SISTEMATIZACIÓN DE UNA EXPERIENCIA DE MATEMÁTICAS CONTEMPORÁNEA EN EL AULA*

Investigador: Ricardo Castañeda Tinoco
Asesor: Dino de Jesús Segura

Formas alternativas en la enseñanza de las matemáticas enriquecidas con las matemáticas contemporáneas

En la actualidad se sigue enseñando en la escuela la aritmética de hace 300 años, el álgebra de hace 1000 años y el cálculo de hace 500 años. Las matemáticas contemporáneas son presentadas ¡cuando se presentan!, como apéndices al margen, curiosidades sin ningún valor y, en muchos casos, sin ninguna relación con la matemática tradicional. Muchas veces, estas matemáticas no se presentan por desconocimiento o porque se consideran demaciado complejas para estudiarse en secundaria. Sin embargo, la realidad es que en ellas se esconde todo un universo de bellas figuras y una serie de conceptos e ideas que pueden ayudar al estudiante a estimular las *vivencias de conocimiento en matemáticas*. En este punto es donde se ubica el proyecto "Sistematización de una experiencia de matemáticas contemporánea en el aula"[1] como una alternativa de hacer matemáticas desde la contemporaneidad, en donde el azar, el caos, la iteración, los sistemas dinámicos, los fractales, las teselaciones, la programación y utilización de los ordenadores se convierten en el centro de la actividad. Además, las matemáticas tradicionales aparecen como particulares, el manejo de algoritmos es una circunstancia que se da en el desarrollo de la optimización de algunos procesos. Lo importante en estas formas de trabajo es llegar a entender conceptos, algunos de vital importancia en los nuevos desarrollos de la ciencia y la tecnología.

El proyecto trata de responder a la necesidad de encontrar nuevas formas de trabajo en la enseñanza de las matemáticas que se adecúe a la evolución y a los

* Esta investigación participó en el convenio 05-96. El informe final se encuentra en el Centro de Documentación del IDEP.

[1] Los diferentes laboratorios y talleres se realizaron en la Escuela Pedagógica Experimental (E.P.E), en los años 1994-1996, en los grados 8º a 11º, con grupos de 23 alumnos, de ambos sexos, con edades entre los 15 y 18 años. La E.P.E es un colegio privado ubicado en el kilómetro 4.5 vía La Calera.

nuevos paradigmas orientados en esta disciplina. Uno de estos nuevos paradigmas gira en torno al concepto de demostración matemática. Los ordenadores están cambiando la utilización de algoritmos. Un ejemplo es el de la *conjetura de los cuatro colores* que afirma que cualquier mapa planar se puede colorear con cuatro colores, de manera que dos regiones contiguas tengan colores diferentes. Esta demostración fue desarrollada en 1976 por Kenneth Apple y Wolfgan Haken. La descripción que hacen estos dos investigadores resulta interesante porque revela cómo su interacción con el programa del ordenador, les enseñó de forma extraña asuntos sobre el problema que no habían previsto. El ordenador asumió el papel de un colaborador casi humano, más que el de una simple claculadora; según sus palabras fue una extensión de su intuición que les permitió más caos de los que normalmente ellos podrían examinar.

La enseñanza de las matemáticas debe responder a los cambios que se generan en ella. Necesita de cambios drásticos, de nuevas ideas y concepciones que respondan a los diferentes avances tecnológicos. La nueva enseñanza de las matemáticas debe dejar los ejercicios con papel y lápiz y en el estudio de las matemáticas contemporáneas utilizar más tiempo la ayuda de los ordenadores; esta simbiosis puede facilitar el desarrollo de significado de muchos conceptos.

La sencillez de esta se encuentra en muchas de la ideas de las matemáticas contemporáneas: sistemas dinámicos, fractales, caos determinista, teselaciones, etc., permite que el estudiante efectúe una "aventura matemática" por estas nuevas temáticas que son importantes en matemáticas, física, economía, biología, climatología, etc.

El proyecto pretende es que el estudiante se adentre en este nuevo universo y lo pueda acometer con elementos de uso común: hojas de papel, lápiz, regla, calculadora graficadora o un ordenador sencillo. Esto es una ventaja para el investigador y para los alumnos y, contradice tajantemente lo que afirman algunos especialistas quienes aseguran que estas temáticas, por su complejidad, requieren de una complicada estructura de conocimientos anterior de acuerdo con la imagen de secuencialidad que caracteriza a la matemática tradicional.

El concepto de matemáticas experimentales empieza a tomar un nuevo y aventurado interés. Los ordenadores se utilizan para explorar el reino de la verdad matemática en forma sistemática y al azar.

Con la existencia de programas de manipulación simbólica como *Derive, Mathematica, Matcad, Matlab*, etc., es posible adelantar investigaciones en matemáticas complejas.

MARCO TEÓRICO

Sistemas dinámicos y el surgimiento del caos

Yo quiero... insistir en que a la gente debería siempre presentársele la ecuación y=kx (1-x) muy al comienzo de su formación matemática. Esta ecuación puede estudiarse fenomenológicamente por iteración, bien con una calculadora, o a mano. En su estudio no se requiere elementos tan conceptualmente elevados como los del cálculo diferencial y, sin embargo, enriquecería mucho la intuición del alumno en lo relativo a los sistemas no-lineales.

ROBERT M. MAY (BIÓLOGO).

En la actualidad existe un creciente interés por el estudio sobre el vínculo de las redes informáticas (redes neuronales, autómatas celulares, robótica) y los sistemas fisiológicos. Esto ha permitido el desarrollo de un nuevo campo de las matemáticas que se conoce como *Dinámica Topológica*. Esta rama de las matemáticas tiene como fin fundamental la descripción de los sistemas con el paso del tiempo. Este estudio ha mostrado que los sistemas gobernados por leyes físicas pueden sufrir transiciones a formas altamente irregulares de conducta que se conocen ahora como *Caos*. Aunque la conducta "caótica" parece aleatoria, está regulada por condiciones deterministas. A esto se le ha denominado *Caos determinista*. En este contexto el "caos" puede ser entendido como orden dentro del desorden.

La forma de proceder para obtener un sistemas dinámico de un fenómeno es descrito por Charles Simón (1987).

1. Identificar variables que describan el fenómeno de la manera más completa posible, de forma que el conocimiento de las mismas, en un cierto instante de tiempo, defina suficientemente fiel el estado del fenómeno observado. Es posible que en muchos fenómenos se pueda llegar a esto.

2. Efectuar mediciones de estas variables. De nuevo se pueden encontrar dificultades insalvables, pero se tendrá un buen repertorio de problemas con los que será posible llegar a este punto.

3. Al estudiar cómo se comportan esas variables a lo largo del tiempo se puede intentar encontrar fórmulas que expresen la variación instantánea de esas variables.

Si hay éxito en los tres apartados anteriores, se habrá elaborado un modelo matemático (determinista y continuo) del fenómeno estudiado. A un modelo

matemático se le denomina también ley física, por ejemplo: la ley de la gravitación de Newton, las ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo, las leyes de la cinética química. Todas éstas leyes no son sino una aproximación más o menos útil, dependiendo del contexto.

La labor de la dinámica topológica es tomar el modelo matemático e intentar sacar consecuencias lógicas del modelo y luego compararlas con la observación directa. Por fortuna, en muchos ejemplos, los experimentos realizados concuerdan con las conclusiones obtenidas usando razonamientos matemáticos (en muchos casos con las conclusiones obtenidas mediante simulación numérica).

Una de las conclusiones más importantes que se genera con el trabajo de los sistemas dinámicos es que "En cierto modo la predecibilidad y la imposibilidad de predecir caben juntas en el mismo conjunto de ecuaciones". Esto sugiere que, dependiendo de las condiciones iniciales, ecuaciones simples pueden producir números que no parecen tener una pauta. Si bien es cierto que las ecuaciones expresan por lo general, relaciones de causa-efecto, los resultados numéricos hacen *pronosticar* que los sistemas modelados pueden mostrar comportamientos caóticos.Este tipo de ecuaciones evidencian la dependencia de estas a las condiciones iniciales. La existencia del caos implica nuevos límites fundamentales sobre la predicción. Además, el caos determinista sugiere que fenómenos durante mucho tiempo considerados como aleatorios, son en cierto sentido más previsibles de lo que se pensaba. En este sentido la afirmación de Laplace en su *Ensayo filosófico sobre las probabilidades* al señalar que: "Un ser inteligente que en un instante conociera todas las fuerzas que animan la naturaleza y las posiciones de los seres que la forman, y que fuera lo suficientemente inmenso como para poder analizar dichos datos, podría condensar en una fórmula el movimiento de los objetos más grandes del universo y de los átomos más ligeros: nada sería incierto para dicho ser; y tanto el pasado como el futuro estarían presentes ante sus ojos", no tiene hoy validez. La predicción no es necesariamente una buena prueba para la teória. La solución clásica de verificar una teoría es hacer predicciones y verificarlas con los datos experimentales. Pero si los datos son "caóticos", las predicciones a largo plazo resultan imposibles, y esto es importante al juzgar una teoría.

Después de esta introducción, se podría decir que un sistema dinámico es alguna situación sometida a cambio; por ejemplo, un movimiento tan ordenado como el de un planeta o tan errático como las fluctuaciones de las acciones de la bolsa de Nueva York. El objetivo es, en últimas, prever el comportamiento de un sistema dinámico.

Matemáticamente, el concepto de sistema dinámico, está ligado con lo que se conoce como composición. El proceso de composición de funciones es básico en matemáticas y uno sobre los cuales se estudia la iteración y se construye el caos. Se puede visualizar la composición de la función *g* con la función *f* como se muestra en la Figura 1.

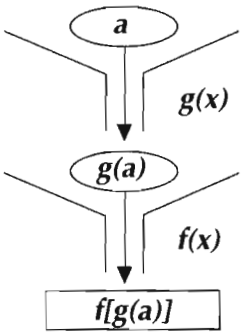


Figura 1

La "maquina" *g(x)* procesa el material *a* para producir *g(a),* luego la "maquina" *f(x)* procesa el material *g(a),* para obtener el producto *f[g(a)].*

La iteración de una función *f,* es el proceso en el cual *f* se compone con ella misma repetidamente; véase Figura 2. El producto se vuelve a pasar a través de *f(x).*

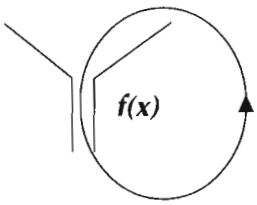


Figura 2

Si x_0 es el valor inicial (semilla de iteración), se obtendría la siguiente sucesión de valores:

$x_1 = f(x_0)$

$x_2 = f(x_1)$

$x_3 = f(x_2)$

Esta secuencia es llamada órbita de x_0. Nótese que los términos de la secuencia tienen que ver con iteraciones (repeticiones) sucesivas de *f.* Para identificar las repeticiones, se escribe:

$f^2(x_0)=f(f(x_0))$, $f^3(x_0)=f(f(f(x_0)))$

y así, el *(n+1)* término de la órbita de x_0, es: $x_n = f_n(x_0)$; nótese que *n* indica el número de veces que *f* es aplicado a x_0.

Ejemplo 1:

$x_0 = 10$

$x_1 = \sqrt{10} = 3{,}16$

$x_2 = \sqrt{3{,}16} = 1{,}78$

$x_3 = \sqrt{1{,}78} = 1{,}33$

Siguiendo esta forma se puede observar que al seguir realizando la iteración, ésta se *acerca* o *tiende* a 1.

Ejemplo 2:

Con una calculadora en modo *radiales*, analiza la órbita de $x_0=10$, para iteraciones de la órbita de la finción $f(x)=2Sin(x)$.

$x_0 = 10$

$x_1 = 2Sin(x_0) \cong 1{,}683$

$x_2 = 2Sin(x_1) \cong 1{,}987$

$x_3 = 2Sin(x_2) \cong 1{,}828$

⋮

⋮

⋮

siguiendo esta secuencia se encontrará que ésta tiende a un valor límite aproximado de 1,895.

Después de esta introducción, es posible realizar algunos talleres para hacer un seguimiento del trabajo que realizan los estudiantes en algunos tópicos como: composición de funciones, funciones iteradas, etc. Estos talleres permiten observar la imágen que tienen los estudiantes sobre el concepto de función y composición de funciones.

A continuación, se describen algunos talleres para adelantar este trabajo. Durante el desarrollo de los mismos se pueden encontrar variantes para mejorarlos, no se pretende que sean inalterables, incluso el profesor puede establecer cambios para adecuarlos a su trabajo.

Composición e iteración de funciones

Actividad 1:

Nº DE ALUMNOS:	100
GRADOS ESCOLARES:	8º a 11º
TIEMPO:	2 horas
MATERIALES:	Calculadora, lápiz y papel
PRERREQUISITOS:	Manejo de funciones, nociones de álgebra y manejo de claculadora

Planteamiento de la actividad

La actividad pretende ser una forma alternativa para presentar los temas de composición de iteración de funciones, diferentes al tratamiento algebraico que se ofrece en el texto escolar.

Temas con que se relacionó la actividad

- Composición e iteración de funciones
- Recursividad
- Manejo de calculadora
- Sucesiones, límites, convergencia, divergencia.

Comentarios

- El taller fue una forma agradable de presentar la iteración y composición de funciones de alumnos.

Si los alimnos manejan la sustitución algebraica para encontrar la compuesta de dos funciones $f(g(x))$, o $(f \circ g)(x)$; por ejemplo, si $f(x)=x^2$ y $g(x)=sen(x)$, entonces $f(g(x))=(sen(x))^2$, se pueden realizar laboratorios en donde los estudiantes grafiquen cada una de las funciones y la compuesta a izquierda y a derecha para que hagan hipótesis sobre lo que hace la función compuesta a cada una de las funciones.

Los ejercicios de iteración con calculadora son una manera alternativa de presentar los conceptos de límite, sucesiones, etc.

- Esta actividad se realizó con estudiantes después de presentar el concepto de función como una máquina que opera sobre una serie de valores y los

transforma. En esta aproximación no se habló con los estudiantes sobre dominio, recorrido, función inyectiva, biyectiva, etc., que por lo general se presentan en los libros de texto.

• Con la actividad los estudiantes "descubren" algunas propiedades de la composición de funciones:

a. La mayoría de ellos observa que dado un valor de x cualquiera no es cierto que $f(g(x))$ sea igual a $g(f(x))$, salvo en algunos casos.

b. En los casos en que esto sucede es porque la función $f(x)$ "desbarata" lo que la función $g(x)$ hace y lo contrario. Esta operación da como resultado siempre x.

• A la pregunta, dada la función $f(x)$ cómo es posible encontrar una función $g(x)$ que "desbarate" lo que hace la función $f(x)$, para que al componer $f(g(x))$ sea igual a $g(f(x))$. Algunas respuestas fueron:

1. Si la regla o función está dada con x teniendo como potencia 1 y sumándole una constante cualquiera, o sea, $f(x)=x+c$, la regla $g(x)$ se encuentra dejando la misma x y restando el valor de c; o sea, $g(x)=x-c$.

2. Si x está multiplicada por algún número, es decir, $f(x)=k * x$, la función $g(x)$ se encuentra dejando la misma x pero dividiendo todas las expresiones de k.

3. Para ecuaciones generales de segundo grado, $f(x)=ax^2+bx+c$, o cúbicas no se logró construir un algoritmo que permitiera encontrar la función $g(x)$.

• En el trabajo de iteración de funciones surgieron preguntas, por ejemplo, ¿por qué al iterar algunas funciones con un valor inicial dado, dicho proceso converge a un valor determinado, y para otros valores iniciales con la misma función la iteración no converge a ningún valor? Algunos estudiantes afirmaron que esta situación dependía de la función que se utilizara y otros que dependía del valor que se utilizara para iterar la función.

1. Use la entrada y determine la salida en cada una de las composiciones que se muestran en la Figura 3.

2. Con diagramas como los de la Figura 3, determine el valor de $f(g(x))$, para cada par de funciones. Utilice como valor de entrada, $x=1$.

a. $g(x)=x+3$	b. $g(x)=x^2$	c. $g(x)=2x+5$
$f(x)=x^2$	$f(x)=x+3$	$f(x)=0,5(x-5)$

3. Con las funciones del ejercicio 2, utilice cada caso como valor inicial $x=-1$, y determine el valor de la función compuesta por cada uno de los casos.

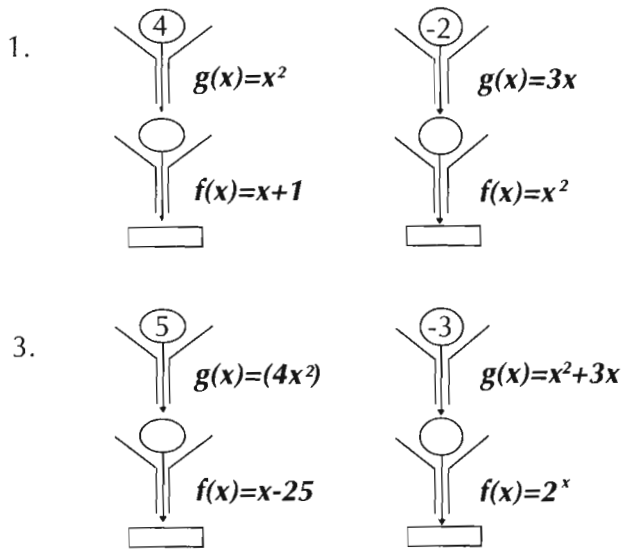


Figura 3

a. g(f(x)) b. g(g(x)) c. f(f(x)) d. f(g(x))

4. En las ecuaciones $f(x)=x+1$ y $g(x)=x^2$, exprese cada una de las composiciones siguientes en términos de un valor inicial a.

a. f(g(a)) b. g(f(a)) c. g(g(a) d. f(f(a))

5. Con el argumento inicial x_0, suponga que en cada uno $f(x)=\sqrt{x}$, utilice una calculadora y redondee a tres dígitos y escriba los diez primeros términos de la iteración para cada una de las respectivas semillas.

x =1795	x =0,23	x =0,85
x_0=	x_0=	x_0=
x_1=	x_1=	x_1=
x_2=	x_2=	x_2=
x_3=	x_3=	x_3=
x_4=	x_4=	x_4=
x_5=	x_5=	x_5=

6. Con una calculadora itere la función f(x)=x2. Comience la iteración con el valor x_0 y realice la iteración diez veces.

a. x_0=1 b. x_0=5 c. x_0=0,3 d. x_0=-3

describa el comportamiento de iteradas de la función anterior, cuando el argumento inicial es:

a. $x_0 \geq 1$ b. $0 < x_0 < 1$

c. $-1 < x_0 < 1$ d. $x_0 < -1$

7. Encuentre para cada una de las siguientes situaciones la función que produce la sucesión:

$4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow \ldots$ f(x)=

$1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 16 \rightarrow \ldots$ f(x)=

$-6 \rightarrow -1 \rightarrow 4 \rightarrow 9 \rightarrow 14 \rightarrow \ldots$ f(x)=

La iteración de funciones puede producir sucesiones de iteradas de forma aritmética o geométrica. Se dice que una sucesión es aritmética si sus términos son de la forma a, a+d, 2d, a+3d,..., donde *a* es el término y *d* es la diferencia entre los sucesivos términos.

Una sucesión es geométrica si es de la forma: $a, ar, ar^2, ar^3, \ldots$, donde *a* es el primer término, y *r* la relación entre los sucesivos términos. Identifique si las sucesiones anteriores son aritméticas o geométricas.

Composición e iteración gráfica

La composición de funciones es béasica en el estudio de la iteración y del caos. Se puede explorar este proceso utilizando las gráficas de las funciones en cuestión. En el ejercicio 1, se mostró la evaluación de una función mediante una "máquina" con entradas y salidas.

Cuando se tiene la gráfica de la función, para que este proceso sea similar se puede ejecutar el siguiente algoritmo.

a. (Evaluar). Dibuje el segmento vertical con extremo en el valor de entrada *a* en el eje *x* y el otro extremo en la gráfica de la función. Marque este punto como *A*. este punto tiene ordenada *f(a)*.

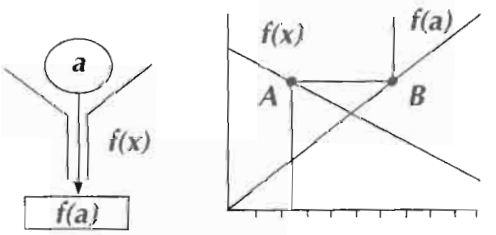


Figura 4

b. (Transferir). Dibuje el segmento horizontal con el extremo en *A* y el otro extremo en la diagonal *(f(x)=x),* marque este punto como *B*. Este punto tiene abscisa *f(a),* sus coordenadas son: *(f(a), f(a)).*

c. (Reflejar). *A* partir de *B,* trace una semirecta vertical en la dirección positiva del eje *y*. La abscisa de este punto es: *f(z),* véase Figura 4.

8. Aplique el proceso anterior a las figuras gráficas:

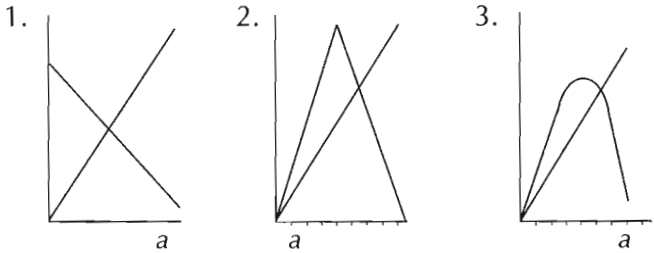


Figura 5

La composición de funciones se ha presentado en el ejercicio 1 por medio de dos "maquinas". Para hallar la composición, se puede hacer de manera análoga, si se va a encontrar la función compuesta *f(g(a)),* se coloca la gráfica de la segunda función encima de la primera.

El proceso de evaluación se desarrolla hacia arriba. Es decir, para un valor de entrada *a,* se encuentra *g(a),* con la gráfica inferior; la salida *f(g(a))* se obtendrá en la gráfica superior, donde la entrada es *g(a),* véase Figura 6.

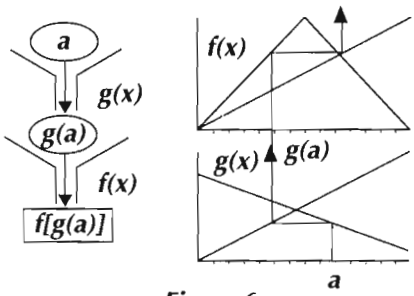


Figura 6

11. Efectue la composición gráfica de funciones con los diagramas de la Figura 7.

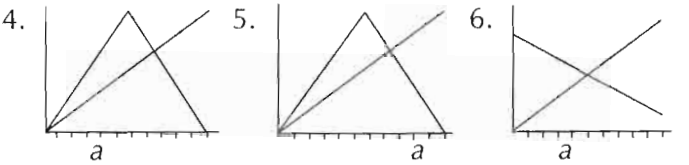


Figura 7

Iteración gráfica de funciones cuadráticas

Actividad 1:

Nº DE ALUMNOS:	100
GRADOS ESCOLARES:	8º a 11º
TIEMPO:	1 mes
MATERIALES:	hoja de trabajo y programa *Mathematica*
PRERREQUISITOS:	Manejo de funciones, nociones de álgebra y manejo de programa *Mathematica*

Temas con que se relacionó la actividad

- Composición e iteración de funciones.
- Recursividad
- Sistemas dinámicos
- Sucesiones, límites, convergencia, divergencia, puntos fijos, puntos periódicos.
- Caos determinista.

Comentarios

- Este taller muestra a los alumnos que la iteración de funciones en apariencia sencilla puede producir resultados completamente inesperados.
- Las gráficas que se muestran en la actividad no hacen parte del taller sino que fueron desarrolladas por los estudiantes con el programa *Mathematica*.
- La iteración gráfica permite visualizar aspectos importantes que al ser trabajados de manera numérica serían más difíciles de detectar.
- Conclusiones de los estudiantes. Para la iteración de $f(x)=x^2+c$

a. Todas la órbitas tienden a infinito para $c > 1/4$.

b. Para c=1/4 existe un punto fijo en 1/2, este punto fijo es neutral.

c. Para c < 1/4 la función tiene dos puntos fijos (P+yP-), P+ es siempre un punto fijo repulsor.

d. En $c=2$ la iteración gráfica es muy difíl de seguir "parece seguir todos los caminos".

Planteamiento de la actividad

Las funciones cuadráticas producen una amplia variedad de comportamientos en la iteración gráfica.

Las características especiales se encuentran alrededor de los puntos fijos, que pueden servir de atractores o repulsores. En esta actividad se investigará el comportamiento de las funciones cuadráticas, presentadas en dos formas diferentes:

$f(x)=ax(1-x)$ y $f(x)=x^2-c$. En la geometría se dice que la función cuadrática tiene forma de parábola. En álgebra la función cuadrática se escribe en términos de los parámetros: p, q, r de las siguiente manera: $f(x)px^2+qx+r$, cuando $p=-a$, $q=a$ y $r=0$; la función cuadrática puede ser expresada de la forma $f(x)=ax(1-x)$. El taller que se presenta explora estas expresiones. Las parábolas de esta forma interceptan el eje x en $(0,0)$ y en $(1,0)$. Estas parábolas sufren una elevación en dirección de y, cuando el parámetro a se incrementa. En cada caso, el patrón de iteración gráfica depende del valor del parámetro a.

Cuando $1 \leqslant a \leqslant 4$, todos los puntos en $0 \leqslant x_0 \leqslant 1$ hacen que la función permanezca en los límites de la iteración. Lo más interesante de la dinámica en la iteración gráfica ocurre en este intervalo. Todos los puntos por fuera de este intervalo ¡, escapan en al iteración hacia - ∞. Otros resultados ocurren cuando a < 1 o cuando a > 4.

1. Describa el desarrollo de la iteración para función $f(x)=0,5x(1-x)$, con un valor inicial $x_0=0,7$. ¿Cuál es aproximadamente el atractor?

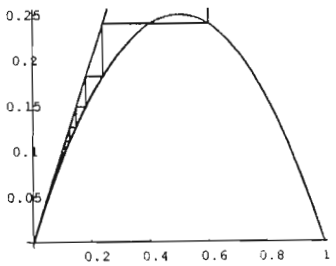


Figura 8

2. El desarrollo de la iteración para todos los puntos del intervalo $1<x_0<2$, muestra en esencia ¿la misma forma?, ¿qué pasa cuando se itera con $-1<x_0<0$ y $0<x_0<1$?

3. Efectúe la iteración de función $f(x)=5x(1-x)$, para $x=0,9$. Describa el desarrollo de la iteración para varios términos. ¿Cuando se itera para valores $0\leq x_0\leq 1$, convergen a un atractor o escapa a $-\infty$?

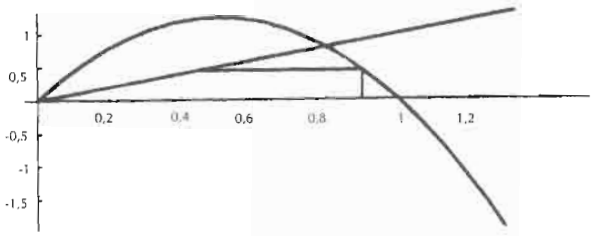


Figura 9

4. Encuentre un punto en $0\leq x_0\leq 1$, tal que su órbita no escape con $f(x)=5x(1-x)$

Considere la forma general de la función cuadrática dada por $f(x)=px^2+qx+r$, donde $p=1$, $q=0$, $r=0$, luego la función se transforma en $f(x)=x^2+c$. Todas las parábolas de esta forma tienen vértices sobre el eje x en $(0,c)$. Cuando el parámetro c se incrementa, la parábola se incrementa hacia arriba.

5. Sea $f(x)=x^2-0,65$, describa el desarrollo de la iteración gráfica cuando se incia con un valor de $0,1$. ¿Es la iteración de la parábola con la diagonal un atractor para esta iteración?

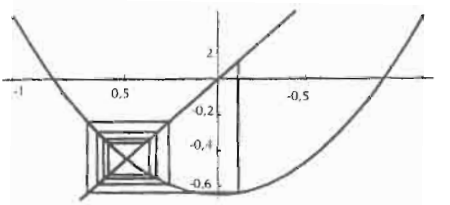


Figura 10

6. ¿Qué otros intervalos con un valor inicial x_0, espera usted que en el desarrollo de la iteración tengan el mismo punto fijo atractor? Estudie el significado de la caja cuadrada que rodea al punto fijo. Escriba su iteración.

7. Sea $f(x)=x^2-1$, describa la iteración para $x_0=0,5$. ¿Cuál es el atractor y cómo es la aproximación?

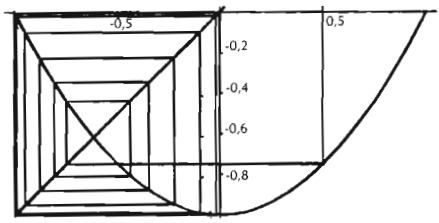


Figura 10

8. Para otros valores de x_0 se puede esperar que en el desarrollo de la iteración se tenga el mismo atractor ?

9. Sea $f(x)=x^2+0,35$, describa la iteración gráfica para un valor inicial de $x_0=0,3$, hay atractores, repulsores en la iteración, puede explicar su respuesta.

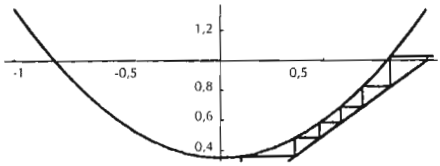


Figura 12

10. Efectúe la iteración numérica para cada uno de los valoresde c, en la ecuación $f(x)=x^2+c$, utilice 6 decimales; $c=0,40;\ 0,35;\ 0,30;\ 0,25;\ x_0=0,2$.

Describa sus observaciones después de efectuar 20 iteraciones para cada una de las constantes c. Después de efectuar estos cálculos observe la iteración gráfica para cada uno de los casos.

Explique el comportamiento de la iteración del sistema, teniendo en cuenta los resultados numéricos e iteraciones gráficas.

¿Puede hacer alguna hipótesis con respecto a la constante c, que permita saber si la iteración tiene algún atractor o repulsor ?

$c=0,40$

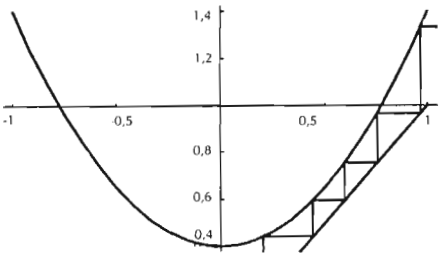


Figura 13

$c=0,35$

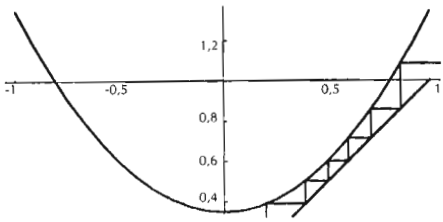


Figura 14

c=0,30

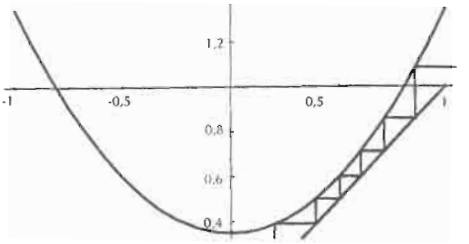


Figura 15

c=0,25

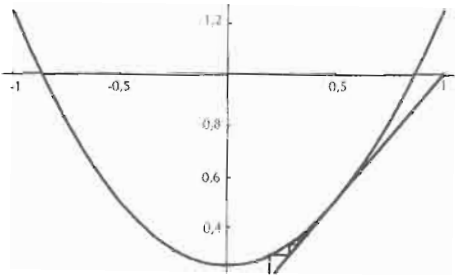


Figura 16

11. Efectue los mismos pasos del laboratorio 10, pero utilizando los siguientes valores para c: *c=-0,6; c=-0,7; c=-0,8; c=-0,9;* utilizando como valor inicial $x_0=0,3$.

c=-0,6

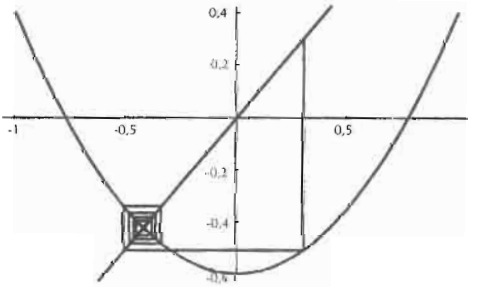


Figura 17

c=-0,7

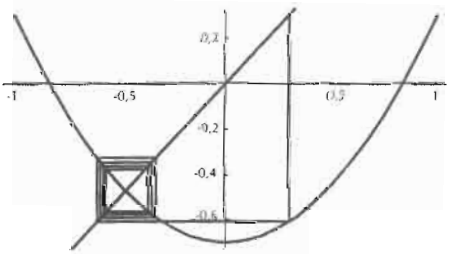
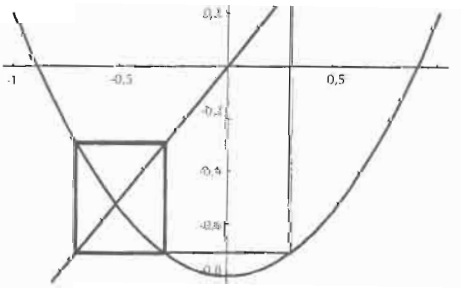


Figura 18

c=-0,8



c=-0,9

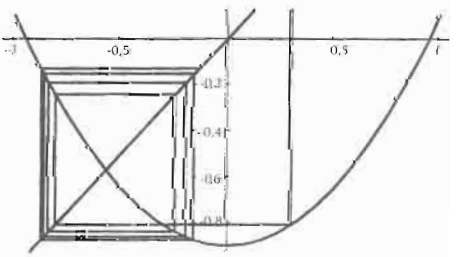


Figura 19

12. Estudie con una calculadora el caso de *c=-2*, para cualquier $0<x_0<1$, describa el comportamiento de la iteración (utilice 6 dígitos). ¿Es diferente de

los casos donde c es negativo? ¿Por qué? Observe la iteración gráfica que muestra la Figura 21, ¿qué puede decir de ella?

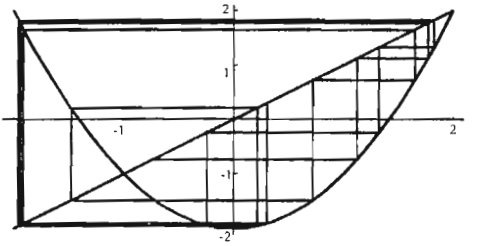


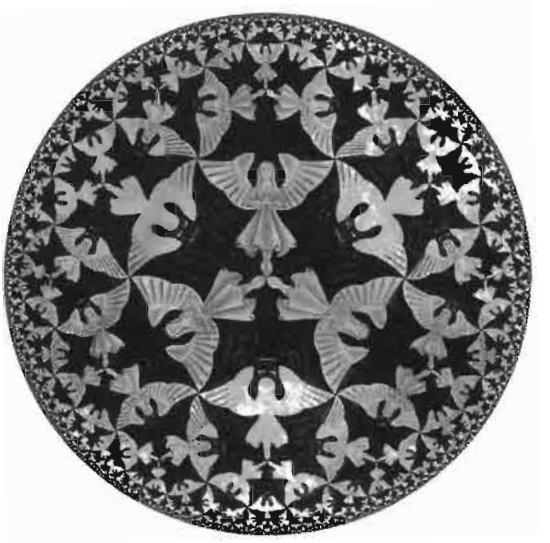
Figura 21

Teselaciones

Muchas de las paredes y pavimentos de la Alambra de Granada, cubierta de brillantes mosaicos policromados, nos prueban que los moros fueron maestros en el arte de recubrir un plano con figuras similares entrelazadas, ajustadas entre sí, sin dejar hueco alguno. ¡Lástima que su religión les haya prohibido hacer imágenes!

M.C.Escher.

Se dice que una figura geométrica tesela cuando es posible superponerla o acoplarla entre sí sin dejar huecos o fisuras, de manera que sea posible recubrir el plano. Estas formas particulares de recubrir el plano eran conocidas por los antiguos como un elemento en la decoración.



Uno de los representantes modernos más conocidos en este arte, fue el pintor holandés M.C.Escher, cuya obra se caracterizó por su gran contenido matemático. En un artículo de 1959, Escher expresó lo que lo motivaba a representar el infinito a través de sus teselaciones.

> Nos resulta imposible imaginar que, más allá de las estrellas más lejanas que vemos en el firmamento, el espacio se acaba, que tiene un límite más allá del cual no hay nada. El término vacío todavía nos dice algo, puesto que un espacio determinado puede estar vacío, por lo menos en nuestra imaginación; pero no estamos en condiciones de imaginar algo que estuviese vacío en el sentido de que el espacio deje de existir. Por esta razón, desde que el hombre existe sobre la tierra, desde que está de pie, sentado o acostado, desde que corre, navega, anda a caballo y vuela, nos aferramos a la idea de un más allá, de un purgatorio, de un cielo y un infierno, de una transmigración y un nirvana, todos los lugares de infinita extensión en el espacio o estados de infinita duración en el tiempo.

Después de si visita a la Alambra, Escher, tras largas sesiones de trabajo inventó un método para partir regularmente la superficie plana, que sería admirado por cristalógrafos y matemáticos.

Uno de los temas sobre los que más trabajó Escher fue sobre la participación periódica de una superficie. Sin embargo, como él mismo confesó:

> Con la conciencia tranquila creo poder alegrarme de la perfección de la que doy testimonio, yo no la he inventado, yo ni siquiera la he descubierto. Las leyes matemáticas no son ni creaciones ni invenciones del hombre, son sencillamente, y existen en total independencia del espíritu humano.

Durante muchos años Escher estuvo estudiando el problema de la partición de un plano, era tal la obsesión que sentía por este tema que regresó a la Alambra y se dedicó a copiar muchas de estas teselaciones. Abordó muchos tratados de geometría, en cuya parte teórico-formal no encontró gran ayuda, sólo la representación geométrica de los teoremas le sirvieron para aclarar el problema.

Para analizar un poco más en detalle el problema, consideremos la siguiente figura (Figura 22).

Como se observa, el plano está recubierto por triángulos equiláteros. Para seguir más en detalle la siguiente explicación, es posible calcar uno de los triángulos que aparecen en la figura, y seguir cada una de las siguientes transformaciones (isometrías) que se realizan para recubrir el plano. La primera y la

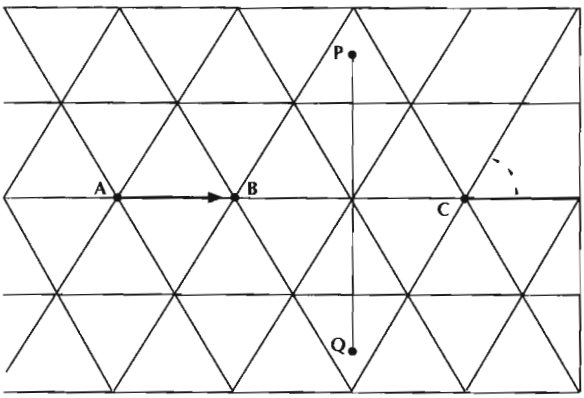


Figura 22

más fácil de las transformaciones que se puede realizar para recubrir el plano es una traslación, la cual se realiza moviendo el triángulo desde el punto A hasta el punto B. Otra forma de rellenar el plano es realizar una rotación desde el punto C, haciendo un triángulo de 60 grados, de esta manera es posible hacer coincidir el triángulo consigo misma.

Se nota que existen figuras que sólo aceptan traslaciones o rotaciones, todo esto tiene que ver con la simetría de la figura en cuestión.

La intención, ahora, es mostrar cómo es posible encontrar diferentes alternativas de trabajar la geometría con los estudiantes mediante el desarrollo de teselaciones, donde la exploración permite al estudiante observar que la belleza de las matemáticas puede ir más allá del trabajo en la solución de algoritmos y cálculos numéricos.

El trabajo con teselaciones permite combinar matemáticas y arte, y que los estudiantes desarrollen su creatividad artística además de ser un buen ejercicio sobre el sentido espacial.

Una introducción que resulta de gran ayuda en el desarrollo de este trabajo, es mostrar diferentes teselaciones, ya que esto permite una mejor disposición en la clase para le desarrollo del trabajo.

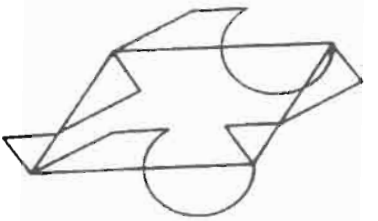
El manejo de figuras geométricas (triángulos, exágonos, cuadrados, rectángulos) puede llegar a aclarar el concepto de teselación.

Después de un trabajo introductorio con los polígonos regulares, los estudiantes observan que las teselaciones logradas no tienen la belleza de las de Escher, en este momento, se puede introducir una de las técnicas que permite la realización de dichas teselaciones.

La técnica del mordisco

Los polígonos regualres que se utilizan para efectuar mosaicos, se pueden transformar de manera que los mosaicos que se generen muestren diferentes grados de irregularidad. Usando la técnica que se conoce como *mordisco,* es posible crear mosaicos de mayor complejidad.

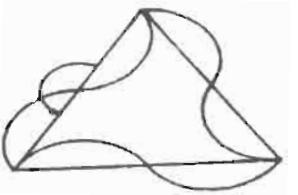
Una de las primeras transformaciones que se puede utilizar es la *traslación.* Como se darán cuenta los estudiantes (después de efectuar algún trabajo), este tipo de transformación sólo se puede efectuar a los polígonos que tienen sus lados opuestos respectivamente paralelos y congruentes. La técnica consiste en cortar en uno de los lados del polígono algún tipo de figura y trasladarla al lado opuesto, aunque la transformación es sencilla, se pueden lograr bellos efectos como lo muestra la siguiente figura.



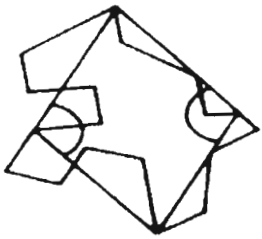
Como se observa, el corte se puede hacer en dos lados, siempre que el *mordisco* cortado se traslade al lado opuesto. Cuando se haya trasladado el *mordisco* y encajen perfectamente los lados rectos y las esquinas, se puede pegar el lado con cinta o pegante para que su reproducción sea más fácil.

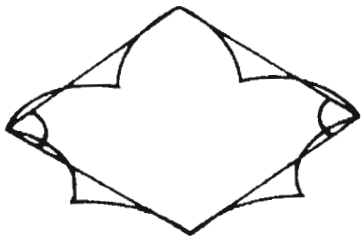
Rotaciones: este tipo de transformación sólo puede realizarse a los polígonos, triángulos, paralelogramos y hexágonos que tengan lados adyacentes congruentes. Esta técnica es más complicada que la anterior, pero también presenta una gran variedad de mosaicos que pueden ser realizados. Estas rotaciones pueden presentar dos variedades:

a. *Giro a partir de un lado:* cuando se efectúa un corte a uno de los lados de un triángulo o un cuadrilátero, se tiene que añadir el mismno lado mediante un giro de 180 grados, véase la siguiente figura.



b. *Giro de un vértice:* al efectuar un corte a uno de los lados, se añade al otro lado mediante un giro de 60 o 120 grados, con centro en el vértice común de los lados. Los vértices que son centro de un giro, no pueden ser consecutivos. Los giros tienen que ser de 90 grados cuando los centros pertenecen a un triángulo cuadrilátero o pentágono, véase la siguiente figura.





La combinación de todas las técnicas en forma simultánea permite crear teselaciones mucho más complicadas.

CONCLUSIONES

El trabajo realizado con los estudiantes utilizando el ordenador como herramienta en la realización de los laboratorios de matemáticas mostró que despierta el interés en la mayoría de ellos. Aunque al principio del trabajo se presentó resistencia por la lectura (en inglés algunas veces) de los manuales de Mathematica, la actitud fue cambiando cuando se dieron cuenta que el programa podía realizar una serie de operaciones (factorización, cálculos complejos, límites, gráficas, etc.) que en la mayoría de los casos son operaciones rutinarias que causan problemas a los alumnos. Después de esta motivación el trabajo se aceleró de tal forma que, algunos estudiantes, utilizaban las horas de descanso para dominar el programa.

El desarrollo del trabajo mostró que en la planeación de los laboratorios se debe tener presente que no tiene sentido efectuar talleres en los que se les pida a los estudientes que copien una respuesta que da el programa, ya que esta clase de trabajo no aporta mucho. En los talleres hay que recalcar que uno de los objetivos principales es lograr que los estudiantes tengan vivencias de conocimiento, que no se trata de dar una orden al computador para que este realice una factorización, por ejemplo, sino realizar un taller para que el estudiante a través de una búsqueda pueda encontrar o visualizar que existe una relación entre los coeficientes y la factorización. Es necesario mostrarles que las respuestas del ordenador no poseen valor si no se les da un significado.

Es necesario que después de la realización de un laboratorio, se ceen espacios para que los estudiantes socialicen y argumenten sus diferentes conclusiones; estos debates enriquecen mucho la actividad, puesto que en este espacio es donde el trabajo con el ordenador adquiere sentido.

Una de las dificultades alrededor de este punto tuvo que ver con los pocos equipos (ocho), con que contaba la escuela, que tenían los requerimientos de hardware que el programa necesitaba, por esta razón, era necesario que trabajaran tres personas por ordenador y, en algunos casos cuatro, esto mostró que dos de los estudiantes trabajan y los otros eran espectadores de la actividad.

Otra faceta que mostró el trabajo con experimentos matemáticos, es que si bien se diseñan una serie de laboratorios sobre algunos tópicos de matemáticas contemporáneas, cuando se realizan estos talleres, en la gran mayoría de los casos, los estudiantes realizán preguntas que involucran otra serie de temas que no estaban contemplados en la actividad. Esto hace que la clase sea dinámica y diferente a la clase tradicional.

La presentación de temas como fractales, sistemas dinámicos, caos determinista, etc., que son considerados complicados para ser presentados a los estudiantes, se tuvieron en cuenta para el trabajo de muchos temas del currículum (límites, convergencias, divergencias, perímetro, área, etc.).

El hecho de realizar actividades como la del juego del caos, permite que los estudiantes se hagan preguntas tales como: ¿por qué es posible que sucesos azarosos generen estructuras ordenadas?, ¿por qué la iteración de una ecuación para unos valores tiene un comportamiento determinista y para otros caótico?, ¿cómo es posible que una figura geométrica posea un perímetro finito y encierre un área infinita? Esto, por si sólo, es ya una ganancia en la clase de matemáticas.

Las actividades sobre el juego del caos y fractales, no se exploraron como se podría haber hecho; uno de los factores fue la falta de tiempo y otro el desconocimiento de formas para profundizar de manera sencilla el estudio de estos temas con los estudiantes. Por ejemplo, en el juego del caos, las preguntas y la actitud de asombro de los estudiantes no se aprovecharon para afrontar el problema de la dimensión de la figura obtenida, utilizando *recubrimientos por caja.*

En general, el trabajo sobre tópicos de matemáticas contemporáneas y la utilización del ordenador para efectuar laboratorios matemáticos, fue una experiencia enriquecedora para los alumnos como para el maestro. Quedan muchas cosas por hacer alrededor de esta experiencia, es necesario que se ponga en práctica por parte de otros maestros para que así se puedan recoger

y verificar diferentes puntos de vista e ir mejorando la presentación de estos temas de la educación media. Además de ir incorporando el ordenador como una herramienta en la clase de matemáticas.

Este proceso necesita, sin embargo, maestros que estén dispuestos a jugársela por un cambio de actitud en la enseñanza de las matemáticas.

BIBLIOGRAFÍA

BARSNEY, M. *Fractals Everywhere.* Boston Academy Press. 1988.

BENOIT MANDELBROT. *Los objetos fractales.* Editorial TusQuest. 1984.

J. BRIGGS. *Espejo y reflejo.* Editorial Gedisa. 1990.

HEINZ, Otto - HARTMUT, Jurgens. *Fractals for the classroom.* Editorial Springer-Verlag. 1991.

Stewart, Ian. "Juega Dios a los dados". En: La nueva matemáticas del caos". Editorial grijalbo. 1991.

CRUTCHFIELD, James y otros. "Caos". En: *Investigación y ciencia.* Marzo 1998.

COES, Loring. "Building Fractal Modem with Maniputatives". En: *The mathematics teacher.* Vol. 86. Nº 8, november 1993.

GUZMÁN, Miguel y MARTÍN Miguel Ángel. *Estructuras fractales y sus aplicaciones.* Editorial Labor. 1993.

GÓMEZ, Pedro. *Matemáticas básica.* "una empresa docente". Universidad de los Andes.

PETERSON, Ivars. *El turista matemático.* Aliansa Editorial. 1992.

DAVES, Philp - HERSH, Reuben. "El sueño de Descartes". En: *El mundo según las matemáticas.* Editorial Labor. 1989.

THOM, René. *Parábolas y catástrofes.* Editorial TusQuets. 1993.

DEVANEY, Robert. *A first course in chaotic dynamical system.* Editorial Addison-Wesley. 1991.

WOLFRAM, Stephen. *Mathematica A system for athematics with Mathematica.* Editorial Addison-Wesley. 1991.

WEGNER, Tim - TYLER, Bert. *El mundo de los fractales.* Editorial Anaya. 1993.