicas en cuanto a la construcción de los conocimientos. Si en cambio, el docente conoce algunos desarrollos contemporáneos de las matemáticas, intentará que sus estudiantes conozcan unas matemáticas renovadas y dinámicas, con lo cual estará presto a promover actividades que muestren unas matemáticas vivas e inagotables.

En Zalamea, (2009) se plantean argumentos de peso para sustentar la idea de que existen varios documentos de filosofía de las matemáticas que no realizan análisis sobre los desarrollos matemáticos de la época en que fueron publicados. Se afirma que, en muchos casos, estos análisis están restringidos al análisis matemático o a la geometría, pero no en áreas más actuales como la topología algebraica o geometría diferencial. Es importante analizar si la educación matemática ha sufrido del mismo mal que la filosofía de las matemáticas.

Considero que desafortunadamente la didáctica de las matemáticas (por lo menos en Colombia) sufre de este mismo mal, ya que las investigaciones –y los currículos– están dirigidas/os a enseñar matemáticas poco actuales. Aunque se han realizado varios cambios frente a las intenciones metodológicas, no se evidencia una renovación en la misma proporción hacia los objetos de enseñanza (Gutiérrez, 2006). Esto envejece y trunca cualquier innovación o evolución pedagógica, imposibilitando un desarrollo y un mejoramiento de la calidad educativa en el ámbito de la educación matemática en Colombia.

Descripción de la problemática ¿Por qué innovar?

El autor se ha desempeñado en varios sectores educativos importantes, en funciones tales como profesor de educación básica en el sector privado y público, profesor de estudiantes de licenciatura en matemáticas, tallerista y panelista frente a profesores en ejercicio de educación básica y profesor universitario de estudiantes de carreras de matemáticas puras. También ha participado en el ámbito educativo como estudiante de licenciatura en matemáticas, maestría en matemáticas y conferencias en eventos.

Durante este tiempo ha reconocido la falta de conexión y cohesión entre los saberes que interfieren en la educación matemática. Por ejemplo, es evidente que en documentos tales como los lineamientos curriculares y los estándares se plantea la importancia de transformar la enseñanza de las matemáticas Sin embargo, luego de más de una década de estas publicaciones, aun no se perciben cambios sustanciales en las aulas. De hecho, ni siquiera se perciben sustancialmente cambios en comparación a publicaciones anteriores tales como los marcos curriculares. Tampoco los nuevos programas de licenciatura en matemáticas han posibilitado un verdadero cambio alrededor de la educación matemática.

Es claro que las clases de matemáticas son tradicionales por múltiples razones, sin embargo es importante destacar las siguientes, debido a que ellas motivaron la creación del proyecto: 1. Se cree en general que el matemático y el educador matemático no deben trabajar juntos. 2. El hito de un buen matemático o profesor de matemáticas es un contador u ingeniero. 3. Los contenidos siguen siendo la prioridad de los currículos. 4. La proporción de matemáticos frente a la población nacional es mínima. 5. Los resultados internacionales y nacionales frente al conocimiento matemático colombiano son paupérrimos (Banco mundial, 2010).

Frente a estas dificultades, nace el proyecto en aras de investigar sobre los elementos que dificultan el cambio de paradigma educativo alrededor de la educación matemática. El proyecto mediante situaciones innovadoras enmarcadas en la metodología de resolución de problemas encontró respuestas frente a las ventajas de enseñar matemáticas de una manera no tradicional, también encontró respuestas y preguntas frente al conocimiento profesional del profesor de matemáticas.

Descripción de la Metodología ¿Qué se entiende por aprender matemáticas a partir de la resolución de problemas?

Existen varias interpretaciones de lo que significa hacer una clase de matemáticas con el enfoque de "resolución de problemas". Se describirán a continuación los aspectos más relevantes que delimitan y definen dicha metodología. Se entenderá por situación problema una actividad que el estudiante o un grupo de ellos resuelve por motivación y por adaptación[14] de manera autónoma (sin ayuda del docente[15]). Es importante que esta situación problema posea un nivel de dificultad adecuado a los estudiantes, es decir, no puede ser una tarea muy sencilla ni muy compleja; además, debido a que una situación problema puede ser sencilla para un estudiante y para otro no, debe ser lo más universal posible.

La definición de situación problema no define por sí misma la metodología, depende de cómo se lleve a cabo en el aula. Particularmente, las situaciones problema deben estar al inicio de la clase y su formulación debe ser lo más clara posible, ya que el maestro evita que los estudiantes, al enfrentarse a la situación, recurran a él de inmediato. No es conveniente plantear los enunciados con redacción deficiente o ambigua; de acuerdo con la edad, tampoco se recomienda introducir situaciones que manejen mucha información. Si se va a usar material didáctico, éste debe ser un posibilitador de situaciones problema o modelaciones, jamás un instrumento superfluo en la actividad matemática.

Los siguientes aspectos son los que se han tenido en cuenta para realizar las clases:

- Al inicio de la clase se propone una situación problema que resuelven los estudiantes (autónomamente[16]) por lo menos en 15 minutos, si el enunciado de la situación problema ocasiona demasiadas dudas, debe ser replanteada la redacción del enunciado.

- Luego, el profesor realiza preguntas a los estudiantes (es de anotar que el profesor es el que pregunta sobre lo que está pasando y no es el estudiante quien se dirige al profesor, como usualmente pasa) con la intención de conocer su solución e iniciar un diálogo respecto al trabajo realizado por los estudiantes (es de resaltar que esto difiere del hecho de que el profe-

14 La palabra adaptación es una analogía extraída desde la biología, una especie sometida a variaciones de su ecosistema natural puede sobrevivir por adaptación a ese medio al cambiar algunas de sus características.
15 Esta definición es una variación de las situaciones a-didácticas introducidas por (Brousseau, 2000).
16 Debemos diferenciar este término de individualmente, se adoptara para tareas que se resuelven sin ayuda del maestro

sor realice al estudiante preguntas en aras de ayudarle a encontrar una solución). Si el profesor realiza preguntas, estás deben estar principalmente enfocadas a comprender la solución del problema que ha presentado un estudiante. Sin embargo, es posible preguntar con la intención de que el estudiante reconozca alguna información que ha olvidado utilizar, algún equivoco en la interpretación de un modelo o uso inadecuado de alguna representación, pero hay que procurar que estas indagaciones no sean evidentes para el estudiante, él debe tener la sensación de que simplemente comunicó uno de los aspectos de su solución (esto debe ser un hecho casual, que debe evitarse en la mayoría de los casos).

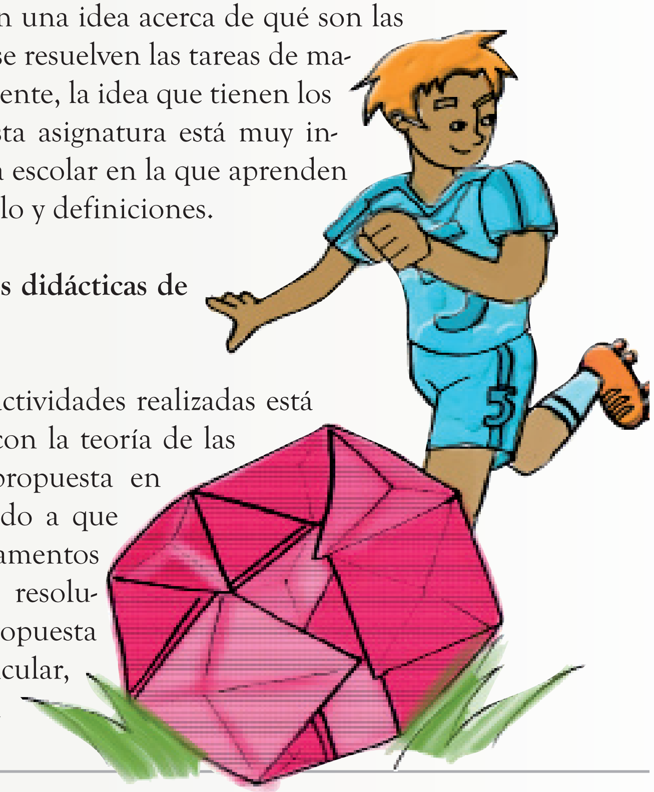
- Siempre es importante que los estudiantes expongan frente al grupo los procedimientos que los condujeron a la solución, esto posibilita el desarrollo de competencias argumentativas y las habilidades comunicativas. En este momento es importante mantener las mismas reglas de las preguntas anteriores. Sin embargo, los estudiantes pueden preguntar abiertamente sobre la solución del problema, también se puede establecer un tiempo en el que los estudiantes expresen sus ideas (acuerdos y desacuerdos) sobre el procedimiento y la solución de un compañero. Lo prioritario es crear y mantener un ambiente de participación sana y libre de burlas. Es labor del profesor aprovechar el conocimiento que se puede extraer a partir de los errores de los estudiantes, así se genera un entorno basado en la confianza y la libertad de expresión.

- La institucionalización posibilita la validación del conocimiento, entonces en este momento se presentan en el tablero las diversas formas de solucionar el problema, se enfatiza en sus diferencias y en lo que cada una de ellas potencia; también se muestra las equivocaciones de la mayoría de los estudiantes y las razones por las cuales tuvieron estos errores. Esta etapa no es exclusiva del docente, él puede incentivar por medio de preguntas a los estudiantes para que realicen toda la dinámica anteriormente dicha. Está en manos del docente establecer un ambiente basado en la escucha y el aprendizaje mediante el análisis de las soluciones de los estudiantes, el aula no puede basarse en el análisis de las soluciones que proporciona el maestro.

- La interacción en orden en la clase es fundamental. Se evita que los estudiantes emitan burlas a los demás, hablen fuera de los tiempos establecidos; además cuando trabajan en grupo no pueden ponerse de pie, hablar con otros grupos. Este ambiente mejora la concentración del grupo y genera que los estudiantes comprendan que solucionar el problema es prioritario.

Estas son sólo unas recomendaciones que no pretenden de ninguna manera hacer clases rígidas, sino todo lo contrario, ambientes de clase ricos en discusiones alrededor de problemáticas significativas o de la solución de ellas. Debe reinar la tolerancia y el respeto por el otro para que los estudiantes expresen con facilidad sus dudas y sugerencias, en un ambiente en el que se sientan respetados, valorados y que contribuyan a un trabajo colectivo.

Por último, no hay que olvidar que toda situación propuesta apunta a lograr aprendizajes de uno o varios contenidos matemáticos y a la vez hace que los estudiantes se formen una idea acerca de qué son las matemáticas y de cómo se resuelven las tareas de matemáticas. Lamentablemente, la idea que tienen los estudiantes acerca de esta asignatura está muy influenciada por la cultura escolar en la que aprenden procedimientos de cálculo y definiciones.



Teoría de las situaciones didácticas de Brousseau

La presentación de las actividades realizadas está organizada de acuerdo con la teoría de las situaciones didácticas propuesta en (Brousseau, 2000), debido a que se ajusta en sus fundamentos con la metodología de resolución de problemas propuesta en el proyecto. En particular, la teoría propone en la solución de situaciones, una etapa de trabajo autónomo del estudiante. Esto posibilita que los estudiantes se enfrenten a situaciones sin que necesariamente el profesor realice el rol de exponer o mostrar procedimientos de resolución de problemas, hay espacio para el descubrimiento por parte del estudiante.

Brousseau plantea tres tipos de situaciones: fundamentales, didácticas y a-didácticas (acción, formulación y validación). También delimita el rol de profesor y el estudiante, y el concepto de enseñanza y aprendizaje, así como el concepto de contrato didáctico[17].

La situación fundamental es aquella necesidad de aprendizaje de algún objeto matemático, en este trabajo se intenta capturarla delimitando la importancia del objeto matemático desde la disciplina pura y aplicada. En lo aplicado también aparece la cotidianidad de los estudiantes. Estos dos tipos de saberes sustentan la importancia de aprender el objeto matemático y las teorías en didáctica de las matemáticas aportan soluciones de cómo enseñar el objeto. Debido a su complejidad no es posible describir en su totalidad una situación fundamental, pero es ella el norte de toda la actividad en el aula y en la planeación curricular. Los estudiantes no conocen la situación fundamental, su planteamiento y delimitación está a cargo exclusivamente del docente.

Las situaciones didácticas son diseñadas por el profesor, ellas esperan proveer a los estudiantes de aprendizajes relacionados con una situación fundamental. Deben ser entendidas como un conjunto de estrategias organizadas que utilizan resultados de investigación en didáctica de las matemáticas y saberes matemáticos.

17 Como el conjunto de normas que se establecen en el aula fruto de la interacción entre el docente y los alumnos.

Las situaciones a-didácticas son diseñadas por el docente y presentadas a los estudiantes. Este tipo de situación es resuelta por el estudiante sin ninguna ayuda del maestro, por esto, es importante que sea una situación clara para el estudiante y con una complejidad que esté de acuerdo con los saberes previos de ellos.

El diseño de las situaciones que se enmarcan dentro del proyecto tienen como base los anteriores presupuestos, procurando ser lo más fieles posibles. Sin embargo, en algunos momentos, son propuestas actividades fuera de este marco como juegos o mecanizaciones, también en ellas se aprende; lo importante realmente es que no se prioricen estas en el aprendizaje de las matemáticas.

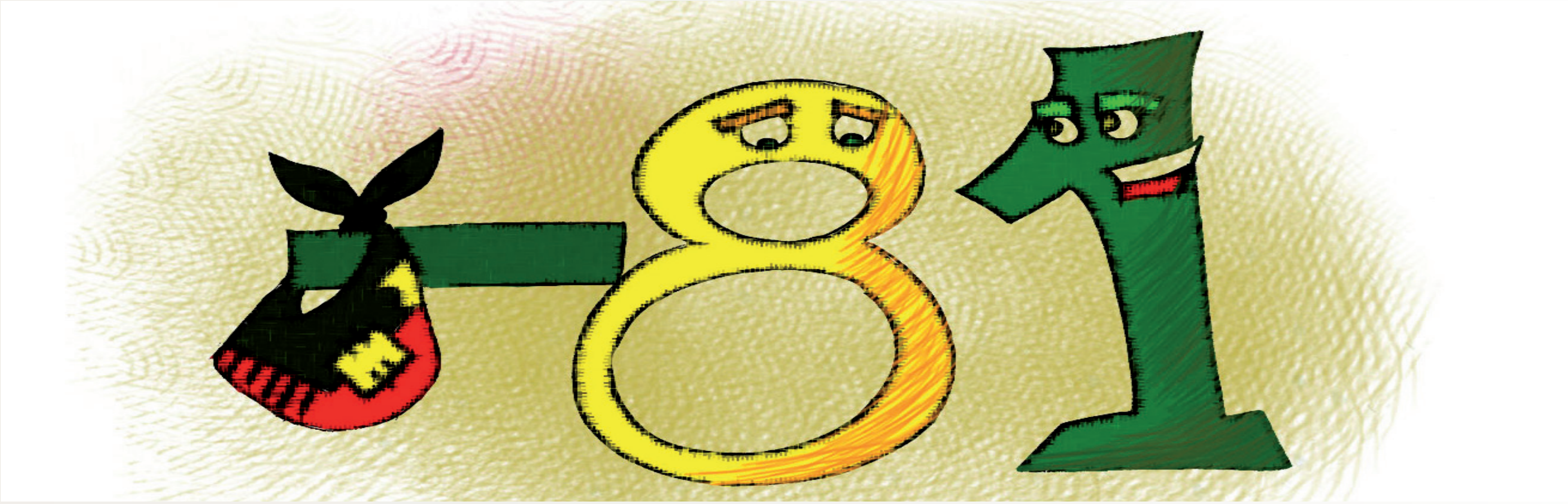
Finalmente, las situaciones a-didácticas se dividen en tres clases, acción, formulación y validación. Las cuales organizan el espacio didáctico sin jerarquizarlo, no hay restricciones frente a la presentación de estas actividades a los estudiantes. Existe otro tipo de actividad , la de institucionalización, en ella [18]los estudiantes junto con el profesor formalizan los conocimientos adquiridos. En ésta se construye en comunidad, ella no es exclusiva del docente, no se reduce a la explicación de un contenido o conclusiones del docente. Claro está que para algunos docentes es la más importante, porque es el momento en que el docente puede hacer que el grupo acepte y tome conciencia del conocimiento matemático que se quería enseñar.

Significado personal e institucional de los objetos fracciones

En realidad no es posible capturar de manera concreta el significado de algún objeto matemático. Sin embargo, podemos delimitar algunas de sus características. En este sentido, se intentará mostrar algo del significado de la fracción desde las instituciones matemáticas escolares y disciplinares.

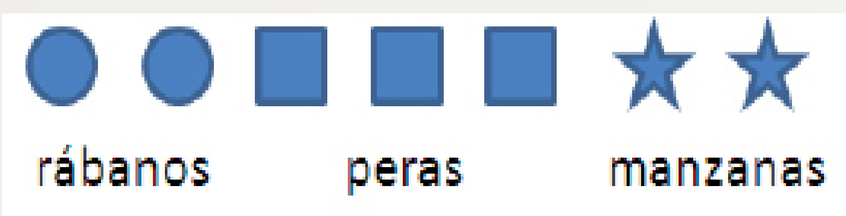
Matemáticas escolares: Son conocidas en la literatura especializada, las interpretaciones de la fracción. Entre ellas encontramos algunas como la relación parte-todo, la razón, operador y división indicada (Linares y otros, 1995). El

18 Algunos autores la incluyen junto a las otras tres, sin embargo difiero de esta posición debido a que en ella los estudiantes no están trabajando individualmente si no en comunidad.



presente trabajo utiliza la enseñanza de la fracción como parte-todo y como la razón que hay entre las partes y el todo.

La fracción está asociada a una unidad o todo, ella determina el sentido y su utilidad. Es importante reconocer en la fracción dos características: aquella que hace las partes iguales y otra que las hace distintas. Por ejemplo, si se compran dos rábanos, tres peras y dos manzanas, se puede establecer la siguiente relación parte-todo al considerar como el todo[19] la reunión de los artículos que se compraron. Esta es la primera característica, pues se ven como iguales por el hecho de pertenecer al todo y la otra característica es si tomo sólo las que son frutas (4), razón que ya hace una distinción entre ellos. Así que la razón entre las cinco frutas y los 7 comestibles comprados es 4/7 se lee, cuatrode siete.



19 Note que podía ser en otro caso, el hecho de ser la misma clase de planta.

Es común usar modelos continuos asociados a este tipo de representación, tales como las figuras geométricas, sin embargo, parte del interés de la propuesta es explorar con los estudiantes contextos diferentes a la geometría, tales como contextos discretos y cotidianos, de manera que los estudiantes amplíen el espectro de fenómenos asociados con la fracción. Para esto debe tenerse en cuenta el aprendizaje de leyes que me permitan transitar por diferentes tipos de representaciones tales como los gráficos continuos, los gráficos discretos, el número y la recta numérica.

La fracción también aparece reiteradamente asociada en nuestra cotidianidad a los porcentajes, al número decimal y a la probabilidad. Uno de los logros del proyecto es aportar conocimientos previos para un futuro desarrollo de la fracción en estos contextos.

En cuanto al significado de la fracción desde un punto de vista disciplinar, ésta puede considerarse de varias maneras, se comentarán únicamente dos de ellas:

1. *Conjuntista.* Las fracciones son definidas a partir de una partición del producto cartesiano de los enteros con los enteros obtenida por una relación

de equivalencia. Desde esta perspectiva, la fracción se descontextualiza de su significado concreto, según Brousseau es labor del docente recontextualizar este saber en el aula para poder enseñarlo[20].

2. *Forma a/b*. La fracción es definida como un signo a/b donde a y b son enteros positivos y b≠0. Es posible asignar a cada una de estas representaciones una expresión decimal, que se obtiene mediante la división a÷b.
Las dos interpretaciones son equivalentes. Nótese que, sin embargo, son semánticamente distintas y que los estudiantes perciben y aprenden estas diferencias de manera separada. No es natural que los estudiantes identifiquen conexiones entre varias definiciones e interpretaciones de un objeto matemático.

Finalmente, se describen los atributos de la fracción que se usan para la propuesta, ya que estos permiten reconocer parámetros a tener en cuenta en el diseño de las situaciones. De la misma manera ayudan a identificar los obstáculos que los estudiantes encuentran frente a la comprensión de las fracciones, a generar desequilibrios cognitivos que provoquen aprendizaje y a plantear criterios de evaluación para rastrear sus avances. Los atributos son:

1. Las partes que dividen el todo son iguales –esta noción de igualdad es diversa, puede ser por forma, área, color, tamaño y en general cualquier cualidad que me permita clasificar los elementos de un conjunto–.

2. Las partes unidas completan (o cubren) el todo.

3. El todo es invariable (conservación del todo).

Propuesta Didáctica (Fracciones-Séptimo)

SITUACIÓN FUNDAMENTAL

Las fracciones se construyen a partir de clases de equivalencias de números enteros positivos (Supes, 1977), se establece un conjunto en el que definimos una operación suma y producto, ambas asociativas y conmutativas. Las fracciones son el ejemplo natural de un conjunto denso –dadas dos fracciones, siempre podemos encontrar una entre las dos–-.

Las fracciones son el primer paso que se da para llegar al número racional. Estos dos juntos, fracciones y número racional , capturan un campo de fenómenos alrededor de diferentes contextos de aplicación desde las matemáticas, que exhiben un conjunto denso numerable. Pasan por las ciencias puras en las quelas fracciones nos permiten acercarnos tanto como queramos, según nuestros instrumentos, a una determinada medida, hasta llegar a la cotidianidad en la que nos enseñan a analizar las particiones de las unidades de medida en contextos menos formales como las compras.

Para aprender sobre las fracciones es importante reconocer sus atributos, contextos de aplicación, sus distintas interpretaciones y sus términos y formas de representación. De esta manera, nos acercamos a su concepto de manera enriquecedora.

SITUACIONES DIDÁCTICAS.

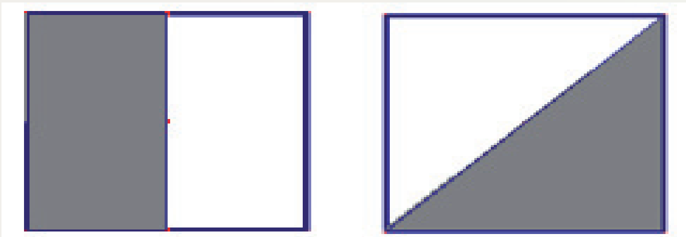
Situación didáctica uno.

Objetivo. Permitir que los estudiantes exploren la fracción desde la interpretación de relación parte-todo en contextos continuos.
Situaciones a-didácticas

1 Objetivo. Construir partes iguales mediante diferentes estrategias –-conservación de área o forma–-.

20 Transposición didáctica.

El profesor presenta las siguientes dos mitades sobre un rectángulo de 10 cm x 10 cm.

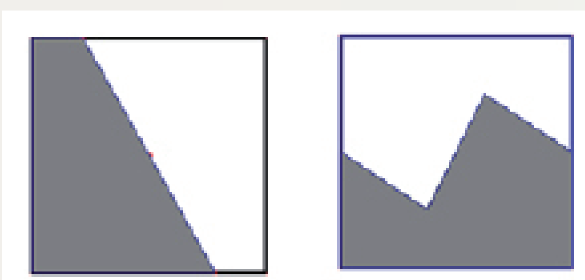


Luego, les solicita a los estudiantes crear una mitad original sobre un cuadrado de 10 cm x 10 cm diferente a las dos mitades anteriores y a la de cualquier otro compañero.

Principales estrategias usadas por los estudiantes:

Basadas en la forma: El estudiante genera dos regiones de igual forma y tamaño, tal que al unirse por realización de rotaciones sin superponerse forman el cuadrado.

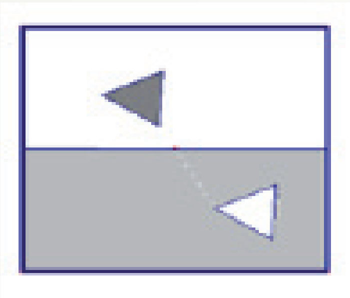
Algunos ejemplos:,



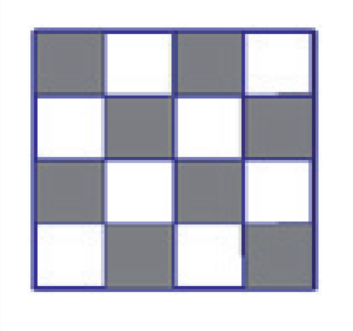
Nótese la relevancia del centro de masa del cuadrado, sobre él pueden generarse infinitas soluciones. Si este tipo de observaciones no son evidenciadas por ningún estudiante, es importante que el docente las haga notar, así se amplía el conocimiento que tienen de la situación y los estudiantes aprenden el proceder del matemático cuando se enfrenta a diversas soluciones.

Basadas en el área: El estudiante a partir de la conservación del área establece partes iguales.

Ejemplo 1. Traslada una o varias sub-partes del área sombreada al sector no sombreado.



Ejemplo 2. Utiliza una figura que tesela el cuadrado como unidad de medida y sombrea la mitad de ellas.



Análisis

En general las estrategias tipo forma son más utilizadas que las de tipo área, de hecho la menos utilizada es la descrita en el ejemplo 2 (aproximadamente, dos estudiantes por cada 40 de ellos la utiliza). Esto muestra dificultades para asociar al concepto de fracción al concepto de área, tal vez esto se deba a la introducción que se hace de la fracción reducida a la representación de las partes y un todo únicamente en regiones (todos) rectangulares.

2 Objetivo. Ampliar la actividad al reconocimiento de fracciones equivalentes.

Usando las distintas mitades originales de los estudiantes el profesor generará una mitad original en un cuadrado de 20 cm x 20 cm. Luego, los estudiantes usan las mitades de cuatro de sus compañeros, elaboraran una nueva mitad original en un cuadrado de 20 cm x 20 cm

Principales estrategias y dificultades de los estudiantes.

Los estudiantes muestran dificultad para guardar las proporciones en la realización de los diseños, muchos se ven obligados a usar la regla para superar esta dificultad.

En algunos casos se evidencian errores geométricos en la construcción de paralelas o perpendiculares.

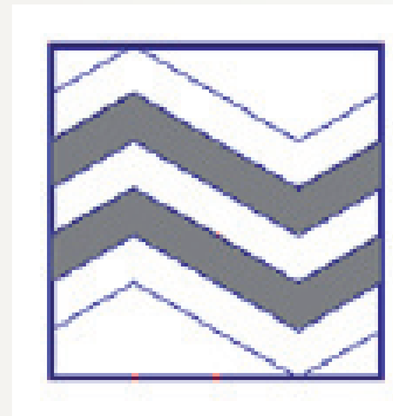
Análisis.

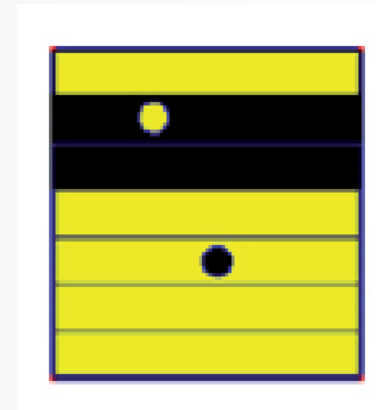
La actividad es productiva en tanto los estudiantes descubran en diversos diseños las razones por las cuales se ha sombreado un medio del cuadrado. Además, son capaces de elaborar estrategias que les permite trasladar figuras, partirlas y reacomodarlas, para obtener argumentos que justifique que tiene un medio del cuadrado coloreado.

3 Objetivos. Usar los conocimientos adquiridos en las anteriores actividades para explorar divisiones diferentes a dos partes iguales de un todo.

Elabore un tercio original, un cuarto, tres quintos y dos séptimos.
Principales estrategias usadas por los estudiantes.

Debido a la dificultad que existe para dividir un cuadrado en tres, cinco o siete partes iguales en forma, los estudiantes recurren principalmente a estrategias de división basadas en el área,–ver ilustración cinco y seis–-. Las estrategias, como la documentada en el ejemplo 2, son las más utilizadas.





Análisis

Se considera que la introducción de estrategias de partición basadas en una unidad de medida, posibilitan el enriquecimiento de habilidades de construcción de fracciones. Además, los estudiantes observan situaciones en donde tenemos partes iguales sin necesidad de tener formas iguales. Aquí el aprender sobre fracciones ayuda en el aprendizaje del concepto de área –específicamente en los atributos de conservación y medida-–..

También debe destacarse que aumenta la habilidad de partir un segmento o un cuadrado en partes no enteras, los estudiantes generan autónomamente estrategias de aproximación basadas en el ensayo y error o división con algoritmo. A la vez adquieren comprensión sobre las décimas en las representaciones decimales.

Situación didáctica dos.

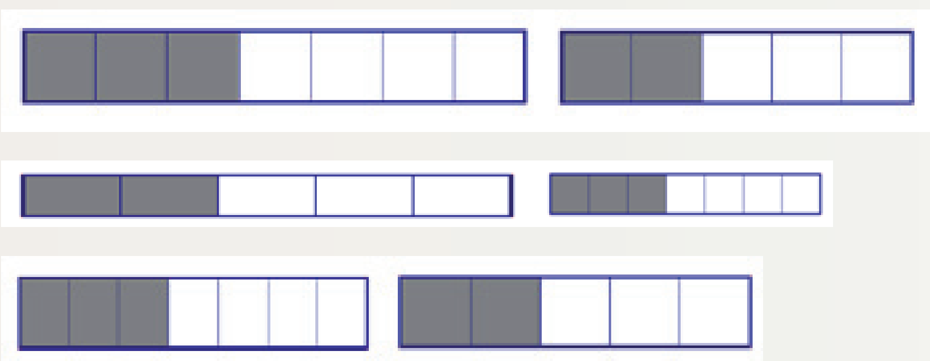
Objetivo. Generar estrategias de ordenación de fracciones, -–paralelamente identificar la importancia de conservar todos iguales-–.
Situaciones a-didácticas

1 Objetivo.

Con esta actividad se espera que los estudiantes reconozcan la importancia de usar un mismo todo en la ordenación de fracciones.
Responda el siguiente cuestionamiento. ¿Quién tiene más pollo, Juan que tiene 3/7 de libra de pollo o María con 2/5 de libra de pollo?
Principales estrategias usadas por los estudiantes.

La mayoría de los estudiantes usan gráficos basados en rectángulos, en muy pocos casos usan estrategias diferentes. Como por ejemplo, ordenar pasando a las fracciones decimales.

Los gráficos que los estudiantes muestran como primera solución a la situación son los siguientes. De los cuales uno solo podemos considerar correcto.



Análisis.

La mayoría de estudiantes se inclina a resolver la situación mostrando el gráfico del ítem 1, aparecen en menos cantidad –muy pocos casos-– los literales 1 y 2. Es evidente que los muchachos olvidan la palabra libra del enunciado y muestran dos libras diferentes –una más grande que la otra-–. La razón principal frente a esta dificultad es que los estudiantes procuran realizar gráficos en los que se use la cuadricula del cuaderno[21]. Evitan tener que usar medidas no enteras en sus soluciones.

Frente a esta situación el docente debe proponer una situación problema que obligue a mantener el mismo todo –sin hacerlo totalmente evidente-– posibilitando que los estudiantes generen estrategias frente a la partición de un mismo todo en diferentes cantidades de partes. Esa actividad es presentada a continuación.

3 Objetivo.

Organizar una variable didáctica[22] frente a la anterior situación, en la que los estudiantes “no puedan cambiar el todo” y dirijan su atención a la partición del todo en diferentes cantidades de partes.

Los estudiantes recibirán una ficha bibliográfica de cartulina, la cual representa la libra de pollo.

Usando la ficha bibliográfica compruebe su respuesta al anterior cuestionamiento.

Principales estrategias usadas por los estudiantes.

Podemos distinguir dos tipos de estrategias principales que solucionan la situación y dos equívocos que documentaremos debido a la información que posibilitan frente al análisis en el aprendizaje del concepto de fracción.
Aciertos:

1. División de los séptimos de manera horizontal y los quintos de manera horizontal.

21 Si usaran una hoja en blanco, procurarían usar los centímetros y tendrían el mismo error.
22 La entendemos como aquellas decisiones o variaciones no planeadas con anticipación por el profesor, pero que debe generar en el transcurso de una clase con el fin de lograr un objetivo pedagógico.

2. División de séptimo y quintos de manera vertical, sin solapamientos entre la porción de Juan y la de María.

Equívocos:

1. El estudiante usa la misma región para la porción de Juan y María, olvida las reglas que se imponen desde el contexto de la situación.

2. El estudiante no conserva el todo utilizando una ficha más pequeña, o bien sea recortándola o realizando un dibujo más pequeño que la ficha.

Análisis.

La mayoría pudo conservar la unidad libra de pollo del problema., En la institucionalización de la actividad los estudiantes reconocieron la importancia de tener en cuenta un mismo todo, algunos adicionalmente reconocieron como error el no considerar el mismo todo en el problema.

Otra de las ventajas se refiere a la invención por parte de los estudiantes del acierto tipo 1, este tipo de solución permite dividir un todo en dos cantidades diferentes de partes, horizontalmente y verticalmente. Esto posibilita un conocimiento previo frente a una representación gráfica de lo que significa hallar una medida común entre dos fracciones. Gracias a estos conocimientos más adelante se comprenderá mejor la suma y algunos métodos numéricos para ordenar fracciones.

4 Institucionalización.

Se mostrará a continuación un ejemplo de esta etapa, en la cual se socializan los conocimientos adquiridos o se realizan preguntas que formalizan el conocimiento luego de realizar una actividad. Frente a esta actividad, el docente planteó la siguiente pregunta. ¿Cómo podríamos saber quién tiene más pollo sin necesidad de hacer un gráfico? La cual suscitó un resultado muy interesante.,

En los tres cursos de séptimo, de manera independiente, diseñaron un procedimiento de ordenación de fracciones justificado desde la representación gráfica. Básicamente este procedimiento es equivalente al usado para definir una relación de orden sobre el conjunto de números racionales de manera formal, es decir a/b≤c/d siysólosiad≤bc.,b≠0 y d≠0.

Obviamente, los muchachos también tuvieron algunas dificultades, en ocasiones inventaban procedimientos con operaciones sin justificación o procedimientos que funcionaban sólo en algunos casos particulares. Esto fue un logro sorprendente, porque ellos exploraron maneras de generar procedimientos, pudieron evaluar la potencia del procedimiento y su pertinencia. Lo cual es magnífico.

Situación didáctica tres

- Explorar la ordenación de fracciones en contextos discretos.
- Permitir la creación y familiarización de un procedimiento de ordenación de fracciones.

Situaciones a-didácticas

1 Cada estudiante tiene 100 fichas de 1 cm. x 1 cm. Mediante el uso de este material, averigüe qué fracción es mayor ¿1/3 ó 8/25?

Análisis.

La principal dificultad de los estudiantes al resolver esta situación fue hallar un grupo en que se pudiera partir en 3 y 25 partes iguales al mismo tiempo. Es decir, no hallaron fácilmente un múltiplo común a tres y a veinticinco . Sin embargo, luego de 40 minutos la gran mayoría lo logró.

Otro aspecto que hay que resaltar es que los estudiantes intentaron cambiar el 25 por el 24, afirmaban que con ese número tendrían la solución inmediata del problema, pero entre ellos dedujeron que esto era cambiar el enunciado del problema. Finalmente, hay que anotar que hubo varias posibilidades de grupos de fichas que resolvían la situación, pero una sola respuesta; esto potenció la comprensión de los estudiantes sobre amplificación y simplificación.

2 Mediante el uso de este material, averigüe qué fracción es mayor ¿33/100 ó 1/3?

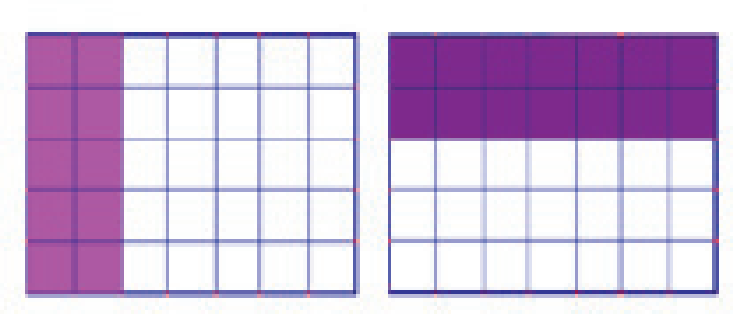
Análisis.

Luego del anterior contexto, la mayoría empezó a resolver la situación con un mismo objetivo, encontrar un número que se pudiera partir en 100 y en tres al mismo tiempo. No todos visualizaron el 300 de inmediato. A diferencia del la anterior contexto, en éste ,todos los estudiantes usaron el 300 para resolver la situación.

3 ¿Cómo podría ordenar estas fracciones sin usar el material?

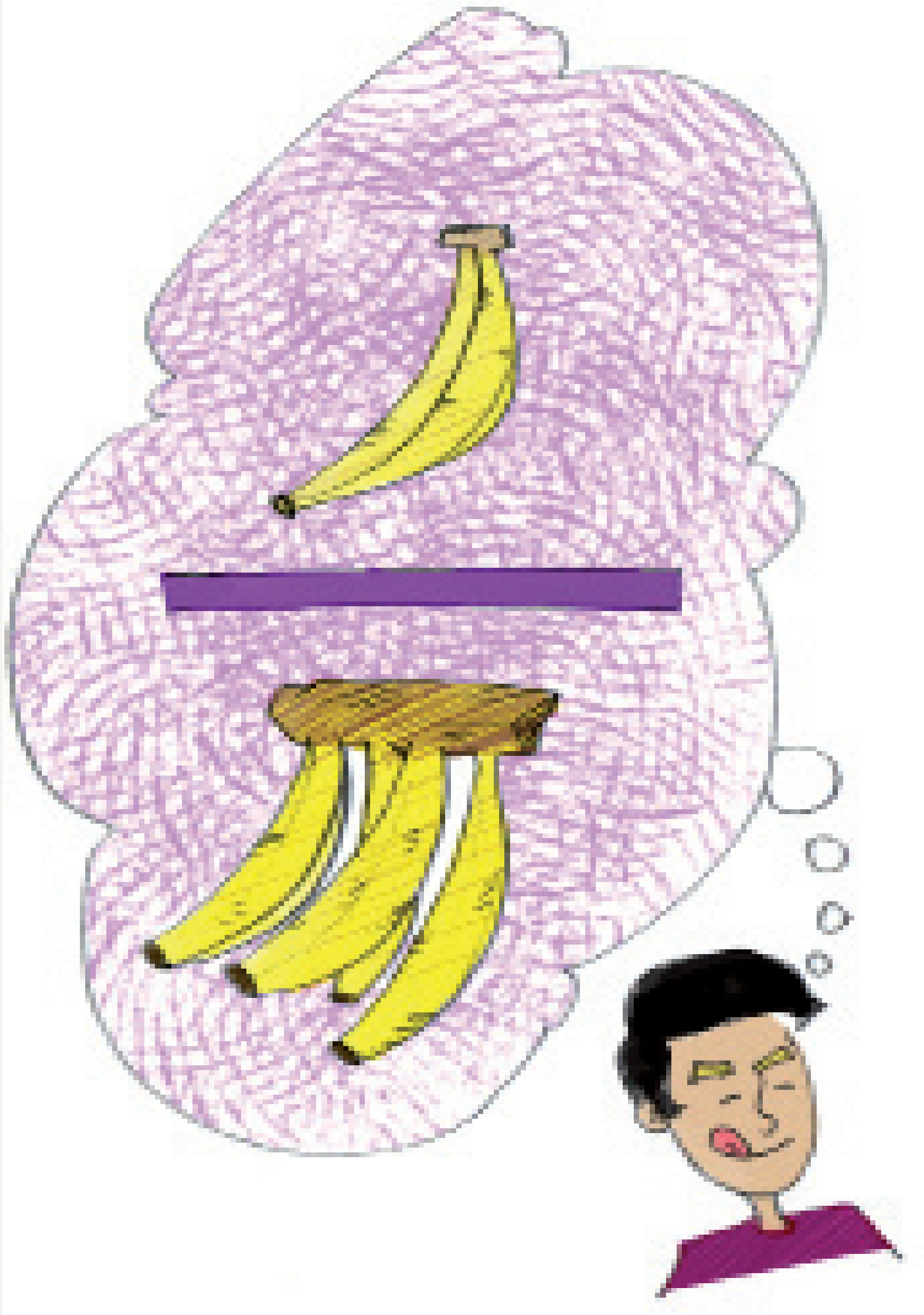
Análisis.

De nuevo, los estudiantes intentaron inventar procedimientos, algunos poco sustentables; sin embargo, la estrategia de multiplicar en cruz apareció con mayor recurrencia, lo que permitió que más estudiantes la adoptaran como método para ordenar fracciones. En la siguiente ilustración se explica una de las formas en que los estudiantes usan este método:,



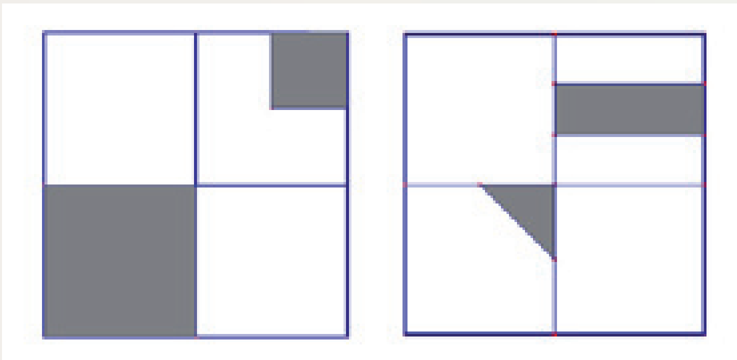
Situación didáctica cuatro

- Construir herramientas de división en todos continuos.
- Establecer estrategias en la solución de problemas en los que el todo sea el dato desconocido.



Situaciones a-didácticas

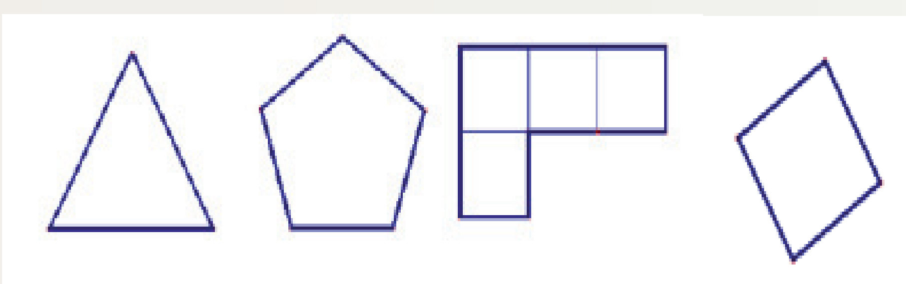
1 Diga ¿cCuál es la fracción sombreada en cada caso?



Análisis.s

Lograr que los estudiantes, mediante el trazo de nuevas líneas sobre los todos, construyan partes iguales. Ya sea teniendo en cuenta el área o la forma. La importancia de documentar este logro radica en que, gracias a los diseños de estrategias que posibilitaron la solución de la actividad, la mayoría de los estudiantes abandonó un modelo parte-parte y cambió a un modelo parte-todo de la fracción.

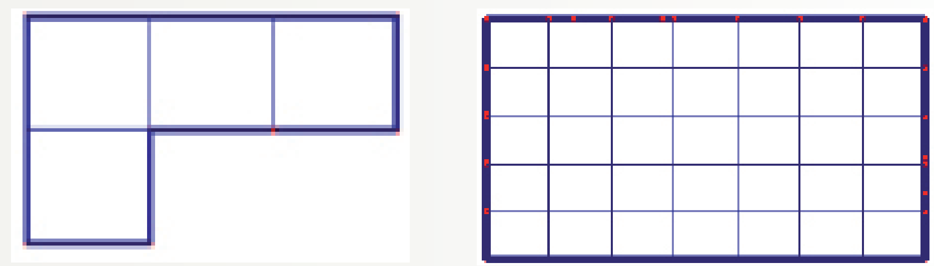
2 Si la siguiente figura representa una tercera parte de un todo, ¿cCuál es el todo?



Análisis

La actividad implicó mucha dificultad para los estudiantes, debido a que usualmente ellos no se ven enfrentados a solucionar este tipo de problemáticas, generalmente los estudiantes tienen el todo y obtienen las partes. El analizar estos procesos con ellos les ayuda a establecer aprendizajes alrededor de la estructura multiplicativa. Es decir, cuando ellos se ven enfrentados a determinar un todo a través de sus partes, deben observar detenidamente la manera en que esas partes se deben "multiplicar" y convertirse en el todo. Esto se evidencia especialmente cuando se trabajan todos discretos.
En contextos continuos, los muchachos en gran medida recurren al concepto de área para resolver la situación.

3 Si la siguiente figura representa dos quintas partes del todo, ¿cCuál es el todo?



Análisis.

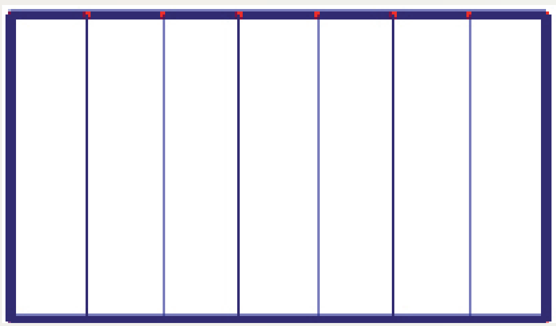
Un alto porcentaje de estudiantes presenta dificultad al resolver esta situación, debido a que el numerador de la fracción del enunciado debe partir el gráfico en las partes que éeste indique. Y luego, el denominador multiplica unas de esas partes. Aquí se observa que están acostumbrados exactamente a lo contrario, por esto, la dificultad que los estudiantes tienen al abordar situaciones que requieren procesos de reversibilidad. Luego de la socialización, algunos muchachos comprenden las razones de este cambio, es decir, de la función del numerador y denominador, pero una gran mayoría no comprende muy bien estas razones.

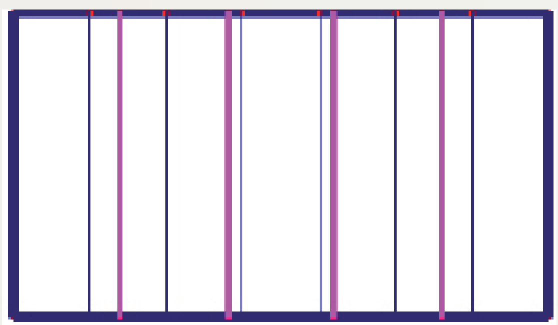
Situación didáctica cinco.

Explorar actividades de fracciones que involucren todos continuos.

Situaciones a-didácticas

1 Sombree los 2/3 de cada uno de los siguientes todos:





Análisis.

Esta actividad permitió que los estudiantes exploraran formas de dividir todos geométricos diferentes al rectángulo, observaron la dificultad que se tiene al partir en tres figuras como el triángulo. El avance que tuvo la mayoría fue identificar estrategias de partición desde el reconocimiento del área –la actividad involucra necesariamente el concepto de área–.

Situación didáctica seis.

- Explorar situaciones de multiplicación de fracciones.
- Analizar dificultades o aciertos en la introducción de problemas de multiplicación de fracciones (esto se hace antes de la suma de fracciones).

Situaciones a-didácticas

1 Responda la siguiente pregunta. Si mi cama ocupa un cuarto de mi alcoba y mi alcoba un cuarto de mi casa,. ¿Cuánto ocupa la cama de mi casa? Análisis.

Uno de los principales objetivos al plantear esta situación fue demostrar que los estudiantes resuelven situaciones de multiplicación de fracciones sin conocer antes el algoritmo de multiplicación de fracciones. Efectivamente, la gran mayoría de los estudiantes resolvió la situación únicamente recurriendo al concepto de fracción como relación parte-todo sobre un dibujo. Para que ellos pudieran realizar esto, tuvieron que recurrir a su aprendizaje de los atributos de la fracción.

2 Segunda actividad

¿Quién corre más rápido? ¿Mi hermano que recorre 10 metros en un tercio de minuto o yo que recorro un metro en un quinto de minuto?

Análisis.

Debido al contexto de la situación, los estudiantes tuvieron dificultad para resolverla. Principalmente, la introducción del concepto de rapidez, en comparación a la anterior situación, los confundió. También el hecho de que esta situación posibilita en gran medida una representación lineal, mientras que los estudiantes estaban familiarizados más con contextos continuos de área que no de longitud. Sin embargo, aquellos que pudieron representar el todo en un segmento, pudieron resolver la situación al recurrir a la interpretación de la fracción como relación-parte todo.

Nótese, que generalmente los estudiantes resuelven problemas de multiplicación de fracciones sin antes haber resuelto algunos de suma de fracciones. Esto nos da argumentos de peso para mencionar que estos dos conceptos no van jerarquizados, de hecho, lo recomendable sería aprenderlos al tiempo.

Situación didáctica siete.

Resolver situaciones problema sin antes conocer el algoritmo de la suma.
Utilizar distintas representaciones para la solución de problemas.
Situaciones a-didácticas

1 Linda desea confeccionar una blusa con el siguiente pedazo de tela (ficha bibliográfica por estudiante), de éste usa 3/7 de toda la tela para una blusa y 2/5 de toda la tela para la falda, ¿Cuánta tela le sobra a Linda?

Análisis.

Se pueden distinguir tres tipos de soluciones importantes.

1. Partición de ficha bibliográfica de manera horizontal y vertical.
   Esta estrategia permite visualizar de manera adecuada la parte de la blusa y la falda, sólo debe tenerse precaución de no utilizar alguna región de la ficha en las dos prendas a la vez. Esta solución también posibilita hallar la cantidad de tela que sobra de manera visual y sin recurrir a más construcciones sobre la ficha.

Partición de la ficha bibliográfica de manera únicamente vertical u horizontal.

Los estudiantes que usan este tipo de estrategias tienen dificultad para hallar el tamaño del pedazo que sobra de manera visual, debido a que no establecen una medida común para la cantidad de tela de la falda y la blusa.
Muchos de ellos se ven obligados a realizar aproximaciones mediante particiones aparentemente iguales.

Partición de la ficha bibliográfica recortándola (alterando el todo).
Los estudiantes que alteran la ficha, no resuelven la situación; avanzan más los que utilizan la estrategia 2.

Es de aclarar que es necesario que se trabajen en clase situaciones en las que se desarrollen los otros atributos de la fracción, así como las otras interpretaciones.

Conclusiones

• El proyecto generó al interior del aula dinámicas sociales inesperadas. Se encontró que la actitud negativa hacia las clases de matemáticas cambió, en muchos casos los estudiantes reconocen estar contentos con la metodología. Les parece una clase cómoda en la que el error es parte del aprendizaje y el trabajo en equipo afianza el aprendizaje.

En las siguientes entrevistas se pueden observar comentarios de los estudiantes que sustentan algunos logros de la propuesta. En resumen, podemos encontrar en sus comentarios argumentos como los siguientes:

- El trabajo en equipo gusta en la clase.
- Hablar en público es cómodo para los estudiantes.
- Exponer frente del tablero es una actividad tranquila y se puede llevar sin temor.
- Hay gusto por escuchar las exposiciones y hacerlas.
- Se diferencia el hecho de trabajar con situaciones problema.
- Se piensa que es posible aprender de los compañeros y, a su vez, el profesor de sus estudiantes.
- Se comprende que las normas de respeto son vitales para un aprendizaje.
- Se respeta al compañero en su opinión, las opiniones son importantes y dignas de escucharse en clase.

Nótese por ejemplo en los siguientes videos (Para más información visite la sección Transmedia del presente libro) situaciones tales como:

- La escucha general de los estudiantes cuando un compañero habla.
- Los argumentos que emiten cuando discuten entre compañeros.
- Las representaciones que se realizan de los problemas en el tablero.
- La comprensión frente a la solución de un problema.
- La importancia de la construcción de conocimiento en equipo.
- La tranquilidad de los estudiantes cuando hablan del error.
- La diferencia de la clase frente a otras metodologías en la que los estudiantes tienen una alta participación, es decir, no a cargo únicamente del docente.

La propuesta aportó datos acerca de la importancia de llevar una metodología en resolución de problemas, también mostró sus ventajas, debilidades y los ajustes que son necesarios. Durante el transcurso del proyecto los estudiantes pudieron apropiarse de actitudes frente a la solución de problemas tales como:

- Leer un problema e identificar las informaciones que permiten solucionar una situación.
- Tener en cuenta que el enunciado de un problema posee restricciones inviolables.(O que son únicamente inmodificables, si generan nuevas situaciones problemas).
- Intentar explorar diferentes estrategias diferentes de solución a un problema, distintas a los algoritmos.
- Observar problemas en que la solución no es única.
- Comprender que en las matemáticas no es mejor el que soluciona más rápido un problema, si no el que argumente o genere una estrategia clara y original.
- Analizar situaciones problemas en tiempos mayores a 5 minutos, pues enseña a que en matemáticas uno no debe apresurarse en las soluciones.
- Otro logro del proyecto fue que los estudiantes se pudieron ubicar en el rol de creadores de matemáticas, de inventores de procedimientos. Esta actitud, junto con los problemas que estaban en contextos cotidianos o reales, muestra a los estudiantes que ellos son posibles transformadores de su realidad.
- Que ellos pueden, mediante el uso de las matemáticas, comprender y analizar el mundo.

La propuesta arrojó algunas preguntas de investigación futura tales como:

- ¿Qué conocimientos pueden involucrase en el currículo de matemáticas de tal forma que permitan una renovación y un acercamiento hacia las matemáticas actuales?
- ¿Qué aspectos hacen que las clases de matemáticas sean espacios de aprendizaje social y académico?
- ¿Cómo afectan los conocimientos en matemática al docente que trabaja en resolución de problemas?
- ¿Cómo un cambio de concepción desde una filosofía de las matemáticas afecta también un cambio de las prácticas pedagógicas?
- ¿Son agotables las preguntas de investigación en didáctica de las matemáticas frente a un mismo objeto matemático?

Bibliografía

Banco Mundial (2010) Calidad Educativa en Colombia. Unidad de gestión del sector de desarrollo humano. Oficina regional de América y el Caribe.

Ciscar, S. L., & María Victoria, S. (1988). Fracciones. Madrid: Síntesis.

Gonzáles, J. (1990). Números Enteros. Madrid: Síntesis.

Grupo Alquerque de Sevilla. (2006). Combinatoría de Colores. SUMA , 61-64.

Gutiérrez, Javier (2010). ¿Arte o Matemáticas?, Colección Saberes Compartidos, Vol 3, Bogotá: Editorial Magisterio, pág. 13-23.

Gutiérrez, J. (2005). Pensamiento multiplicativo: análisis de textos de matemáticas de la educación básica entre 1986 y 2002. Bogotá: Tesis de pregrado en Licenciatura en Matemáticas.

Gutiérrez, J., Suarez, B., & Cruz, A. (2007). Enseñanza de las probabilidades geométricas. Bogotá.

Guy, B. (1996). Didactique des mathématiques. (J. Centeno, Ed.) Recherches en didactique des mathématiques, 7 (2), 33-115.

Harel, G., & Confrey, J. The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics.

Lorenzo, J. d. (2000). Filosofía de las matemáticas fin de siglo XX. Valladolid: Intercambio Editorial.

Maza, C. (1991). Multiplicar y dividir. Madrid: Aprendizaje Visor.

MEN. (2006). Estándares curriculares. Bogotá: ME.

MEN. (1998). Lineamientos curriculares de matemáticas. Bogotá: MEN.

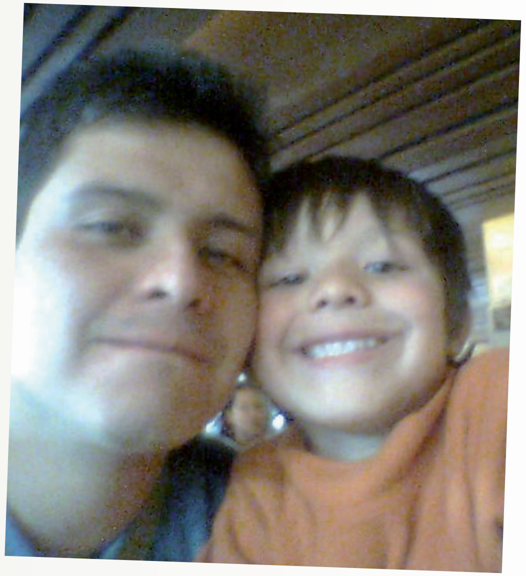
Mora J.A. (1991). La mitad del cuadrado. SUMA , 11-29.

Penrose, R. (2007). El camino a la realidad: una guía completa de las leyes del universo. Méxcio: Editorial Debate.

Zalamea, F. (2009). Filosofía sintética de las matemáticas. Bogotá: Editorial Universidad Nacional de Colombia.

Autor

Javier Alberto Gutiérrez Chaparro
puiguti@gmail.com



Licenciado en matemáticas de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Magister en matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia. Ha participado como conferencista en congresos nacionales con ponencias relacionadas con la educación matemática. Se ha desempeñado como profesor de educación básica y profesor universitario de estudiantes de Licenciatura en Matemáticas y Matemáticas en las universidades Grancolombia, Distrital y Sergio Arboleda (actualmente). Tallerista y panelista frente a profesores en ejercicio.