

- KEMMIS, S. y otros. *Teoría crítica de la enseñanza*. Editorial Martínez Roca. Barcelona. 1988.
- LURIA, A.R. *Lenguaje y pensamiento*. Ediciones Roca Ltda. Reimpresión Bogotá. Traducido al castellano del original ruso por Pedro M. Merino. (Ediciones de la Universidad de Moscú). 1993.
- PETROVSKY, A. *Psicología Evolutiva y Pedagógica*. Editorial Progreso. Moscú. 1990.
- PIAGET, J. *Seis estudios de psicología* (Six études de psychologie). Trad.cast.: J. Marfá. 1964. Editorial Labor. Barcelona. 1991.
- _____ *Introducción a la epistemología genética*. Ediciones Paidós. México. 1987.
- _____ *La formación del símbolo en el niño*. Fondo de Cultura Económica. México. 1986.
- _____ *La construcción de lo real en el niño*. Editorial Crítica. Barcelona. 1989.
- ROJANO, T. *La matemática escolar como lenguaje. Nuevas perspectivas de investigación y enseñanza*. Enseñanza de las ciencias. Vol. 12 (1), marzo de 1994.
- SCHAFF, A. *Lenguaje y conocimiento*. Editorial Grijalvo. México. 1967.
- TALÍZINA, N. *Psicología de la enseñanza*. Traducido del ruso por Ana Clavijo. Editorial Progreso. Moscú. 1988.
- VICENTE, Maribel F. *Un modelo para la formación del sistema de habilidades matemáticas en la escuela media cubana*. Tesis de doctorado. Santiago de Cuba. 1995.
- WERTSCH, J. "La voz de la racionalidad. en un enfoque sociocultural de la mente". En *Vigotsky y la educación: Connotaciones y aplicaciones*. Traducc. al castellano de Miguel Wald. Editorial Aique. 1990.
- _____ *Vigotsky y la formación social de la mente*. Ediciones Paidós. Barcelona. 1988.

todo esto configura hábitos y habilidades, tanto en el plano intelectual, motivacional y afectivo, que no son otra cosa que maneras de pensar, sentir, actuar y conocer, construidas culturalmente.



BIBLIOGRAFÍA

- AZCOAGA, J. *Del lenguaje al pensamiento verbal*. Editorial El Ateneo. Buenos Aires. 1983.
- BRUNER, J. *Actos de significado*. Alianza Editorial. Madrid. 1991.
- _____ *Acción, lenguaje y pensamiento*. Editorial Gedisa. Barcelona. 1988.
- _____ *Realidad mental y mundos posibles*. Editorial Gedisa. Barcelona.
- _____ *La educación, puerta de la cultura*. Editorial Visor. Madrid. 1997.
- DAVIDOV, V. *La psicología evolutiva y pedagógica en la URSS*. Editorial Progreso. Moscú. 1988.
- _____ *La enseñanza escolar y el aprendizaje psíquico*. Editorial Progreso. Moscú.
- DAVIS, P. y HERSH, R. *Experiencia matemática*. Editorial Labor. Barcelona. 1988.
- DICKSON, L. y otros. *El aprendizaje de las matemáticas*. Editorial Labor. Barcelona. 1991.
- ELKANA, Y. *La ciencia como sistema cultural: una interpretación antropológica*. Módulo de pedagogía I. U.P.N. 1993.
- ELLIOT, J. *La investigación, acción en educación*. Ediciones Morata. Madrid. 1990.
- FOUCAULT, M. *Las palabras y las cosas: una arqueología de las ciencias humanas*. Trad.cast. 1968. E.C. Frost. (Editorial Siglo XXI: Colombia). 1991.
- _____ *La arqueología del saber*. Editorial Siglo XXI. México.
- GALPERÍN, 1958. Citado por Talízina, en *Psicología de la enseñanza*. Editorial Progreso. 1988.
- GOETZ, J.P. y LECOMTE, M.D. *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa*. Ediciones Morata. Madrid.
- HALLIDAY, M.A. *El lenguaje como semiótica social. Una interpretación social del lenguaje y del significado*. Fondo de Cultura Económica. México. 1982.
- MOREL, M. *Lecturas de Foucault*. Editorial Taurus. Madrid. 1983.

- Hacer visibles los procesos de apropiación del conocimiento matemático.
- Desarrollar lenguaje matemático escolar, es decir, hacer discurso matemático; lo que implica la presencia de otros y, por lo tanto, la implantación de la comunicación y el desarrollo de la respectiva competencia.
- Confrontar las representaciones de lo que es objeto de conocimiento en los espacios generados para tal fin, como el trabajo en las plenarias, el trabajo en equipo, y en el diálogo con el maestro.
- Crear un ambiente de trabajo a modo de un *lugar cultural* como espacio propicio para la reflexión, la polémica y la elaboración del discurso matemático escolar.

Los niños

- Cuando los niños ingresan a la escuela están en una etapa de formación de las operaciones lógicas y luego comienzan a construir el sistema de la lógica proposicional, es decir, comienzan a acceder al discurso.
- Los esfuerzos que hacen los niños en el Anillito consisten en poner todo el contenido de la representación en el discurso, es decir, la esencialidad de lo que es objeto de conocimiento con la dificultad de que dicho objeto se está elaborando. Por esto, es natural que los niños pasen por sucesivas elaboraciones discursivas o retóricas a medida que van afinando las funciones del lenguaje, como son la nominación, la atribución, la derivación y la articulación, que se van convirtiendo en discurso.
- Cuando los niños pueden representar puramente el objeto de la acción a partir de la interacción con objetos físicos y dependan de ello, se dice que la acción toma la forma material; si en cambio el objeto de la acción se representa verbalmente, se dice que la acción se corresponde con la forma verbal. Cuando la acción toma la forma mental, el niño ya no cumple la acción como práctica transformadora de objetos exteriores –ni materiales ni verbales–, sino que ahora la acción se realiza transformando las imágenes de estos objetos. Estas imágenes mentales de los objetos y fenómenos del mundo exterior son, ahora, la forma que toman las representaciones del objeto de la acción.
- La solución de problemas transforma al niño, no sólo en calidad y cantidad de conocimientos sino también en la apropiación de procesos y procedimientos generales, en estrategias y maneras diferentes de entender un problema, en formas diferentes de valorar y valorarse frente a un grupo social, en la elaboración de juicios y criterios para decidir cuándo algo es un problema;



- El lenguaje tiene su razón de ser y de existir, porque existe el conocimiento y porque este conocimiento impone la necesidad de comunicarlo a otros. Conocimiento que emerge de manera plena, de la acción consciente, y se va constituyendo en sistemas semánticos que buscan su adecuada expresión a través de la sintaxis del lenguaje articulado.

- Visto como instrumento, el lenguaje es un potente instrumento analítico pues hace posible analizar las representaciones (percepciones, imágenes, esquemas, estructuras conceptuales, que son formas de pensamiento sintético) al obligarlas a pasar por el tamiz lineal del lenguaje articulado y hacer de estos pensamientos verbales objetos de acción, es decir, de reflexión. Pero también puede centrar su foco de atención sobre sus procesos de elaboración e interiorización del conocimiento, tornando el pensamiento más consciente y haciéndolo más coherente.

- Una de las implicaciones del funcionamiento del lenguaje es que extiende el poder de las coordinaciones entre acciones articulando la representación mental, proveyendo al pensamiento al mismo tiempo, un instrumento que en principio es de control y luego de combinación, de transformación y de análisis, tanto de la acción como de la actividad. De esta forma el lenguaje transforma profundamente la estructura del pensamiento, al alcanzar formas de esquematización más avanzadas y una abstracción más móvil.

- En síntesis, las formas de la acción por las que circula la práctica del estudiante se dan en función de sus necesidades cognitivas, y de sus motivaciones e intereses; la práctica de éstas permite descubrir, por ejemplo, el objeto de determinada acción, el contenido de la misma –las operaciones, sus composiciones, su carácter consecutivo, la estructura en la cual se inscriben tales secuencias–, así como ejercer un control objetivo sobre la acción misma.

- El valor cognitivo de hacerse preguntas ante una situación problemática, en esta perspectiva, es apropiarse del esquema de la base orientadora de la acción, prestando atención a los datos importantes, a las condiciones esenciales del problema, y a las transformaciones posibles cuando la pregunta introduce nuevas condiciones. Además, se hace evidente la necesidad de saber si la pregunta está bien hecha, lo cual lleva al niño a trazar cursos posibles de acción y a resolver parcialmente el problema. Es, en síntesis, toda una construcción de sentido y de transformación de la actividad en un problema para sí.

- Desde el punto de vista de la relación pedagógica entre maestro y estudiante, la exigencia de verbalizar la acción –cómo estrategia en la apropiación del conocimiento–, tiene como fin:

la acción se debe recrear en la forma verbal, en forma muy precisa, de manera que otros puedan interactuar y comunicarse con el hablante.

- Quién hace verbalización de las acciones enriquece su argumentación y está en mejor posición para negociar significados.

- En el proceso de asimilación o representación del mundo se van formando capacidades culturales, vinculadas a la formación de una base cultural y en particular con capacidades específicas como el desarrollo del pensamiento matemático.

- Cuando se propone un objeto de conocimiento, el reto es apropiarse de la experiencia histórica acumulada sobre el mismo; además, el abordar el conocimiento sobre una base cultural distinta a la que se desarrolló históricamente permite hacer caminos nuevos, que pueden tener puntos de encuentro o de analogía con las problemáticas que promovieron la elaboración del conocimiento, pero en todo caso un camino nuevo que necesariamente producirá conocimiento nuevo, al menos en dos direcciones: en el interior de la disciplina –matemática escolar–, y otro de carácter didáctico.

- La asimilación de este conocimiento implica la asimilación de instrumentos culturales (regla, compás, ábaco, lenguaje, comunicación, argumentación...) luego las actividades deben estar dirigidas a configurar una historia de asimilación de algunos de estos instrumentos, de los más pertinentes para el desarrollo intelectual de los jóvenes.

- Dicha asimilación tiene como prerrequisito el que la actividad de conocer sea abordada como una actividad vital por parte del sujeto, porque modela no sólo nuevas operaciones motrices e intelectuales, sino también el espacio de relaciones, la imagen de conocimiento matemático, las formas de validación, las prácticas y los ritos configurando el ambiente cultural –lugar cultura– adecuado para la producción de conocimiento matemático escolar.

Papel del lenguaje

- Desde el punto de vista del *compromiso con el conocimiento*, el lenguaje puede mostrar tanto *una relación externa*, pasiva, de simple manipulación de estructuras superficiales, como *una relación interna*, de compromiso, activa, que se relaciona con la estructura profunda de su contexto de significado. En esta última relación siempre se está examinando qué tan bien representado está el sistema semántico en evolución mediante el sistema de signos articulados.

como objeto matemático, pero sólo en el aspecto semántico, enriquecido por la pragmática y elaborado por la argumentación. En el aspecto sintáctico aún no han elaborado suficientemente las reglas de su escritura (representación en el sistema de signos matemáticos). Por otra parte, expresan un diálogo escrito fluido, con el texto propuesto. No es un texto explicativo, es un texto que muestra la condensación de un pensamiento, un número de palabras significativamente menor, factores que caracterizan una tendencia hacia la predicación. El verbo ser es utilizado para mostrar la esencia del objeto de estudio.

Validación: están en el nivel formal de la demostración matemática, utilizan la simbología propia de la matemática.

Se puede afirmar que en la adquisición e interiorización de los conocimientos matemático así como para el desarrollo intelectual (formación del pensamiento matemático) de los estudiantes, es necesario que elaboren y realicen estos tipos de verbalización de las acciones. Con esto afirmamos que detrás de cada concepto hay trabajo intelectual intenso que realizar y que como su adquisición y apropiación es a menudo lenta, demanda largos períodos de tiempo.



CONCLUSIONES

El carácter cultural de la práctica pedagógica

- El lenguaje se ha convertido en un elemento básico para la ruptura de los mitos y prácticas anteriores, el verbalizar las acciones ha permitido tomar conciencia de ellas para luego volverlas objeto de reflexión y comunicación, proveyendo otras maneras de concebir la matemática escolar. Ha permitido elaborar un discurso cada vez más fino, gracias a una estrategia de gestión del conocimiento como es *la verbalización de las acciones*. En especial, ha hecho visibles los momentos de tránsito y de traducción de una lógica de la acción material –momento material materializado del proceso– a una lógica de los conceptos –momento de verbalización– de la comunicación en el proceso.

- La verbalización de las acciones vitaliza el desarrollo del lenguaje y la comunicación, permite la apropiación gradual de la carga cultural que tienen los objetos de conocimiento, en nuestro caso conocimientos matemático escolar. Por otro lado, representa y pone el conocimiento en el afuera, ya que



La articulación de las frases se hace por medio del “entonces” y del “y”, con la característica de que estos vínculos no son conectivos lógicos: sólo sirven de vínculo en la sucesión lineal que constituye la frase.

Realizan atribuciones de acciones físicas, que puedan comprobar y mostrar empíricamente, como en:

¿Dos sextos son equivalentes a cuatro novenos? No es equivalente porque al medir $4/9$ con $2/6$ notamos que $4/9$ es más grande que $2/6$. Entonces notamos que en la tira nos hace falta $1/9$ para completarlo (Jhon Alejandro García).

El razonamiento no se compromete, prevalece la acción física. Por otra parte siempre se espera una orden para ejecutar: no le hacen seguimiento a la acción. Interactúan con el maestro esperando que él diga si está bien o mal, no para hablar sobre el tema, sino para pedir que se le valide.

En la verbalización de la acción los verbos que más comúnmente usan son: tener, hacer, tomar, notar, dar; todos usados en pasado.

Validación: se apoyan en la evidencia empírica; así son las cosas porque son de hecho.

Tipo 2. Construyen proposiciones y las justifican, aparece el texto y el discurso sobre lo que es objeto de conocimiento. En la verbalización escrita aparece lo que ya se ha ido constituyendo en forma oral; no es lo mismo decir 15, 15 años o 15 como la edad de...

Se presta atención a las relaciones que entran en juego pero no se nominan (mayor que, menor que), se comprenden sin enunciarse. La explicitación es necesaria para tomar conciencia de las relaciones y poder considerarlas como objeto de estudio.

Validación: la validez está apoyada en las reglas de la estructura lógica de los conocimientos matemáticos que maneja.

Tipo 3. La verbalización de la acción es desplegada, todavía está en el nivel rutinario. Es narración de acciones, son en sí declaraciones argumentativas que contienen elementos de prueba. Están buscando la esencialidad del concepto, su comprensión. El interlocutor es explícito.

Validación: se apoyan en la evidencia empírica.

Tipo 4. La verbalización de la acción es reducida, su contenido es descontextualizado y está en el plano de la acción mental.

Están en el tránsito entre el contexto hipotético y el generalizado. Identifican las relaciones y las operaciones de la nueva estructura. Esta última se manifiesta

El trabajo realizado con los niños ha mostrado que siempre pasan de un NO discurso, a *estructuras lingüísticas narrativas*, como se puede verificar en este y otros ejemplos:

El problema del *ovillo de cabuya*: se trata de un ovillo de cabuya al que sucesivamente se le saca la mitad de lo que quedaba, hasta el momento en que se le sustraen $\frac{2}{5}$ y con los restantes 30 cm se hace un teléfono.

La estructura narrativa se pone de relieve en el siguiente registro:

Empezamos a investigar los $\frac{2}{5}$ que tomó la hermana y concluimos que en este problema cada $\frac{1}{5}$ cuesta 10 centímetros de cabuya. Entonces los $\frac{2}{5}$ miden 20 centímetros de cabuya y sobran 30 centímetros con las que al final hicieron un teléfono (David).

En este caso vemos que:

Empezamos a investigar los $\frac{2}{5}$ que cogió la hermana...

potencialidad de la acción

... y concluimos que en este problema cada $\frac{1}{5}$ cuesta 10 centímetros de cabuya...

puesta en acto de la acción

Entonces los $\frac{2}{5}$ miden 20 centímetros de cabuya y sobran 30 centímetros con los que al final hicieron un teléfono.

A continuación se presenta una primera aproximación a la periodización con base en la sistematización de los registros.

Aproximación a tipos de elaboración en la verbalización de las acciones

Una primera aproximación a los tipos de discurso que presentan los estudiantes cuando están trabajando la resolución de problemas en equipo, permite diferenciar cinco tipologías:

Tipo 0. No hacen verbalización de la acción, elaboran un texto más o menos escueto de las acciones hechas, contadas con el mínimo detalle.

Hay una intencionalidad pragmática por comunicarse, ya que los objetos que se manipulan en el discurso están adheridos no sólo a las acciones físicas sino al contexto rutinario y vivencial.

Validación: se espera que la validación sea dada por los otros. Las acciones son externas y ajenas, se hacen para complacer al otro.

Tipo 1. Describen la actividad con algunos detalles, por medio de frases cortas. Existe dificultad para nominar las acciones y diferenciar explícitamente lo que será objeto de conocimiento.

- Ante una situación, lo “natural” es hacer preguntas y discutir con otros, incluyendo a los maestros, para comprender y transformar la actividad.

Por todo lo anterior, podemos decir que más que una transposición didáctica lo que de hecho se da es una *transformación didáctica*, es decir nuestro trabajo se inicia en lo que los niños son capaces de hacer a partir de lo que ya saben, pues pretendemos colocarlos en zona de desarrollo próximo en cada uno de los momentos de desarrollo de la actividad. Por ejemplo, pueden abordar temas que no están programados para su grado de escolaridad.

Una “situación didáctica transformada” es entonces, una Situación de Aprendizaje que podemos caracterizar de la siguiente manera:

- Es una situación contextualizada y recontextualizada por los niños.
- Se convierte en una actividad en el sentido de Vigotsky.
- Es dinámica, siempre es posible transformarla.
- Genera retos cognitivos.
- Genera condiciones para la producción de conocimiento matemático escolar.
- Ofrece motivaciones desde los mismos procesos de acción e interacción en el contexto de la actividad.
- Es abierta, porque no tiene un curso fijo, pero posee un abanico de posibles cursos de acción.
- Convocan una gran variedad de conceptos en su base y son, en su mayoría, de mucha riqueza en posibilidades de desarrollo.
- Estas situaciones apuntan a la construcción de *campos conceptuales* con dominio en el desarrollo mismo del pensamiento matemático. Distinto de estructuras conceptuales, porque a estas últimas se les añaden otros elementos semánticos de carácter cultural.

Los registros también han mostrado que a mayor desarrollo de la competencia lingüística y comunicativa es mayor el acercamiento al lenguaje matemático. Las relaciones y operaciones involucradas son invisibles en la parte material materializada, y sólo son visibles cuando se acompañan y/o se reconstruyen en el lenguaje verbal externo, puesto que se convierten en *objetos de reflexión*, lo cual va decantando la esencialidad del objeto y, finalmente, se convierte en concepto. Otro efecto inédito de la reconstrucción de la acción en el lenguaje verbal externo es el desarrollo de la autoestima en los jóvenes, y la valoración de sus capacidades cognitivas frente a un colectivo exigente.

esto sucede lentamente—, la manera de aprender y las formas de trabajo también cambian.

La transformación didáctica

En contraste con lo que se ha denominado la teoría de la transposición didáctica por los franceses, hemos encontrado muchas similitudes y también distancias en esta manera de pensar. Sin embargo, se ha desarrollado una mirada propia hacia el conocimiento escolar.

Al considerar una “*Situación Didáctica*” en el trabajo del Anillito, ésta se puede caracterizar así:

- Es flexible, no se tiene un camino preestablecido, rígido; permitimos que la dinámica se desarrolle y opte por algunos de los caminos vislumbrados por los jóvenes. La actividad propuesta resulta transformada tanto por las preguntas de los niños (Op. it. Véase anexo N^o 1. *La Situación didáctica de: El tanque*)⁶ como por las de los maestros; aparecen posibles desarrollos y campos conceptuales de la matemática.

- Cuando el maestro conduce al niño hacia el objetivo que él desea, el niño no produce, termina haciendo lo que el maestro quiere sin comprometerse (hace acciones para cumplir con la actividad).

- Ambiente no sancionatorio. Se hacen juicios, conjeturas, reflexiones, se lanzan supuestos y se argumenta; sin que por estas acciones nadie se sienta discriminado, o bien porque no sabe o porque se equivoca, o se le echa abajo su argumento, o porque presentan altibajos en su producción intelectual.

- Las situaciones que se presentan están afuera del contexto matemático —algo que sucedió con frecuencia en los comienzos del trabajo con los niños— o bien dentro del contexto matemático; pudiéndose ahora con más facilidad proponer los segundos.

- Nuestro enfoque didáctico es la invención y resolución de problemas.

- La situación se presenta en forma material o materializada, por lo general en contextos rutinarios no matemáticos.

- Una característica de la matemática escolar en el Anillito, es la producción de conocimiento matemático escolar, los niños literalmente producen ideas, conjeturas, argumentos de orden matemático situado.

- La situación que se les presenta es inicialmente una tarea, pero las formas de trabajo tienden a convertirlas en actividades vitales para los niños.

⁶ El informe final de esta investigación se encuentra en el Centro de Documentación del IDEP.

Se puede considerar la verbalización de la acción por lo menos desde tres ámbitos: el cognitivo, el de las funciones del lenguaje y el de mediador recreando la acción y el carácter cultural configurando un *lugar cultural*. En los tres han surgido, con el desarrollo del proyecto, las siguientes preguntas:

- *Cognitivo*. ¿Cómo la verbalización de la actividad –de las acciones– es factor de desarrollo intelectual?

- *Las funciones del lenguaje*. El pensamiento es como una totalidad que emerge de manera simultánea –como si se pensara en forma sintética– y luego fuera traducido a una sucesión lineal que debe adecuarse a unas reglas lingüísticas. Este esfuerzo de representación del pensamiento en el lenguaje natural pasa por las cuatro funciones lingüísticas: nominar, articular, atribuir y designar. La pregunta que nos hacemos aquí, es ¿cómo se materializan estas funciones en la verbalización de las acciones? Y, ¿cuál es su relación con la interiorización o apropiación del conocimiento matemático?

- *Lugar cultural*. Nos preguntamos: ¿de qué manera las formas de actuar, pensar, sentir y conocer inmersas en el trabajo con los niños, están fomentando cambios en las distintas maneras de percibir códigos, reglas de conducta, formas de relación –con las demás personas– y con el conocimiento matemático? Éstas preguntas están guiando la presente innovación-investigación.

El lenguaje provee una herramienta de deconstrucción y construcción cultural muy potente, a través de la verbalización de las acciones, que en primera instancia se realiza cuando se empieza a trabajar con las cosas y las imágenes de ellas, dando un salto cualitativo que consiste en desprenderse de las imágenes y las cosas para manejar significantes y significados históricamente contruidos⁵. Pero estos símbolos no presentan, otra vez, las similitudes con lo representado, sino que lo simbolizan, es decir, lo sustituyen (lo puedo nombrar como quiera). Podríamos decir que la sustitución ocurre cuando el símbolo se desprende de la similitud con la cosa y se convierte en código.

Las relaciones con el conocimiento

Hemos encontrado que la manera como aprenden nuestros niños depende de la imagen de conocimiento que posean. Así, si la imagen es de un conocimiento verdadero, rígido, axiomático, entonces no preguntan, no discuten, quieren que todo se les ordene, se les dicte; leen y hacen resúmenes acrílicos. Pero a medida que la concepción de conocimiento matemático cambia –y

⁵ La apropiación de un campo conceptual tiene su historia en términos de las actividades que han sido vitales para su desarrollo.

Encontramos que la propuesta pedagógica soviética es de enseñanza programada, en la cual el maestro debe descubrir ante el estudiante todo el contenido de la acción, y que esta teoría contemplaba también la posibilidad de ser elaborada por el mismo estudiante. En nuestro caso, la intención original es generar un espacio donde sea posible pensar y hacer matemáticas, donde los niños tengan la posibilidad de mostrarse, ganar confianza y defender públicamente sus ideas comunicándose con los otros. Esto implica que la intervención educativa tienda a respetar los ritmos de trabajo, los tiempos y las maneras de comprender, para reducir al mínimo las interferencias producidas por la intervención educativa, la que más bien debe acomodarse a las condiciones que favorecen la reflexión, individual y colectiva, pues el fin último es que los jóvenes puedan hacer matemáticas en situaciones mínimamente controladas, guiados por la perspectiva pedagógica construida por los maestros durante años de reflexión y estudio colectivo (perspectiva elaborada por el colectivo de Anillo de Matemáticas, del cual los autores han sido miembros).

La diferencia esencial de nuestra propuesta es que los niños deben elaborar la base orientadora, propósito que llevamos a cabo mediante la conceptualización de lo que es problema para nosotros y para los niños.

A los niños se les propone una tarea que, mediante acciones verbales como hacerles el mayor número de preguntas y usando variadas formas de presentación, produjeron una forma didáctica de abordar y resolver los problemas con ellos. Esto se puede ver en el capítulo cinco “La pregunta como acción verbal para la construcción de objetos y estructuras verbales” del documento “El papel de la verbalización de las acciones en el desarrollo del pensamiento matemático escolarizado”⁴.

En el caso de Jhon Urrego, en el problema “el rollo de cabuya”, queda claro que opera con acciones verbales “ $2/5$ de cabuya son 30 centímetros”. Es decir, como opera y transforma estos objetos verbales –las fracciones–, establece equivalencias, usa una lógica conceptual plena de contexto y significado, es aquí donde emerge el discurso matemático escolar.

Desde el punto de vista de la incidencia en la formación matemática de los niños, la *verbalización de las acciones* cumple una función cognitiva que consiste en representar, por medio del lenguaje articulado –*discurso*–, aquellas representaciones que el niño ha construido al abordar situaciones problemáticas.

⁴ Publicación parcial de esta investigación, financiada por el IDEP. “El papel de la verbalización de las acciones en el desarrollo del pensamiento matemático escolarizado”, diciembre 22 de 1997.



es la comprensión de las acciones y operaciones que realiza cuando aborda situaciones problemáticas de conocimiento, en una aproximación honesta de lo que para él es inteligible, desde lo que ya conoce y le es familiar. Esto es, subyace una lógica y un sentido que le permite seguir vinculando los hechos y sus significados; perspectiva que por lo general el maestro pasa por alto.

- El potencial intelectual y motivacional están siendo subvalorados en la escuela. Esto nos coloca ante la perspectiva de lo que el niño es capaz de hacer hoy si le brindamos el espacio adecuado para su expresión y desarrollo. Por otra parte, lo que muchas veces se reconoce como limitación en el niño es, en una abrumadora cantidad de veces, limitación de nosotros, los maestros.

- Desde el punto de vista de la elaboración del conocimiento existe un cierto paralelismo o correlación entre las formas históricas de construcción del conocimiento y la génesis y constitución del conocimiento, tanto individual como colectivo.

- Existe una estrecha relación entre el desarrollo intelectual, el motivacional (ético) y el desarrollo lingüístico (competencia comunicativa).

- Ninguna teoría es capaz de explicar en su totalidad la complejidad del acto pedagógico. Esto supone que las teorías no son excluyentes, pues su nivel explicativo depende del ángulo o perspectiva adoptada. Así, si una teoría no puede explicar algo, puede existir otra que lo pueda hacer.

- Se ha asumido en esta investigación el concepto de Zona de Desarrollo Próximo propuesto por Lev Vigotsky, en relación con su ley genética general de desarrollo, como un principio didáctico: crear para los niños condiciones y situaciones que le permitan, a partir del desarrollo que ya han logrado, acceder a funciones que en el momento apenas comienzan a aparecer.

Avances realizados

En el desarrollo de la innovación surge, de manera reiterada, el cuestionamiento sobre el sentido y el papel de la actividad, pues si para el maestro la situación dada es un problema, para los estudiantes no lo es necesariamente, luego, ¿cómo hacer para que una situación propuesta se convierta en problema?

Retomamos las experiencias diarias y las confrontamos nuevamente con la teoría. Para nosotros cobra su pleno sentido la estructura de la acción que, para efectos de la gestión del conocimiento, se separa en tres partes: la orientadora, la ejecutora y la de control, aunque la de mayor interés es la parte orientadora, pues de su conformación depende el desempeño en las demás.

- La actividad de estudio, su desarrollo.
- Las prácticas sociales.

El tratamiento de los registros y su análisis se hace a partir de este enfoque conceptual y de las categorías que se han derivado en el proceso de sistematización.

Nuestras categorías de análisis son:

- La nominación: se refiere a la esencia de las representaciones, indica la capacidad para representarse apropiadamente los objetos de conocimiento y darles un nombre.
- La articulación: establece el funcionamiento coordinado de las representaciones unas con otras; da contenido a la pura forma verbal.
- La derivación: muestra el movimiento de las representaciones desde su origen, los matices y nuevos sentidos que adquiere: multiplicar, duplicar, triplicar.
- La atribución: da una representación en otra, por ejemplo: amigos y cuatro, forma cuatro amigos, cinco y número primo, forma cinco es número primo. Indica los procesos de categorización entre representaciones, el establecimiento de condiciones de existencia para las representaciones y de acreditación entre ellas.
- La competencia comunicativa: entendida como la capacidad de comprender las ideas matemáticas del otro y en el discurso hacer comprensible para el otro las ideas matemáticas propias.
- La imagen de conocimiento matemático: en tanto categoría de análisis cultural, ya que las imágenes de conocimiento determinan las prácticas, los valores, el estilo de las interacciones comunicativas, las formas de validar el conocimiento, los valores, los ritos, entre otros.

Gestión con el conocimiento

Con el desarrollo del proyecto y las discusiones en el interior de la Asociación Anillo de Matemáticas, se ha ido decantando nuestra perspectiva conceptual, la cual toma forma operativa a través de los siguientes principios didácticos:

- Los niños nunca se equivocan, puesto que sus elaboraciones están inscritas en contextos precisos, que tienen sentido y significado propios para el niño. Esta afirmación se basa en que el conocimiento es esencialmente acción mental interiorizada (Escuela de Ginebra), esto es, que para el niño lo que significa

La parte ejecutora de la acción es la parte de trabajo de desenvolvimiento y de búsqueda de posibles soluciones, en la cual se resuelve la situación dada.

La parte de control de la acción está dirigida a seguir la marcha cuidadosa de la acción, a confrontar los resultados obtenidos y a justificar la validez de las soluciones.

La verbalización de las acciones permite recrear plenamente la acción por parte del pensamiento verbal. Esta formación de la acción presupone que del contenido concreto de los objetos primero se han separado los rasgos y las propiedades sustanciales para la acción, las cuales se fijan a las palabras y se convierten en sus significados. Ahora es posible su utilización en forma de *objeto verbal*, es decir, el niño puede operar y reflexionar con las palabras y a través de ellas con sus significados.

De esta verbalización de las acciones que se hace en forma verbal oral y verbal escrita, se han tomado registros³ que nos han mostrado el papel del lenguaje, de la interacción comunicativa, de la cultura como escenario y de la formación cultural en la construcción del conocimiento matemático escolar desde dos competencias: competencia comunicativa y competencia cultural. Para efectos de análisis estas competencias se han separado así:

a) *Competencia matemática*, en la que consideramos:

- El lenguaje, en tanto sistema de signos verbales que articula la representación del pensamiento.
- El desarrollo de la competencia comunicativa, entendida como un conjunto de procesos y conocimientos de diverso tipo: lingüístico, socio-lingüísticos, estratégicos y discursivos, que el estudiante pone en juego para producir y comprender discursos matemáticos en contextos escolares.
- Para efectos de análisis, consideramos conveniente el diferenciar los cuatro aspectos de un sistema conceptual en construcción (Pérez, 1995): sintaxis, semántica, pragmática y argumentación. Este enfoque funcional del desarrollo del pensamiento matemático ha centrado los diseños didácticos en las capacidades pragmáticas de los estudiantes, en la semántica y argumentación, permitiendo a los alumnos elaborar su propia sintaxis.

b) *Competencia cultural*, en la que se atiende a la formación de un *lugar cultural* configurado, entre otros, por:

- La relación que los niños tienen con el conocimiento.

³ Registros que son las notas de trabajo de los estudiantes, el diario de campo de los maestros, y en algunas ocasiones grabaciones de audio o vídeo.

forma que da a esta expresión verbal. Esta forma de expresión se encuentra mediada por la intención comunicativa –para sí, o para otros–, por el “tono” de la interacción comunicativa y la clase de interlocutores a la que va dirigida. En suma, depende del contexto cultural escolar donde se desarrolla.

La forma mental de la acción significa que ésta se ha interiorizado y que se realiza “para sí”. Sus elementos estructurales son los conceptos, las operaciones y las simbolizaciones. En esta forma, la verbalización en voz alta adquiere la forma de imagen sonora de la palabra. La primera forma de acción mental es el «lenguaje externo para sí». Es ya una acción interna, pero aún dirigida hacia el exterior.

Por las funciones que desempeña, la acción se puede dividir en tres partes: la orientadora, la ejecutora y el control (Galpeín. Op. it., p. 58).

El cumplimiento de la acción por el sujeto presupone la existencia de un determinado objetivo que se alcanza sobre la base de cierto motivo. Éstos dependen tanto de la representación de la acción (comprensión del problema o situación a considerar) como de la representación del *sistema de condiciones objetivamente necesarias* para el cumplimiento de la acción (datos y condiciones esenciales del problema abordado).

La *base orientadora de la acción* se distingue de las condiciones objetivamente necesarias, porque incluye el contexto donde se interpreta la acción; es en lo que realmente se apoya el sujeto para comprender y cumplir la acción (la interpretación está mediada por presupuestos culturales tácitos, que hacen que se agreguen ciertas condiciones o que otras no sean significativas. En esta etapa la comprensión le permite divisar caminos de desarrollo o solución de la situación abordada). La base orientadora de la acción puede coincidir con las condiciones objetivamente necesarias, pero por lo general esto no sucede en situaciones de aprendizaje, pues con frecuencia sólo se toma parte de las condiciones objetivamente necesarias y otras veces se incluyen condiciones que no están en la situación abordada, pero que se asumen del contexto cultural en donde se desenvuelve la acción, o de la experiencia personal histórica con el objeto de la acción. Las operaciones son los modos por los cuales se realiza la acción.

La actividad de estudio. Si al resolver un problema coinciden el objetivo y la motivación del estudiante, divisando caminos de desarrollo y de solución, la tarea se convierte en actividad, es decir, se ha hecho significativa y retadora. En consecuencia, se ha convertido en una *tarea vital* al poderse fiar de su capacidad para resolverla. Así pues, cuando la tarea se ha convertido en actividad, ésta es *actividad de estudio*.



La forma de la acción “caracteriza el grado (nivel) de apropiación de la acción por el sujeto: el aspecto principal de los cambios de la acción en el camino de su transformación de externa (material) en interna (mental). Desde el punto de vista de la forma, puede ser material, verbal externa y mental. Dicho en otras palabras, la forma de la acción caracteriza la medida de la interiorización de la acción” (Talízina. 1988, p. 60).

Veamos las tres formas fundamentales de la acción: la forma material o materializada de la acción es la de partida. Consiste “en que el objeto de la acción se da al estudiante en forma de objetos reales (forma material de la acción) o en forma de modelos, esquemas, dibujos lineales (forma materializada de la acción)” (Talízina. Op. it., p. 61). La primera forma se hace visible cuando los niños interactúan con el *material didáctico* (ábaco, tangram, tetrábolos) y la forma materializada cuando abordan *situaciones problema* especialmente preparadas para este fin.

La verbalización de la acción se exige de manera categórica a los jóvenes, para que el objeto de la acción sea representado de forma verbal externa – oral o escrita. En esta forma “el proceso de transformación de la acción transcurre en forma verbal externa, en forma de razonamientos en voz alta o describiendo su marcha, adquiriendo el carácter de teórica” (Talízina. Op. it., p. 61). Ésta sólo es accesible a la observación, a través del análisis etnográfico a partir de la toma de registros en el lugar y momento en que se producen.

Como en el proceso de asimilación de esta nueva forma de acción el alumno se debe orientar tanto a su contenido como a su expresión verbal externa, orientarse únicamente a uno de estos dos aspectos hace que la expresión verbal externa resulte defectuosa. Si se orienta al contenido, sin reflejarlo en el lenguaje, sólo será capaz de realizar un círculo de tareas prácticas. Si sólo se orienta a la forma verbal, esto es, saltando la formación material de la acción y/o sustituyéndola de manera inoportuna, se expresará un formalismo hueco, con expresiones verbales de valor incompleto. Hecho que se hace habitual y que conduce a la reducción de la acción del sujeto a un círculo de tareas prácticas estrechas.

Es necesario aclarar que la reconstrucción de la acción en forma verbal externa no significa explicar cómo hay que actuar; es necesario realizar, *consumar verbalmente las cadenas de acciones simbolizadas e imaginadas, reflexionando y fundamentando sus vínculos.*

En la forma verbal, la acción cambia cualitativamente; el alumno se debe orientar tanto al contenido de lo que es objeto de conocimiento como a la

conocimiento matemático escolar, que tienen como requisito la construcción de contextos culturales escolares matemáticos.

Dichos contextos se configuran con base en las diferencias cognitivas que los estudiantes ponen en juego en las interacciones comunicativas (ya sean individuales, en equipo en plenaria, en la interacción con el maestro), en los roles de participación y construcción que se asumen, en la asunción de reglas de interacción social pactadas o convenidas de manera tácita pero consciente –con base en unas expresas y condicionadas por el sistema de enseñanza– por la emulación del trabajo individual y/o colectivo; competencia en la agudeza analítica y/o deductiva, en torno a lo que se ha tomado como objeto de discusión y comprensión y que constituye la finalidad de la interacción comunicativa y no a la persona trocando contextos o argumentos en el ámbito de la confrontación personal.

Evolución del problema de investigación

Se tenía una comprensión inicial del papel del lenguaje dentro del pensamiento matemático y, al mismo tiempo, de una herramienta para intervenirlo: *la formación por etapas de las acciones mentales*. De ésta se rescata un gran potencial de intervención didáctica, *la realización verbal de las acciones*, que en principio podría fomentar la producción de discurso, además de perfilarse como:

- Estrategia para hacer visible los procesos de apropiación del conocimiento.
- Instrumento para la construcción de los objetos del conocimiento matemático.
- Posesión en su funcionamiento de un potencial cognitivo y de desarrollo cultural.

Esta postura didáctica se fue decantando con el tiempo. Primero fue necesario contar con el límite de esta estrategia para conocer mejor: de una parte, difícilmente se trascendía la descripción de objetos y acciones, lo que genera en el estudiante una pérdida de sentido y motivación por esta práctica verbal; por la otra, existe una tendencia hacia su mecanización, lo que posteriormente dificulta el traslado de la acción de la forma material o materializada a la verbal.

Retomando los referentes teóricos

Desde el punto de vista teórico fue muy útil contrastar que la acción posee dos características fundamentales: *la forma y la estructura de la acción*.



mirar las operaciones y los procedimientos matemáticos de otra manera, es decir, se desprenden del problema concreto (número de discos) para mirar las cantidades como objetos matemáticos y preguntarse entonces por la relación entre ellos.



MARCO TEÓRICO

Enfoque investigativo

Hemos asumido el enfoque de la investigación cualitativa en educación que toma elementos tanto de la investigación acción como de la etnografía, constituyendo una forma de indagación autorreflexiva e interpretativa de los constructos de los estudiantes en actividades de resolución de problemas en equipo.

Este enfoque se hace a través de dos lentes: una, la relación lenguaje-pensamiento abordada mediante la verbalización de las acciones. La otra, la formación de una cultura matemática haciendo seguimiento a las imágenes de conocimiento matemático reveladas en las sesiones de trabajo, en las cuales se asumen roles sociales, surgen "líderes" de las discusiones o se alternan para desarrollar cadenas de razonamientos, en la solución parcial de un problema. En éste se interpretan datos, o conjuntos de datos, se hacen nuevas miradas al mismo asunto y de común acuerdo se hacen nuevas propuestas de solución.

Esta lente verifica la forma como se valida el conocimiento desde el punto de vista de la interacción social y comunicativa, destacando la capacidad de argumentar y contraargumentar en el ámbito de las matemáticas. Los argumentos o razones por fuera de este ámbito son objeto también de seguimiento, para comprender su "lógica oculta" que sirve de contexto y sustrato necesario para desarrollar el pensamiento matemático escolar de los jóvenes.

El estudio demostró que bajo estas condiciones de trabajo cooperativo no sólo se elaboraban situadamente las relaciones matemáticas, y con ellas la comprensión consciente de los conceptos matemáticos objetos de estudio, sino que era posible producir conocimiento escolar nuevo. Esto hace reconocer la existencia del conocimiento científico escolar matemático como categoría distinta de conocimiento científico matemático.

Sin duda, en la elaboración histórica del conocimiento científico aparecen analogías, pero hay evidencia de noveles caminos de construcción de

hacia el pensamiento algebraico, a partir de situaciones problema diversas, presentadas a los estudiantes; el material se toma de los contenidos de matemática de los grados 6°, 7° y 8°.

Como eje de investigación se asume la relación lenguaje-pensamiento, y en particular lenguaje-pensamiento matemático; en niños que estudian en instituciones oficiales del Distrito Capital y que han asistido, paralelamente y durante los mismos períodos escolares a nuestras sesiones de trabajo en jornada contraria.

Las discusiones en torno a la complejidad de la educación nos han persuadido de que ésta no es sólo una tarea técnica de procesamiento de información, ni siquiera una cuestión de aplicar en el aula teorías del aprendizaje, sino que "... es una empresa compleja de adaptar una cultura a las necesidades de sus miembros, y de adaptar sus miembros y sus formas de conocer a las necesidades de la cultura" (Bruner. 1997, p.62).

Problema de investigación

Consiste en indagar los tipos de elaboración verbal de las acciones logradas por los niños durante la construcción del conocimiento matemático, en situaciones de cooperación social.

Como contexto de investigación se pregunta: ¿Cómo pasan nuestros niños de una situación de no discurso sobre el conocimiento, a la elaboración del discurso matemático escolar?

La innovación

En particular se ha asumido como estrategia de gestión del conocimiento lo que denominamos: *la verbalización de las acciones*, para indagar los tipos de discurso elaborados en la construcción de conceptos matemáticos dentro del contexto de una actividad de estudio.

Desde el punto de vista de la gestión del conocimiento escolar, *la exigencia de verbalizar la acción en forma oral y escrita* –en la elaboración del conocimiento matemático–, tiene como fin:

- Reconstruir la acción en forma verbal externa, posibilitando el registro y análisis de los procesos de elaboración y apropiación del conocimiento matemático escolar por parte de los jóvenes, tanto individual como colectivamente.
- Desarrollar lenguaje matemático escolar, es decir, hacer discurso escolar matemático; lo que implica la presencia de otros y, por lo tanto, de la elaboración

UNA EXPERIENCIA DE AULA: LA VERBALIZACIÓN DE LAS ACCIONES EN EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO ESCOLARIZADO¹

El Anillito: Cultura Matemática en la educación básica

Vladimir Torres A.
Beatriz Espinosa B.

La presente investigación se desarrolla dentro del marco de una propuesta de trabajo pedagógica que propende a la formación cultural en matemáticas de estudiantes de quinto grado de educación básica²; este proyecto se ha desarrollado en Santa Fe de Bogotá, en el Colegio Distrital San Francisco, con financiación del IDEP para el año 1997.

La experiencia de aula muestra los momentos de tránsito que van desde una situación de no discurso a la elaboración del discurso matemático escolar. Se indagan los conceptos de realización verbal y verbalización de las acciones logradas por los niños durante la construcción del conocimiento matemático en situaciones de cooperación social. Se presenta una aproximación a los tipos de elaboración verbal realizadas por los niños. Se hace especial seguimiento al ambiente de aula que se genera y configura con cada sesión de trabajo, y al papel del lenguaje en el desarrollo de competencias cognitivas en matemáticas, en particular se muestra el carácter cultural del desarrollo de dichas competencias. Finalmente se presentan algunas conclusiones sobre el carácter cultural de la práctica pedagógica y el papel del lenguaje en el desarrollo del pensamiento matemático.

Se parte de los conceptos espontáneos y cotidianos que sobre la comprensión de las relaciones matemáticas fueron introducidos por las situaciones de aprendizaje, y que marcan el pasaje del pensamiento aritmético

* El informe final de esta investigación se encuentra en el Centro de Documentación del IDEP.

¹ Se refiere al proceso de formación de estudiantes y de su actividad de estudio, que se desarrolla en el contexto de una propuesta pedagógica adelantada con la S.E.D. y que involucra la organización del espacio, del tiempo y de las actividades escolares de los niños del *Anillito*.

² Son 60 estudiantes que han cursado quinto grado en tres escuelas del Distrito y que estudian en el Colegio Distrital San Francisco, jornada tarde.