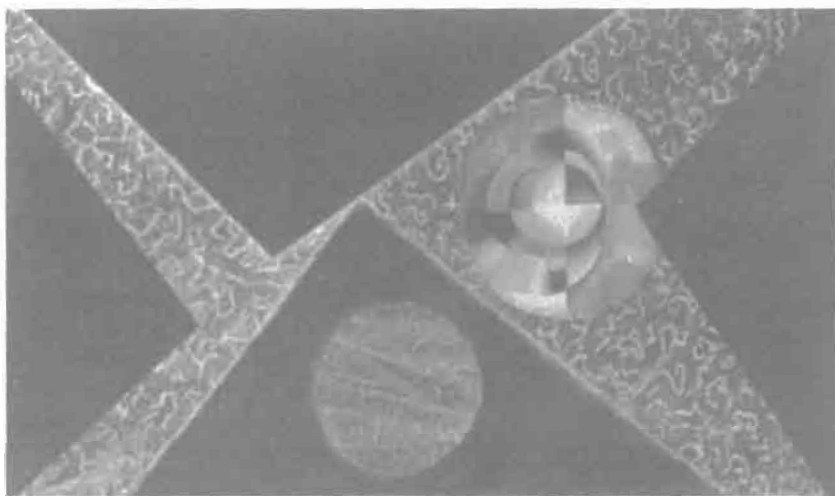


INVESTIGACIONES E INNOVACIONES DEL IDEP



INVESTIGACIÓN SOBRE CONSTRUCCIÓN DE CONCEPTOS EN EL AULA

CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE ÁREA EN ESTUDIANTES DE QUINTO Y SÉPTIMO GRADO*

María Agustina García
Carmen Elisa Saavedra
Doris Garzón

La escuela tiene la responsabilidad de racionalizar el mundo cotidiano y preparar al individuo para mejorarlo. El cambio que se debe dar en las puertas del siglo XXI no es cuestión puramente visual ni auditiva, sino que tiene el carácter de formal, aunque no en todos los casos es tangible, pero sí sufrible en todos. Para hacer esto se requiere moverse en el mundo científico; no es cuestión mecánica ni artesanal. La escuela debe preparar al individuo para moverse en el mundo cotidiano y en el científico. Los trabajos de este ámbito requieren dar cuenta de estos ires y venires en los dos mundos.

En la escuela, el concepto de área y los sistemas de medida para hallar el área se han visto como iguales. Este trabajo aborda de manera estricta el concepto de área, con una perspectiva netamente de trabajo escolar. Esto es, pensar en qué es el concepto de área sin tener en cuenta sistemas de medición ni expresiones algebraicas, es mirar antes de los sistemas de medición que hay, qué llevó al hombre a crear sistemas de medida, porque en los textos de Matemáticas el cálculo de áreas se enfoca en determinado tipo de figuras.

La creación y manejo de sistemas de medida y expresiones algebraicas puede ser tema de otro trabajo.

La *Educación Matemática* tiene una tarea especial: crear condiciones didácticas y pedagógicas para que el avance en el conocimiento de la humanidad esté, con la mayor claridad, al alcance de todos los estudiantes. Sin embargo, es imposible abordar completamente la amplia cantidad de temas que el hombre ha desarrollado, restándole importancia a la mecanización. Entonces ¿qué hacer? La tarea se vuelve más específica: es encontrar la forma de enseñar la lógica del concepto a abordar. En este trabajo la tarea es saber cuáles son las bases que desarrollan la estructura del pensamiento en la medición, y proponer los momentos y el orden lógico de éstos para medir el área de una región cualquiera, empleando diferentes patrones.

* El informe final de esta investigación se encuentra en el Centro de Documentación del IDEP.

Los siguientes son aspectos que vale la pena aclarar desde un comienzo:

- El hombre estructura su pensamiento basado en las acciones que le sean permitidas hacer en el momento adecuado.
- El docente dirige el trabajo; la actividad sin una clara dirección pierde su sentido y puede aparecer como simple o extremadamente compleja.
- El hombre aprende más en grupo: es en la discusión con pares en donde estudiantes que manejan el mismo nivel de representación, por más que sea de cuestiones muy cotidianas, avanzan sobre el conocimiento de una temática determinada. El trabajo del docente es propiciar las condiciones para que el individuo busque nuevas formas de argumentar en estas socializaciones.
- La escritura se convierte en una herramienta para compartir los avances, por ello se presentan análisis sobre este aspecto.

La primera parte de este trabajo contiene algunos de los resultados de la aplicación de una prueba inicial. En la segunda parte se presenta una visión del proyecto; luego, se describen actividades conducentes a la concepción de la superficie, más adelante se aborda la representación de la superficie; en seguida se presentan y analizan las actividades para determinar el área como la medida de la superficie.

En este documento se muestra un resumen de las actividades y los análisis que se llevaron a cabo para la construcción del concepto de área.

Prueba inicial

Se aplicó una prueba inicial con base en un trabajo realizado por Hutton (1978)¹ con la cual el autor deseaba establecer, en estudiantes de once años con una capacidad de aprendizaje normal, cuál era el manejo de la conservación del área.

Figura N° 1



La prueba se basó en una realizada por Piaget e Inhelder en 1957, que consistía en comparar el área de las figuras para determinar la claridad en la conservación de esta.

A continuación se describe la prueba aplicada:

Propósitos

- Conocer el significado de las figuras para los estudiantes.

- Explorar en los estudiantes los preconceptos² de área y de perímetro.
- Indagar acerca de la conservación de área³.

Materiales: dos paquetes con fichas elaboradas en cartulina, los paquetes se diferencian solamente en que uno contiene fichas blancas o de un solo color, y el otro fichas multicolor como aparecen en la figura #2. Equipo de filmación. Hojas en blanco.

Las preguntas son

- a) ¿Cuál gráfica es más grande?



Figura N° 2

Formas en que respondieron

Los estudiantes de séptimo grado:

TIPOS DE RESPUESTA	PORCENTAJE
A. Son iguales.	36%
B. Una es más grande que la otra. Discriminado:	64%
• La una es más grande que la otra aunque sean hechas con las mismas fichas.	13%
• Una ocupa más espacio que la otra.	21%
• Lo refiere a las cualidades ancho, alto.	25%
• No dan razones.	5%

Tabla 1

² “Son las nociones asignadas por los niños a los primeros signos verbales cuyo uso adquiere. El carácter propio de esos esquemas consiste en mantenerse a mitad de camino entre la generalidad del concepto y la individualidad de los elementos que lo componen”. (Piaget. 1960, p. 152).

“Todos ingresan al salón con conceptos previos, a éstos se les llama infraestructura conceptual” (Subiría, p. 79).

³ “La conservación constituye una condición necesaria para todas las actividades racionales”. “Una vez construida la conservación, se basa sencillamente en la identidad” (Subiría, p. 79).

Respuestas de los estudiantes de quinto grado:

TIPOS DE RESPUESTA	PORCENTAJE
A. Son de igual tamaño. Discriminado así:	40%
• Porque sí.	15%
• Porque las dos son del mismo tamaño.	25%
B. Son de diferente tamaño. Discriminado:	60%
• Porque una de las cartulinas tiene un centímetro más que el otro.	57%
• El rectángulo tiene más ángulos.	3%

Tabla 2

Al analizar las respuestas se categoriza en dos grupos, como sigue:

1. Son de igual tamaño

La igualdad se observa bajo tres aspectos: la forma, por el espacio ocupado, por las partes que se usan para hacer el todo.

Justifican la igualdad de la siguiente manera, entre otras:

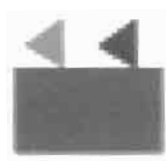
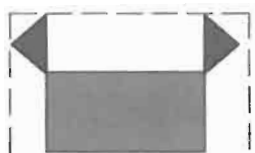
- “Las dos son iguales porque la forma es igual”.
- “Las dos figuras son iguales porque ambas están ocupando el mismo espacio”.
- “Son de igual tamaño porque abarcan el mismo espacio”.
- “Yo creo que ambas figuras son iguales porque cada ficha es igual a la otra”.

Los estudiantes están pensando en el objeto que están representando, aunque tienen conciencia sobre que las fichas que utilizan para armar las figuras son de igual tamaño. Al observar lo filmado en clase, las indicaciones con su cuerpo permiten pensar en esto. No hay discriminación de cada una de las fichas para compararlas en forma explícita, se efectúa la comparación aunque no en detalle, no hay pensamiento relacional. Las fichas son sólo herramientas, no elementos que ameriten estudio especial por parte de los estudiantes. Lo que tiene importancia es el objeto que con ellas se construye. Es interesante observar cómo los niños ven totalidades y el énfasis que ponen en la forma y el espacio que ocupa la figura.

2. Son de diferente tamaño

Algunas de las respuestas presentadas son:

1- *“La forma de unos cuernos porque abarca más espacio”.*



2- *“Hay algo que le da ventaja.*

El rectángulo de arriba le da ventaja a la T”.



Cuernos de toro



El barco

3- *“La figura más grande es la a) porque contiene más longitud”.*



a)



b)

Figura Nº 3

En los casos 1 y 2 las figuras se consideran cerradas. Ese espacio se respeta, ahí *no cabe* otro objeto. En el caso 3 la referencia pareciera estar dada por el perímetro.

Las observaciones de los estudiantes están referidas al objeto y no a la figura que lo representa. Esta afirmación se basa en la forma como los estudiantes mueven su cuerpo para indicar que es algo que tiene volumen; alzar las manos para comunicar su idea a los compañeros con los que están trabajando y la forma como nominan en la hoja de respuestas nos permite decir que, para los estudiantes, el centro de estudio es el objeto tridimensional y temporal, no la figura. A diferencia de la categorización anterior, las fichas como tales tienen importancia por la forma en que se coloquen. Cuando

hacen el gráfico sobre la hoja no son fieles a la forma de las fichas entregadas, sino al objeto que querían representar.

b). ¿Cuál tiene más área?

Las respuestas a esta pregunta tienen porcentajes parecidos a la pregunta anterior. Un ejemplo de la justificación de su respuesta, es:

Una de las gráficas tiene mayor área que la otra:

Figura 1

Figura 2

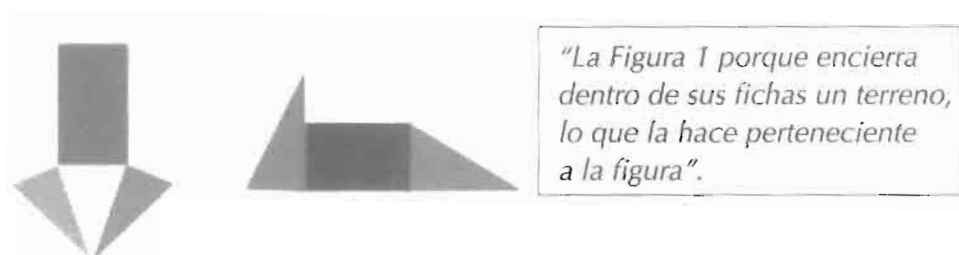


Figura Nº 4

Cuando estos estudiantes responden la primera pregunta, dicen que las figuras son iguales. Cuando comparan el área consideran la figura conformada por las fichas y la región limitada por los bordes de éstas. En la Figura 1 no hay huecos, miran el plano ocupado o encerrado por las fichas, no las fichas.

- "La (1) es más grande que la otra porque ocupa mayor espacio". La respuesta se refiere al objeto en la realidad, y no a la figura que lo representa.
- "La una es más grande y la otra es más ancha, tiene mayor longitud". El área es considerada con respecto a una dimensión de la figura.
- "La una es mayor que la otra".



Figura Nº 5

3 ¿Cuál tiene más perímetro?

TIPO DE RESPUESTAS	PORCENTAJE
A. No entiendo la pregunta.	36,36 %
B. La una tiene mayor perímetro que la otra.	45,45 %
• Hacen referencia a lo ancho o alto.	30,30 %
• La posición hace que se vea así.	6,66 %
• No dan razones.	8,49 %
C. Si el área es la misma, el perímetro también.	18,19 %

Tabla 3

La respuesta de los estudiantes de quinto grado respecto al perímetro es unánime: no sabemos.

Respecto a la figura

TIPO DE RESPUESTAS	PORCENTAJE
1. No dan nombre.	7,69
Dan nombre.	92,31
2. No hacen gráfico.	0,85
3. Nominan en la respuesta pero no en la figura.	6,83
4. Se refieren a la figura por nombres de objetos: casa, barco.	67,54
5. Se refieren como: la Figura 1, Figura 2, Figura a, Figura b.	17,09

Tabla 4

Consideraciones generales

Los términos *área* y *perímetro* no son reconocidos por la mayoría de estudiantes. Se asocian con una medida sin tener claro con relación a cuál, y sin hacer referencia a la cantidad. Por tanto, estos conceptos no se consideran como objeto de estudio y por ende, la conservación del área no se presenta.

El tamaño de la figura se explica haciendo uso del cuerpo. Las formas como justifican sus respuestas están dadas por el movimiento de sus manos más que por la palabra; se hace referencia al cuerpo que se representó, no a

la figura con forma de un cuerpo determinado que tienen sobre la tapa del pupitre.

Antes de abordar el concepto de *área* se requiere la identificación de la característica de los cuerpos que está asociada con ella, hablamos aquí de, *la superficie*. Éste es el punto inicial para la construcción del concepto de *área*, sin ello estamos hablando en vano. La prueba no está diseñada para determinar las aproximaciones que tiene el estudiante a la frontera de un cuerpo. Se requiere hacer una indagación sobre la forma como los estudiantes la están percibiendo.

La figura no es objeto de estudio por parte de los estudiantes, por ello es necesario el diseño de actividades que lleven a la figura a ser un elemento de estudio. Si la figura no tiene significado, los análisis que se hagan desde ella pueden ser perdidos. Se espera empezar los trabajos sobre *área* y *perímetro* a partir de la figura.

El concepto de *perímetro* es casi desconocido.

No hay gran diferencia entre las respuestas obtenidas en 5º y 7º en la primera pregunta.

Visión del trabajo

El análisis realizado marca la forma de encauzar el trabajo, tanto desde la didáctica como desde la matemática misma.

1. El trabajo escolar se divide en dos, puesto que el entorno de los estudiantes de quinto grado es diferente al de los de séptimo. A pesar de ver avances en estos últimos respecto a las matemáticas en este tema, no podemos abordar los conceptos de la misma manera. La edad y las vivencias de todo tipo definen una forma diferente de acceder al conocimiento.

2. Las actividades planteadas apuntan a la construcción de los diferentes niveles de acercamiento al concepto, niveles que permanecen en los dos grados (5º y 7º).

3. Cada actividad brinda al estudiante el descubrimiento de una relación nueva, una nueva manera de hablar del objeto y la pregunta que se hace en cada actividad posibilita colocar al estudiante en el plano de desarrollo conceptual. Es importante anotar que no se han dejado al libre albedrío las disquisiciones que hacen los estudiantes, sino que es el maestro el que direcciona el "descubrimiento" con la pregunta que formula y con la unificación de las conclusiones a las que llega el grupo.

4. Se presenta un análisis desde la parte de las matemáticas como desde lo didáctico, sin perder la perspectiva que nos da el análisis para encontrar unas etapas que desde esta propuesta muestren la construcción del concepto de área en la *matemática escolar*. Por todo esto, esperamos, como resultado del proyecto, dar forma a una ESTRATEGIA DIDÁCTICA que posibilite la construcción del concepto de ÁREA.

La planeación de las actividades busca que al término de cada una se realice una socialización del trabajo adelantado, que tiene el carácter de apoyo puesto que se permite la discusión entre pares y se brinda la posibilidad de aportar algo, en la medida que se plantean las discusiones; la socialización da para que la discusión tenga el nivel que los estudiantes puedan comprender y no el del maestro. Esto debe llevar a generar actividades científicas positivas en los estudiantes.



MARCO TEÓRICO

Niveles de representación y construcción de conceptos

Los conceptos de área y perímetro se pueden construir por niveles de representación. Cada nivel debe convertirse en un objeto de estudio. Vale la pena aclarar que se está entendiendo como objeto de estudio, porque éste será el elemento que a trabajar a través de la estrategia didáctica que se construirá.

Un objeto de estudio es aquel elemento que para el estudiante termina siendo SUJETO en sus observaciones; debe tener características que lo definan como tal:

1. El objeto debe tener permanencia, debe tener independencia sensorial para el individuo que lo estudia. Sabe de su existencia aunque no lo toque. Los “cuernos de toro” no están en el salón, pero el niño sabe que puede hablar de ellos, que sus compañeros saben que existen, que los pueden encontrar en su mundo.

2. La persona debe tener la capacidad de describir el objeto de estudio. Hasta el momento es lo que hace que para el estudiante el objeto sea real y no apariencia. Puede decir cuáles son sus elementos y cuáles no, dónde termina el objeto.

La función de la escolaridad en matemáticas es crear los objetos de estudio en los estudiantes. Éstos son los *objetos matemáticos*. Es crear el interés por

estudiar ese nuevo objeto, que en cada nivel se transforma, que puede partir de lo inmediato. Lo perceptual pasa por momentos como el del reconocimiento como tal, ese reconocimiento se da porque le está dando información de algún tipo a la persona, cualificación de la información que pueda dar y escritura de ésta que no es más que una forma de representar el objeto. Escritura que tiene nominación, gráficas y de nuevo nominaciones que lo acercan cada vez más a aquellos objetos que no tienen ni tiempo ni espacio, pero que se modifican y se recrean en la mente del ser humano para dar nuevas explicaciones de la realidad.

La tarea que está por realizarse en el aula consiste en que por cada nivel de representación se destaquen estos dos elementos: una independencia de la percepción inmediata, es decir la permanencia del objeto, y la descripción del objeto.

¿Cómo se concibe la superficie de los objetos?

En dónde hay superficie

Como resultado de esta estrategia con los estudiantes de 5º y 7º grado, la primera vez que aparece la palabra superficie, por ejemplo, es para indicar el lugar brillante de la hoja de un árbol; la parte donde le da el sol, o la parte superior de un objeto.

Los argumentos de los estudiantes para considerar sólo una parte como la superficie está referida a que les “dé la luz”, “que quede hacia arriba”, “que sirva de soporte al cuerpo”. Esto se debe a que los bordes de las hojas son muy delgados y el niño termina despreciándolos, o bien diciendo que no tiene superficie porque no sirve para sostener el objeto. Lo que existe para el estudiante debe ser útil, por ello en los primeros momentos no les importan estos lugares.

La posición del objeto juega un papel importante. Asumir que las caras laterales también forman parte de la superficie es más demorado. Se repitió el ejercicio con una piedra muy irregular y con un pitillo. Se hizo en varios grupos y las respuestas fueron similares.

Con objetos en los que se ha hecho énfasis en un primer momento priman las caras planas, se pasa a objetos redondos: se pide hacer referencia a la superficie de este último tipo de cuerpos. En forma unánime manifiestan que “no tienen superficie” y la justificación es “porque son redondos”, cuando se les cuestiona sobre su respuesta, callan; luego “son redondos”; probablemente porque la extensión plana que queda en los puntos más altos y en donde descansa, es lo suficientemente pequeña para no ser tenida en cuenta.

ETAPAS DE LA CONCEPCIÓN DE LA SUPERFICIE

	SINTAXIS	SEMÁNTICA	PRAGMÁTICA	JUSTIFICACIÓN
1			La idea de superficie no se manifiesta en los estudiantes.	No se piensa, ni les impresiona
2	Se indica.	Brilla, fácil de tocar. Los objetos redondos no tiene superficie.	La ubican en las partes amplias de forma plana de los cuerpos, y que estén en la parte superior.	En la parte donde la da el sol. Los lugares redondos no tienen espacios claramente definidos.
3	Se indica.	Aunque no brille, ni esté en la parte superior, existe.	Voltean el cuerpo y ven que también tiene superficie en otras partes.	Es lo amplio porque sirve para sostenerse.
4	Se le indica con su nombre.	Imaginan que pueden transformarla. Está en el objeto y se observa bajo ciertas reglas.	La ubican en cuerpos redondos, arrugados.	Se podría convertir en una superficie plana.
5	La superficie dice hasta donde va el cuerpo.	La superficie se califica.	Amplían los lugares en que se ve la superficie.	La entienden como algo que permite saber dónde termina un objeto.
6	La superficie es "la piel de los cuerpos".	La superficie está en los objetos, de ella se puede hablar.	A la superficie se le asignan atributos.	Hay clases de superficie.
7	La superficie es un objeto que puede estudiarse.	Establecen relaciones entre las superficies de los objetos.	La superficie de la batería es más fuerte que la de las maracas.	Está ligada a su experiencia en el uso de los objetos en los que se ven la superficie.

La superficie está definida por lo que se maneja en lo cotidiano, la superficie necesita tener “cierta” extensión para que sea aceptada como tal. El trayecto para que los estudiantes de 5º grado vean la superficie en todas las caras del objeto es un poco largo, se requiere realizar unas dos actividades para que la superficie de los cuerpos sea reconocida en su totalidad, sin que sea estrictamente para reconocerla sino más bien incluirla en otra que permita la ampliación de los lugares donde puedan ver la superficie. Se trabaja con otros cuerpos como un vaso, una piedra, una hoja de papel.

Tanto en los estudiantes de 5º como en los de 7º el primer momento de la concepción de la idea de superficie está identificado inicialmente en objetos con caras planas extensas, luego en objetos con formas redondeadas y por último en objetos con caras de poca extensión. En un segundo momento se refieren a la superficie señalándola en el objeto, atribuyendo la superficie como cualidad del objeto y calificando la cualidad superficie, es decir, que esta cualidad pasa de ser predicado a ser sujeto del cual se va a predicar. Por esto el estudiante describe la superficie hablando del color, forma, tamaño, material y funcionalidad. Los estudiantes de 7º grado incluyen la superficie como una cualidad de los cuerpos, después de realizar una actividad que permite fijar la atención en la frontera de éstos, identificándola en cuerpos macizos o huecos. Para ellos es más sencillo reconocer la superficie en cuerpos con caras planas, pero se percibe cierto grado de dificultad, no con la misma intensidad que en los niños de diez años, al identificarla en los objetos redondos. El concepto de superficie está unido al objeto que el estudiante conoce, lo cual implica que se refiere a lo tangible, a que se debe poder tocar o romper. Las expresiones usadas por los estudiantes de 5º y 7º grado son muy parecidas.

La representación de la superficie

En la construcción del concepto de área hay un paso entre la descripción oral de la superficie y la asignación de la cantidad que determina cuál es su medida. Este paso es la descripción bajo una gráfica. Esta nueva forma de describir implica la creación de un nuevo lenguaje. Necesitamos pasar de un dominio oral al dominio de la escritura. La figura permite mirar, leer el atributo una y otra vez sin ambigüedad, empezar a pasarlo a un objeto netamente mental. Se necesita definir qué se entiende por figura.

Pasar de los señalamientos de la superficie del objeto a observarla sin el objeto, equivale a pasar de la oralidad a la escritura, como bien dice Olson: “La magia de la escritura proviene no tanto del hecho de que sirva como



nuevo dispositivo mnemónico, como ayuda para la memoria, sino más bien de su importante función epistemológica. La escritura no sólo nos ayuda a recordar lo pensado y lo dicho; también nos invita el ver lo pensado y lo dicho de una manera diferente” (Olson. 1994, p. 16). La magia de la figura no sólo nos dice si es de forma alargada, o si es de color café o suave, sino que deja de ser bonita y se convierte en objeto de estudio de la matemática. La superficie no es plana ni curva. Toda superficie plana tiene fronteras diferentes.

La figura lleva a perfeccionar una definición y a dar argumentaciones lógicas a sus acciones. Esto es un paso más en el desarrollo formal del conocimiento. Así, la verdad sobre las observaciones se basa en los acuerdos de cómo se representan los atributos de los cuerpos, en nuestro caso la superficie (Russell. 1983, cap. XIX). La autoridad aparece independiente del docente o del texto, la autoridad es la representación lógica de una cualidad del objeto. Aquí no se persuade sino que se convence. Se reemplaza la lógica de la discusión por la lógica de la indagación. Ong dice con relación a la escritura y que aquí es tangible, “No es el arte del discurso sino el arte del pensamiento” (Ong. 1982, p. 129). Esto mismo es atribuible al esfuerzo que se hace para llevar la superficie a una gráfica. Es llevarla a ser ella misma, sin estar atada a un cuerpo. Esto es crear un nuevo objeto de estudio: la figura que representa la frontera de un cuerpo. Se requiere hablar de la superficie sobre el papel, no se niega el objeto, sino que se le da importancia a la figura.

Por lo general en el aula se asume que todos los estudiantes representan los atributos de los objetos de la misma forma, y cada una de las formas como se grafica la cualidad nos dice como lo está viendo la persona, nos da una indicación de su avance.

Una de las actividades encaminadas a la representación de la superficie, está propuesta para representar la superficie de un vaso.

Conviene considerar las diferentes formas de representación que surgen en la actividad planteada. Entre las más relevantes, tenemos:

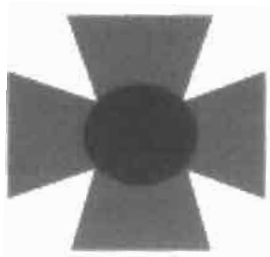
Figura N° 6



Figura N° 7



Figura N° 8



a)



b)

En el último gráfico el vaso se corta en forma horizontal respecto a la base de éste. La parte superior se muestra en la Figura b y la inferior en la Figura a. Es interesante que al representar la superficie se utilicen las partes como apoyo para calcar. El detalle de construir un vaso “más pequeño” que quepa en la hoja, no es otra cosa que buscar seguridad en lo que está representando. La actividad de calcar no es trivial ni intrascendente porque media la decisión sobre la forma en que ubica el objeto, con las partes a y b que desea tener en cuenta para representar la superficie, busca una forma de reversa que lo lleve al objeto original (1998, pp. 26 a 29).

El apoyo que da la socialización es grande, permite que opten por las gráficas clásicas en matemáticas, la discusión hace que le vean las bondades que más adelante facilitarán el trabajo.

Otro aspecto en que se va ganando es la conservación de la superficie sobre la gráfica. Esto se da cuando ellos manifiestan querer copiar las otras representaciones que han hecho sus compañeros. Esta conservación no es sino una forma de presentación de la reversibilidad (Freeze. 1983, p. 186). Es una clara evidencia de conservación de la superficie en el objeto y en la representación que hace de ella. Ellos son los que validan cuáles tienen “problemas” y cuáles no. A medida que se avanza en la representación de la superficie de los diferentes cuerpos se va viendo el uso intuitivo de la proporcionalidad en el gráfico y se va dejando el calcado.

En la actividad anterior el estudiante tenía libertad para representar la superficie de un cuerpo, con la presente actividad se busca dar validez a una representación de una superficie realizada por una persona externa al grupo. Las gráficas no son hechas a gusto de los estudiantes sino que se define una forma de verla, y tratamos de validarla; lo que de entrada restringe la forma de ver el problema.



ETAPAS DE LA CONCEPCIÓN DE LA SUPERFICIE



	SINTAXIS	SEMÁNTICA	PRAGMÁTICA	JUSTIFICACIÓN
1		La frontera se entiende como conjunto de puntos, no necesitan hablar de su espesor.	Los cuerpos tienen frontera sin importar si son huecos o macizos, abiertos o cerrados.	Siempre sabemos en dónde terminan los objetos.
2	Se indica sin importar el color ni la textura.	Mantiene el dibujo en perspectiva, señalan los lugares donde existe superficie del objeto. 	La superficie es reconocida en objetos cercanos al estudiante.	La superficie está por todas partes.
3	El gráfico expresa el atributo: superficie por ejemplo en un vaso. 	Se acepta la diversidad de representaciones como válidas mirando las diferentes formas de desbaratar el objeto.	Sin desbaratar el objeto, "calcan" su superficie.	Las partes de gráfica se justifican como vistas del cuerpo sin desbaratarlo.
4	Las gráficas cobran sentido. Son sujeto. Se reconstruyen sin perder la cualidad que están respetando.	Al comienzo hablan de que algunas de las partes de las gráficas están en desorden, terminan aceptando una segunda gráfica de la representación de la superficie como algo que tiene otra organización.	Reconocen varias representaciones de la misma superficie.	Las diferentes gráficas se aceptan como representaciones de una misma superficie porque hay conservación en ella.

Figura Nº 9



Figura Nº 10

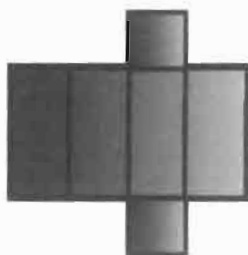


Figura Nº 11



Se plantea una relación entre el objeto y una representación de la superficie del cuerpo. Se analiza con los estudiantes cómo se transforma una de ellas cuando movemos una de sus partes, y sin embargo no ha variado lo que se representa con ella: la superficie del objeto.

Cuando se les propone a comparar las figuras 9 y 11 afirman que las dos son iguales: “es la misma superficie, sólo que están en desorden”. Al pedir que aclaren por qué están en desorden, lo hacen por señalamientos: “Este pedazo ahora está a este otro lado”. Se aprovecha el ambiente para sugerir colocar nombres a las partes con el propósito de hablar de ellas. De inmediato numeran las partes de la Figura 10, se detienen a pensar qué se debería hacer en la Figura 11, y nominan con letras sus partes. Éste es un paso más en el desarrollo de la competencia comunicativa que conlleva al desarrollo del pensamiento matemático. En estos momentos es necesario apoyar la redacción y presentación de las respuestas. Esta tarea debe ser la constante preocupación de la matemática escolar, esta actividad permite pasar a un nuevo nivel de representación.

Para el estudiante, hasta el momento el borde de la figura no amerita atención. Es algo que está ahí sin ser detallada. Es bueno aclarar que cuando cambia la organización de la gráfica, cambia su borde. Por ello poco se detienen a pensar en esto.

El área, la medida de la superficie

La medición es una función de una cualidad o atributo de los números reales positivos (Halmos. 1950, cap. III). El problema está en saber: ¿Cuál atributo? ¿Cómo se ve el atributo? ¿Cómo se define la función? ¿Cómo se expresa el conjunto de números sobre el cual está definida la función? ¿Cómo se comportan los elementos que forman el dominio de dicha función? Estas son preguntas que preceden a la construcción del concepto de área y perímetro.



El trabajo escolar debe llegar a la comprensión de estas reglas básicas para poder adjudicar el número a la frontera de un cuerpo y a la frontera de una figura. Sin ello, las operaciones algebraicas y aun aritméticas que se acostumbra plantear en clase para los problemas de medición, carecen de total sentido. Sin embargo, alcanzar la conciencia de estas reglas exige que haya un trabajo anterior, que consiste en el reconocimiento de las fronteras tanto de cuerpos como de figuras.

Para iniciar la medida de la superficie se hace uso de las gráficas de una de las actividades realizadas, pero se aclara que se omiten las líneas que demarcaban las aristas de los cuerpos.

Se trató de ver la figura en sí misma, sin los cortes internos que quedan al hacer la representación de la superficie por vistas; no hay rastro del cuerpo del cual se representa la superficie y a los estudiantes solamente se les recuerda el trabajo anterior y se dedican a mirar estrictamente la figura.

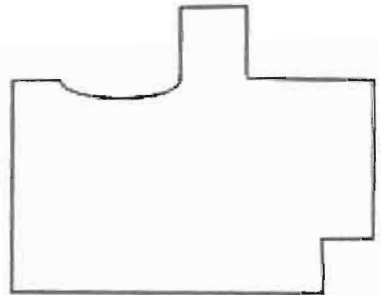
Se les propone la comparación de parejas de figuras en tres momentos; uno de ellos lo referenciamos aquí:

Se pide la comparación cuando en las gráficas priman los bordes rectos y el tamaño de las superficies representadas es visualmente diferente.

Figura N° 12



Figura N° 13



- Los estudiantes invierten tiempo en la decoración de la hoja en la que trabajan.

- Si bien es cierto que no le colocan detalles que la conviertan en un objeto tridimensional, sí la resaltan con colores. Además, se observa que ante la sugerencia de marcar el borde todos lo hacen en forma clara, pero no se refieren a él en todo el trabajo.

- Sólo tres de los estudiantes del grupo no nominan las gráficas. Un estudiante, para hablar de la gráfica, lo hace refiriéndose a la figura por el color que usó para pintarla. Las otras dos personas hacen referencia a la primera y segunda

gráfica y suponen que el profesor sabe cuáles son. Ninguno le pone nombre de objetos sino que las nominan así 1, 2 o bien por Figura N° 12, Figura N° 13.

- Fácilmente establecen cuál de las dos es la que representa mayor superficie. Lo interesante es ver la forma como justifican sus respuestas. Véase Tabla 5.

1.-	Es más ancha, más grande.	9,375
2.-	Largo y ancho de la figura.	15,625
3.-	La una es más angosta o ancha.	9,375
4.-	Por los lados o caras.	9,375
5.-	A simple vista.	3,125
6.-	Por la forma y el tamaño.	15,625
7.-	Porque tiene más superficie, o hace referencia al espacio.	37,5

Tabla 5

Obsérvese que aquí existen dos formas de acercarse al concepto de área de la superficie representada: las respuestas clasificadas como 1- 2- 3 hablan de las relaciones ancho y alto; esto define la forma de ver la magnitud, las respuestas 4- 5- 6- 7 están pegadas a la forma de la figura. Por otro lado, se tiene que el porcentaje que responde a simple vista: 3,1%, es bastante bajo comparado con el 37,5% referido a que tiene mayor superficie o al espacio. Esto nos lleva a pensar que se abre la perspectiva para ordenar por tamaño y determinar las características de las gráficas que permitan expresar su área.

En forma intuitiva, siempre se busca la igualdad. “La cantidad es todo lo susceptible de igualdad cuantitativa con algo”⁴. Éste es el punto de partida para la asignación de la cantidad a la superficie.

Se realizaron actividades encaminadas a construir el concepto de patrón, a cubrir gráficas que representen superficies con patrones de diferente forma y la organización para su conteo.

⁴ Russell Bertrand. “Un doble decímetro es una cantidad: su longitud es una magnitud” ...“la clase de términos que pueden ser iguales reciben el nombre de cantidades y la clase de los que pueden ser mayores o menos se llaman magnitudes” (Russell. 1983, p. 195).



CONCLUSIONES

Tal como se planteó en lo que entendemos como tarea de *la educación matemática*, hay varios aspectos que se deben considerar:

Aspectos económicos

El rubro dedicado a educación no es alto y se puede ver desperdiciado por lo repetido de los temas y la imposibilidad de avanzar a situaciones más elevadas, quedándonos en lo perceptual e inmediato. El trabajo muestra cómo se logra avanzar en la construcción de objetos de conocimiento cada vez más formales, menos tangibles y más universales, que son objetos del mundo matemático. Así la inversión logra dar dividendos.

Aspectos sociales

Uno de los problemas que aqueja a la sociedad es la agresividad, la escuela juega un papel importante, porque es allí donde se validan estos comportamientos, aunque sea en forma velada. Desde el comienzo del trabajo se propuso crear condiciones para desarrollar las actividades en equipo, en otras palabras, desarrollar una ecología comportamental, y un ambiente relacional a las que se hace alusión en la *estrategia didáctica* que ha guiado el trabajo.


Se puede decir que un trabajo enfocado de esta forma ayuda a desmontar la violencia, a educar personas más seguras, bondadosas y tolerantes; apoya el desarrollo de la autoestima y el respeto por la opinión del otro.

Aspectos académicos

Se llega a determinar una base para la construcción del concepto de área, base que hasta donde se conoce no había sido discutida en el aula: la superficie de los objetos.

Este trabajo permite ver la figura como una posible representación de la superficie, le brinda capacidad para crear representaciones de superficie y amplía la capacidad de transformación. Este cambio en la forma de existir la superficie permite ver su conservación sobre la gráfica. Aunque algunos autores hablan aquí de conservación de área nosotros preferimos hablar de conservación de la superficie, porque el estudiante no ha calculado áreas sino que ha representado superficies.

ETAPAS DE LA MEDIDA DE SUPERFICIE

	SINTAXIS	SEMÁNTICA	PRAGMÁTICA	JUSTIFICACIÓN
1	Se establece relación de orden por la magnitud de la superficie.	La superficie representada es la que determina cuál es mayor. Aún hay relación directa con el objeto.	La superficie de un cuerpo se estudia bajo una gráfica.	Como tiene mayor superficie entonces es mayor.
2	La magnitud de la gráfica la definen el largo y el ancho de ésta.	<ul style="list-style-type: none"> - La una contiene a la otra. - Se realizan cortes en las gráficas que permitan comparar. - Las regiones construidas deben ser "iguales". 	La gráfica tiene sentido en sí misma. No se necesita hablar del cuerpo que sirve para representar su superficie.	Establecen relaciones de comparación entre partes que reconstruyen en la gráfica.
3	La relación de orden respecto a la magnitud de las gráficas se hacen bajo una cantidad.	Las relaciones de orden entre gráficas se expresan con la cantidad pero se respaldan con las gráficas.	Se busca organizar los patrones sobre la superficie mejorando el cubrimiento y el conteo.	Los patrones "causan" en la gráficas, si a una le cabe más que a la otra es porque es más grande.
4	No se requiere establecer relaciones de orden para determinar la magnitud de la gráfica.	El patrón se idealiza; su función y propiedades se clasifican.	Toda superficie es susceptible de ser tapizada con un patrón.	Se transforman partes de la gráficas para ajustarles un patrón.
5	La magnitud de la gráfica es una cantidad llamada ÁREA.	La cantidad habla del número de veces que la gráfica contiene un patrón. 23  18.	Busca utilizar el conteo creando rectángulos sobre la gráfica.	Hablar de la magnitud de la superficie de un cuerpo es hablar de la magnitud de la gráfica.

El último gran paso en la construcción del concepto de área lo da la creación de relaciones de orden definidas por la magnitud de las gráficas, que se conservan bajo el uso de diferentes patrones y la asignación de una cantidad de acuerdo con el patrón usado. A este momento lo llamamos *conservación del área*.

Un aspecto a resaltar en el desarrollo del trabajo es que el niño se centra en un solo aspecto nuevo para él. El estudiante le dedica buen tiempo a mirar dónde hay superficie. Querer avanzar y mantener su interés sin que sea él quien marque la pauta, resulta pérdida de tiempo. De la misma forma apareció, entre otras, la primera actividad de tapizado. Se esperaba que tapizara, que estableciera relaciones de orden basándose en los patrones, pero se dedicó a realizar y perfeccionar su tapizado, y luego sí se interesó por la relación de orden.



BIBLIOGRAFÍA

Ama construcción de sistemas lógicos y numéricos. Impresión Novoprint Ltda. Santa Fe de Bogotá D.C., julio. 1998.

FREEZE, Paul. *La inteligencia*. Ediciones Paidós. España. 1983.

HALMOS, Paul. *Measure theory*. D. Van Nostrand Company, Inc. Princeton. Capítulo III. 1950.

OLSON, David R. *El mundo sobre el papel*. Gedisa Editorial. Barcelona. 1994.

ONG, W. *Oralidad y escritura*. Editorial Gredos. España. 1982.

RUSSELL, B. *Los principios de la matemática*. Espasa Calpe. Madrid. Capítulo XIX. 1983.

