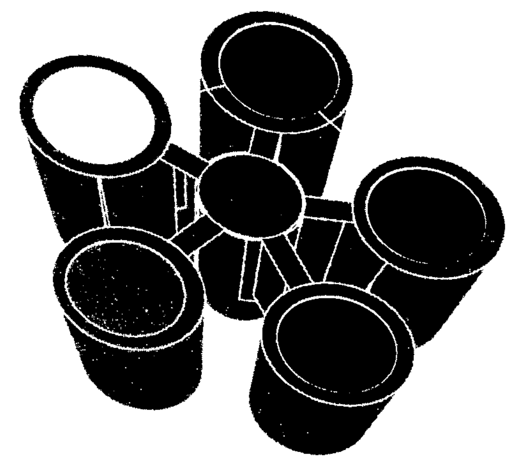
PROYECTO
INNOVACIÓN E INVESTIGACIÓN DE LAS MATEMÁTICAS EN EL AULA



ALCALDÍA MAYOR
DE BOGOTÁ D.C.
IDEP

Bogotá sin indiferencia

PROYECTO
INNOVACIÓN E INVESTIGACIÓN
DE LAS MATEMÁTICAS EN EL AULA

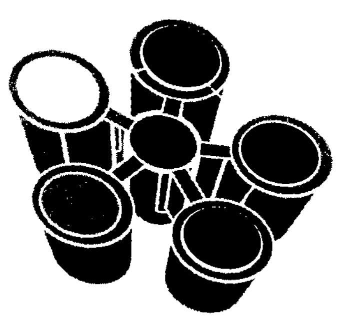
Dirección general Mireya González Lara (E)
Subdirectora Académica Ruth Amanda Cortés Salcedo (E)
Interventor Académico del IDEP Jorge Vargas Amaya
Área de Comunicación Educativa Diana María Prada Romero
Publicación mediante Contrato 20,21,23,24 y 28 de 2002 Convocatoria 01 de 2002

Avenida el Dorado No 66 - 63
Teléfono 571 (324 1000) Ext 9017 9007 - 9002
www idep edu co
idep@idep edu co
Bogotá D C - Colombia

Entidades Investigadoras
Escuela Pedagógica Experimental EPE
Institución Educativa Distrital Carlos Arango Vélez
Institución Educativa Distrital Gran Yomasa / Centro de Investigación y de Estudios sobre el Aprendizaje Escolar AprendES
Institución Educativa Distrital Montebello
Institución Educativa Distrital Rafael Uribe Uribe

ISBN 958-806-639 - 5

Primera edición - 1 000 ejemplares
Diseño e ilustraciones Jorge Moreno Fierro
Diagramación Andrea Kratzer - andreakratzer@yahoo com
Producción Luz Dary Blandón
Impreso por Guías de impresión / Leonardo Layton
Editor Percentil Diseño - Tel 235 6582 - percentil1@yahoo com



PROYECTO
INNOVACIÓN E INVESTIGACIÓN DE LAS MATEMÁTICAS EN EL AULA

CONTENIDO

PROYECTO
INNOVACIÓN E INVESTIGACIÓN DE LAS MATEMÁTICAS EN EL AULA

Investigación e innovación de las matemáticas en el aula

El texto nos guía mediante el relato de cinco experiencias de innovación en el aula, por el camino de la reflexión acerca del trabajo pedagógico en el área de matemáticas. Si algo puede sintetizar y dar cuenta de los informes y de las experiencias es la pluralidad y la diversidad, sin que por ello dejen de existir puntos clave de encuentro, análisis y vivencia. Hay diversidad de enfoques, de búsquedas, de relatos y de formas de asumir el quehacer educativo.

Hablar de innovación implica introducir nuevas miradas y nuevas prácticas en la forma de abordar el acto pedagógico en contextos educativos específicos, que produzcan nuevas formas de interrogar, crear y reconstruir la cultura escolar, los saberes y los procesos formativos, en este caso en el escenario escolar Por tanto requiere de una buena dosis de imaginación, creatividad, fundamentación conceptual, estrategia, capacidad de observación y auto-observación, sensibilidad frente al otro, a su saber y a su cultura y, sobretodo capacidad para asumir el riesgo, la angustia y la incertidumbre que generan resultados no siempre asegurados de éxito o aceptación. Innovar es también asumir la pasión de la aventura.

No puede faltar, por supuesto, la subjetividad/objetividad de los actores escolares. Las creencias, las lógicas de pensar, actuar y sentir, así como los ambientes escolares y de aprendizaje que le dan materialidad a la cultura escolar, no pueden estar ausentes cuando se trata de reconstruir y recuperar la memoria de lo pedagógicamente vivenciado. Así, salta en primer término el saber, el hacer y el saber hacer del docente, un sujeto históricamente constituido, social y culturalmente arraigado con sus retos, problemas (teóricos, pedagógicos, cotidianos), con una sensibilidad forjada en una biografía de éxitos y fracasos. Es en este sujeto donde arraiga el querer, saber y poder: sus inquietudes, sesgos, inconformidades, luchas, deseos, angustias, aprendizajes, terquedades intelectuales, carencias e inspiraciones son las que le dan vida a las nuevas formas del accionar pedagógico. Pero también están los otros, los radicalmente otros que rompen esquemas, paradigmas y teorías dominantes. los niños, niñas y jóvenes, que dejan sin piso los modelos pedagógicos más sólidos y coherentes con sus risas, llantos, juegos, conflictos, saberes e historias. Su voz, sus preguntas, sus razonamientos y sus risas, aunque débiles empiezan a escucharse en las experiencias aquí comentadas

No es fácil mirarnos en el espejo de la autorreflexión, sobretodo cuando la imagen que nos devuelve el espejo no nos gusta. Los educadores y educadoras de estas cinco experiencias asumieron el riesgo de exponerse a la mirada pública con sus logros y con sus dificultades

El texto de las cinco experiencias reconstruidas como se ha mencionado, básicamente a partir de la voz y la escritura de los/las docentes innovadores/investigadores, tiene en la resolución de problemas el eje dinamizador del proceso enseñanza – aprendizaje e indagación. Dichas experiencias se realizaron en cuatro instituciones educativas oficiales de educación básica y media del Distrito Capital: Carlos Arango Velez, Gran Yomasa, Montebello, Rafael Uribe Uribe y una del sector no oficial· la Escuela Pedagógica Experimental.

Algunas de las experiencias dan cuenta de la forma como va surgiendo y perfilándose el problema pedagógico que inspira a los/las docentes, además de la forma como la experiencia va modificando las creencias y concepciones de los/las participantes frente los modos de abordar el conocimiento, la enseñanza y el aprendizaje de la matemática escolar.

Las experiencias muestran diversas posibilidades asumir el trabajo en equipo y por ende crear espacios y prácticas pedagógicas creativas en la formación matemática de niños, niñas y jóvenes. Las didácticas y técnicas de enseñanza, no encuentran sentido si no se miran los ambientes de aprendizaje, las formas de comunicación, la enunciación y formulación de los problemas, la identificación de los procesos lógicos de los estudiantes, la inclusión de su cultura y sus entornos socioculturales. La pedagogía no sólo observa las formas de adquisición/transmisión/construcción de saberes disciplinares, sino también los contextos sociales de los educandos así como sus ámbitos regulativos La dinámica de grupos en la reflexión matemática, según muestran las experiencias, implica generar actitudes como respeto por el otro cuando no se está de acuerdo, reconocer las opiniones y posturas personales; aceptar las fallas, los errores, los aciertos y desaciertos en la formulación de los argumentos y demostraciones de los participantes Es decir

la pedagogía se ocupa tanto de las formas de re-constituir el orden simbólico de los/las estudiantes como su campo normativo-relacional

En la experiencia *Haciendo matemáticas en el aula* de la Corporación Escuela Pedagógica Experimental, se busca aproximar al estudiante a la construcción de modelos matemáticos, tanto aritméticos como algebraicos. Las estrategias didácticas aplicadas favorecieron y potenciaron el desarrollo de habilidades comunicativas e investigativas tanto en los/as docentes como en los/as estudiantes. En los estudiantes se generaron debates alrededor de los problemas, se postularon hipótesis, se sustentaron posibles soluciones, justificando los procesos matemáticos. En los docentes se generaron reflexiones sobre los tipos de problemas y los modelos a trabajar con los estudiantes y sobre las estrategias de intervención del educador en las acciones pedagógicas. Se observa como los estudiantes cambian su posición tradicional de receptores del conocimiento matemáticos para convertirse en actores participantes en la búsqueda de posibles modelos de solución. El docente se ve compelido a cambiar su postura tradicional de transmisión para generarle retos al estudiante a través de ambientes de aprendizaje donde se exploren las múltiples opciones de desarrollo que se puedan presentar.

El proceso de generalización requiere que el maestro este atento a la evolución de los procesos constructivos del estudiante y aproveche las inquietudes, las dificultades y las opciones que se abren para potenciar el análisis, el desarrollo del conocimiento y de las habilidades de pensamiento. Tanto para los estudiantes como para los docentes las situaciones planteadas son problémicas. Ello permite la generación de una amplia gama de alternativas de solución, acompañado de un manejo sistemático de elementos aritméticos.

Como logros básicos a destacar se encuentran: la transformación del ambiente pedagógico en el aula, el cambio de las acciones y actitudes tanto en los estudiantes como en los docentes. A mediano plazo también repercute en los padres/madres de familia en cuanto se ven abocados a admitir que el modelo pedagógico tiene que cambiar, permitiendo una construcción de conocimiento más sólida.

En *Aplicación de modelos en el planteamiento de ecuaciones y en la resolución de problemas* del I.E.D. Carlos Arango Velez también se trabaja a partir de la resolución de problemas como eje del proyecto, buscando con esto promover el manejo de la solución de ecuaciones a través de modelos concretos que luego son transferidos a modelos matemáticos (pensamiento formal), favoreciendo la apropiación y el manejo de propiedades de la igualdad, multiplicación, división, potenciación y radicación.

El proceso investigación afecta tanto a los estudiantes como a los docentes. Mientras en los estudiantes se va paulatinamente pasando del pensamiento concreto al abstracto, propiciando actividades de manipulación directa para formalizar y resolver problemas mediante el uso de modelos matemáticos, el docente va explorando los diversos caminos que asume el pensamiento del estudiante como de sí mismo.

Como innovación permite abrir campos para desarrollar nuevas formar de afrontar la dificultad presente en muchos estudiantes para solucionar ecuaciones y problemas asociadas con estructura aditiva y multiplicativa. De igual manera se aprovecha la solución de problemas como pre-texto para el desarrollo de habilidades comunicativas tanto en los docentes como en los estudiantes, como extensión del proceso de investigación dentro y fuera del aula de clase.

En *De las fracciones como partes de... al racional como cociente* del I.E.D Gran Yomasa, el texto nos abre a nueva forma de recuperación de la oralidad del maestro para presentarnos su vivencia, desde el acontecer de su experiencia personal, en donde aparecen sus concepciones, sus creencias y sus formas de representar, visibilizar y sentir su quehacer, su forma de ver a los estudiantes y de problematizar su labor. En el testimonio de los docentes aparece igualmente el trabajo previo de formación - investigación y acción pedagógica promovida por APRENDES, que orienta la reflexión de los y las docentes participantes.

Los testimonios se complementan con el texto de Myriam Ortiz Hurtado en donde analiza el trabajo docente para demostrar cómo es posible aproximar a los/las estudiantes al manejo de los fraccionarios (conocimiento matemático), a partir de situaciones cotidianas de los mismos (saber local y conocimiento cotidiano), es decir, generar espacios de interrelación entre el conocimiento formal y el contexto cultural con sus modos específicos de nominar y producir saber.

El lector podrá encontrar en este texto herramientas de acción concreta del trabajo docente, específicamente en el manejo de fracciones y, extrapolar la lógica de la experiencia para mejorar el aprendizaje en otros dominios del conocimiento matemático. El texto documenta las posibilidades de uso del lenguaje desde la cultura local, para fortalecer la asimilación del saber disciplinar.

En *Una propuesta para la construcción de conceptos básicos de estadística descriptiva en contextos cotidianos* del I.E.D. Montebello se presenta una posibilidad de desarrollo pedagógico desde la transversalidad del conocimiento matemático con otras dos áreas del conocimiento, específicamente la educación física y las ciencias sociales. La matemática

aparece como un campo de saber integrador e inter-relacionador con otras áreas del conocimiento. En el problema también se plantea el saber cotidiano como ingrediente importante en la construcción del conocimiento, lo que permite generar en el estudiante un conjunto de acciones participativas, así como ampliar su capacidad de intervención cultural, social y académica

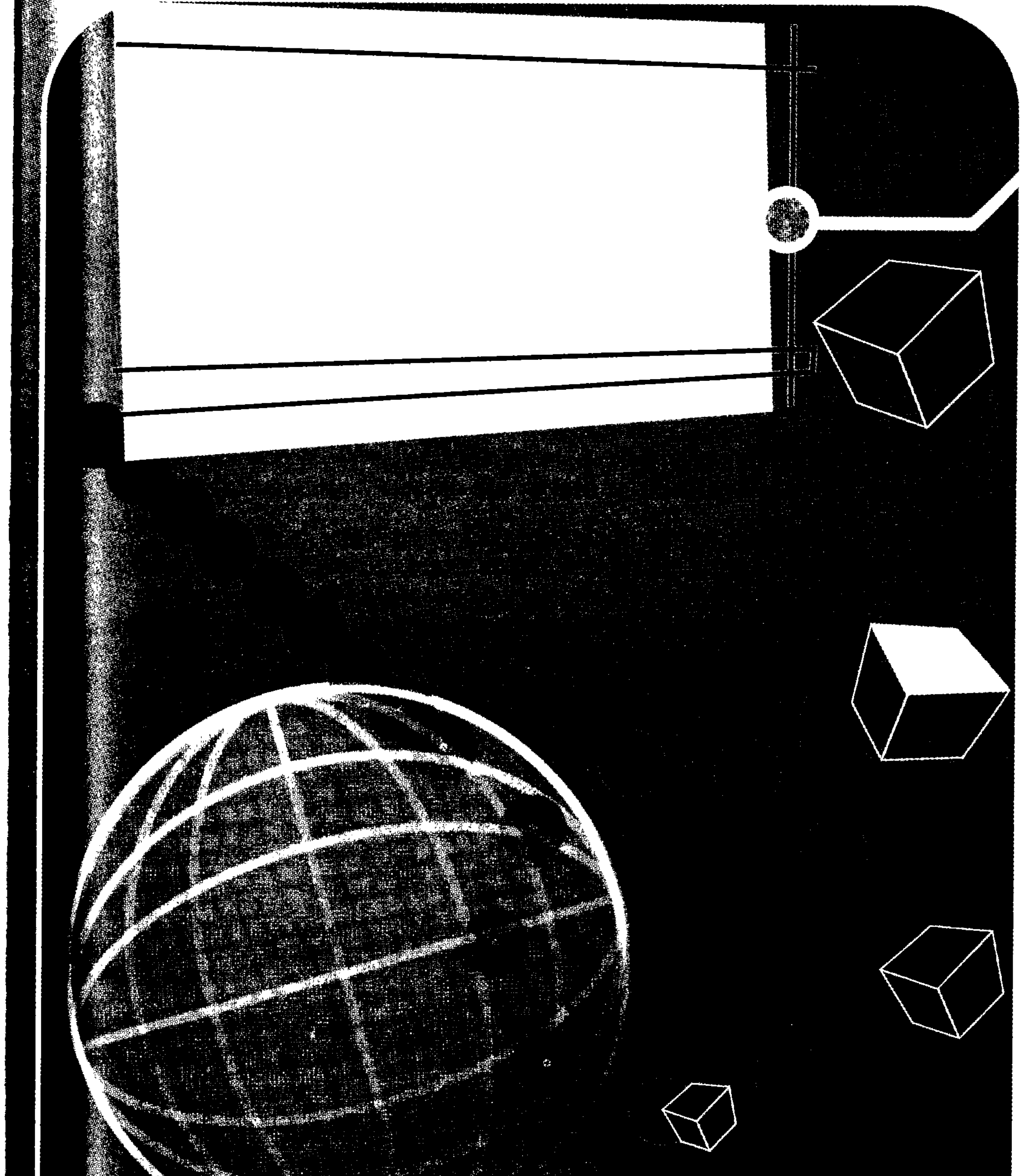
En *Desarrollo del pensamiento multiplicativo haciendo uso de la resolución de problemas mediada por instrumentos didácticos* del I.E.D. Rafael Uribe Uribe, busca transformar el proceso de enseñanza y aprendizaje de la estructura multiplicativa a través de situaciones problémicas. Presenta de forma estructurada el desarrollo de la experiencia en sus diferentes etapas con sus avances y dificultades. La fundamentación teórica referenciada (Godino, Moreno, Charnay, Vigotski, entre otros) permite al lector tener una clara idea del proceso. Explicita en la presentación de resultados la forma de aplicación de la solución de problemas como metodología para el desarrollo integral de los estudiantes.

En la experiencia se reflexiona acerca de las dificultades institucionales que obstaculizan la innovación. Sin embargo esta se presenta más desde la pregunta que desde la afirmación, con el fin de promover el análisis y el debate De igual forma el relato aporta herramientas de interpretación de situaciones del aula que pueden ser fácilmente replicables por parte de los/las docentes.

Con el cierre de la convocatoria 01 de 2002 en la que el IDEP apoya y financia proyectos de innovación pedagógica e investigación de aula que impacten el área de matemáticas, estamos entregando este libro a la ciudad en perspectiva de generar un aporte a la comprensión y el pensamiento matemático. El texto de estas cinco experiencias sin duda contribuirá al desarrollo de la investigación y la innovación educativa en el área de matemáticas y por qué no decirlo, constituyen un referente muy sugestivo para otras áreas.

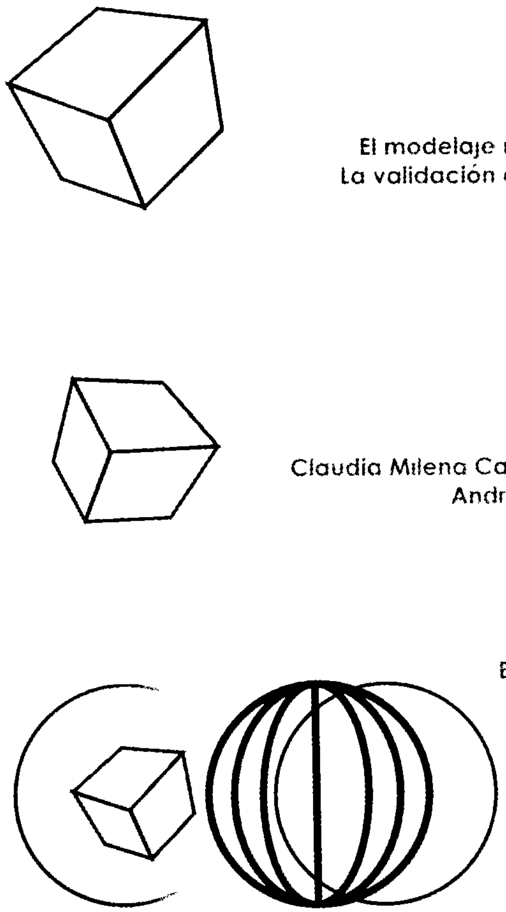
IDEP

Bogotá, 30 de Agosto de 2005.



Instituto para la Investigación Educativa y el Desarrollo Pedagógico
IDEP

Corporación Escuela Pedagógica Experimental
EPE



Proyecto:
El modelaje matemático en estudiantes de educación básica:
La validación de los modelos y los procesos de matematización de la experiencia.
Estudio a partir de dos familias de problemas.

Investigadores:
Janeth Malagón
Germán Rayo
John Castro

Auxiliares de investigación:
Claudia Milena Castellanos, Liliana Paola Cruz, Ana Milena Fonseca, Andrés Aguirre, John Álvaro Munar y Alejandro Suárez.

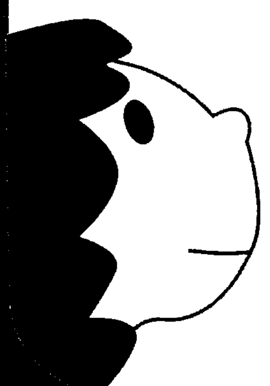
Asesores:
Dino Segura, Fabio O. Arcos y Clara I. Chaparro.

Población:
Estudiantes de grados 6 a 9 (Niveles 8 a 11) de la Escuela Pedagógica Experimental.

Periodo de Realización:
Septiembre de 2002 a Diciembre de 2003.

Entidad Investigadora:
Corporación Escuela Pedagógica Experimental EPE.

Financiación:
Instituto de Investigación Educativa y Desarrollo Pedagógico IDEP.



HACIENDO MATEMÁTICAS EN EL AULA

¿De qué se trata todo esto?

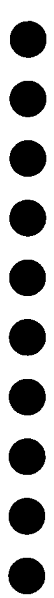
Para muchas personas, está perfectamente definido qué debe ser una clase de matemáticas; sobre el particular no existen dudas. Todo es tan claro que con frecuencia los textos parecen ser unos copia de otros, y las actividades que hacen diferentes maestros y niños en las clases son indistinguibles. Pero, ¿en qué se está de acuerdo realmente? Veamos.

En general, los maestros de educación básica primaria consideran que los niños deben aprender esencialmente las cuatro operaciones fundamentales de la aritmética; por ello dedican el tiempo en la escuela, desde primero hasta el quinto año, casi exclusivamente a cumplir este objetivo. Y algo similar ocurre con otros niveles de escolaridad, incluso con el universitario: todos los ingenieros inician su formación con la introducción al Cálculo, y en todos los programas se hacen los mismos ejercicios y se logran las mismas respuestas frente a derivadas e integrales.

Generalmente, nuestros recuerdos como adultos suelen referirse a los temas que estudiamos en el bachillerato, pero ya no recordamos los casos de factorización, el teorema del residuo o las identidades trigonométricas. Lo que nos identifica a todos es que en algún momento tuvimos que "ver" esos temas.

Estos dos hechos son universalmente reconocidos. En primer lugar, para casi todas las personas la matemática debe estudiarse porque es un requisito; en segundo lugar, lo que se aprende, con mucha frecuencia se olvida. Lo primero es explicable por la importancia de la matemática; pero lo segundo es decepcionante: si es tan importante, ¿cómo es que no la aprendemos? A la decepción podemos agregar que no sólo no se aprende sino que los recuerdos de la escuela al respecto son verdaderamente ingratos, hasta el punto de que para muchos la matemática no es nada agradable, interesante o que se pueda disfrutar.

Lo que queremos mostrar con la experiencia que presentamos es que la matemática (escolar) puede ser una fuente de satisfacciones y de posibilidades de realización. Cuando hacemos esta afirmación, por supuesto, no tenemos en mente la matemática usual de las clases; pensamos en otra matemática, más relacionada con el pensamiento matemático y con lo que Piaget llama "experiencia lógico-matemática" (ver Figura 1). No se trata de decir que lo que usualmente se hace cuando se aprenden algoritmos y operaciones no es matemática, sino de afirmar que eso es sólo una parte de ella y que, además, se deben tener en cuenta aspectos como el razonamiento lógico, la elaboración de modelos y la creatividad[1].



En su artículo Desarrollo y Aprendizaje Jean Piaget, al considerar los factores del desarrollo y en particular, la experiencia, distingue dos tipos de experiencia, la experiencia física y la logico-matemática

"La experiencia física consiste en actuar sobre los objetos y obtener, por abstracción de ellos, algún conocimiento de los mismos La experiencia logico-matemática se da cuando el conocimiento se logra no de los objetos, sino de las acciones llevadas a cabo sobre los objetos Veamos un ejemplo de este tipo de experiencia ... es una anécdota de la niñez de un amigo matemático, quien explica su carrera de matemática por tal experiencia Cuando él era un niño pequeño, no se de qué edad, cuatro o cinco años, estaba sentado en el jardín y contaba piedritas Bien, para contar las ponía en fila y luego las contaba, uno, dos, tres hasta diez Cuando finalizaba, las comenzaba a contar en dirección contraria y llegaba al mismo resultado. diez Le pareció maravilloso que hubiese diez tanto en una como en otra dirección Entonces las colocó en círculo, las contó en una dirección y obtuvo diez Las contó en otra dirección y nuevamente obtuvo diez Las colocó en otras configuraciones y nuevamente obtuvo diez Ese fue su descubrimiento Realmente ¿qué descubrió? No descubrió una propiedad de las piedritas, sino una propiedad de la acción de ordenar Las piedritas no tienen orden, fue su acción la que produjo un orden lineal, circular o de otro tipo Descubrió que la suma es independiente del orden... Los guijarros no tienen suma, son simplemente un montón Él descubrió una propiedad de las acciones, no de los guijarros "

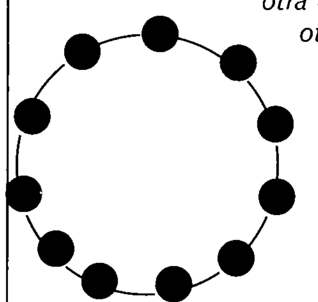


Figura 1

Los niños nos han mostrado que cuando se logra construir un entorno de aprendizaje adecuado ellos, literalmente, hacen matemáticas, y

que tal entorno tiene que ver con la posibilidad de involucrarlos en la búsqueda de soluciones frente a problemas desencadenantes, por las bifurcaciones que proyectan, y por sus motivaciones intrínsecas en cuanto los interrogantes que se suscitan constituyen retos intelectuales. En estas circunstancias, el "hacer matemáticas" tiene lugar cuando lo que los estudiantes construyen no tiene que ver con lo que se les enseña, pues se trata de construcciones auténticas y, en tal sentido, lo que se hace es mucho más que repetir operaciones, métodos o estrategias para resolver los acertijos propios de la disciplina[2].

En fin, se trata también de no dejar a los niños abandonados frente a las opciones de vivir experiencias lógico-matemáticas, algunas de las cuales, como en el ejemplo de Piaget (ver Figura 1), se presentan espontáneamente, y de enriquecer la vida del aula para propiciarlas intencionadamente en contextos que dejan de ser individuales para convertirse en vivencias de colectivos.

La estructura de clase que se propone puede considerarse como un ejemplo de las clases "constructivas", por oposición a las "transmisivas", de acuerdo con la terminología de F. Tonucci[3]. En tal sentido, creemos que muestran la necesidad de transformar el papel del maestro quien, de ser alguien que enseña, se convierte en un acompañante indispensable para propiciar aprendizajes.

¿En qué consistió el proyecto?

Desde hace mucho tiempo en la EPE hemos tratado de crear contextos que propicien que los estudiantes se involucren personalmente en su formación matemática. Creemos que lo hemos logrado en cierta medida, puesto que sin ninguna imposición (exámenes, notas o llamados de atención) asisten a las clases y, aún más, muchos de ellos aseguran que la clase que más les gusta es la de matemáticas. La propuesta se ha enriquecido año tras año con la participación de más de veinte maestros de matemáticas que han aportado a la EPE en sus veintisiete años de existencia Durante los últimos quince años se han adelantado reflexiones sistemáticas sobre aspectos puntuales de esta práctica[4], pero estamos convencidos de que la práctica cotidiana es más rica que los discursos sobre ella, y de que los discursos que sistematizan prácticas son importantes principalmente si queremos compartirlas y enriquecerlas con otros colegas. Por ello aceptamos la invitación del IDEP para presentar un proyecto de investigación sobre la innovación que estamos adelantando. En la Figura 2 se incluye un listado de las personas que participaron de manera directa, así como algunos datos básicos de la experiencia.

NOMBRE DEL PROYECTO

El modelaje matemático en estudiantes de educación básica. La validación de los modelos y los procesos de matematización de la experiencia. Estudio a partir de dos familias de problemas

INVESTIGADORES

Janeth Malagón, Germán Rayo, Jhonn Castro.

AUXILIARES DE INVESTIGACIÓN

Claudia Milena Castellanos, Liliana Paola Cruz, Ana Milena Fonseca, Andrés Aguirre, John Alvaro Munar y Alejandro Suárez.

ASESORES

Dino Segura, Fabio O. Arcos y Clara I. Chaparro

POBLACIÓN

Estudiantes de grados 6º a 9º (Niveles 8 a 11) de la Escuela Pedagógica Experimental.

PERIODO DE REALIZACIÓN

Septiembre de 2002 a Diciembre de 2003

ENTIDAD INVESTIGADORA

Corporación Escuela Pedagógica Experimental

FINANCIACIÓN

Instituto de Investigación Educativa y Desarrollo Pedagógico (IDEP)

Figura 2

Durante el último semestre de 2002 y todo el año 2003, los maestros de la EPE estuvieron acompañados en las clases de matemáticas por estudiantes del Programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas quienes –de manera muy comprometida– se asumieron como auxiliares de investigación, y en gran medida fueron responsables de que contáramos cotidianamente, en las sesiones de discusión y análisis, con datos frescos y completos sobre lo que sucedía en las clases, sobre debates y derroteros del pensamiento, tropiezos en las búsquedas, sobre la riqueza de las soluciones que se planteaban y los caminos que se siguieron.

Si quisiéramos simplificar los procesos más característicos de la investigación, podríamos simplemente seguir el diagrama que ilustra la permanente relación entre actividades de planeación (en las asesorías) y de ejecución (en la clase), así como de análisis y rectificación.

Figura 3

Buscábamos establecer una forma de caracterizar el pensamiento de los estudiantes y, a partir de ella, definir las estrategias más adecuadas para constituir un entorno de clase conveniente. Con tal propósito, nos centramos en la elaboración de patrones y en los procesos de recurrencia que, como veremos, permitieron definir al menos dos niveles de formalización o, en algunos casos, dos niveles de patrones: uno relacionado con problemas puntuales y otro con familias de problemas.

La investigación

Coherentemente con las características que hemos anotado sobre la clase tradicional de matemáticas, las investigaciones que se han emprendido en nuestro medio apuntan esencialmente a dos metas: por una parte, a mejorar el aprendizaje de las matemáticas en los diferentes niveles y, por otra, a lograr cambios de actitud de los estudiantes frente a esta disciplina. Sobre una revisión y sobre el estado del arte de las investigaciones en este campo son ilustrativos el trabajo realizado por Marina Ortiz Legarda[5], por iniciativa de Socolpe y Colciencias, y el realizado por Orlando Meza sobre investigaciones adelantadas por el IDEP.

Con lo que señalamos no queremos desconocer las investigaciones orientadas a dilucidar aspectos relacionados con las dificultades del aprendizaje que tienen que ver con las formas de pensamiento que se exigen en los procesos de aula y los aprendizajes, o sobre errores en la presentación de contenidos matemáticos o relativas a la redefinición de conceptos tradicionales desde perspectivas más modernas.

Nuestra investigación se aparta un tanto de las tendencias a que nos referimos por dos razones. La primera es que no queremos centrar la matemática escolar en los contenidos (algoritmos y estrategias de solución) o simplemente hacer la enseñanza de éstos entretenida, sin preguntarnos sobre lo que debe buscarse y sobre las relaciones del individuo que aprende con el aprendizaje. La segunda se refiere a la importancia que para nosotros tiene la dinámica de la clase en la construcción, a la vez, de las seguridades del individuo mediante actividades de protagonismo, y de la capacidad para trabajar en equipo, elemento que se constituirá –como veremos– en una de las improntas del entorno de la clase que queremos proponer a partir de la investigación.

Estos dos elementos remiten a diferencias conceptuales con respecto a qué es una disciplina y, en particular, qué es la matemática. En nuestra perspectiva, lo definitivamente distintivo de una disciplina es la manera como se ve: un mismo entorno es diferente si es observado por un arquitecto, por un matemático o por un artista. Cuanto se ve con la óptica de una disciplina se observan realidades inexistentes para quienes poseen otra formación. En nuestra opinión, lo distintivo de la manera de ver de un matemático es que ve patrones, regularidades o pautas. (Ver Figura 4).

Aunque la búsqueda de regularidades que se expresan como patrones o pautas es una actividad espontánea en la vida cotidiana en el caso del mundo de la matemática es algo que debe propiciarse intencionadamente en el aula Para comprender mejor lo que decimos tomemos la siguiente lista de números, ordenada en siete columnas (que podrían ser 5 u 8 o cualquier otro número)

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42

Para muchos se trata simplemente de un conjunto de números ordenados Para otros, sin embargo, en la tabla existen muchas otras cosas, entre ellas, regularidades Veamos algunas

1 Cuando se observan las diagonales arriba-izquierda a abajo-derecha, encontramos que los números están separados por 8 unidades Si las diagonales van para el otro lado, están separadas por 6 unidades

2 También encontramos que en el cuadrado formado por los números 10,11, 17 y 18, que es un ejemplo de muchos otros, las sumas de las diagonales son iguales, en este caso, 28

10	11
17	18

3 Y, hay mas, En los cuadrados de las dos primeras filas las multiplicaciones de las diagonales siempre tienen diferencia 7

1	2
8	9

5	6
12	13

Estos hallazgos y otros muchos que podemos encontrar resultan de una manera de mirar que no tienen nada de espontaneidad

En esta actividad, que se propone para niños pequeños, de unos 11 años, la búsqueda de estas regularidades puede convertirse en un reto acompañado por la curiosidad, ¿Qué otras regularidades pueden encontrarse?

Finalmente, la actividad como "hacer matemáticas" se proyecta mucho más cuando acompañamos cada una de las regularidades halladas con un ¿por qué será que sucede esto?

Figura 4

Naturalmente, los patrones que se construyen poseen niveles diferentes de complejidad y pueden presentarse en la cotidianidad cuando encontramos, por ejemplo, un embaldosado, o en procesos más complejos como la construcción de una telaraña. Ante un animal un niño puede ver simetrías que otro no ve; puede establecer periodicidades u homologías, etc

Anotemos que la identificación (o elaboración) de regularidades y patrones ha sido característica de la matemática Por ejemplo, el paso que se dio en la antiguedad cuando del caso particular del triángulo de lados 3, 4 y 5, utilizado por los babilonios para tareas de medición, se pasó a la regla general expresada por el "teorema de Pitágoras", que marcó un hito no sólo para este ejemplo particular sino para la concepción misma de la matemática.

El estudio de la formulación de patrones, pues, fue el problema que nos sedujo para plantear la investigación Así, lo que buscamos con ella es aproximarnos a la comprensión de los procesos de construcción de patrones en contextos matemáticos o, con otras palabras, identificar los procesos de pensamiento en la escuela, particularmente en la clase de matemáticas

Para alcanzar esta meta hemos debido crear entornos de aprendizaje adecuados y, con ello, redefinir el papel del maestro en las dinámicas de aula. Por otra parte, las observaciones de clase han permitido destacar dos puntos de gran relevancia: las dinámicas de grupo que median la elaboración de los patrones y el tipo de patrones que se elaboran.

¿Cuáles patrones estudiamos?

La primera actividad que enfrentamos fue la determinación de los patrones que estudiaríamos y, consecuentemente, la selección de problemas de aula pertinentes. Los criterios para la selección de los patrones establecían que:

1. Deberían poderse utilizar en diversas situaciones. Es decir, un patrón identificado para un caso particular debería poderse utilizar para trabajar otros problemas, que en el desarrollo de la investigación denominamos "miembros de una familia".

2. Debería poderse llegar a una generalización de las soluciones.

3. En el ámbito de la investigación era importante que los procesos de solución fueran observables.

4. Finalmente, que cualquier problema que se eligiera constituyera para los estudiantes un reto cognitivo (ver Figura 5).

Una actividad se constituye en un reto cuando se trata de un problema que uno no ha resuelto pero tiene la convicción de que podrá resolverlo.

Figura 5

Con estas cuatro exigencias seleccionamos dos clases de problemas. unos de *conteo combinatorio* y otros de *pensamiento proporcional*. Por la importancia que poseen algunos problemas para la comprensión de las afirmaciones que se hacen en desarrollo de la exposición, es conveniente que el lector se familiarice con los siguientes, que aunque no son de conteo combinatorio o de pensamiento proporcional, nos permitieron ver procesos de matematización.

MISIONEROS Y CANÍBALES

Enunciado

Hay 3 misioneros y 3 caníbales que quieren cruzar de un lado del río a otro para llegar a un resguardo, en una barca en la cual caben máximo dos personas y además

1 Ni en la orilla, ni en el resguardo pueden haber más caníbales que misioneros (pues los primeros se comerían a los segundos)

2 Cada vez que en la orilla opuesta a la salida hay un misionero y un caníbal y la barca está al otro lado, estos se van al resguardo.

¿Cuántos viajes deben hacer los misioneros y caníbales?

Se propone estudiar la situación para 4, 5 y en general para n caníbales y misioneros

Solución

Ver ***segundo nivel de generalización, problemas de conteo****, más adelante*

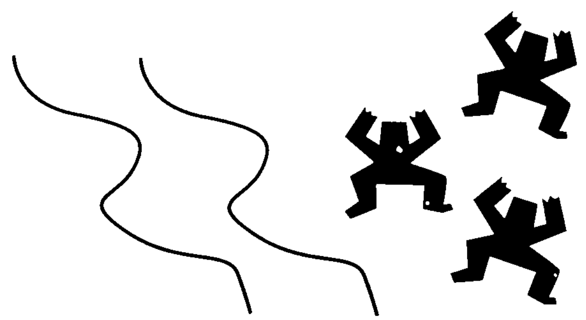


Figura 6

EL SALTO DE LA RANA

Enunciado

El salto de la rana es un juego que se puede realizar con fichas, o botones de dos colores. Se coloca igual número de fichas, a lado y lado de un espacio libre El objetivo es hallar la menor cantidad de movimientos que permita intercambiar las posiciones de las fichas

Las reglas de juego son

1 Mover sólo una ficha al espacio vacío adyacente

2 Saltar sobre una ficha a un espacio vacío situado inmediatamente después de esta

Solución

Ver más adelante ***Las formas de pensamiento y la diversidad de los patrones***

Figura 7

LA TORRE DE HANOI

Enunciado

Es un juego inspirado por la leyenda del mismo nombre Consiste en una colección de discos colocados en orden de tamaños y tres palos sobre los cuales se pueden colocar los discos Empezando con todos los discos sobre el palo de la izquierda, hay que moverlos al palo derecho (utilizando como medio el palo del centro) No se permite mover más de un disco a la vez, ni poner un disco más grande sobre uno más pequeño

En general,

¿Cuantas jugadas se necesitan para mover n discos al palo derecho?

Solución

Ver ***segundo nivel de gentralización, problemas de conteo****, más adelante*

Figura 8

EL PROBLEMA DE LOS SALUDOS

Enunciado

A una reunión asisten 5 personas, que muy amablemente se saludan de mano ¿Cuántos estrechones resultan?

Si se reúnen 20 ¿Cuántos serán?

¿para n personas cuál es el número de saludos?

Solución

Cada una de las 20 personas saluda a 19
Como un saludo entre dos personas A y B es el mismo que entre B y A, hay que dividir por 2 el total de (20 x 19)

$N = n(n-1)/2$,

Donde n es el número total de personas y (n-1), el número de saludos que da una persona

Figura 9

PROBLEMA DE PROPORCIONALIDAD 1:
EL LAVADERO DE CARROS

Enunciado

En un lavadero de carros hay dos trabajadores, Litos lava un carro en una hora y Pedro lava un carro en 2 horas; ¿Cuánto demoran en lavar un carro, si trabajan juntos?

Solución

Si Litos lava el doble que Pedro (relación dos a uno), al finalizar la tarea habrá hecho el doble que Pedro, esto es 2/3 del carro. Como lava un carro en una hora, lavará 2/3 de carro en 2/3 de hora, esto es, en 40 minutos (En los mismos 2/3 de hora Pedro lava 1/3 de carro)

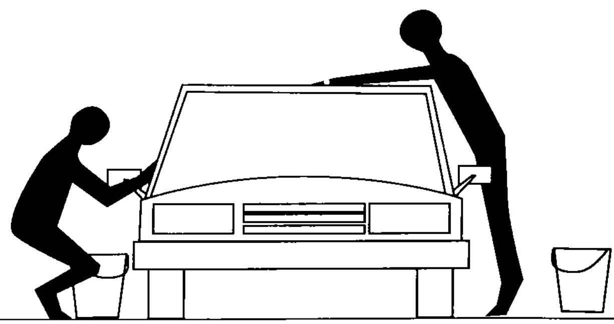


Figura 10

PROBLEMA DE PROPORCIONALIDAD 2:
EL MURO

Enunciado

Para construir un muro se necesitan 600 ladrillos, o 200 bloques Si quiero construirlo utilizando alternadamente un bloque y un ladrillo ¿Cuántos bloques y ladrillos se requieren?

Solución

Si al terminar se han utilizado el mismo número de bloques y ladrillos, los bloques cubrirán tres partes y los ladrillos una parte (relación tres a uno) Tres partes de muro se cubren con 150 bloques y una parte de muro, con 150 ladrillos.

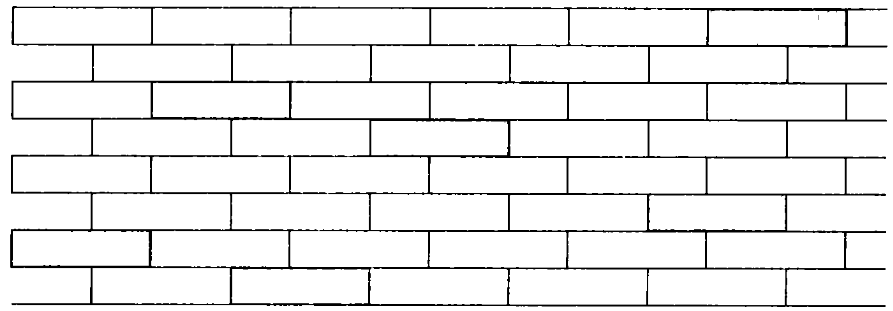


Figura 11

LA SUMA DE LOS NÚMEROS IMPARES

Enunciado

¿Cuál es la suma de los primeros 5 números impares?

¿Cuál es la suma de los primeros n números impares?

Solución

Sea la tabla en donde se tienen las sumas para los siete primeros impares.

Orden impar	1°	2°	3°	4°	5°
Impar	1	3	5	7	9
Suma	1	4	9	16	25

Figura 12

[illegible] algunos de los problemas que se exploraron y, como [illegible] pueden constituir familias distintas cuando se consideran diferentes puntos de vista. Una vez decididos los patrones que [illegible] la exploración de aula (el conteo combinatorio y la proporcionalidad), nos dedicamos durante el año 2003 a determinar los procesos y las soluciones que se daban en las situaciones de aula correspondientes. Anotemos desde ahora que no nos referimos a la respuesta o al resultado, sino a las soluciones y los procesos. Esta apertura es crucial para comprender la experiencia y se justificará estudiando cómo es la organización de la clase.

La organización de la clase

Teniendo como objetivo la construcción de patrones en contextos matemáticos, la clase se basa en una metodología de resolución de problemas, con trabajo en grupo y socialización de elaboraciones. Buscamos que los estudiantes se aventuren en las búsquedas, ganen confianza, aprendan del error y validen como fuentes de conocimiento no sólo al maestro y los textos, sino la argumentación y la conversación entre ellos mismos. La clase, en términos de "hacer matemáticas", permite que el niño se entusiasme y asuma las actividades como un reto en el que sus búsquedas no tienen más recompensa que la satisfacción de haber logrado una construcción propia.

En consecuencia, planteamos como hipótesis que si se propicia una metodología de clase que permita la intervención y la construcción de conocimiento matemático, los estudiantes "piensan matemáticamente", es decir, se comportan como individuos que autónomamente enfrentan las situaciones problema y tratan de solucionarlas Por otra parte, ellos también están en capacidad de utilizar o transferir lo que logran en un primer problema a otros (aprenden) o, lo que es lo mismo, identifican patrones. Para ello el entorno de aprendizaje y el papel del maestro se redefinen en las dinámicas del aula.

En este sentido, la clase obedece a la búsqueda de ambientes que superen dificultades que surgen usualmente, por esto nos la jugamos por la opción del trabajo en colectivos, y por la condición de que los problemas que se aborden no tengan caminos de resolución rígidos y previamente definidos, privilegiando como desenlace la interacción que se desencadena por la apropiación de la situación. La clase, entonces, puede verse como un proceso recursivo en el cual las sucesivas intervenciones van resignificando el problema de estudio, y esta resignificación se enriquece a partir de la socialización de las propuestas y de la discusión general.

Para mayor claridad sobre los diferentes momentos que hacen parte de la metodología de clase, presentamos un esquema sobre la sintaxis de la innovación. En nuestro diagrama de la sintaxis de la clase se sitúan cuatro momentos.

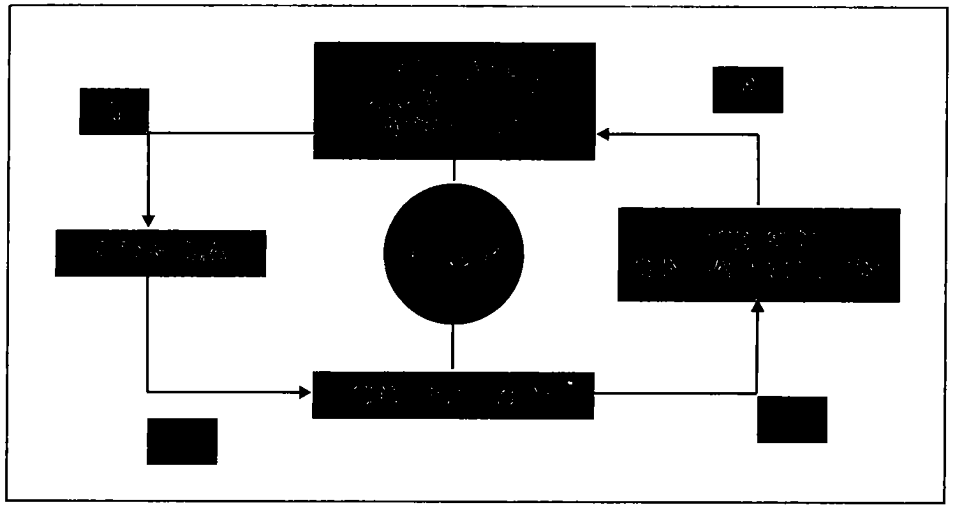


Figura 13

1. **El problema:** Momento inicial en el cual se plantean actividades desencadenantes que generan búsquedas y ocasiones para el pensamiento en los estudiantes.
2. **Elaboración de candidatos a solución:** En pequeños grupos de trabajo, y ocasionalmente de manera individual, los estudiantes se embarcan en la búsqueda de soluciones al problema planteado.
3. **Discusión general en grupos:** Las propuestas que se logran en los grupos, y que sintetizan una alternativa, se someten a discusión en el grupo general, constituido por todos los estudiantes. En este momento se presentan exposiciones, argumentaciones, intentos de pruebas validatorias, preguntas, etc. entre los integrantes del grupo quienes, como sucede en los colectivos de una comunidad académica, someten a consideración las propuestas de cada uno de sus miembros.
4. **Resultados de la confrontación:** La discusión se concreta en una confrontación de la hipótesis con la realidad que ha sido construida por todos. El resultado de esta confrontación conduce a una reformulación del problema inicial (o reinterpretación) o a una aceptación de la resolución como solución al problema.

En las dinámicas que genera esta propuesta de clase existen varios interrogantes y novedades que deben ser considerados. Por una parte, las interacciones entre los miembros del colectivo definido por la búsqueda son frecuentes, significativas y de reconocimiento. Este elemento, que a la vez que se sustenta en la convivencia, es su soporte pedagógico[6] y el ambiente propicio para la construcción de la disciplina; en nuestro caso, de la matemática (lenguajes, formas de argumentación, criterios de validez, etc.). Sobre este punto volveremos luego, al considerar los procesos de validación. Por otra parte, y como ya se insinuó anteriormente, el papel del maestro en esta clase de matemáticas es diferente al usual, aspecto que vale la pena explorar y alrededor del cual haremos una ampliación más adelante. Por el momento, veamos cómo transcurre la clase frente a situaciones concretas y cómo en las interacciones surgen diferentes formas de pensamiento al construir los patrones.

Procesos de pensamiento en la identificación de patrones

Consideremos algunas características de los procesos que encontramos en la búsqueda de patrones, cuando estudiamos los problemas de conteo y de proporcionalidad. En este caso, se trata principalmente de elaboraciones de niños de grado 7º (entre 12 y 14 años aprox.)·

Si bien planteamos momentos muy bien determinados en el proceso, no pretendemos presentarlos como partes de un esquema rígido, sólo buscamos caracterizarlos, en nuestro afán por comprender lo que está sucediendo.

Como se verá, en un primer momento el interés del grupo se centra en hacer comprensible el problema. Esta intención conduce a que en un proceso colectivo todos enfrenten el mismo problema. Posteriormente se da una exploración de soluciones particulares, esto es, se busca solucionar problemas concretos que serán, a la vez, punto de partida y ejemplo de la solución general que se quiere construir. Al final tenemos dos niveles de generalización: uno relacionado con el problema concreto que se estudia, y otro con la construcción de las familias de problemas, en un segundo nivel de generalización.

PRIMER MOMENTO: HACER COMPRENSIBLE EL PROBLEMA

Cuando se plantea la situación problema los estudiantes, dispuestos en grupos de trabajo, construyen un tránsito entre el enunciado (partiendo de experiencias cotidianas) y elementos que les permiten

matematizar. Para esto se valen de material concreto, representaciones gráficas y a veces, cuando el problema lo permite, de recreaciones vivenciales de la situación planteada. Consideremos como ejemplos los siguientes problemas (para su enunciado, nos remitimos a las Figuras 6 a 10).

En el caso del problema de los saludos o de otros problemas de conteo (como Misioneros o Caníbales, El Salto de la Rana y La Torre de Hanoi), los estudiantes proceden a enriquecer su dominio experiencial armando grupos para darse los saludos o recurriendo a material concreto que les permita solucionar las situaciones mediante la realización efectiva de los movimientos.

En los casos de proporcionalidad (Figuras 11 y 12), la representación gráfica es un paso que permite a los estudiantes hacerse una imagen para elaborar la situación que propone el problema e iniciar una acción orientada hacia su solución.

Este primer paso se caracteriza por la necesidad de *hacer comprensible el problema* y por los elementos que permiten matematizarlo. En este sentido, la situación se liga todavía con el contexto en el que se plantea y el colectivo busca reducirlo a elementos que se puedan manipular efectivamente.

En esta etapa del proceso con frecuencia los mismos estudiantes, en una dinámica de discusión, re-enuncian el problema en términos que para ellos son, a la vez, comprensibles y compartidos.

RESOLVER SITUACIONES PARTICULARES

Después de haber comprendido la situación, ya sea ejecutando efectivamente las acciones o a través de representaciones gráficas, nos encontramos con una primera aproximación que se asocia en algunos casos con registros numéricos que dan cuenta de *soluciones particulares* al problema.

Para los saludos

En el caso del problema de los saludos, se resuelven situaciones como *"para 5 personas hay 10 saludos, para 6 personas hay 15"*, valiéndose ya sea de la acción efectiva de saludarse o mediante representaciones gráficas en las cuales se ilustran las personas y los saludos, y luego se cuentan.

Un ejemplo de este procedimiento es la asignación a cada persona de una letra y el establecimiento del número de parejas que se forman:

"Si las personas son A, B, C, D y E, los saludos que se dan son. AB – AC – AD – AE – BC – BD – BE – CD – CE – DE."

También se puede llegar a una suma argumentada:

"Como son seis personas, la primera da la mano a 5, la siguiente a 4 (se saluda 5 veces, pero como ya saludó a la primera, no se cuenta), y así sucesivamente: 5+4+3+2+1=15".

Para el lavadero

Esta alternativa, de ejecución efectiva de las acciones que se proponen, puede verse también en el problema del lavadero de carros:

"Si el lavador A lava el carro en una hora y el lavador B lo lava en 2 horas; en media hora el lavador A ha lavado medio carro y el lavador B, un cuarto de carro."

Razonamientos inadecuados

Cabe anotar que en esta instancia suelen presentarse razonamientos inadecuados, los cuales pasan a ser puntos de discusión. En estos casos el contra-ejemplo y otras formas de argumentación son, a la vez, ocasiones y evidencias de procesos de elaboración matemática. Para el caso de los saludos, por ejemplo, se presenta con frecuencia la tendencia a usar una regla de tres directa:

"Si para 5 personas hay 10 saludos, para 10 personas habrá 20, porque como 10 es el doble de 5, debe haber el doble de saludos "

Esta explicación se argumenta por la generalización que suele hacerse sobre la invarianza de la razón entre los valores numéricos, en este caso de 1 a 2 (5 a 10).

O, en el caso de proporcionalidad:

"Si el lavador A gasta 2 horas en lavar el carro, y el lavador B gasta 1 hora en lavarlo, entre los dos gastan hora y media "

Esta tendencia de pensamiento, que lleva a aplicar el promedio del tiempo usado entre los dos lavadores, se presenta de manera casi inmediata. Generalmente no hay una explicación más allá de la acción misma: se suman los dos tiempos y se divide entre dos, para ver cuánto gastan juntos. En nuestra opinión, es la tendencia a aplicar un algoritmo.

Algunos afirman

"El tiempo total es de una hora y media, porque el lavador A lava medio carro en 1/2 hora y el lavador B lava su mitad en una hora."

En esta respuesta es claro que no se considera la simultaneidad en el trabajo de lavar el carro, y lo que se está resolviendo es otro problema.

Como anotábamos, se trata de interpretaciones que se presentan cuando se está en el proceso de hacer comprensible el problema

Las soluciones que se consideran inadecuadas (ya que no resuelven la situación planteada) son importantes para que el estudiante, mediante el reconocimiento de su error, reinterprete el problema. Ahora bien, para que el error se constituya en una fuente de conocimiento, el estudiante mismo debe caer en la cuenta de él; en este caso, de lo impropio del razonamiento. Con frecuencia el error se hace evidente cuando quienes han comprendido el problema lo hacen ver a través de preguntas o con argumentos.

En el problema de los saludos es usual remitir a la acción de saludar. En el del lavado de autos se presentan argumentos como:

"No puede ser más de 1 hora, que es el tiempo que se demora el más rápido en lavar solo el automóvil."

PRIMER NIVEL DE GENERALIZACIÓN:

Otro momento, que aparece generalmente con la intervención del maestro, es el paso de los casos particulares a la consideración de la situación de una manera general.

Para los saludos

En el problema de los saludos (o en cualquier problema de conteo), esta fase se realiza a partir de la presentación de resoluciones particulares en tablas de dos entradas, con las que se busca que el estudiante se disponga a ver las relaciones numéricas que allí aparecen. En la representación ordenada de los datos interviene el maestro.

Persona	Saludo
2	1
3	3
4	6
5	10
6	15
7	21
N	¿?

Figura 14

Luego de identificar correlaciones y patrones, y de establecer recurrencias, el problema no se plantea en términos de encontrar la solución numérica para casos particulares sino de construir una solución que resuelva el problema para cualquier número de personas.

Para el lavadero

En el caso del problema de proporcionalidad (El Lavadero de Carros), este paso se da cuando los estudiantes inician el proceso de cubrir la superficie; por ejemplo, cuando dividen el carro en cuatro partes: dos de éstas (1/2 del carro) son lavadas por el trabajador más rápido, y una (1/4 del carro) por el más lento.

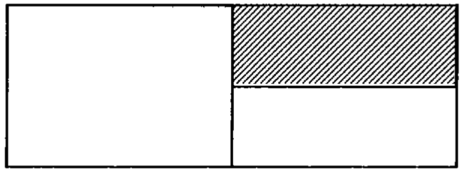


Figura 15

La tarea siguiente es finalizar la acción de la parte que falta. Para ello, algunos niños continúan con particiones de iguales características (cada parte que falta por lavar se divide de manera que la mitad corresponda al trabajador más rápido y una cuarta parte al más lento).

Otros asocian el tiempo que se utilizó en lavar las tres cuartas partes del carro y buscan, mediante una regla de tres, cuánto tiempo se invierte en lavar el cuarto restante.

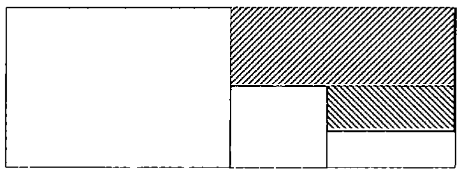


Figura 16

"En media hora –que son 30 minutos– los dos trabajadores han lavado 3/4 del carro; éso quiere decir que cada cuarto lo lavan en diez minutos, y el carro lo lavan completamente en 40 minutos."

En este ejemplo particular, vemos cómo la acción de recubrir figurativamente la superficie del carro (que representa lavarlo) permite solucionar la situación, y puede utilizarse en otros casos del mismo tipo, como el que presentamos a continuación:

Un grupo de estudiantes dividió el carro en 6 partes iguales, correspondiendo cada parte a la superficie lavada en 10 minutos (por el trabajador más rápido).

"Mientras el trabajador más rápido lava 1/6 de carro en 10 minutos, el lento lava la mitad de lo que lavó el rápido en la misma cantidad de tiempo, mientras el rápido lava 2/6 de carro en 20 minutos, el lento lava 1/6. Cuando el rápido lava 3/6 de carro en 30 minutos, el lento lava 1/4 en la misma cantidad de tiempo. Finalmente, el rápido lava 4/6 del carro en 40 minutos y el lento lava 2/6 en la misma cantidad de tiempo. En conclusión, se demoran 40 minutos en lavar todo el carro."

SEGUNDO NIVEL DE GENERALIZACIÓN

Habiéndose encontrado respuestas generales a los problemas puntuales que se propusieron, lo que sigue es realmente sorpresivo. En algún momento, al tratar de solucionar otro problema, los niños descubren y expresan que *"es el mismo problema que ya habíamos resuelto"*. Aunque desde un cierto punto de vista se trata de dos problemas distintos, desde otro ángulo puede comprobarse que se trata del mismo. Llegamos así a un segundo nivel de generalización, que hemos denominado ***identificación de familias de problemas***. En este momento el papel del maestro es crucial, en cuanto es quien propone las situaciones problema que sabe que poseen una estructura similar a las estudiadas previamente, de manera que los estudiantes están en posibilidad de recurrir a las soluciones que han construido antes. Aquí identificamos nuevamente un proceso que es recurrente y podríamos decir, además, que en matemáticas el proceso mediante el cual se ordena lo nuevo en términos de lo que ya se sabe es un proceso de matematización.

Ahora bien, este *"poner lo nuevo en téminos de lo conocido"* se da de diferentes maneras, y por ello hablamos de ***diferentes tipos de Familias de Problemas***.

Problemas de conteo, una forma de trabajo

En el caso de problemas como el de Los Saludos, El Salto de la Rana, Misioneros y Caníbales o La Torre de Hanoi (véanse las fichas de las páginas 8 y siguientes), encontramos que las maneras como se abordan y se siguen los procesos de resolución tienen similitud en la metodología de trabajo. Incluso el enunciado mismo sugiere la acción de contar.

Se está sugiriendo la acción de contar, que permite relacionar dichas situaciones como problemas de conteo, en las cuales los estudiantes identifican invariantes que les proponen unificar la "metodología de resolución"; es decir, a pesar de que lo que necesitan contar no es de la misma clase, la forma de contar sí tiene similitudes.

- Inician recreando la situación, manipulando fichas u objetos, cuando resuelven casos puntuales.
- Identifican que se trata de ir más allá del caso particular.

- Presentan los datos numéricos organizados en tablas de dos entradas, a partir de las cuales establecen regularidades.

Veamos algunos ejemplos.

Problema de los saludos

"De 1 a 3 hay 2, de 3 a 6 hay 3, de 6 a 10 hay 4, y así sucesivamente. A medida que se va avanzando aparecen los números consecutivos "

Personas	Saludo
2	1
3	3
4	6
5	10
6	15
7	21
n	

Figura 17

Salto de la rana

"De 3 a 8 hay 5, de 8 a 15 hay 7, de 15 a 24 hay 9. Cada vez que aumenta en una unidad el número de fichas por color, se incrementa en progresión continua y creciente en la serie de los números impares, comenzando desde 5."

Fichas por color	Mov.
1	3
2	8
3	15
4	24
5	35
6	48
n	

Figura 18

Misioneros y caníbales

"Avanzando en el número de caníbales y misioneros va aumentando en cuatro el número de viajes "

Fichas	Mov.
1	1
2	5
3	9
4	13
5	17
6	21
n	

Figura 19

La Torre de Hanoi

"Cuando se incrementa el número de discos, el número de movimientos que corresponde hacer es el doble del empleado en el caso anterior más 1."

Fichas	Mov.
1	1
2	3
3	7
4	15
5	31
6	63
n	

Figura 20

A partir de los ejemplos apreciamos cómo se procede a la solución general con base en la *recursividad, utilizando el dato anterior para establecer el nuevo valor*. Si bien los estudiantes inician con el estudio de casos puntuales, cuando presentan los datos organizados en forma de tabla hacen uso de la información que allí se consigna, dejando de lado la manipulación puntual para centrarse en la búsqueda de regularidades y, cuando es necesario, en conseguir valores para otros casos.

Es importante resaltar cómo los estudiantes construyen los nuevos valores a partir de relaciones que observan en los datos que ya poseen En algunos casos, como en los dos primeros problemas (el de los saludos y el del salto de la rana), identifican una secuencia numérica que se va formando a medida que van pasando de un número al siguiente. Para el primer caso los números consecutivos, y para el salto de la rana los números impares a partir de 5. En problemas como el de Misioneros y Caníbales, ven que el incremento entre el número de viajes es constante (en este caso 4) y así continúan incrementando. En el último caso, el de la Torre de Hanoi, identifican una operación numérica que relaciona los valores consecutivos (en este caso 2^n)

En nuestra experiencia los estudiantes de 6º a 9º, sea porque cuentan con la orientación del maestro o porque ya han construido esta metodología de resolución en problemas de conteo, llegan a este momento. Algunos construyen expresiones matemáticas en las que un dato es independiente de los anteriores (esto es, no son recursivas) y que se convierten en patrones generalizadores. En los ejemplos citados aparecen los que se muestran en la siguiente tabla.

Problema	Expresión matemática
Saludos	n(n-1)/2
Salto de la rana	n(n+2)
Misioneros y c	4n - 3
Torre de Hanoi	2^n - 1

Figura 21

Debe anotarse que sólo se han mencionado algunas de las formas de ver la regularidad ya que, como hemos visto, para cada problema existe una diversidad de caminos de resolución

Por patrón de regularidad

En este mismo sentido, tras la identificación de familias de problemas aparecen situaciones que se distinguen por el patrón de regularidad. Un ejemplo bastante representativo es el de los problemas de conteo combinatorio. Tras resolver el problema de los saludos, se presentan situaciones como las siguientes:

En un campeonato de fútbol, en el cual los equipos se enfrentan entre sí una vez en una serie de "todos contra todos", participan 10 equipos. ¿Cuántos partidos resultan en el campeonato?

*¿Cuántos lados y diagonales pueden contarse en un polígono de **n** vértices?*

En estos problemas, los estudiantes reconocen que se trata de situaciones similares a las que han trabajado previamente, pues mientras en el problema de los saludos los elementos son las personas y los saludos, en el problema del campeonato hay equipos y partidos, y en el de los polígonos hay vértices, lados y diagonales. Son usuales argumentaciones como.

"El problema del campeonato de fútbol es igual al de los saludos Lo que pasa es que en el de los saludos se dan la mano dos personas y en el del campeonato juegan dos equipos, los equipos serían las personas y los partidos los saludos. Lo mismo sucede con los lados y las diagonales de los polígonos· los vértices representarían a las personas en el problema de los saludos, o los equipos en el del campeonato, y los lados y las diagonales representarían los estrechones de manos o los partidos "

En este momento de aplicación de una solución elaborada en una situación anterior y similar a la nueva que se enfrenta, en la cual se ha construido el patrón de regularidad, los estudiantes plantean que la solución general para saber el número total de partidos con *n* equipos, o el número total de diagonales y lados para un polígono con *n* vértices, es *n.(n-1)/2*. Esta expresión puede ser interpretada desde dos perspectivas relacionadas con la resolución del problema como patrón predictivo o como patrón explicativo.

Patrón predictivo: Cuando la expresión se asocia con el comportamiento numérico de los valores. Los estudiantes comprueban que el número que aparece como resultado coincide con el producto del valor inicial por el anterior, valor que se divide por dos. Es decir, la expresión *n.(n-1)/2* les permite anticipar cualquier caso sin asignar significados

Patrón explicativo: En este caso, cada término de la expresión *n (n-1)/2* tiene un significado asociado con las variables del problema En la situación de los saludos, *n* se refiere al número de personas, *n – 1* a la cantidad de saludos que da cada persona (que corresponde al número total de personas menos uno, ya que cada individuo no se saluda a sí mismo), y *dividido sobre 2* al hecho de que cuando una persona A saluda a una persona B, el caso es el mismo que se da si la persona B saluda a la persona A, por lo cual debe descontarse la mitad de los saludos (de manera análoga se pueden explicar los otros problemas de la familia). Aquí vemos que la expresión del patrón de regularidad se asocia con la situación que se resuelve.

Familias de problemas por la estrategia de matematización

Respecto a los problemas de proporcionalidad, identificamos la familiaridad por la forma del planteamiento, así como por la acción de resolución pues, a diferencia de los problemas de conteo, en éstos pocas veces se llega a una expresión general. Además del problema del lavadero de autos o el del muro (mencionados anteriormente), podemos citar otros del mismo tipo como los siguientes:

Las Llaves: Un recipiente se llena de agua bajo la llave A en 2 min., y bajo la llave B en 4 min. ¿Cuánto tiempo tardará en llenarse si se coloca bajo las dos llaves?

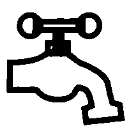
Los Carros. El carro que sale del punto A hacia el punto B recorre la distancia l en 1 hora y el carro que sale del punto B hacia el punto A lo hace en 2 horas. ¿En cuánto tiempo y en qué punto se encuentran?

Acciones figurativas

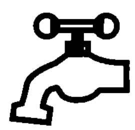
Los estudiantes identifican que las situaciones son similares, ya que cada vez necesitan recubrir figurativamente una superficie, un volumen o una longitud. En los problemas que hemos presentado, para los cuales hay una relación de 2 a 1, prevalecen las acciones de resolución pasando de un problema a otro.

Algunos estudiantes realizan particiones y a través de la regla de tres encuentran la solución, como ya se mencionó. Las soluciones siguientes ilustran esta estrategia:

Para el caso de las llaves, citado anteriormente:



"En 1 minuto la llave A llena medio recipiente y la llave B llena un cuarto de recipiente; por tanto, en 1 minuto se han llenado 3/4 del recipiente Así, se deduce que en 20 segundos (que es la tercera parte de un minuto) se llena 1/4 de recipiente. En total se necesitarían 80 segundos para llenarlo totalmente "



La situación es similar en el problema de los carros que se acercan: Dos carros, A y B, recorren la misma distancia; A en 1 hora y B en 2 horas. Si parten de los extremos uno hacia el otro, ¿en cuánto tiempo se encuentran?

Si se divide la longitud en 6 partes iguales, que corresponden a lo que recorrería el carro más rápido (que sale de A) en 10 minutos, establecemos que se encuentran a los 40 minutos El análisis es similar al que se sigue con el problema del lavadero de autos

Mientras el auto más rápido recorre 1/6 en 10 minutos, el más lento recorre 1/12, que es la mitad de lo que recorre el rápido.

En 20 minutos el más rápido recorre 2/6 (un tercio) y el más lento 1/6 En 30 minutos el más rápido lleva recorrido 3/6 de la distancia inicial entre ambos (la mitad) y el más lento 3/12 (un cuarto). Finalmente, a los 40 minutos se encuentran los dos autos.

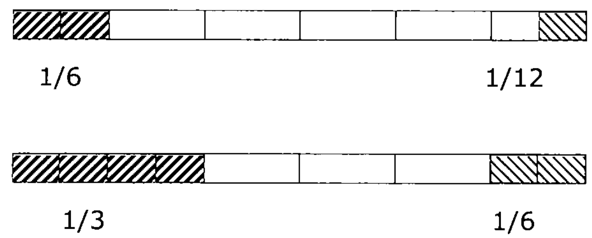


Figura 22

Aquí observamos cómo los estudiantes, ya sea en el trabajo de grupo o en la socialización de las soluciones, identifican que los problemas planteados, aunque tienen un lenguaje distinto, corresponden a la misma acción, y aplican lo que previamente han construido. En este caso, lo que habían hecho frente al problema del lavadero de autos.

Cuando la clase de matemáticas se realiza a partir del planteamiento de actividades desencadenantes, a las que nos hemos referido como problemas o situaciones problema, y los estudiantes –ubicados en grupos de trabajo– se embarcan en una búsqueda de soluciones que se someten a la discusión y a la confrontación de las hipótesis que se van construyendo, se logran evidencias de pensamiento que, de hecho, muestran una alternativa a aplicar y facilitan la presentación de algoritmos o procedimientos por parte del maestro, o su reconocimiento en el texto.

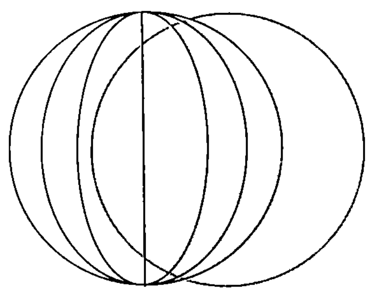
Hemos presentado de manera sucinta cuatro momentos en la construcción de patrones (que no pretenden mostrarse como un esquema inflexible), que se evidencian tanto en problemas de conteo como en problemas de proporcionalidad A partir de las observaciones anotadas se puede inferir cómo evoluciona el pensamiento matemático y se perciben, de acuerdo con las características de los estadios intelectuales definidas por Piaget[7], algunas transiciones:

El niño es capaz de realizar la operación, entendida como acción interiorizada, que ha sido posible después de la acción real con los objetos y la reflexión sobre ella (estadio II)... *Se desprende, pues, de lo concreto, y sitúa lo real en un conjunto de transformaciones. La realidad, que antes era punto de partida, se convierte poco a poco en una parte del conjunto de posibilidades mucho más amplio Los hechos reales son concebidos como parte de todo un universo de transformaciones posibles* (estadio III)

Adicionalmente, a partir de las transformaciones en las elaboraciones que realizan los estudiantes, y de acuerdo con lo que plantea Steen a propósito de los Patrones, encontramos más elementos para valorar positivamente esta alternativa de clase. Steen[8] anota:

Los conceptos recurrentes (por ejemplo, número, función, algoritmo) llaman la atención hacia lo que debe saberse a fin de comprender la matemática; las acciones comunes (por ejemplo, representar, descubrir, demostrar) revelan capacidades que deben desarrollarse para hacer matemáticas

Los humanos utilizan el lenguaje de la matemática para describir patrones. La matemática es una ciencia exploratoria que busca comprender cualquier tipo de patrón. patrones que ocurren en la naturaleza, patrones inventados por la mente humana e, incluso, patrones derivados de otros patrones Para crecer matemáticamente los niños deben exponerse a una rica variedad de patrones apropiados a sus propias vidas, a través de los cuales puedan ver la variedad, la regularidad y las conexiones internas.



Estamos convencidos, como se planteó inicialmente, de que los estudiantes desarrollan su pensamiento matemático si los maestros permitimos que se aventuren a resolver problemas Como hemos visto, ellos construyen una concepción en la cual la matemática es una actividad permanente que no sólo sirve para resolver problemas de clase sino, y quizás es lo más importante, que generan confianza y le otorgan protagonismo en su hacer

Comentarios generales

Los cuatro momentos (hacer comprensible el problema, resolver situaciones particulares, y lograr tanto el primero como el segundo nivel de generalización, o identificación de familias de problemas) son elaboraciones que hemos hecho para dar cuenta de los procesos que se siguen en el aula, en tiempos que pueden variar desde unas pocas sesiones de clase hasta meses enteros de trabajo. Para cada uno de ellos, los rasgos distintivos son el trabajo en grupo como dinámica, la recurrencia como proceso, y la apertura como criterio de aprendizaje. El lector habrá notado desde un principio que llegar a una u otra solución no es resultado de una transmisión o una enseñanza sino de elaboraciones individuales en contextos colectivos. En esta dinámica, lo que logran unos grupos es incorporado como aprendizaje por otros, de suerte que si tratáramos de identificar quién enseña tendríamos que referirnos a los grupos mismos, o a los procesos que se desencadenan en el trabajo colectivo.

En cuanto a la identificación de familias de problemas, cuando los estudiantes reclaman frente a un problema nuevo que se trata del mismo que se resolvió anteriormente, o que para solucionar éste debe utilizarse el mismo procedimiento que ya se utilizó antes, nos encontramos con un verdadero aprendizaje en cuanto lo que se ha aprendido se proyecta como herramienta para trabajar problemas diferentes. Se trata de un ejemplo de recurrencia, proceso mediado por la matematización de las situaciones. Sólo cuando se ha dado tal matematización, ya sea mediante diagramas, representaciones geométricas o abstracciones numéricas, es posible afirmar que dos problemas distintos en el lenguaje común son el mismo en el contexto matemático. Y, por las características de la dinámica de la clase, podríamos ir más allá afirmando que tal proceso debe darse en colectivo y, en tal sentido, que los procesos de matematización y de construcción de un lenguaje matemático (esto es, de la matemática) se desarrollan coletivamente.

Por estas razones es conveniente considerar las dinámicas de los colectivos en los procesos de validación y de construcción de un lenguaje compartido, de un lenguaje matemático, aspecto íntimamente relacionado con la construcción del ambiente educativo.

Los procesos de validación

Consideramos un grupo, dividido en pequeños sub-grupos, comprometido con la búsqueda de soluciones a una situación problemática. Como hemos planteado antes, las diferentes aproximaciones individuales, aquellas que han sido socializadas en los pequeños grupos (P.G.), y las discutidas en el grupo general (G.G.), configuran el contexto de lo que denominamos procesos de validación

Ahora bien, en la perspectiva de una disciplina que se construye en las interacciones, los momentos de validación son instancias en las que se elaboran criterios disciplinarios que permiten definir, en cada caso, si la propuesta es correcta o no, y si los procesos y los procedimientos involucrados son coherentes. Se está construyendo un contexto matemático.

Por otra parte, el que sean precisamente los compañeros, convertidos en colectivo, quienes ponen a prueba y definen la validez o invalidez de una aproximación, es una oportunidad para la "construcción del otro" a través de la expresión de cualidades y roles que a veces pasan despercibidos en la cotidianidad. La pertenencia al colectivo le da legitimidad a las aproximaciones, al asumirlas como propuestas.

Estos dos elementos se manifiestan, por ejemplo, en la transición de la aceptación de las propuestas por la cercanía afectiva o el prestigio de los proponentes al logro de decisiones basadas en criterios disciplinarios (lógicos, operativos o conceptuales).

Dadas las dinámicas de aula, podríamos diferenciar en la validación tres momentos en un proceso típico, de acuerdo con la organización de la clase planteada antes la auto-validación, la validación en pequeños grupos, y la validación en el grupo general

La auto-validación es una primera aproximación, que supone la comprensión de la situación que se plantea y la identificación del problema como tal. Este primer momento suele convertirse en una instancia de matematización, en cuanto se elaboran comprensiones en el ámbito matemático a partir de situaciones planteadas en un lenguaje cotidiano (elaboración de esquemas o diagramas, no consideración de variables por no verse como relevantes, etc.).

La auto-validación confluye en los P.G como elemento determinante para la elaboración de un único problema, con el cual todo el grupo se compromete.

En los P.G. se exponen las aproximaciones individuales y se elaboran alternativas que, con frecuencia, como un tejido conceptual, se convierten en las propuestas del grupo para las discusiones generales En esta instancia (PG.), se someten a consideración las aproximaciones individuales con diversos resultados. En algunos casos, una propuesta es asumida como la del grupo, en otros, varias propuestas individuales son aceptadas como alternativas. También pueden ser desechadas en

cuanto no cumplen con la rigurosidad matemática que ha elaborado el grupo Finalmente, puede ser que de las discusiones surja una propuesta nueva que es elaborada por el PG.

Este procedimiento y estas dinámicas se repiten en las discusiones y elaboraciones de las plenarias del G.G.

EJEMPLO

Veamos un caso en el que se validan las propuestas luego de haberse experimentado las fases de autovalidación y validación en PG. Consideremos el siguiente problema:

Determinar el término n-ésimo de la sucesión de números impares 1, 3, 5, 7, ...

Expositor 1

Este parte de las siguientes tablas:

1	1
2	3
3	5
4	7
5	9
6	11
7	13
8	15
9	17
10	19

1

11	21
12	23
13	25
14	27
15	29
16	31
17	33
18	35
19	37
20	39

2

10	19
20	39
30	59
40	79
50	99
60	119
70	139
80	159
90	179
100	199

3

Figura 23

*- Como vemos, en **1** van los diez primeros números impares.*

*En **2** los impares que van desde el lugar 11 al lugar 20.*

*En **3** van los impares que ocupan los lugares 10, 20, 30, etc , los múltiplos de 10*

Observemos que el décimo es 19, el 20° lugar es 39, y que las primeras cifras de éstos lugares son 1, 3, 5, , etc.

Uno de los integrantes del auditorio pregunta,

- ¿De acuerdo con ésto, cómo se halla el impar que ocupa cualquier puesto?

El expositor 1, no encuentra respuesta.

Otro estudiante anota,

- Si se siguieran escribiendo los números impares, las primeras cifras de cada número serían 0, 1, 2, 3, 4, etc Mejor dicho, los cinco primeros se pueden escribir 01, 03, 05, 07, 09, luego los cinco siguientes son 11, 13, 15, 17, 19, y los siguientes cinco 21, 23, 25, 27, 29, y así sigue.

Otro estudiante continúa, mostrando un descubrimiento que ha hecho.

- Miren· el número 1 de la primera columna siempre está relacionado con el número 1 de la segunda columna; el número 2 de la primera con el 3 de la segunda; el 4 de la primera con el 7 de la segunda, y así sucesivamente .

En este caso, aunque el expositor no logra convencer al auditorio sobre la manera de encontrar cualquier impar, genera otros descubrimientos.

Expositor 2

Alguien anota:

- En la tabla vemos que el impar que ocupa el puesto 20 resulta de multiplicar el que ocupa el puesto 10 por 2.

Alguien replica:

- Si se buscan los impares, ¿cómo puede ocupar 38 el puesto 20? ¿No debe ser impar? ¡Yo tengo entendido que 38 es un número par!

Ante esto, el expositor anterior no tiene más que aceptar su equivocación.

Pero, además, otro estudiante continúa con la refutación desde otra perspectiva:

- Si el método está bien, debería servir para encontrar los números que ocupan los primeros puestos, haciendo la siguiente operación· si el segundo lugar lo ocupa el 3, al mutiplicar 2 (que es el segundo lugar) se obtendría el cuarto lugar, y si se multiplica 3 por el mismo 2 entonces daría 6, que no es el número que ocupa el cuarto lugar de la lista Por lo tanto, el método no se puede tomar para saber el número que ocupa cualquier puesto.

Expositor 3

- Yo tengo otra idea Veamos esta tabla. Aquí, el número que ocupa el puesto 3 es 5, que se obtiene de sumar 3 –que es el puesto que estamos buscando– con 2, que es el puesto anterior.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19

Figura 24

El número 9, que ocupa el quinto lugar, se puede obtener sumando 5 con 4. Por lo tanto, para encontrar cualquier número lo único que se necesita es sumar el puesto que se está buscando con el puesto anterior,

- ¡¡Claro!! Para obtener cualquier impar se suma un impar con un par, así.

3 = 2(par) + 1(impar), 5 = 3(impar) + 2(par); 7 = 4(par) + 3(impar).

Además, observen que se van intercalando, par + impar, y luego, impar + par, y así sucesivamente

Una voz al fondo dice:

- ¡Profe, profe!, mire que trazamos flechas diagonalmente. Entre 1 y 3, la diferencia es 2; entre 2 y 5, la diferencia es 3; y entre 3 y 7, la diferencia es 4 Es decir, las diferencias entre los números diagonalmente son los números 1, 2, 3, 4, y así sucesivamente; es decir, los números normales.

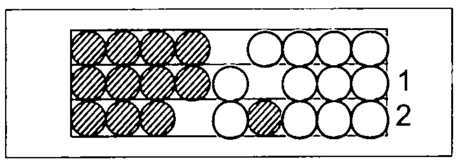
En esta transcripción hemos tratado de respetar al máximo las expresiones de los estudiantes. Se aprecia aquí un lenguaje en construcción, esto es, una disciplina en construcción. Este proceso incluye la elaboración conceptual, las formas de razonamiento, el aprendizaje de términos y, en general, la sintaxis disciplinaria. Otros aspectos que valen la pena apreciar son el aprendizaje que se da en la interacción entre estudiantes y el papel del maestro en las dinámicas de la clase.

Las formas de pensamiento y la diversidad de patrones

Aunque ya en las páginas anteriores hemos mostrado ejemplos de las elaboraciones de los niños cuando emprenden las búsquedas y argumentan en favor o en contra de las propuestas que se presentan en el aula, queremos en este punto presentar una visión más amplia sobre los tipos de solución que proponen frente a un único problema. Consideramos que esta exposición es conveniente para acopiar razones en favor de una clase de matemáticas que se oponga a las prácticas usuales. El asunto es que, a pesar de la convicción generalizada de que los niños piensan, con frecuencia las clases, y en particular la clase de matemáticas, se organizan como si no lo hicieran. Tal es el caso cuando frente a cierto tipo muy bien definido de problemas se enseñan los métodos y las estrategias de solución, que muchas veces se reducen a identificar y utilizar las operaciones o el algoritmo correspondiente. Nos encontramos, así, con problemas de suma o de multiplicación en la escuela primaria, del seno o la tangente en secundaria, o de integración por partes o por sustitución en la introducción al cálculo. Lo que aparentemente se tiene definido es que los métodos ya existen, y que lo único que debe hacer el estudiante es aprenderlos mediante una ejercitación sistemática. Tomando esta consideración como punto de partida, nos propusimos observar las formas de pensamiento de los estudiantes que aparecen en los procesos de búsqueda de generalizaciones o de patrones. La pregunta que nos planteábamos en este contexto se relaciona con la determinación de cómo piensan los niños, entre otras razones para llenar de contenido la aseveración, con la que todos estamos de acuerdo, de que los niños piensan.

Por otra parte, en las dinámicas de aula usuales, que como anotábamos están inmersas en la repetición de soluciones prototipo, se construye espontáneamente la idea de que la matemática es un conjunto de procedimientos establecidos que hay que aprender y, en tal sentido, que la investigación ya está clausurada en determinados ámbitos de la disciplina. En nuestra perspectiva, es necesario trabajar la clase con el objetivo de hacer de la matemática un campo abierto a la creatividad, la invención y la novedad Si ésto se logra, la disposición del niño frente a la clase y a las actividades puede ser diferente, en cuanto emergen las posibilidades de protagonismo en torno a la actividad intelectual.

Con estos dos objetivos en mente, nos propusimos observar las diferentes soluciones de los estudiantes a los problemas de búsqueda de patrones. Ahora bien, como en el desarrollo de la investigación se estudiaron muchos problemas (tal vez unos diez) y la diversidad de los mismos introducía otras variables en el estudio, restringimos la observación a las soluciones que se presentaban a un único problema. la búsqueda de patrones para solucionar el conocido juego de "El Salto de la Rana" (ver página 9).



Disposición inicial
para jugar el salto de la rana
y las dos primeras jugadas para N = 4

Figura 25

El ejercicio que resultó de inventar generalizaciones para establecer la solución al juego para cualquier número de fichas se convirtió en una veta inagotable de propuestas. Al final recuperamos 18 soluciones de las más de 25 que han sido planteadas por los niños, número que creemos suficiente para ilustrar la riqueza de las formas de pensamiento Por otra parte, hemos organizado la presentación identificando cuatro orígenes de los patrones que se proponen, y elaborando algunas implicaciones que pueden derivarse de ello para la clase de matemáticas.

En cuanto al origen de las soluciones y la estrategia que siguen los estudiantes, se pueden identificar claramente los siguientes tipos.

1. **Organización espacial de los números.** En estos casos se organizan los números espacialmente (geométricamente) con un orden que se va explorando hasta establecer si es conveniente o no A partir de esta organización, se tratan de definir patrones y relaciones entre los dos conjuntos: N, el número inicial de fichas de cada color, y Y, número mínimo de movimientos.

2. **Respuestas que se basan en la recurrencia (iteratividad).** En este caso, la solución para un número determinado de fichas se obtiene de la solución conocida para un número N-1 de fichas Las iteraciones pueden ser "juegos entre los números" o patrones que se obtienen a partir de la representación gráfica de los procesos de solución.

N	*Jugadas (Y)*
1	3
2	8
3	15
4	24
5	35

Soluciones de
El salto de la rana
para n = 1,2, 3, 4, 5

Figura 26

3. Respuestas que surgen de un juego de posibles combinaciones de los números y de operaciones entre ellos, a partir del conocimiento de unos pocos casos particulares. En este caso, en especial, puede ser importante el manejo de la operatoria.

4. Casos en el que Y (número mínimo de movimientos) se "valida" porque el proceso mediante el cual se obtiene sigue ciertos **patrones de simetría y de recurrencia**.

Organización espacial de los números

Como anotábamos, en estos casos se organizan los números espacialmente (geométricamente) con un orden que se va explorando hasta establecer si es conveniente o no. El enunciado sobre el establecimiento de la conveniencia o inconveniencia de una construcción –que aparecerá luego en otros ejemplos– es de por sí importante en tanto se refiere a dos elementos determinantes del pensamiento científico, en particular del matemático: en primer lugar, tenemos la convicción de que es posible encontrar (construir o inventar) un orden que dé cuenta de las parejas de números, es la concreción de una confianza en que es posible conocer y, en particular, de que el paso del caos al orden puede ser emprendido por él mismo; en segundo lugar, las organizaciones espaciales que se exploran se plantean en la búsqueda de construir correlaciones que se constituyan en puntos de partida para la elaboración de patrones

1	2	3			
2	4	6	8		
3	6	9	12	15	
4	8	12	16	20	24

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36

Figura 27

En el primer caso, tenemos la correlación entre el número de la columna (N) y el "paso" de la escalera (Y).

En el segundo caso, la correlación se presenta entre el primer número de la fila (N) y las intersecciones con la flecha (Y).

En el tercer caso, la correlación se presenta entre el primer número de la fila (N) y el "paso" de la escalera (Y).

1	2	3	4	5	6
2	4	6	8	10	12
3	6	9	12	15	18
	8	12	16	20	24
		15	20	25	30
			24	30	36
				35	42
					48

Figura 28

Los tres ejemplos ilustran los resultados de tales búsquedas. Podemos observar cómo en cada caso las regularidades identificadas pueden, en efecto, permitir la predicción de las parejas siguientes

Respuestas que se basan en la iteratividad

Veamos los siguientes tres ejemplos.

N	Y	iteración
1	3	0 + 0 + 3 = 3
2	8	3 + 2 + 3 = 8
3	15	8 + 4 + 3 = 15
4	24	15 + 6 + 3 = 24

Figura 29

Tomas el valor de Y para N-1, le sumas 3 y el par siguiente en la sucesión 0, 2, 4, 6, 8, etc.

Por ejemplo,

Para N=2, tomas el Y correspondiente a N-1, eso es 3.

Le sumas 3 (que es una constante) y el par siguiente a 0, esto es 2:

Y = 3+3+2 = 8

Para N =4, tomas el Y correspondiente a N-1, esto es 15, le sumas 3 (que es una constante) y el par siguiente a 4, esto es 6:

Y = 15+3+6 = 24.

N	Y	iteración
1	3	(0+1) + (1+1) = 3
2	8	(3+1) + (2+2) = 8
3	15	(8+1) + (3+3) = 15
4	24	(15+1)+(4+4) = 24

Figura 30

Para calcular el número mínimo de movimientos se toma el Y de N-1, se le suma 1 y dos veces el valor de N.

También se encuentran recurrencias a partir de soluciones que toman en cuenta disposiciones espaciales (recurrencias gráficas)

Figura 31

La figura ilustra el punto de partida para el juego con N=1, N=2 y N=3

Para N = 1 tenemos Y = 3 pues es el número de dibujos.

Para N = 2 tenemos Y = 8 que es el número de dibujos 5, más los 3 de N=1.

Para N = 3 tenemos Y = 15, que es el número de dibujos: 7, más los 8 de N = 2

En general, para saber el menor número de movimientos para un N se cuentan los dibujos correspondientes a N y se suman los que corresponden a N-1.

JUEGO DE POSIBLES COMBINACIONES DE LOS NÚMEROS Y DE OPERACIONES ENTRE ELLOS

En estos ejemplos se parte del conocimiento de unos cinco casos particulares (recordemos que el término general que se enuncia en cada caso es una elaboración de los maestros).

N	*Jugadas (Y)*
1	3
2	8
3	15
4	24
5	35

Soluciones de
El salto de la rana
para n = 1, 2, 3, 4, 5

Figura 32

Dados los cinco casos particulares que ya hemos enunciado, los siguientes son ejemplos de los hallazgos obtenidos en clase:

EXPLICACIÓN	FÓRMULA GENERAL
"Se multiplica el número de fichas de un lado por ese número mas 2"	N (N+2)
"Se eleva al cuadrado el número y se suma dos veces el mismo número"	N^2 +N + N
"Para cada N, se multiplica N menos uno más uno por N más uno más uno"	[(N-1)+1] [(N+1) +1]
"Se suma N, N+2 veces"	Se suma N, (N+2) veces
"Se multiplica N por la suma de 3 y N-1"	N[(3+(N-1)]
"Se multiplica el salto que estamos haciendo por el siguiente salto, y se suma el salto que estamos haciendo"	[N (N + 1)] + N
Simplemente "Un número impar se multiplica por el siguiente impar, y uno par por el siguiente par"	(2n-1) [(2n – 1) + 2] 2n (2n + 2)
"A N se le suma 2 y se multiplica el resultado por N"	(N+2) N

Casos en que el Y (número mínimo de movimientos) "se valida" porque el proceso mediante el cual se obtiene sigue ciertos patrones de simetría y de recurrencia.

La figura indica el proceso para solucionar el problema para los primeros tres casos: N = 1, 2 y 3.

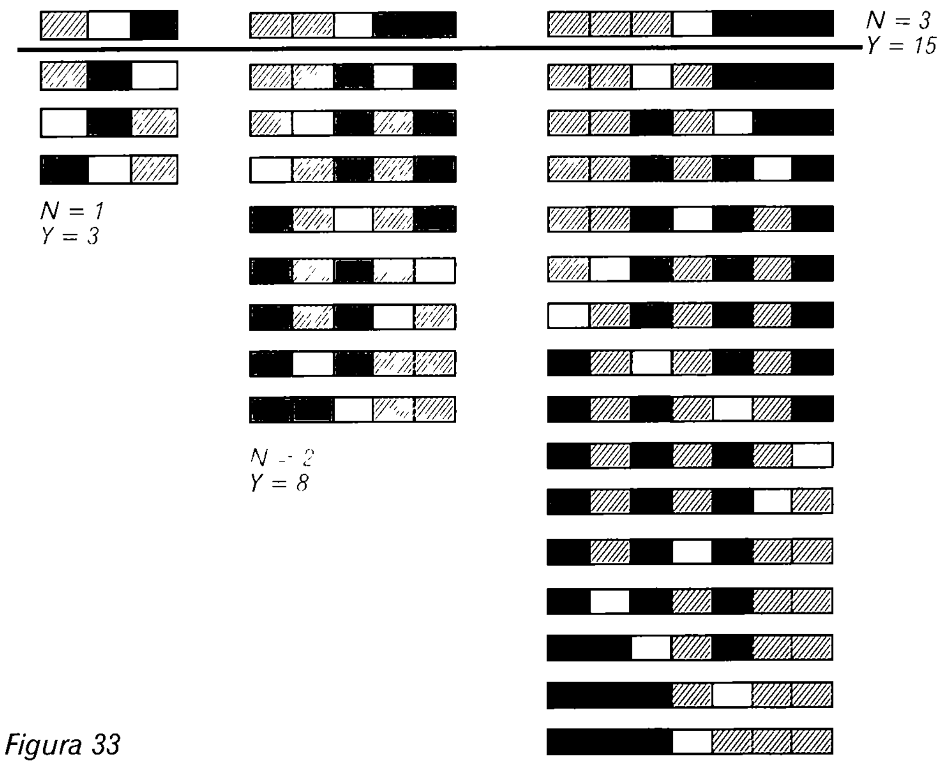


Figura 33

Con referencia a la figura 33, veamos las regularidades que aparecen con respecto al número de espacios vacíos que se dan en el proceso de resolución de problema·

Para N = 1	hay	1	2	1						
Para N = 2	hay	1	2	3	2	1				
Para N = 3	hay	1	2	3	4	3	2	1		
Para N = 4	hay	1	2	3	4	5	4	3	2	1

Sabiendo el número de espacios se puede determinar Y (el mínimo número de movimientos; esto es, la solución al problema)

Se suma el número de espacios y se resta 1.

Para N = 1	tenemos	4 – 1 = 3
Para N = 2	tenemos	9 – 1 = 8
Para N = 3	tenemos	16 – 1 = 15
Para N = 4	tenemos	25 – 1 = 24

Como éste, existen otros razonamientos interesantes que pueden consultarse en el informe final del proyecto.

Consideraciones

Así como para algunos los modelos de explicación científica que inventan los niños son, estructuralmente, muy parecidos a los modelos que inventan los científicos, también en este caso se podrían elaborar analogías entre las estrategias que guían a los niños en la invención de patrones y ciertas generalizaciones que se han presentado en la historia de la matemática (como es el caso de los trabajos de Pitágoras o de las representaciones del triángulo de Pascal). Este punto, que en el momento es analizado de manera superficial, es un asunto que podría dar origen a otros proyectos de investigación.

Desde el punto de vista de nuestro proyecto, lo que parece claro es que el proceso de modelización no es de descubrimiento sino de invención. En ese sentido, afirmamos que los patrones, más que ser formulaciones que hay que descubrir, son elaboraciones mentales que se hacen visibles como un descubrimiento cuando se ha inventado una forma de mirar.

Ahora bien, como resultados para tener en cuenta en el aula de clase, afirmamos lo siguiente:

1. Que los estudiantes no sólo piensan sino que sus formas de pensamiento son muy complejas, efectivas y sorprendentes.
2. Que los patrones que se construyen dependen de las herramientas matemáticas que se poseen, por ejemplo, de la operatoria
3. Que no sólo es posible sino más interesante inventar la matemática en el aula que resignarnos a repetir unas matemáticas establecidas.

Otro elemento de importancia, que podría suscitar no sólo investigaciones puntuales sino transformaciones en el aula de clase, es el estudio de los procesos de matematización. Posiblemente los procesos de enseñanza y de disposición de ambientes de aprendizaje, en el caso de las matemáticas, pueden producir mejores resultados si las orientaciones pedagógicas toman más en cuenta lo que sucede en el aula cuando los niños transforman sus acciones en operaciones –mediados por herramientas figurativas, dibujos, diagramas o consideraciones estéticas–, que cuando se asume que se trata simplemente de implicaciones derivadas del campo disciplinario

Así resulte reiterativo, anotemos que en esta actividad el grupo de aula se convierte en un colectivo definido por la búsqueda y que, en cuanto tal, participa en las discusiones que se dan ya sea para sustentar una solución que se propone o para refutar otra que se supone que no es válida. Este aspecto de la actividad es muy valioso en cuanto afianza un dominio de realidad que se está construyendo (las matemáticas), desde el cual tienen sentido afirmaciones relacionadas con lo válido o lo absurdo en el ámbito de la discusión.

El papel del maestro

Aunque ya nos hemos referido a lo que el maestro hace en nuestro modelo, y posiblemente para el lector sea claro cuál es su papel, trataremos ahora de llamar la atención y destacar algunas características que nos parecen muy importantes. Nos referiremos brevemente a aspectos de la planeación de las actividades y de lo que se hace en el desarrollo de éstas desde dos perspectivas las del docente como educador y como maestro de matemáticas.

EN LA PLANEACIÓN

Existen dos elementos, como puntos de partida, que son determinantes· el conocimiento que el maestro posea sobre los estudiantes y su formación como matemático. Esto le permite inventar o decidir qué tipo de actividad o de situación problemática propone ya que, como anotábamos, deseamos que los problemas, además de ser atractivos y plenamente comprendidos, se constituyan para los estudiantes en retos; esto es, en problemas que no han resuelto pero que sienten que están en capacidad de resolver

EN EL DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD

A las cualidades anotadas antes debemos añadir otras, que son de carácter epistemológico (la concepción del error y la autonomía del aprendizaje) y pedagógico (la formación de seres humanos)

1. Una buena formación matemática permite identificar en las propuestas y los discursos de los estudiantes intuiciones y descubrimientos valiosos en la construcción disciplinaria El descubrimiento y la valorización de las propuestas orientan las actividades que se proponen.

2. El conocimiento que posea de los estudiantes permite al maestro decidir en cada momento lo que debe hacerse frente a las intervenciones y las propuestas Una misma propuesta puede merecer para unos gran reconocimiento y para otros manifestaciones de desencanto o desilusión, pues se esperaba más de los estudiantes

3. Concebir el error como parte ineludible y necesaria de los procesos de aprendizaje nos lleva a propiciar situaciones en las que el estudiante descubra el error que está cometiendo. Recordemos que decirle desde afuera que está en un error puede destruir la posibilidad de aprendizaje, en cuanto la observación puede ser percibida como expresión de autoritarismo, y puede desaparecer así el carácter autónomo de las búsquedas.

4. En este sentido, tener presente que lo que el estudiante aprende no es lo que le enseñan sino lo que efectivamente aprende en la interacción con sus compañeros, con el maestro o consigo mismo, o lo que logra como invenciones al ver el mundo de otra manera Esto significa que el maestro, en vez de enseñar, deberá construir (con ingredientes necesarios de invención y creatividad) ambientes en los que se propicien encuentros de grupo y construcciones colectivas.

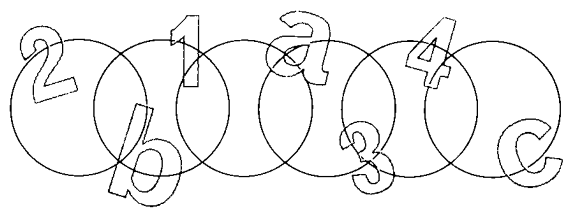
5. Lo que estamos diciendo es, entre otras cosas, que aunque la clase es de matemáticas, más allá de la importancia de las construcciones disciplinarias que se logren, lo que se busca es contribuir a que, en las interacciones que se propicien, se estén formando seres humanos; esto es, seres responsables y satisfechos de sí mismos,

conscientes de sus posibilidades y capacidades, y que reconozcan a sus compañeros en el respeto y en su diversidad. En esto el papel del maestro como dinamizador, como experto reconocido por los estudiantes como tal, como orientador y como acompañante, es determinante.

6. Para estas dinámicas hemos encontrado a partir de la experiencia la conveniencia del trabajo en colectivos, de suerte que entre las exigencias que se hacen al maestro está la de estimular su conformación y diseñar estrategias para que se comporten como tales, y no como grupos de personas en los que de manera individual e independiente se trabaja en torno a las situaciones problemáticas.

7. Otro aspecto importante es que el maestro se asuma como moderador en las dinámicas de los grupos. Se trata de que logre identificar las inquietudes del auditorio, conducir las discusiones, valorarlas, dar seguridades, etc.

8 Finalmente, el maestro deberá sentir realmente que lo que se está haciendo es importante. Una de las premisas para lograr la conformación de un colectivo de trabajo como el que proponemos, es que el interés y el compromiso del maestro por la actividad de búsqueda que se realiza contagie a sus estudiantes. Pocas actividades en sí mismas generan interés durante largos períodos. Esta condición se logra en especial por el interés que los estudiantes identifiquen en su maestro por lo que se está logrando. Ahora bien, tal interés no se genera por conveniencia sino porque se participa activa y comprometidamente en la actividad Para que esto se dé, las actividades de búsqueda deben considerarse desde otra perspectiva; en particular, no puede asumirse que los problemas que se proponen poseen una solución única, o que hay procedimientos únicos y privilegiados para resolverlos. Podemos cuestionar la idea de que la matemática es exacta, aunque sí lo sean los algoritmos, y vale la pena no confundir lo uno con lo otro.



Estas afirmaciones se apoyan en las vivencias cotidianas no sistematizadas en la clase de matemáticas. Una corroboración de ellas requeriría de investigaciones específicas orientadas a tal fin.

Bibliografía

SEGURA, Dino. y ROMERO, Jaime. *Las matemáticas en el aula, posibilidades de construcción significativa* En: Planteamientos en Educación, Nº 2. Bogotá. Escuela Pedagógica Experimental, 1993 pp 9 - 32

Sobre estas denominaciones, ver el cuarto elemento de la matriz disciplinaria definido por: KUHN, T. S. *Estructura de las revoluciones científicas.* México: Fondo de Cultura Económica, 1970.

TONUCCI, Francesco *¿Enseñar o aprender?* En: Cuadernos de educación 142 Caracas Cooperativa Laboratorio Educativo, 1993

Sobre publicaciones, ver. SEGURA, Dino. y ROMERO, Jaime *Las matemáticas en el aula, posibilidades de construcción significativa.* En. Planteamientos en Educación, Nº 2. Bogotá: Escuela Pedagógica Experimental, 1993. pp. 9 - 32; MALAGÓN, Janeth. *Una opción de clase de matemáticas a nivel medio* En. Revista Nodos y Nudos Nº 1, Revista de la Red de Cualificación de Educadores. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional, Agosto - Diciembre, 1995. pp 30 - 33. SEGURA, Dino. *El pensamiento de los alumnos· Testimonios de clase (elementos para una discusión)* En: Investigación en la Escuela Nº 23: el conocimiento escolar. Sevilla· Universidad de Sevilla, 1994. pp. 43 - 52. Vale la pena nombrar las ponencias al Foro Distrital de 2002· *La clase de matemáticas. génesis y elaboración de patrones;* y al III Encuentro Iberoamericano de Colectivo de Maestros y Docentes que hacen Investigación desde su Escuela de 2002 en Santa Marta: *La Enseñanza de las Matemáticas en la Escuela Pedagógica Experimental.*

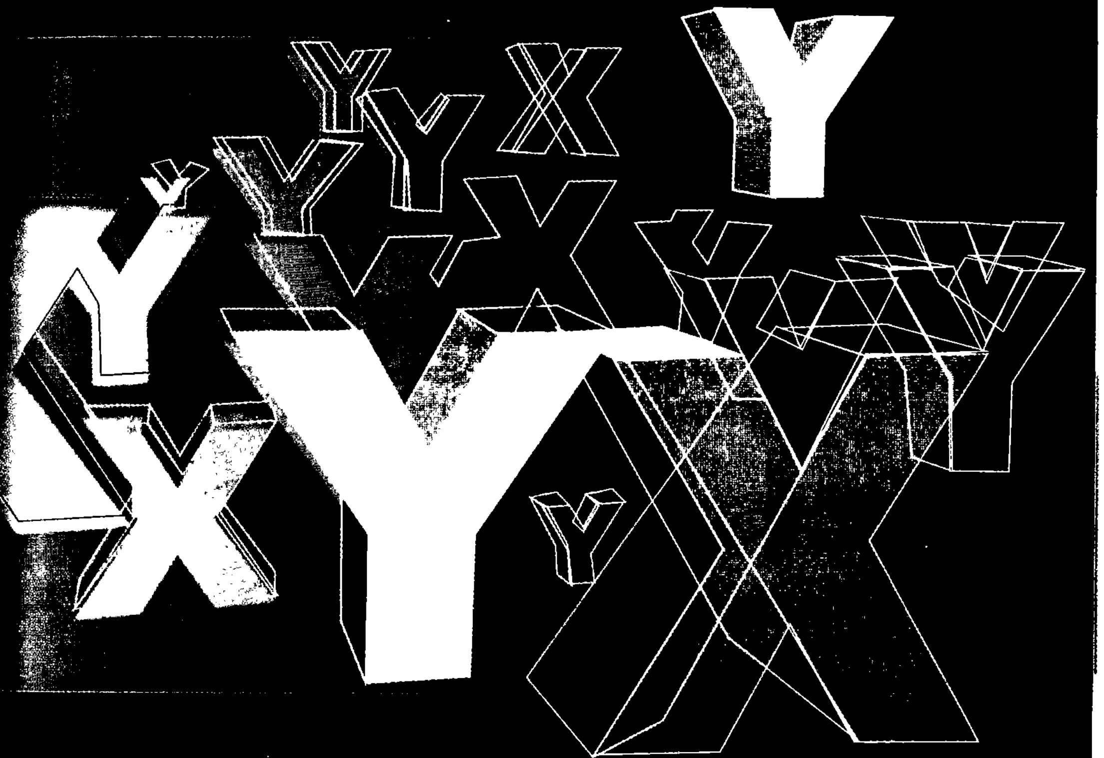
Véase. ORTIZ L., Marina. *Estado del Arte sobre la Investigación de la Enseñanza de la Matemática* Bogotá Socolpe y Colciencias, 2000

Este aspecto fue analizado en nuestro proyecto de investigación *La emergencia de la auto-organización en ambientes inmersos en la confianza* Bogotá· financiado por la Secretaría de Educación de Bogotá, 2002 - 2003

PIAGET, Jean. e INHELDER, . *De la logique de l'enfant a la logique de l'adolescent* París: PUF, 1955. Citado En· FIOL, Luisa Proporcionalidad directa. La forma y el Número Colección Matemáticas, cultura y aprendizaje. Nº 20. Madrid· Síntesis, 1990

STEEN, . *Enseñanza agradable de las matemáticas.* México: Limusa, 2001.

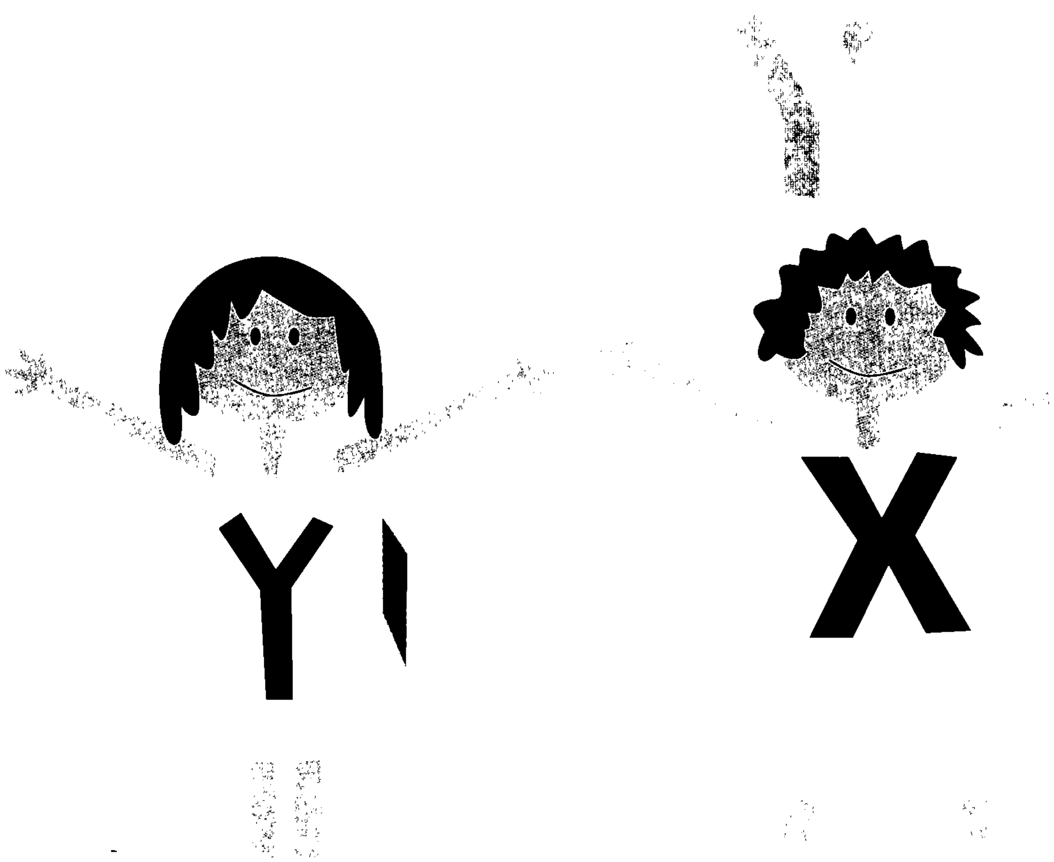
APLICACIÓN DE MODELOS EN EL PLANTEAMIENTO DE ECUACIONES Y EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS



Instituto para la Investigación Educativa y el Desarrollo Pedagógico IDEP

Institución Educativa Distrital Carlos Arango Vélez

Autores / Investigadores
Nivia Yela
Luis Fernando Almeciga
Germán Montezuma



APLICACIÓN DE MODELOS EN EL PLANTEAMIENTO DE ECUACIONES Y EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

En desarrollo del proyecto "Resolución de problemas mediante la solución de ecuaciones en Educación Básica", llevado a cabo entre septiembre de 2002 y octubre de 2003 en la Institución Educativa Distrital Carlos Arango Vélez, jornada de la tarde, se consideró un enfoque teórico que pone de relieve la validez y la pertinencia del empleo de *modelos* en el planteamiento y la solución de ecuaciones que se proponen como estrategia básica para la resolución de problemas.

La propuesta se basó en la secuencia de tareas que Socas, Camacho, Palarea y Hernández (1989) proponen, y que utiliza distintos *modelos* gráficos (balanza, diagramas, esquemas) como ayudas intermedias para llegar a la representación algebraica de las ecuaciones.

LOS MODELOS

Al tomar la decisión de basar la propuesta en la idea de *modelo*, fue necesario estudiar algunas de las definiciones y de los empleos de este término en la enseñanza de las matemáticas, con el fin de establecer un significado para el proyecto. Lo anterior teniendo en cuenta, además, que la palabra *modelo* se usa en diversas situaciones con significados que, aunque en general pueden aproximarse, puntualmente pueden diferir.

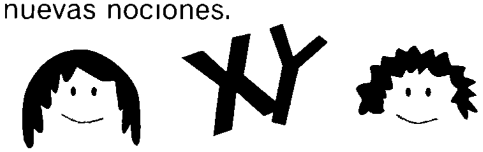
De acuerdo con Burkhardt (1981, citado en Janvier, 1996) y con De Lange (1987, citado en Janvier, 1996), *modelar* involucra una fase de formulación, durante la cual un fenómeno o una situación son examinados con el fin de establecer algunas relaciones claves entre las variables implicadas, que se completa con una fase de validación, en la que se verifica el modelo. En la fase de formulación se requiere un proceso de deducción que lleva a una regla, obtenida de acuerdo con cálculos realizados o de acuerdo con un razonamiento matemático particular, que es precisamente el modelo. Así, para Janvier (1996) un modelo puede estar formulado en forma de una expresión simbólica en la que una variable se expresa en términos de otras, en forma de gráfica, o como una tabla de números producida por un computador después de una simulación. En consecuencia, este autor define modelar como el doble proceso de crear o diseñar un modelo con base en supuestos, y verificarlo; el modelo tiene, por tanto, un estado doble se establece en términos matemáticos y es independiente de la realidad de la que emergió, y representa objetos o relaciones concretas que pueden ser medidas; a los elementos del modelo (parámetros de la fórmula, características de la gráfica y de la tabla) que no tenían significado previamente, se les da un significado según el contexto de la situación que se investiga, ya que un modelo puede considerarse al mismo tiempo abstracto y concreto.

Según Filloy y Sutherland (1996), hay dos posiciones extremas sobre el uso de recursos didácticos para la enseñanza del álgebra La primera propone modelar las nuevas operaciones y los objetos en algún contexto concreto y familiar a los estudiantes, para llenarlos de significado; en ese caso, el primer elemento de la sintaxis algebraica es construido con base en el comportamiento del modelo, por ejemplo, una balanza de brazos iguales o el modelo geométrico. La otra posición propone aprender las reglas sintácticas apropiadas, y aplicarlas luego en la resolución de problemas y ecuaciones. Esta es la aproximación tradicional de enseñanza basada en los modelos de Viéte (transposición de términos de una lado de la ecuación al otro) o de Euler (operar en ambos lados de la ecuación con los inversos aditivos y multiplicativos).

En general, los modelos desarrollados para la enseñanza de las matemáticas tienen dos componentes fundamentales. Uno es la traducción, por medio de la cual a los objetos y las operaciones en situaciones abstractas se les asigna significado y sentido al proporcionar manifestaciones más concretas; de esta manera, el estado de cosas en el nivel concreto representa otro estado de cosas en un nivel más abstracto, y la traducción se convierte en un proceso de doble sentido que permite identificar operaciones del nivel abstracto con operaciones en el nivel concreto. El segundo componente es la separación de los nuevos objetos y operaciones, introducidos por medio del modelo, de los detalles de significado apropiados al contexto concreto. Esta situación lleva a desprenderse de la semántica del modelo concreto, dado que lo que se busca no es la solución de un problema que el estudiante ya sabe cómo solucionar sino la manera de solucionar situaciones más abstractas por medio de operaciones igualmente más abstractas, por lo tanto, este componente es el que dirige la construcción de sistemas de signos más abstractos.

Los estudiantes desarrollan una tendencia a quedarse y progresar en el contexto concreto, y la fijación en el modelo puede demorar la construcción de una sintaxis algebraica que requiere un rompimiento de la semántica

del modelo concreto En el caso de estudiantes con una tendencia más sintáctica, algunos autores han observado obstáculos generados en el proceso de abreviar las acciones y producir códigos intermedios entre el nivel concreto y el nivel algebraico sintáctico, que inhiben la abstracción de las operaciones realizadas. Por lo tanto, la dialéctica de los dos componentes de la modelización debe ser tomada en consideración por los diseñadores de currículo para que no se obstruyan una a la otra. El rompimiento que se requiere es un proceso que niega parte de la semántica del modelo y que tiene lugar durante la transferencia del modelo de una situación problema a otra; pero cuando la generalización del modelo se deja al desarrollo espontáneo de los estudiantes es usual que nieguen partes esenciales del modelo mismo, como la presencia de lo desconocido o la operación sobre éste; en tal caso, es necesaria la intervención del profesor para desarrollar el proceso y llevar a los estudiantes a la construcción de nuevas nociones.



Los planteamientos anteriores están de acuerdo con nuestras percepciones previas acerca del trabajo de los estudiantes con diagramas numéricos como modelo, lo cual les permite pasar fácilmente de la representación gráfica a la algebraica y solucionar las ecuaciones, pues siguen el diagrama en sentido contrario a las flechas y realizan las operaciones inversas a las indicadas. Sin embargo, luego se les dificulta despojarse de los diagramas para resolver ecuaciones y, en general, no pueden resolverlas sin ellos Algo similar fue observado por Torres, Valoyes y Malagón (2002) con otros modelos para plantear y resolver ecuaciones.

Fundamentados en todas estas ideas y las de otros autores como Gómez (2002), quien distingue el término modelo de la expresión modelo matemático para referirse a la fórmula matemática, para el proyecto se asumió que un modelo permite representar situaciones, simularlas, simplificarlas y predecir comportamientos; es decir, el modelo posibilita mejorar la comprensión de la situación y resolver problemas. Se optó por usar la palabra modelo para nombrar no sólo modelos matemáticos; pero, además, por usarla junto con un adjetivo que indique de qué tipo de *modelo* se habla al referirse a dicho término; así, la balanza de brazos iguales se podría considerar como recurso para modelar o como modelo físico, el dibujo de la balanza como modelo gráfico, y la expresión algebraica general de una ecuación lineal como modelo matemático.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y PENSAMIENTO ALGEBRAICO

El empleo de modelos para facilitar la comprensión del proceso de formulación de ecuaciones y resolución de problemas requiere, igualmente, de una reflexión en torno a la naturaleza de la expresión *pensamiento algebraico*. En el intento por definir el pensamiento algebraico y, por consiguiente, el trabajo implicado en su desarrollo, Masón, Burton y Stacey (1992) hacen una diferencia entre aritmética y álgebra, cuando afirman que en la primera de estas disciplinas el trabajo se centra en manejar y operar números, mientras que en el álgebra el foco del trabajo son las relaciones entre ellos.

Por su parte, Bell (1996) indica que el término *algebraico*, añadido a la palabra pensamiento, puede adscribirse al trabajo en aspectos como los siguientes: a) la resolución de problemas aritméticos complejos, paso a paso, de los datos conocidos a los desconocidos o por una percepción global de múltiples relaciones aritméticas y su utilización; b) la codificación y el uso de métodos generales sistemáticos para resolver diferentes tipos de problemas, c) el hallazgo y la prueba de generalizaciones numéricas y geométricas, y d) el reconocimiento y el empleo de propiedades generales del sistema numérico y sus operaciones.

Otros autores, como Lins (1992, citado en Bell, 1996), definen el pensamiento algebraico como la percepción global de múltiples relaciones aritméticas y su utilización, independientemente del uso del simbolismo algebraico, es decir, pensar algebraicamente es pensar aritmética, interna y analíticamente. También Janvier (1996) plantea un punto de vista sobre el pensamiento algebraico cuando describe cuatro formas en que los estudiantes resuelven problemas, las cuales se distinguen por los grados de cercanía a un método algebraico riguroso: a) resolución de problemas aritméticos paso a paso; b) prueba y error; c) momento intermedio entre la resolución paso a paso y la detección de una estructura global del problema; d) reconocimiento de la estructura global del problema y, por lo tanto, de las relaciones involucradas.

Para abordar el enfoque de resolución de problemas como aproximación al álgebra, se consultó la propuesta de estos autores, quienes identificaron en un estudio tres grandes clases de problemas basados en la naturaleza de las cantidades involucradas y en las relaciones entre ellas:

problemas de compartir no equitativamente,

problemas que involucran transformación de magnitudes, y

problemas que involucran magnitudes no homogéneas y ratas de cambio

Una clase de problemas bien definida que se encuentra generalmente en el álgebra introductoria es la de los problemas cuya estructura revela las cantidades conocidas y las desconocidas, la relación entre unas y otras, y el tipo de relación involucrado. Estas relaciones están dadas más o menos explícitamente en el enunciado del problema, y deben ser reconstruidas por el estudiante con la ayuda de las cantidades conocidas, o de otro conocimiento matemático o contextual, antes de solucionar el problema

Por otra parte, teniendo en cuenta que los procedimientos aritméticos se organizan a través del procesamiento de las cantidades conocidas para establecer conexiones entre ellas y operarlas, estas cantidades son el punto de entrada de los estudiantes, y constituyen una de las principales diferencias entre los problemas aritméticos y los algebraicos. En los primeros puede establecerse fácilmente una relación entre cantidades conocidas, mientras que en los segundos no es así.

Usualmente los estudiantes intentan resolver los problemas algebraicos por procedimientos aritméticos o empleando métodos de deshacer de atrás para adelante, es decir, inversos. Según Bell (1996), muchos de los problemas que se proponen para solucionar en álgebra son también solucionables por razonamiento aritmético. Filloy (1996) ha enfatizado que los problemas que pueden ser representados por ecuaciones como $x + a = b$, $ax = b$; $ax + b = c$ pueden ser resueltos fácilmente por métodos aritméticos. Alegan que se produce un rompimiento didáctico con los problemas representados por expresiones del tipo $nx + b = cx + d$, ya que los estudiantes normalmente no los pueden solucionar por métodos aritméticos

Mason, Burton y Stacey (1992) plantean una serie de ideas claves que pueden constituir tanto las raíces del álgebra como rutas posibles para una mejor comprensión de esta asignatura por parte de los estudiantes de educación básica. Estas ideas son.

- expresar generalidades, que tiene que ver con el reconocimiento de patrones;
- ver generalidades. identificar factores clave y combinar estos factores para producir una regla;
- decir generalidades;
- registrar o escribir generalidades, que se refiere a reconocer un amplio rango de formas disponibles para expresar la generalidad;
- aceptar cualquier forma cómo legítima;
- dar tiempo para que el estudiante registre en forma pictórica o en cualquiera que escoja,
- promover el movimiento hacia una notación más sucinta (las ventajas de la forma sucinta de las expresiones simbólicas se hace evidente sólamente cuando es necesario manipular dichas expresiones),
- resolver problemas de la vida cotidiana para expresar una generalidad;
- construir expresiones y deshacerlas, manipular y reordenar expresiones con una meta fija en mente;
- proponer actividades con un amplio rango de posibilidades, y no simplemente respuestas correctas o erradas;

Si se quiere que las expresiones simbólicas tengan algún significado para quien aprende, las etapas preliminares del proceso de registrar son esenciales.

EL PROCESO DE GENERALIZACIÓN EN ÁLGEBRA

En los planteamientos que hacen docentes e investigadores en educación matemática se ha considerado que el propósito de la generalización en álgebra es encontrar una expresión que represente la conclusión, y que el propósito de la resolución de problemas de enunciado no es encontrar una fórmula para resolverlo sino un número (la incógnita) que forme parte de una ecuación. Esta diferencia no se da sólo en el nivel de las palabras, lo que llevaría a creer que la incógnita es una variable y la ecuación una fórmula La diferencia, de hecho, es fundamental, vale decir conceptual, y con frecuencia pasa inadvertida. La base lógica que subyace a la generalización es justificar la conclusión por un proceso de prueba que se mueve del conocimiento empírico, relacionado con los hechos, al conocimiento abstracto. La base lógica de la resolución algebraica de problemas es de naturaleza analítica, pues al resolver el problema se hace la suposición de que conocemos el número que se está buscando, y se maneja como si fuera conocido para revelar su identidad al final. Estas dos maneras de pensar son formas independientes, estructuradas y esencialmente irreductibles del pensamiento algebraico Lo anterior sugiere que los conceptos algebraicos de incógnitas y ecuaciones aparecen ligados intrínsecamente a la aproximación de resolución de problemas, y que los conceptos de variable y fórmula aparecen intrínsecamente vinculados a la aproximación por generalización Así, estas dos aproximaciones parecen campos complementarios en la enseñanza del álgebra

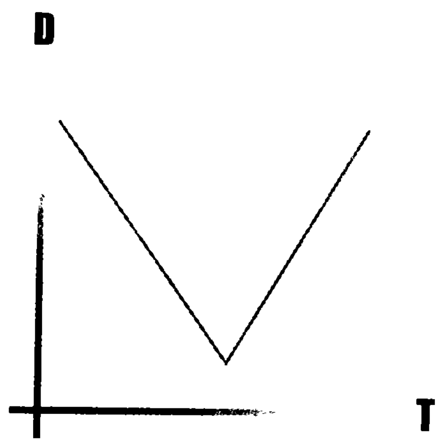
Una aproximación funcional al álgebra no significa necesariamente el estudio de funciones, pues ello conlleva el uso de letras como variables en oposición a las incógnitas. La expresión $3x + 5$, por ejemplo, puede ser vista como variable cuando puede tomar un rango de valores. También comprende ver una función desde una perspectiva de la relación entre los valores de x y los valores funcionales correspondientes, es decir, desde el punto de vista de cómo un cambio en x produce una variación particular en los valores de la función. Una aproximación funcional a la resolución de problemas implica establecer una relación funcional entre los datos dados del problema, y ver las letras de los nombres de entrada y salida como variables. Igualmente, el uso de varias representaciones es parte integral de una aproximación funcional al álgebra de resolución de problemas.

3x

5x

Es fácil observar cómo para resolver el problema «cuando se añade 3 a 5 veces un cierto número la suma da 40, ¿cuál es el número?» los estudiantes tienden a sustraer 3 y dividir por 5, es decir, a usar las operaciones inversas, mientras que la forma algebraica $5y + 3 = 40$ involucra multiplicar por 5 y añadir 3, es decir, las operaciones contrarias Para plantear la ecuación se debe pensar precisamente en la manera opuesta que se usaría para resolverlo en aritmética.

Hay que tener en cuenta que el proceso algorítmico de pares de variables de entrada y salida es una caracterización de un enfoque puntual (o de puntos de la función), en el cual la función es básicamente una relación que involucra pares binarios, por lo que un enfoque variacional a la función se enfoca en describir cómo varía una cantidad en términos de otra. Esta distinción punto a punto y variacional para las funciones no es la misma ya mencionada de proceso y objeto. Por ejemplo, al pedirle a un estudiante que produzca una gráfica en «V» con un detector de movimiento en un plano cartesiano, tiempo versus distancia, dice que el objeto en movimiento debe ir más cerca y luego más lejos. El estudiante no está viendo la «V» como un objeto o una entidad que existe independientemente de una situación; está viendo que representa un proceso de acercarse y alejarse. El proceso que anticipa no es notacional o algorítmico, es kinestésico, por lo tanto, su comprensión de la «V» tampoco es punto a punto, pues, en este caso, no estaría basando su análisis en pares tiempo-distancia, ni en el algoritmo para calcular esos pares Su comprensión es variacional· la «V» describe cómo tiene que variar su distancia al sensor de movimiento.

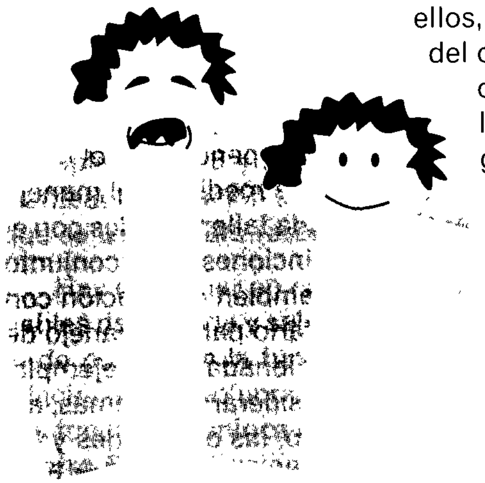


PRINCIPIOS GENERALES QUE GUIARON EL DISEÑO DE LOS TALLERES

No obstante el propósito del proyecto, en todos los grados de básica secundaria en que se trabajaron los talleres, fue propender por el desarrollo de habilidades en la resolución de problemas mediante el manejo de ecuaciones, se consideraron diferencias en cada taller acordes con el nivel de los estudiantes No sólo se hicieron distinciones en el conjunto de números que se trataron en cada nivel, sino también en relación con el tipo de tareas, el contenido matemático necesario para el manejo de ecuaciones, y la complejidad de las tareas relacionadas, por ejemplo, con el uso del lenguaje algebraico formal; se consideraron, además, aspectos como el número de incógnitas involucrado, las cantidades y las relaciones entre ellas, los métodos de solucionar ecuaciones, los contextos propuestos, la redacción de los enunciados de los problemas y el enfoque funcional para las ecuaciones.

Al intentar determinar qué características hacen que un taller sea de instrucción y no sólo de evaluación, en el que no se requiere que el estudiante al contestar conozca de antemano la respuesta o la forma de solucionar el problema, surgieron varias ideas, que después de discutidas se concretaron y se vieron reflejadas en las tareas propuestas en los talleres. Se puede decir, por lo tanto, que esas ideas dirigieron la construcción de los talleres y les sirvieron de fundamento.

En primer lugar, la decisión de promover la gradualidad en el nivel de complejidad de las tareas llevó a proponer inicialmente tareas sencillas y luego a plantear otras en las que se aumentaba la complejidad. La intención era que el estudiante, por un lado, pudiera al principio hacer algo y se motivara para continuar el trabajo; por otro, que lo realizado pudiera contribuir en el desarrollo de las tareas siguientes En segundo lugar, y ligado con lo anterior, se buscó organizar la secuencia de las tareas de modo que implicara primero un trabajo con lo particular y luego con lo general; sin embargo, no en todas las tareas propuestas se requirió expresamente de una generalización, y ello se propuso cuando se vio que el proceso podía orientarse en ese sentido. En tercer lugar, se propició el uso de modelos físicos, y de modelos gráficos como representaciones de aquellos, en los cuales la manipulación de materiales tiene unas intenciones matemáticas precisas, dado que pueden ayudar a ilustrar y, por tanto, a facilitar la comprensión matemática. En cuarto lugar, se procuró abrir posibilidades de trabajar los mismos temas a través de varias y diferentes tareas para contribuir a extender la comprensión sobre ellos y ver aspectos no reconocidos en alguna de las tareas. En quinto lugar, se fomentó la utilización de varios sistemas de representación y la necesidad de 'traducción' entre



ellos, para proveer distintas perspectivas del objeto matemático y, en consecuencia, ayudar a ampliar la conceptualización del mismo Finalmente, se generaron frecuentes momentos para socializar y discutir el trabajo realizado, en los que el profesor pudiera intervenir para dirigir u orientar el debate; todo ello enfatizando en la expresión verbal y en la argumentación del trabajo llevado a cabo en la resolución de los problemas

Antecedentes académicos del proyecto

Los docentes vinculados al proyecto llevamos a cabo una indagación en la institución para recoger información sobre cómo y cuándo se trabajan las ecuaciones de primer grado con una incógnita, es decir, para conocer algo sobre las rutas pedagógicas que se siguen en el tratamiento del tema Para ello, hablamos con otros profesores de matemáticas y consultamos los libros de texto que se utilizan en los grados de básica secundaria. A continuación presentamos un resumen de lo encontrado.

ENSEÑANZA DE LAS ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA

Este tema empieza a tratarse desde el grado sexto de educación básica secundaria, iniciando con ecuaciones cuya solución pertenece al conjunto de los números naturales En séptimo grado se estudian ecuaciones en los números enteros, y en octavo en los números reales.

En general, se observó que hay dos secuencias de tareas a través de las cuales los profesores abordamos el tema. Una secuencia A, en la que se tratan inicialmente la igualdad y sus propiedades, para llegar a la solución de ecuaciones y problemas; y una secuencia B en la cual, antes de iniciar el estudio de ecuaciones, se precisan algunas expresiones tales como álgebra, notación algebraica, fórmula algebraica, signos de operación, signos de relación y de agrupación, coeficiente, signos para indicar la relación que existe entre dos cantidades, y valor absoluto, entre otros. Veamos cada una de las secuencias mencionadas.

SECUENCIA A

La igualdad

Cuando se adopta esta ruta pedagógica, se empieza definiendo igualdad, con base en ejemplos como "Adriana tiene la misma edad que Luis", para concluir que la edad de Adriana es igual a la edad de Luis, lo cual se puede escribir como

Edad de Adriana = Edad de Luis

Se indica, a continuación, que la expresión "Edad de Adriana" se define como el miembro de la izquierda de la igualdad, y la expresión "Edad de Luis" como el miembro de la derecha Se explicita que el signo "=" se lee "igual a". Se expresa la definición de igualdad como "una expresión en la cual dos cantidades algebraicas tienen el mismo valor", y se presenta como ejemplo $a = b + c$.

Luego se exponen ejemplos de problemas contextualizados y sus soluciones. Por ejemplo.

"Tengo ahorrados $3000 y me regalan $2000 ¿Cuánto dinero tengo?"

Solución· Para saber cuánto dinero tengo, reúno las cantidades en una sola. \$3000 + \$2000 = \$5000

El resultado es una igualdad en la cual \$3000 + \$2000 es el miembro de la izquierda y \$5000 es el miembro de la derecha.

Una vez realizada esta exposición por parte del profesor, se plantean ejercicios para que los estudiantes los desarrollen, y afiancen el concepto y el manejo de la igualdad.

Propiedades de la igualdad

Habiéndose tratado el concepto de igualdad, se pasa a enunciar las propiedades de uniformidad para las diferentes operaciones, desde la adición hasta la radicación, ilustrando con algunos ejemplos cada caso.

Propiedad uniforme para la adición y la sustracción

Si a una igualdad le sumamos o restamos la misma cantidad a ambos miembros, la igualdad no se altera. Ejemplo:

$$8 + 3 = 11$$
$$8 + 3 - 5 = 11 - 5$$
$$11 - 5 = 6$$
$$6 = 6$$

Se obtiene una nueva igualdad.

Propiedad de la multiplicación y división

Si en una igualdad se multiplican o dividen ambos miembros por un mismo número la igualdad no se altera.

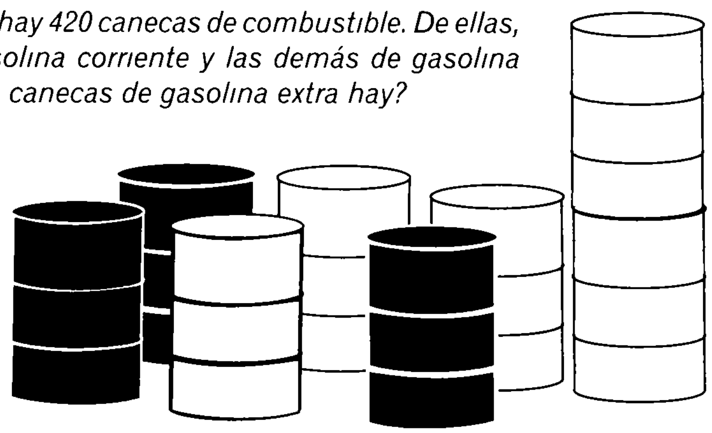
Propiedad de la potenciación y radicación

Si en una igualdad cualquiera elevamos ambos miembros a un mismo exponente, o extraemos la misma raíz, la igualdad no se altera.

Solución de ecuaciones y resolución de problemas

Como aplicación de los conceptos de igualdad, ecuación y propiedades de una ecuación, se continúa con el desarrollo de problemas que dan origen a ecuaciones de primer grado, las cuales deben ser solucionadas. Se indica expresamente que las ecuaciones se resuelven aplicando las propiedades de las igualdades, y esto se ilustra con ejemplos como el siguiente

En un depósito hay 420 canecas de combustible. De ellas, 130 son de gasolina corriente y las demás de gasolina extra ¿Cuántas canecas de gasolina extra hay?



Solución.

Se plantea la igualdad $130 + x = 420$.

Aplicando la propiedad uniforme de la sustracción.

$130 + x - 130 = 420 - 130$ $\qquad x = 290$

Enseguida se plantean ejercicios para que los estudiantes practiquen la solución de ecuaciones, como:

Resuelve las siguientes ecuaciones

$$y - 8 = 13$$
$$2 x 2 = 32$$
$$4 x 3 = 108$$
$$9m - 2 = 34$$

SECUENCIA B

En esta ruta pedagógica, antes de iniciar el estudio de ecuaciones se precisan algunos términos, así como el significado de símbolos y signos que el estudiante puede encontrar en las ecuaciones que se le propondrán para que resuelva Entre otros:

Álgebra: es la rama de la matemática que estudia la cantidad considerada del modo más general posible.

Notación algebraica: los símbolos usados en álgebra para representar las cantidades son los números y las letras.

Fórmula algebraica: es la representación por medio de letras de una regla o de un principio general.

Los signos del álgebra son de tres clases. signos de operación, signos de relación y signos de agrupación.

Signos de operación: son: +, -, x, ÷, a^n, O, Log_b

Coeficiente: en el producto de dos factores, cualquiera de ellos es llamado coeficiente del otro factor

Signos de relación: se emplean estos signos para indicar la relación que existe entre dos cantidades. Los principales son:

=, que se lee "igual a",
>, que se lee "mayor que",
<, que se lee "menor que"

Los signos de agrupación son. el paréntesis ordinario ( ), el paréntesis angular o corchete [ ], y la barra o vínculo sobre la expresión ______

Valor absoluto: es el número que representa la cantidad prescindiendo del signo o el sentido de la cantidad Valor relativo es el sentido de la cantidad representada por el signo.

Cantidades aritméticas: son aquellas que expresan solamente el valor absoluto de las cantidades representadas mediante números, pero no informan sobre el sentido o valor relativo de las cantidades.

Cantidades algebraicas: son las que expresan el valor absoluto de las cantidades y, además, su sentido o valor relativo por medio del signo. Los signos + y - tienen en álgebra dos aplicaciones: una, indicar las operaciones de suma y resta, y otra, indicar el sentido o condición de las cantidades.

Expresión algebraica: es la representación de un símbolo algebraico o de una o más operaciones algebraicas.

Término: es una expresión algebraica que consta de un solo símbolo, o de varios símbolos no separados entre sí por los signos + o -.

Términos semejantes: dos o más términos son semejantes cuando tienen la misma parte literal; o sea, cuando tienen iguales letras afectadas por iguales exponentes.

Reducción de términos semejantes: consiste en convertir en un solo término dos o más términos semejantes.

Además de las anteriores anotaciones, se indica que los números se emplean para representar cantidades conocidas y determinadas y las letras para representar toda clase de cantidades, sean conocidas o desconocidas. Igualmente, que las cantidades conocidas se expresan por las primeras letras del alfabeto· *a, b, c, d,* , y las cantidades desconocidas se representan por las últimas letras del alfabeto: *u, v, w, x, y, z*.

Una vez hechas las precisiones anteriores en cuanto a significados de términos y símbolos se procede al estudio de las ecuaciones, de sus propiedades y la forma de resolverlas.

Ecuaciones enteras de primer grado con una incógnita:

Esta parte del proceso se desarrolla a partir de unas definiciones básicas ilustradas con sus respectivos ejemplos, de la siguiente manera·

Igualdad: es la expresión de que dos cantidades o expresiones algebraicas tienen el mismo valor.

Ejemplos: $a = b + c$ $3x^2 = 4x + 8$

Ecuación: es una igualdad en la que hay una o varias cantidades desconocidas llamadas incógnitas y que solo verifica o es verdadera para determinados valores de las incógnitas.

Las incógnitas se representan por las últimas letras del alfabeto: x, y, z, w, v.

Ejemplo $6x + 3 = 27$

Miembros: se llama primer miembro de una ecuación a la expresión que está a la izquierda del signo de la igualdad y segundo miembro, a la expresión que está a la derecha.

Así, en la ecuación $3x - 5 = 2x - 3$, la expresión $3x - 5$ es el miembro de la izquierda, y la expresión $2x - 3$ es el miembro de la derecha de la igualdad.

Resolver una ecuación es hallar sus raíces, o sea el valor o los valores de las incógnitas que satisfacen la ecuación

Axioma fundamental de las ecuaciones: Si con cantidades iguales se verifican operaciones iguales los resultados serán iguales. De aquí se derivan las siguientes reglas.

1) Si a los dos miembros de una ecuación se suma una misma cantidad, positiva o negativa, la igualdad subsiste

2) Si a los dos miembros de una ecuación se resta una misma cantidad, positiva o negativa, la igualdad subsiste.

3) Si los dos miembros de una ecuación se multiplican por una misma cantidad, positiva o negativa, la igualdad subsiste.

4) Si los dos miembros de una ecuación se dividen por una misma cantidad, positiva o negativa, la igualdad subsiste

5) Si los dos miembros de una ecuación se elevan a una misma potencia, o si a los dos miembros se extrae una misma raíz, la igualdad subsiste.

Transposición de términos: consiste en cambiar los términos de una ecuación de un miembro a otro.

Regla: cualquier término de una ecuación se puede pasar de un miembro a otro, cambiándole el signo.

Ejemplo $5x = 2a - b$ equivale a $5x + b = 2a$

Regla: términos iguales con signos iguales en los dos miembros de una ecuación pueden suprimirse.

$x + b = 2a + b$ equivale a $x = 2a$

Cambio de signos: los signos de todos los términos de una ecuación se pueden cambiar sin que la ecuación varíe, porque esta acción equivale a multiplicar los dos miembros de la ecuación por -1.

Así, la ecuación $-2x + 3 = x - 15$ equivale a $2x - 3 = x - 15$

Resolución de ecuaciones enteras de primer grado con una incógnita

Regla general:

1) Se efectúan las operaciones indicadas si las hay.

2) Se hace transposición de términos reuniendo en un miembro todos los términos que contengan la incógnita, y en el otro todas las cantidades conocidas

3) Se reducen términos semejantes en cada miembro.

4) Se despeja la incógnita dividiendo ambos miembros de la ecuación por el coeficiente de la incógnita.

Ejemplo: resolver la ecuación $3x - 5 = x + 3$

Pasando x al primer miembro y -5 al segundo, cambiándoles los signos, tenemos $3x - x = 3 + 5$

Reduciendo términos semejantes: $2x = 8$

Despejando x, para lo cual dividimos los dos miembros de la ecuación por 2, tenemos: $2x/2 = 8/2$

Simplificando $x = 4$

Verificación: La verificación es la prueba de que el valor obtenido de la incógnita es correcto.

La verificación se realiza sustituyendo la incógnita por el valor obtenido, en los dos miembros de la ecuación dada. Si el proceso anterior es correcto, la ecuación dada se convertirá en identidad.

Así, en el caso propuesto, al hacer $x = 4$ en la ecuación dada, tenemos:

$$3(4) - 5 = 4 + 3$$
$$12 - 5 = 4 + 3$$
$$7 = 7$$

Finalmente, como aplicación, se presentan problemas que deben ser resueltos mediante el planteamiento y la solución de una ecuación.

Propuesta didáctica

EL MODELO DE LA BALANZA

De acuerdo con fundamentos teóricos sobre modelos, las actividades con el modelo de la balanza tienen como finalidad lograr que los estudiantes le den un significado a la igualdad como equivalencia, utilicen incógnitas para cantidades desconocidas, apliquen la propiedad uniforme, y planteen y resuelvan ecuaciones de la forma: $x \pm a = b$, $ax \pm b = c$

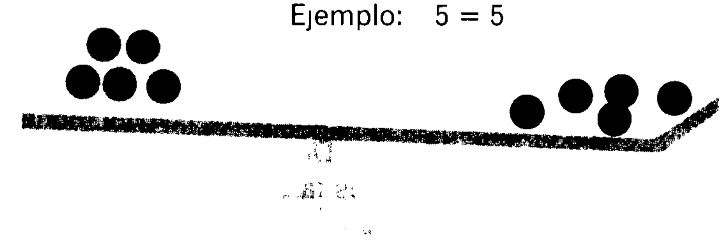
La propuesta didáctica se inicia con la construcción de la balanza de brazos iguales, la cual lleva unos recipientes a los lados como platos.

Para empezar, los estudiantes argumentan y escriben sobre el significado del equilibrio en la balanza, se escuchan varias opiniones y, luego, se elaboran conclusiones en forma colectiva.

Posteriormente se realizan tareas como las siguientes:

Equilibrar la balanza física de diferentes maneras, hacer una representación gráfica de la situación y colocar en frente de la representación gráfica la expresión aritmética

Ejemplo: $5 = 5$



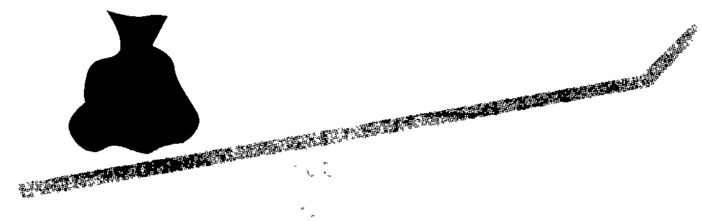
Agregar o restar la misma cantidad de monedas de igual peso en los dos platos de la balanza.

Ejemplo·

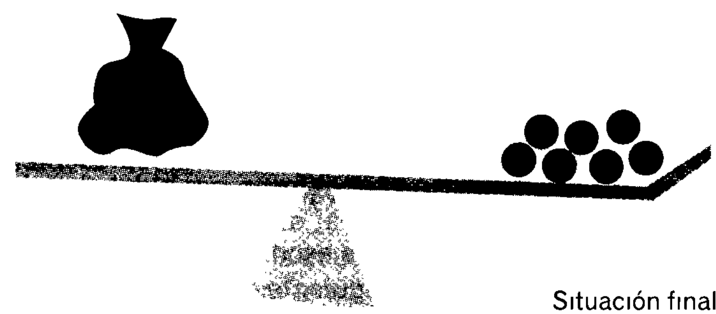
$4 = 4$ cantidad inicial

$3 = 3$ cantidad final

· Colocar cierta cantidad de monedas dentro de una bolsita oscura, en uno de los platos de la balanza y en el otro ir colocando monedas hasta lograr el equilibrio de la balanza.



Situación inicial



Situación final

Los estudiantes describen matemáticamente las situaciones presentadas en la balanza: la situación inicial y la situación final.

Por ejemplo, para la primera situación. X = ?

Y para la segunda situación. X = 7

Colocar monedas al lado de la bolsita oscura (fuera de ella) en uno de los platos de la balanza y estimar el número de monedas que pueden equilibrar la balanza; en el otro plato, colocar monedas hasta lograr el equilibrio de la balanza. Describir matemáticamente la situación. en términos aritméticos la situación final, y en términos algebraicos la situación inicial.

Ejemplo.

$$x + 3 = 8$$

$$5 + 3 = 8$$

El modelo se complejiza de acuerdo con el grado escolar (6° - 9°), de la siguiente manera:

Colocar bolsitas en ambos platos de la balanza.

Cambiar la ubicación de la bolsita a la izquierda o la derecha de la balanza

El modelo de los diagramas

Con estas actividades se pretende que los estudiantes escriban ecuaciones a partir del enunciado de un problema, representen la ecuación por medio del diagrama, y resuelvan la ecuación y el problema

Se inicia con el planteamiento y la escritura de los símbolos y signos utilizados en los diagramas, de la siguiente manera.

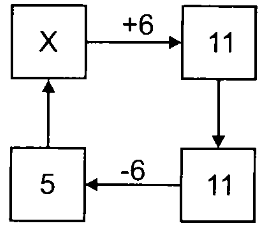
Las flechas indican las órdenes de cálculo, por ejemplo,

$\xrightarrow{\times 3}$ indica el operador multiplicativo 3

$\xrightarrow{+3}$ indica el operador aditivo 3

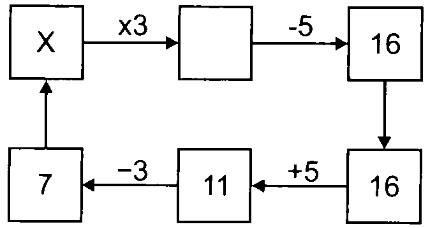
A continuación, se sugiere la representación de ecuaciones mediante la elaboración de diagramas. Por ejemplo·

Dada la ecuación $x + 6 = 11$, representarla con un diagrama y solucionarla. Los estudiantes proponen el siguiente diagrama:



Otro ejemplo:

Representar mediante un diagrama la ecuación $3x - 5 = 16$



Una vez que los estudiantes han manejado la representación de ecuaciones mediante diagramas, se elabora un diseño que pretende llevar a los estudiantes a relacionar la representación en diagramas con la representación simbólica. El diseño tiene la siguiente estructura: una tabla de tres columnas, en las cuales se realizan a) una descripción verbal de la ecuación, b) la representación de la ecuación en el diagrama, y c) el procedimiento simbólico de la solución.

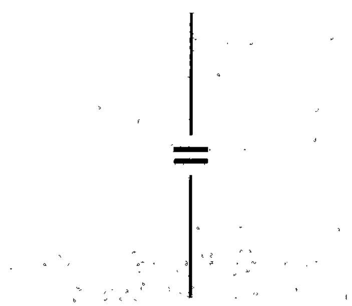
Ejemplo:

Complete la tabla representando la ecuación, y resuélvala mediante un diagrama y simbólicamente (en el diseño se planteaba el problema de diferentes maneras. dada la ecuación, realizar el diagrama y resolverla, dado el diagrama, plantear la ecuación y resolverla).

DESCRIPCIÓN VERBAL	DIAGRAMA	EXPRESIÓN MATEMÁTICA
A tres veces x se le resta cinco y se obtiene 16 ¿Cuánto vale x? Otra forma A tres veces un número se le resta cinco y se obtiene como resultado 16 ¿Cuál es el número?	$\boxed{X} \xrightarrow{x3} \boxed{} \xrightarrow{-5} \boxed{16}$ $\boxed{7} \xleftarrow{-3} \boxed{11} \xleftarrow{+5} \boxed{16}$	$3x - 5 = 16$ $3x - 5 + 5 = 16 + 5$ $3x = 21$ $x = 7$ Otra forma, con el diagrama en sentido contrario $16 + 5 = 21$ $21 - 3 = 7$
	Dado el siguiente diagrama complete las otras columnas $\boxed{X} \xrightarrow{X5} \boxed{} \xrightarrow{-7} \boxed{8}$ $\boxed{3} \xleftarrow{-5} \boxed{15} \xleftarrow{+7} \boxed{8}$	
	Dado el diagrama en sentido derecha-izquierda, completarlo y llenar las columnas $\boxed{5} \xleftarrow{-2} \boxed{10} \xleftarrow{-1} \boxed{11}$	

Modelo "tablero de fichas de colores"

Esta actividad se inicia con la construcción de un tablero y unas fichas de colores. El tablero consta de un rectángulo, de madera o cartulina, dividido por una línea vertical y con un signo de igualdad en el centro.



Las fichas se construyen en cartulina y están conformadas por:

20 triángulos negros, que representan las incógnitas con coeficiente negativo;

20 triángulos blancos, que representan las incógnitas con coeficiente positivo;

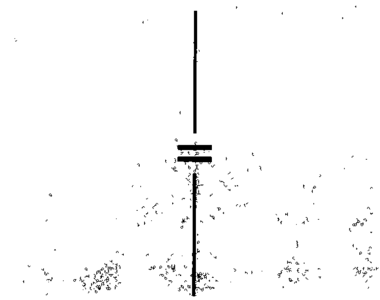
20 círculos negros, para números negativos,

20 círculos blancos, que representan los números positivos

La única regla de eliminación es la siguiente: parejas de la misma forma y distinto color en un mismo lado del tablero se neutralizan y eliminan

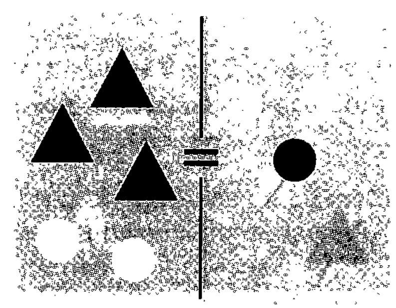
Para jugar, se colocan las fichas sobre el tablero y se expresa matemáticamente el significado de las mismas, así:

Ejemplo: $2X + 1 = 5$



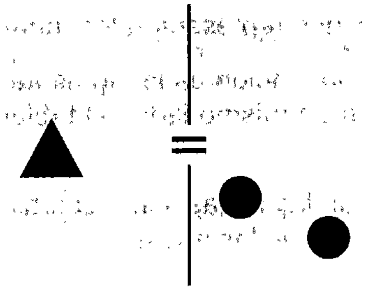
En el lado izquierdo del tablero hay dos triángulos blancos, que representan dos veces la incógnita, y un círculo blanco, que representa el número 1; en el lado derecho hay 5 círculos blancos, que representan el número cinco al otro lado de la ecuación.

En el siguiente ejemplo se observa la representación de la ecuación $-3X + 2 = -1$ en el tablero de fichas. Los tres triángulos negros representan tres veces la incógnita negativa, y el círculo negro representa el número negativo del lado derecho de la ecuación:

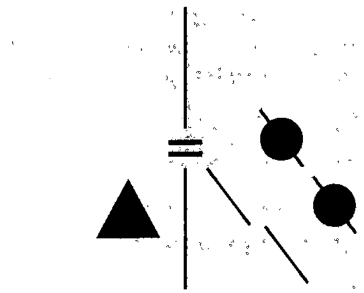


Una vez los estudiantes son capaces de representar matemáticamente cualquier ecuación en el tablero, se les solicita dejar los triángulos blancos en un mismo lado del tablero, lo cual se logra aumentando o quitando fichas de acuerdo con la regla de eliminación del juego.

Ejemplo.

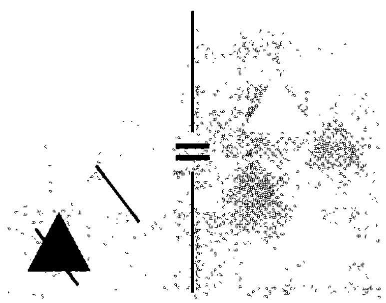


Para eliminar las dos unidades negativas del lado derecho, se aumentan dos unidades positivas a ambos lados (dos círculos blancos a ambos lados), y se obtiene:



$-X + 4 = X - 2 + 2$, equivalente a $-X + 4 = X$

Para eliminar el triángulo negro del lado izquierdo se coloca a ambos lados un triángulo blanco, y se obtiene:



$4 = X + X$, es decir, $4 = 2X$, de donde se concluye que un triángulo blanco equivale a dos círculos blancos, lo cual matemáticamente se expresa como $X = 2$, que es la solución de la ecuación original $-X + 2 = X - 2$

Posteriormente se diseñan talleres que involucren actividades con los tres modelos –la balanza, los diagramas y el tablero de fichas– con el fin de que los estudiantes hagan transferencia de un modelo a otro y, además, de que al hacer la transferencia pongan en juego los conceptos y los procedimientos aprendidos hasta el momento

Por ejemplo.

1. Utilice diferentes modelos para resolver las siguientes ecuaciones lineales:

a. $m + 7 = 23$

b. $3x + 5 = 2x$

c. $5t - 8 = 4t$

d. $m - 6 = 8$

e. $4x - 5 = 20$

f. $3x + 8 = 5x - 6$

2. Resuelva los siguientes problemas utilizando el modelo o la estrategia que desee:

- En un corral hay, entre vacas y caballos, 56 animales. Si los caballos suman 12 menos que las vacas, ¿cuántos hay de cada especie?
- La edad del padre es tres veces la del hijo. Si ambas suman 64 años, ¿cuál es la edad de cada uno?
- ¿Cuánto tardan dos grifos en llenar una piscina, si uno de ellos solo la llena en seis horas, y el otro solo la llena en nueve horas?
- Dos hermanos tienen hoy 8 y 12 años de edad. ¿Dentro de cuántos años la edad del menor será la tercera parte de la edad del mayor?
- El perímetro de un rectángulo es de 80 metros. Si a la altura se le suman 3 metros y a la base se le restan 3, quedan en una relación de 3 a 5. Buscar dichas dimensiones.

Algunos resultados de la aplicación del proyecto

Los resultados del proyecto se catalogan como avances en el desarrollo del pensamiento algebraico de los estudiantes en los ámbitos que se enuncian, seguidos de los elementos conceptuales más puntuales que fue posible observar y caracterizar:

a) Nivel de apropiación de los modelos propuestos: balanza, diagramas y tablero de fichas

En este ámbito los avances se observaron en:

- Manejo de la propiedad uniforme.
- Transformación de situaciones físicas a situaciones simbólicas.
- Manejo de la reversibilidad.

b) Planteamiento y solución de ecuaciones

- Reconocimiento de los elementos que conforman la ecuación.
- Aplicación de la propiedad uniforme.
- Verificación de resultados.

c) Resolución de problemas

- Análisis de enunciados. transformación del enunciado y ampliación de su comprensión por medio de preguntas. Identificación de la incógnita.
- Traducción entre distintas representaciones de una misma situación.
- Empleo de diferentes estrategias de resolución.
- Verificación de resultados.

Conclusiones

1. El desarrollo de este trabajo permitió lograr un afortunado inicio al estudio de las ecuaciones, ya que el uso de los diferentes modelos (balanza, diagramas y tablero de fichas) facilitó el abordaje del tema con un enfoque diferente al tradicional y mucho más claro para los estudiantes. Con el uso de modelos para resolver ecuaciones lineales se logró avanzar notoriamente en los conceptos de variable, igualdad, incógnita,

ecuación, propiedades de la igualdad, términos semejantes, operaciones de suma resta, y multiplicación de expresiones algebraicas.

2 La resolución de problemas dio origen al planteamiento de las ecuaciones, procedimiento que en el método tradicional se realiza a la inversa, es decir, primero se estudian las ecuaciones y después se desarrollan problemas de aplicación. Esta estrategia permitió ubicar las ecuaciones dentro de un contexto asequible al estudiante, y dio pie para que el mismo estudiante planteara sus propios problemas y ecuaciones, lo que resultó para los alumnos algo novedoso, y despertó en ellos verdadero interés y entusiasmo por la materia.

3 Se logró que los estudiantes avanzaran en el proceso de realizar transferencias entre diferentes formas de expresión como el lenguaje verbal (oral y escrito), la representación gráfica y las notaciones simbólicas algebraicas Esto contribuyó en gran medida para que los estudiantes pudieran interpretar, escribir y solucionar ecuaciones simbólicamente.

4. La realización de este proyecto permitió a los autores consolidarse como un equipo de trabajo, logrando un mayor nivel de cualificación como profesores de matemáticas y como personas, puesto que se desarrollaron individual y colectivamente la capacidad de investigación, de consulta, de expresión oral, y especialmente de expresión escrita, ya que se logró plasmar por escrito una experiencia pedagógica en forma sistematizada, como se evidencia en presente trabajo. De igual manera, se exploraron propuestas didácticas y herramientas para la educación matemática, que animan a continuar con la ardua tarea de investigación.

5. Las dificultades que se presentaron con mayor frecuencia en este proyecto fueron:

- La transición de la aritmética al álgebra, puesto que los alumnos cometen muchos errores en el trabajo con expresiones algebraicas ya que tienden a generalizar incorrectamente reglas, leyes y operaciones de la aritmética cuando trabajan en el álgebra.
- Dificultades de comprensión de lectura en la solución de problemas.
- En un ambiente tradicional administrativo, es muy difícil realizar proyectos de investigación.

Recomendaciones

A los maestros de matemáticas y, en general, a todas las personas interesadas y con alguna responsabilidad sobre el tema, se recomienda:

- El estudio y la enseñanza de las ecuaciones se debe iniciar en los niveles de educación básica primaria, utilizando la estrategia de resolución de problemas y presentándolas con diferentes enfoques y representaciones.
- Crear espacios de reflexión dentro y fuera de las clases para tratar temas sobre metodologías aplicadas, rendimiento académico y evaluación de los estudiantes, con el fin de reestructurar, si es necesario, las condiciones que faciliten la construcción del conocimiento.
- Atender las dificultades y los problemas más frecuentes que se presentan en el proceso de enseñanza-aprendizaje de los conceptos matemáticos, aplicando constantemente estrategias innovadoras que lo faciliten.
- Proporcionar y crear estrategias didácticas que desarrollen en los alumnos el hábito de la lectura y la capacidad de elaborar escritos que expresen coherentemente sus pensamientos.
- Promover en los alumnos el espíritu investigativo, la consulta y el análisis; en general, desarrollar las capacidades y la disposición para resolver problemas.
- Experimentar y divulgar las actividades propuestas en este trabajo para que se analicen sus alcances, y para que se amplíen, profundicen y continúen.

Bibliografía

AGUDELO, Cecilia. *Promoción del Pensamiento Algebraico en la escuela primaria. una propuesta que cobra sentido de acuerdo con nuestras concepciones sobre el conocimiento matemático* En: Aula Urbana, Magazín del Instituto para la Investigación Educativa y Desarrollo Pedagógico, IDEP, Nº 37. Bogotá: IDEP, noviembre de 2002. pp. 18 - 19.

BELL, A. W. *Research on learning and teaching.* Windsor: NFER-Nelson, 1996.

BRANSFORD, J. y STEIN, B. *Solución IDEAL de problemas. Guía para mejor pensar, aprender y crear.* Barcelona: Labor, 1986.

CARDONA, G. *Módulo alternativas metodológicas.* Documento de trabajo. Bogotá: Universidad del Rosario, 1999.

CARRILLO, J. y CONTRERAS, L. C. *Resolución de problemas en los albores del siglo XXI: una visión internacional desde múltiples perspectivas y niveles educativos.* Huelva: Hergué, 2000.

DEULOFEU, Jordi. *"Resolución de problemas en los albores del siglo XXI: una visión internacional desde múltiples perspectivas y niveles educativos"*, Resumen comentado. En: Revista Ema, investigación e innovación en educación matemática, Vol. 7, Nº 1. Bogotá: Universidad de los Andes, marzo de 2002. pp. 117 - 119.

FRIDMAN, L. M. *Metodología para resolver problemas matemáticos.* México: Ibero América, 1995.

GARDNER, Howard. *Inteligencias múltiples.* Barcelona: Paidós, 1995.

GIL, D. y MARTÍNEZ. *La enseñanza de las ciencias en la educación secundaria.* Barcelona: Horsori, 1991

GRAVEMEIJER, K., COBB, P., BOWERS, J. y WHITENACK, J. *Symbolizing, modeling and instructional design.* En. COBB, P., YACKEL, E., MC CLAIN, K. (Eds) Symbolizing and communicating in mathematics classrooms. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 2000.

MASON, J., BURTON, L. y STACEY, K. *Pensar matemáticamente.* Barcelona: Labor, 1992.

NTCM. *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática.* Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática, 1991.

NUNOKAWA, K. *Heuristic strategies and problem situations.* En: CARRILLO, J. Y CONTRERAS, L. C. (Eds.) Resolución de problemas en los albores del siglo XXI: una visión internacional desde múltiples perspectivas y niveles educativos. Huelva. Regué, 2000.

PRADA, M. D. y MARTÍNEZ, I. *Cómo enseñar el lenguaje algebraico, las ecuaciones y los sistemas.* En: Cuadernos de matemáticas, Nº 3. Málaga: Librería Ágora, S.A., 1994.

PUIG, L. Y CERDAN, F. *Problemas aritméticos escolares.* Madrid. Síntesis, 1988. pp. 183 - 187.

SADOVSKY, P. *Cómo enseñar matemáticas sin morir en el intento.* En. Aula Urbana, Magazín del Instituto para la Investigación Educativa y Desarrollo Pedagógico, IDEP, Nº 26. Bogotá: IDEP, febrero de 2001. pp. 3.

SCHOENFELD, A. *Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics.* En: GROUWS, D. Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. New York: MacMillan Publishing Company, 1992.

SOCAS, M., CAMACHO. M., PALAREA. M. y HERNÁNDEZ, J. *Iniciación al álgebra.* Madrid: Síntesis, 1989.

TORRES, L., VALOYES, E. y MALAGÓN, R. *Situaciones de generalización y uso de modelos en la iniciación al álgebra escolar.* En: Revista Ema, investigación e innovación en educación matemática, Vol. 7, Nº 1. Bogotá: Universidad de los Andes, marzo de 2002. pp. 227 - 246.

Maestra Innovadora: Cristina Cruz Fonseca
Coinvestigador: Frank Leonardo Hernández
Investigadora Principal: Miryam Ortiz Hurtado

AprendEs

DE LAS FRACCIONES COMO PARTES DE... AL RACIONAL COMO COCIENTE

Lo observado durante el desarrollo de la innovación: "De las fracciones como partes de... al racional como cociente" Aprendizaje por construcción, una innovación en el aula

PRESENTACIÓN

Los objetivos previstos de *la innovación en el aula* que presentamos fueron: posibilitar a los estudiantes de séptimo y octavo grados (durante dos meses del año escolar) una experiencia de aprendizaje por construcción de conocimientos asociados a los números racionales y, en segundo término, compilar información sobre lo que se observara en el aula en relación con la exploración de una forma de trabajo orientada a posibilitar procesos de aprendizaje.

En este apartado se hace una descripción de los aspectos observados en desarrollo de esta innovación, centrando la atención en la interacción entre la maestra y los estudiantes, y entre éstos en el aula de clase. Específicamente se centra la atención en las posibilidades y las limitaciones que los tipos de interacciones observadas ofrecen para el *aprendizaje*. Esto porque la lectura se hace desde una propuesta de investigación en didáctica de las matemáticas, que tiene como horizonte aportar a la fundamentación de una educación matemática y una escuela centrada no en la enseñanza sino en el aprendizaje. Además, porque en esta línea de trabajo los esfuerzos se centran en contribuir a la realización de esa transformación, desarrollando propuestas[1] viables de formación de maestros, y de probada incidencia y pertinencia en las condiciones de nuestro país[2].

[1] *En principio se trabaja sobre la generación de* programas *de formación que a futuro podrán ser soportes de* planes y políticas
[2] *De "nuestro país" por lo menos en principio*

En la descripción de las observaciones en el aula, se ha considerado importante destacar los siguientes aspectos, con el objeto de trazar un perfil del contexto del aula de clase atendiendo a las condiciones que posibilitan u obstaculizan el aprendizaje:

- Los hábitos y las formas de trabajo de los estudiantes.
- La disposición y la actitud que presentan para el trabajo en matemáticas, dadas las exigencias de concentración y reflexión que conlleva
- La interacción de la que se muestran capaces los estudiantes en torno al aprendizaje de los conocimientos específicos de matemáticas.
- El saber sobre los saberes[3] de los estudiantes que tiene la maestra, y lo que esto le permite en términos de plantear actividades significativas para sus alumnos y generar dinámicas de orientación de aprendizaje.

- Los momentos en los cuales se alcanzan condiciones de aprendizaje significativo, que pueden ser tomadas como evidencia de la posibilidad de generar construcción de conocimiento en el aula

La descripción se hará a través de un diálogo entre el coinvestigador y la maestra sobre los aspectos mencionados antes. No dudamos en señalar que sin entender lo que pasa de puertas para adentro en el aula de clase, sin entender el contexto particular de la clase de matemáticas –moldeado de manera determinante por los comportamientos y los conocimientos que pone en juego el maestro–, sin que el maestro pueda hacer de su trabajo didáctico-matemático un espacio de realización personal y profesional, los discursos sobre su deber ser (aún los que se predique a sí mismo) no van a generar transformaciones significativas. La investigación en didáctica de las matemáticas, desde nuestra perspectiva, requiere entrar al aula, reflexionar sobre el quehacer del maestro en el aula y que se facilite que el maestro reflexione sobre sí mismo a partir de lo que hace o deja de hacer allí.

[3] *Su "aprendizaje sobre los aprendizajes que han logrado sus estudiantes", pudiéramos decir también*

Nuestro propósito, en lo que sigue, será dejar oír la voz de la maestra innovadora, y asomarnos a través de esa voz al escenario del aula de clase en el que se recrea día a día su dimensión humana y profesional. Buscaremos, en particular, entrever los cambios que la innovación introdujo en ese escenario; los cambios que introdujo en su *ruta pedagógica*, entendida aquí como la manera de articular, estructurar, o darle sentido a sus actuaciones. Indagando por los posibles cambios de sentido en el *quehacer* y en el *ser* de la maestra, buscaremos entrever si es otra la clase de matemáticas, si es otra la forma de aprender matemáticas que puede esperarse.

Lo observado durante el desarrollo de la innovación: conversación con la maestra Cristina Cruz Fonseca

SOBRE LOS HÁBITOS Y LAS FORMAS DE TRABAJO DE LOS ESTUDIANTES

FLHA: Quisiera que nos ocupáramos, en primer lugar, de los *hábitos* y las formas de trabajo de los estudiantes. Para empezar, pienso que es útil proponer una noción de lo que podríamos entender por *hábito*, para centrar un poco la conversación en torno a un tema que puede parecer muy gaseoso. Como nuestro asunto de interés es, en último término, el *aprendizaje*, propongo partir de entender los hábitos como *modos de pensar, de percibir, de sentir y de actuar de una cierta manera, habiendo sido interiorizados por el individuo a lo largo de su historia*. Lo que en una perspectiva epistemológica genética[4] implica que los hábitos son la decantación de aprendizajes, pero ya no sobre los objetos o las acciones, sobre los objetos o las representaciones, sino más bien sobre los contextos de acción En este sentido, en la clase de matemáticas los hábitos de los estudiantes no nos hablarían de lo que han aprendido en matemáticas sino de lo que han aprendido sobre el contexto de la clase de matemáticas (y los contextos que se le asemejan).

1. ¿Qué piensas de esta noción que propongo?

CCF: En el ámbito de la escuela usualmente los maestros utilizamos ese término refiriéndonos a comportamientos y actitudes que se asumen –por parte no sólo de los estudiantes sino de los padres de familia y los maestros– frente a situaciones específicas de la cotidianidad y que se hacen reiterativos Es decir, lo que normalmente

[4] *Siguiendo a epistemólogos genéticos como Gregory Bateson 1972 pags 187 y sgts*

decimos frente a lo que sucede en el aula de clase es que la actitud de los estudiantes es "escuchar" al maestro (escribo entre comillas porque la frase de los maestros es "los estudiantes no tienen el hábito de escuchar"), esperar a que le dicte lo que debe copiar en el cuaderno, esperar a que le diga si lo debe copiar o no, recitar verbalmente o por escrito lo expresado o dictado por el maestro. Otros aspectos que relacionamos con los hábitos son los que tienen que ver con el desarrollo físico y comportamental de los niños; es más, asumimos que los padres y los maestros de primaria son los encargados de formar o desarrollar hábitos frente al aseo, el orden, la responsabilidad, el deporte o la lectura, entre otros

FLHA: Ubicándonos en el aula de clase, recordarás que desde que se inició la innovación, desde las primeras sesiones, se encontró que las formas de trabajo habituales de los estudiantes eran un gran obstáculo para el tipo de actividades y la forma de trabajo que en la asesoría se consideraban adecuados para lograr condiciones de aprendizaje en el aula. Decíamos que los estudiantes tenían unos hábitos que les obstaculizaban asumir con *responsabilidad* y *de manera consciente* la tarea de su aprendizaje. Que tendían a perder el sentido del *rol* que les correspondía actuar cuando las reglas de juego "habituales" del aula se modificaban para intentar dejar en sus manos la responsabilidad de aprender

Si aceptamos que los hábitos son la decantación de aprendizajes sobre contextos de acción, y recordamos que nuestra propuesta y nuestro sueño, en esencia, es pasar de una escuela centrada en la enseñanza a una escuela centrada en el aprendizaje·

2. ¿Qué retos te plantearon los hábitos de tus estudiantes cuando intentaste generar aprendizaje por construcción?

CCF: Muchos. Los primeros tuvieron que ver con la necesidad de cambio de mis propios hábitos, por ejemplo en la manera de organizar las clases, dirigirme a ellos, observar y evaluar lo que hacen, y proponer las actividades. Frente a los hábitos de los estudiantes, el reto principal fue que lograran mayor autonomía en su aprendizaje Lo que pensé fue que si no desarrollaron algunos hábitos en este sentido durante los años anteriores, había que buscar estrategias para iniciar este desarrollo; que sería lento pero que se debía comenzar en algún momento. De todas maneras los muchachos tienen muchas habilidades, son inteligentes y capaces de asumir los cambios que se requieren, y con dificultad pero con mucha constancia se generan cambios en ellos. Esto se puede lograr realizando actividades permanentes en la organización de la clase; por ejemplo, en la distribución del tiempo para hacer rutinarias algunas actividades tales como las propuestas en el desarrollo de la innovación:

registrar lo realizado en cada actividad, interpretar gráfica o verbalmente un problema hasta asegurarse de entenderlo, al final de cada clase escribir lo aprendido, etc

3 ¿Cómo ves hoy el reto que tendría que enfrentar cualquier maestro que intentara transformar sus prácticas para pasar del paradigma de la enseñanza al paradigma del aprendizaje, si lo que va a encontrar generalmente son grupos de estudiantes con hábitos formados en el primero de esos paradigmas?

CCF: Igual que los retos que yo experimenté, tomando conciencia de la necesidad de cambio de mis propios hábitos y, además, de que hay otras posibilidades de aprender (refiriéndome a los aprendizajes de la escuela), pues *creo* que todos aprendemos y todo se aprende de manera similar Asumiendo que cambiar los hábitos y las creencias sobre cómo se aprende matemáticas requiere mucha dedicación y trabajo previo de aprendizaje individual de cada maestro. Sólo así podrán propiciarse cambios en los hábitos de los estudiantes.

Por supuesto, es importante el cambio en el paradigma, creer que los estudiantes pueden aprender a partir de lo que ellos mismos van elaborando a través de las actividades propuestas, y no que su *rol* es sólamente el de receptores de información

SOBRE LA DISPOSICIÓN O LA ACTITUD QUE SE REQUIERE PARA EL TRABAJO EN MATEMÁTICAS

FLHA: Pasando a considerar ya no el problema de los hábitos y las formas de trabajo en general sino la relación entre éstos y la *disposición* o la *actitud* que se requiere para el trabajo en matemáticas, dadas las exigencias de concentración y reflexión que conlleva, quisiera que habláramos un poco sobre las dificultades que encontraste durante la innovación para lograr que los estudiantes centraran la atención en las actividades que se les proponían y en lo que se les pedía que hicieran.

Además, quisiera que nos explicaras un poco la relación que tú encuentras entre esto de centrar la atención y el asunto del orden y la disciplina en una clase en la que juegas el papel de enseñante, en comparación con lo que serían el orden y la disciplina en una clase en la que estás intentando jugar el papel de orientadora del aprendizaje.

Vamos por partes. Cuéntanos, en primer lugar:

4 ¿En qué sentido la forma de trabajo propuesta durante la innovación cambió tu forma de asignar actividades y/o responsabilidades a los estudiantes?

CCF: Básicamente en el tipo de actividades a proponer en el aula y como trabajo para la casa; es decir, usualmente en clase de matemáticas yo explicaba de manera magistral el tema correspondiente, o el tema previsto para ese día, luego les daba ejemplos resueltos y ellos debían resolver ejercicios parecidos a estos ejemplos en clase o en la casa. En la innovación, las actividades que se proponían debían ser desarrolladas por ellos, y mi papel pasaba al de ser observadora de lo que estaban haciendo los muchachos; a partir de esto les hacía preguntas o proponía otras actividades que les permitieran acercarse a la noción establecida para cada clase El trabajo se centró en ellos, y las explicaciones que era necesario hacer se referían esencialmente al desarrollo de la actividad y no a los contenidos de ésta. Las actividades propuestas para la casa no se referían a repetir lo hecho en el aula sino que tenían más bien que terminarlas, en caso de no haber desarrollado todos los puntos en clase, o realizar algún otro tipo de actividad.

FLHA: Como la entiendo, la forma de trabajo propuesta durante la innovación intentaba, por un lado, "soltar" a los estudiantes para que a partir de sus saberes enfrentaran las situaciones que se les planteaban y, por otro, que la maestra estuviera permanentemente en actitud de observar, escuchar, preguntar y hacer intervenciones, buscando siempre "sintonizarse" con lo que estaban pensando los estudiantes para, desde esa posición, alimentar y orientar sus avances.

Pero, al parecer, por el peso de los hábitos o las pautas de interacción propias de los ambientes de enseñanza, en el seguimiento que se hizo en el aula de clase registramos una tendencia a la reproducción de los esquemas en la interacción maestra-estudiantes propias de esos ambientes, al menos en la primera parte del período de innovación. Lo que, dicho sea de paso, te implicó una enorme carga, pues terminaste ya no explicando y dando instrucciones una o dos veces a todos los estudiantes, como era habitual, sino repitiendo un sinnúmero de veces, grupo por grupo, esas explicaciones e instrucciones en un intento por trabajar cara a cara con todos Lo que, por supuesto, pronto te resultó insostenible.

Era evidente que los estudiantes no tenían, por lo menos en principio, la *disposición* o la *actitud* que requerían para el trabajo en matemáticas. Parecías no estar logrando la atención requerida sino con el grupo de tres o cuatro con el que trabajabas en un momento dado.

5 ¿A qué atribuyes esa dificultad de los estudiantes para centrar la atención? ¿Hasta qué punto consideras que la dificultad tenía que ver con tu forma de proponer y dirigir las actividades?

CCF: Una de las causas por las cuales los estudiantes no centran la atención es el desinterés en los temas o las actividades que se trabajan en clase y, a la vez, éste se da por la "dificultad" que según ellos tienen para aprender matemáticas. Algo que los "marca" son las reiteradas manifestaciones de sus profesores o padres en el sentido de que aprender matemáticas es difícil, o que para ellos siempre ha presentado dificultad esa materia. Frecuentemente he escuchado decir sobre algunos estudiantes en particular "es que él (o ella) siempre ha tenido dificultades en matemáticas; por favor, téngale paciencia, no le exija tanto". Los muchachos terminan interiorizando esto y creyendo que es cierto que no van a poder aprender nunca y, por lo tanto, generalmente no hacen el más mínimo esfuerzo por prestar atención en clase o por realizar las tareas propuestas.

De otro lado, también yo contribuía a fomentar esa actitud, pues los tenía acostumbrados a decirles exactamente qué y cómo tenían que hacer cada actividad; no había suficiente exigencia en que leyeran e intentaran hacer las tareas sin que alguien se las explicara paso por paso También contribuía con la manera de organizar la clase, pues ellos escuchaban y luego repetían o resolvían ejercicios parecidos a los expuestos por mí. Creo que esto no les llamaba la atención sino que, por el contrario, les parecía muy aburrido Por supuesto, esto llevaba a que hicieran en clase cosas diferentes como charlar, jugar, hacer trabajos de otras materias, etc., produciendo lo que llamamos indisciplina o desorden, que en el paradigma de la enseñanza es terrible pues no están callados para que todos escuchen y copien adecuadamente.

FLHA: Para terminar este aparte, cuéntanos ahora sí:

6. ¿Cómo ves hoy la relación entre disposición y actitud para el trabajo en matemáticas frente al asunto del orden y la disciplina, comparando una clase en la que juegas el papel de enseñante con una en la que procuras jugar el papel de orientadora del aprendizaje?

CCF: Durante la innovación se fueron dando cambios importantes en estos aspectos, pues el orden y la disciplina no se centraban en que los estudiantes estuvieran en absoluto silencio sino más bien en que estuvieran trabajando la actividad propuesta, comentándola con los compañeros y argumentando alrededor de lo que estaban haciendo. También se notó que se independizaron de la maestra y cuando no entendían claramente acudían a los compañeros que ya tenían un poco más de avances.

De igual manera, los estudiantes se dieron cuenta de la necesidad de escuchar en los momentos de instrucción, de plenaria o de aclaraciones hechas por la maestra, sin tener que recurrir a la amenaza, utilizada con frecuencia en la enseñanza. Esto se dio porque las actividades propuestas les producían no sólo curiosidad sino interés; además, se dieron cuenta de que realizándolas estaban aprendiendo matemáticas.

LA INTERACCIÓN EN TORNO AL APRENDIZAJE DE LOS CONOCIMIENTOS ESPECÍFICOS DE MATEMÁTICAS DE LA QUE SE MUESTRAN CAPACES LOS ESTUDIANTES

FLHA: En la propuesta didáctica que orienta la innovación hay una gran insistencia en la importancia de la comunicación entre los estudiantes, así como entre ellos y quien orienta el aprendizaje, en este caso la maestra Cuando se diseñan las actividades se contempla generalmente un período durante el cual los estudiantes deben trabajar en grupo, que se indica cuando se les pide "comenten con sus compañeros".

Se enfatiza de manera constante en la necesidad de indagar sobre las actividades, los problemas o los ejercicios que se plantean a los estudiantes, más por la forma como están pensando que por las respuestas, porque no se trata de que apropien o reproduzcan el "conocimiento-truco", tipo fórmula o procedimiento mecánico, sino de que argumenten sobre por qué hacen lo que hacen y por qué llegan a determinados resultados. Se hace hincapié en que las respuestas no sirven si no pueden mostrar que han logrado traducir las situaciones problema a términos que ellos puedan manejar a partir de su comprensión, de referentes que para ellos resultan "concretos" en tanto les dan confianza para argumentar y confrontar; lo que, dicho sea de paso, remarca la convicción de que el conocimiento es una construcción colectiva.

FLHA: Hay una situación que se presentó en la innovación que me gustaría que tú comentaras, porque creo que es muy diciente en relación con lo que significa un aprendizaje sólido en matemáticas y sobre el papel que en este tipo de aprendizaje tienen la argumentación y la comunicación[5] entre los estudiantes, así como entre éstos y la maestra. Me refiero al problema típico de que las operaciones con fracciones (suma y resta, en particular) están soportadas en el procedimiento comúnmente conocido como de "homogenización". En casi todos los niveles, los estudiantes repiten un procedimiento que mientras se recuerda permite elaborar respuestas correctas. Pero generalmente no se logra explicar, llevando la situación a un nivel concreto como la representación gráfica o la manipulación de algún tipo de material (una hoja que se parte o se pliega, por ejemplo), por qué se utiliza el procedimiento Normalmente, éso impide abordar y resolver comprensivamente situaciones que implican manejar fracciones.

7. ¿Qué papel le asignas a la interacción de los estudiantes en torno al conocimiento en relación con la superación de este tipo de problemas, que son tan típicos de la enseñanza?

[5] *En el sentido de hacer un esfuerzo de presentar mis elaboraciones de manera que me haga entender y a la vez hacer un esfuerzo por entender las elaboraciones de los otros*

CCF: Es fundamental que los estudiantes realicen actividades de elaboración o reelaboración de nociones y conocimientos en el aprendizaje, pues en el desarrollo de las mismas entran en juego nociones intuitivas, aprendidas anteriormente y/o las vivencias cotidianas, permitiendo que la interacción con los conocimientos sea experimentada y no sólamente escuchada y repetida de manera mecánica; permite que los estudiantes duden de lo que hacen, que escuchen a los demás, que hagan comprobaciones en lo concreto, en lo gráfico y de manera verbal. Además, tienen que hacer el ejercicio de escribir y de hablar para ser entendidos por los demás compañeros, lo que genera un tipo de aprendizaje de un nivel superior, creo, por el tipo de elaboración realizada

Respecto del caso particular de operaciones como la suma y la resta de fraccionarios, y la comúnmente conocida "homogenización", en mi opinión se da porque desde la primaria se ha enseñado la "regla" para hallar el común denominador y el numerador, sin hacer un trabajo previo sobre las partes de la unidad, las diferentes maneras como se puede escribir una unidad en fraccionarios (2/2, 3/3, 8/8, 50/50...), las fracciones equivalentes y, lo más importante, la relación de estas nociones con las operaciones y el hecho de poder sumar o restar "cosas" del mismo tipo; para el caso, partes del mismo tamaño y/o fraccionarios de igual denominador, que en otro nivel de elaboración sería lo mismo (tener partes iguales para agregar o quitar).

8 ¿Qué exigencia te planteó –en términos de cambios en tu forma de interacción o comunicación con los estudiantes– el énfasis que se le dio en la innovación a la necesidad de llevar a los estudiantes a la argumentación, más que a la presentación de una respuesta?

CCF: Una primera exigencia se dio en la preparación de las actividades, pues fue necesario que yo las realizara previamente para identificar en ellas nociones o conocimientos involucrados, las posibles respuestas y, obviamente, los posibles caminos para llegar a esas respuestas; debí reflexionar sobre algunas preguntas clave que podía hacer a los estudiantes para propiciar que llegaran a donde se esperaba, pero también prever las posibles preguntas que podrían surgir por parte de ellos, y a partir de éstas diseñar la propuesta de actividades complementarias La segunda exigencia tuvo que ver con desarrollar la habilidad de plantear las preguntas en el momento oportuno, de manera que fueran pertinentes para el aprendizaje de lo que se tenía previsto, así como la habilidad de proponer de forma inmediata actividades para centrar a los estudiantes o para aclarar conceptos. Otra exigencia fue la necesidad de proponer acuerdos con los chicos para hacer más efectivo el trabajo en el salón de clase, y para exigirles el cumplimiento de las tareas dentro y fuera del aula. Además, debió cambiarse la manera de evaluar.

EL SABER SOBRE LOS SABERES DE LOS ESTUDIANTES QUE REQUIERE LA MAESTRA

FLHA: Adentrándonos un poco más en la especificidad de los conocimientos matemáticos que se abordaron en la innovación, me parece importante remarcar que la posibilidad de orientar un aprendizaje por construcción es, en primer término, cuestión de identificar qué saben los estudiantes, de qué conocimientos pueden dar cuenta para hacer de esos saberes los puntos de entronque o engrane de los aprendizajes que se quieren lograr, para hacer de esos saberes los hitos iniciales de los caminos en la construcción de las nociones y/o conceptos que se considera deben aprender

Habría que decir que en la línea de investigación que orienta la innovación se entiende que ésto le exige al maestro un estudio juicioso, en términos didácticos, de los conocimientos matemáticos escolares. Además, que esto le da solvencia para explorar qué saben los estudiantes, para reconocer lo que de la experiencia cotidiana o escolar de ellos puede ser retomado como referente concreto, de manera que se puedan idear a partir de allí posibles secuencias de aprendizaje, posibles caminos de construcción de esas nociones y esos conceptos

En este sentido, me gustaría que nos contaras

9. ¿En qué se tradujo para una maestra como tú el requerimiento de la entidad asesora del estudio, en términos didácticos, de los conocimientos escolares? ¿Consideras viable que los maestros (oficiales, especialmente) introduzcan este tipo de estudio en sus rutinas como fundamento de la transformación de sus prácticas?

CCF: Mi vinculación con la entidad asesora me ha permitido tomar conciencia sobre la importancia de estudiar los conocimientos en la matemática misma, fundamentalmente porque para identificar y estudiar los conocimientos escolares es necesario saber con alguna profundidad los conceptos matemáticos a los que se busca aproximar a los estudiantes Este es el punto de partida del estudio didáctico de los conocimientos escolares, y el trabajo realizado con la entidad asesora se centró en las nociones y los conceptos relacionados con los racionales Este trabajo se tradujo en la realización de seminarios (de planeación) en los que revisamos las propuestas que sobre este tema en particular hemos planteado la Secretaría de Educación, la institución Gran Yomasa y yo misma en años anteriores, con el fin de identificar las nociones que la escuela exige trabajar con los estudiantes. Otros seminarios (de análisis didáctico) se orientaron a identificar nociones o conceptos básicos en el aprendizaje de los racionales

y, a partir de estos, identificar también las nociones que relacionadas con éstos, buscando posibles secuencias de construcción de aquellas

Definitivamente, es una tarea que requiere mucho tiempo de estudio y dedicación, pero su realización proporciona a los maestros muchas herramientas para proponer actividades, además de la profundización en el aprendizaje que se va adquiriendo sobre las nociones y los conceptos estudiados. Es posible que los maestros adquiramos esta rutina, pero para ello primero se debe tener claro qué se quiere aprender y cómo el aprendizaje posibilitará cambios en el aula Además, se debe dedicar tiempo extra-escolar para ello Creo que, en la medida en que la realiza, el maestro va adquiriendo habilidad y se va cualificando (si se hace reiteradamente), de manera que la puede ir extendiendo a otros conocimientos matemáticos.

FLHA: Volviendo al desarrollo de la innovación en el aula de clase, habría que recordar que ésta se inició con actividades de exploración sobre el manejo que tenían los estudiantes con respecto a nociones como "partes de..." y "fracción", consideradas fundamentales en el camino de aproximación por construcción al número racional como cociente de enteros Igualmente, que pronto se encontró que los supuestos frente al manejo que tenían los estudiantes de estos conocimientos estaban alejados de la realidad Esto llevó, por ejemplo –ante la evidencia de los problemas que tenían con el manejo de nociones básicas como la *relación parte-todo* o la *equivalencia entre partes*–, a proponer actividades muy elementales, a partir de elementos gráficos y con material concreto (montones de objetos, barras de plastilina...), buscando encontrar el punto de entronque con los conocimientos que realmente manejaban los estudiantes.

En este sentido, me parece que sería muy ilustrativo que hablemos de dos momentos de la innovación que seguramente van a ayudar a entender qué implica para el maestro indagar por lo que saben sus estudiantes en la perspectiva de generar procesos de aprendizaje. Me refiero a lo que sucedió con octavo grado, con el que se inició la innovación y en el cual hubo más dificultades para encontrar un punto de entronque con los saberes de los estudiantes, en comparación con lo que pasó con séptimo grado, en donde hubo mayores aciertos. Te voy a hacer la pregunta en los siguientes términos:

10. Las diferencias que se presentaron entre séptimo y octavo, ¿qué relación tuvieron con tus avances en el conocimiento didáctico? O, en otros términos, ¿cómo juega ese conocimiento cuando se trata de saber lo que realmente saben los estudiantes?

CCF: Cuando propuse la realización de este proyecto en la institución donde laboro, pensé que era la oportunidad para poner a prueba lo aprendido durante los años en que he estado vinculada a AprendEs. Además, que sería importante para mí saber si el trabajo que usualmente realizo con los estudiantes es, en alguna medida, válido en sus aprendizajes, atendiendo a que con los muchachos de octavo había tenido la experiencia de desarrollar algunas actividades de "reelaboración" que, al parecer, habían arrojado buenos resultados en el aprendizaje de los fraccionarios

Sin embargo, con las primeras actividades de exploración propuestas en la innovación vimos que esto que se presumía no era cierto, que los chicos aún tenían deficiencias en las nociones básicas de "partes de..." y de números fraccionarios. Como dices, fue necesario reevaluar las nociones que trabajaría, y ésto me llevó a reflexionar sobre mi quehacer, pues se demostraba que en las actividades realizadas en los años anteriores no había logrado el objetivo, que me faltaba experiencia en la orientación de este tipo de trabajo en el aula para grupos de 40 muchachos, que evidentemente me faltaba estudiar más y proponer más actividades de construcción de conocimiento a los estudiantes.

Cuando iniciamos el trabajo en grado séptimo ya se había hecho el recorrido en octavo, y ésto nos sirvió como guía, si se puede decir así, para la planeación de las actividades con este nivel. Además, ya habíamos avanzado en el estudio histórico de las fracciones, con lo que pudimos proponer otras actividades a los niños. De otro lado, no hay que desconocer que estos cursos no habían tenido profesor de matemáticas durante el año inmediatamente anterior, lo que permitió que en la innovación se plantearan actividades con materiales concretos, logrando mayores aproximaciones y construcciones por parte de los estudiantes. Mis aprendizajes didácticos durante este tiempo se dieron en términos de cualificar la preparación y el diseño de las actividades para la clase, de identificar las nociones relacionadas específicamente con "partes de.. " y números fraccionarios, pensando en diferentes caminos para aproximar a los estudiantes a estas nociones.

FLHA: Finalmente, lo que tal vez sería la misma pregunta, pero en otros términos·

11. ¿Qué cambios introdujo la innovación en lo que significa para tí hacer una planeación y preparar una clase?

CCF: Con respecto a la planeación, creo que lo más significativo es que de ahora en adelante me propongo realizarla atendiendo a los **conocimientos** necesarios para mis estudiantes, y no sólamente en la

enumeración y el desarrollo de temas. Además, a partir de ella puedo prever algunas actividades que permitan la construcción o la aproximación a esos conocimientos y a las nociones relacionadas con ellos. Es claro que no lo puedo hacer en corto tiempo para todos los cursos y para todos los conocimientos que se manejan en la escuela, pero espero organizar mi tiempo y mis actividades para realizar esta tarea continuando con los números fraccionarios y los racionales, como inicialmente se había propuesto en la innovación Con el transcurrir del tiempo espero no desfallecer en el intento y hacerlo para otros conceptos.

A lo que tiene que ver con la preparación de clase he hecho referencia, en parte, al referirme a la planeación Agregaría que advertí la importancia de tener claros los objetivos para cada clase, el cambio en la manera de evaluar a los niños, y que ellos mismos empiecen a hacer una auto-evaluación de su quehacer. También fue importante para la planeación el registro escrito de lo que se hace y de lo que se observa para la planeación de las siguientes clases, por eso ésta es una de las metas a alcanzar– espero que en un corto plazo– para todos los cursos.

SOBRE LOS MOMENTOS EN LOS CUALES SE ALCANZARON CONDICIONES DE APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO

FLHA: El último aspecto del que me gustaría que nos ocupáramos es el optimista. Cuando se observan los videos, especialmente de la última parte de la innovación, y se escuchan las grabaciones de audio en las cuales se registra tu quehacer en el aula, se encuentran momentos en los cuales los estudiantes se han encaminado y están absortos en su propio aprendizaje, se les ve ya no preocupados por cumplirle a la maestra sino ocupados en aclarase a sí mismos, aclarase entre ellos o aclarar con la ayuda de la maestra, las inquietudes que generan las actividades que les has propuesto Digo que es la parte optimista porque parece que, a pesar de todas las adversidades (sobre todo en las entidades oficiales), sí se puede aprender matemáticas en la escuela de manera diferente, sí se puede romper el mito de la clase de matemáticas como el espacio en el cual aparecen unos conocimientos esotéricos que sólo son accesibles para los iluminados, para unos pocos con mentes brillantes

12. ¿Compartes ese optimismo o piensas que los momentos que se lograron, de condiciones de aprendizaje centrado en los estudiantes, se debieron a situaciones excepcionales generadas por la innovación?

CCF: Claro que comparto el optimismo. Lo que pasa es que –como tú dices– lo primero es romper el mito, sobre todo el mito generado por los mismos maestros de matemáticas, quienes en muchos casos propiciamos la creencia de que sólo las mentes brillantes aprenden matemáticas, e inclusive asumimos ese *rol* en la sociedad (el *rol* de tener una mente brillante) Esto, en la escuela tradicional, ha llevado a que los niños estén convencidos de que no pueden aprender y, por tanto, no hacen el intento, pero en la innovación, sobre todo en grado séptimo, pudimos ver que los chicos empezaron a creer en ellos mismos y en lo que hacen. Experimentaron sus posibilidades de hacer y aprender haciendo, la innovación permitió que exploráramos estas posibilidades y aportó posibles pautas para que esto se siga dando; además, se vio que a los chicos les llamaba la atención y los cautivaba la actividad como tal.

FLHA: Ya que uno de los asuntos que nos convocaba era el de la *ruta pedagógica*, y atendiendo a que la asumimos aquí como la manera que tiene el maestro de articular, estructurar y darle sentido a sus actuaciones.

13. ¿Qué cambios en el quehacer *y en el* ser *tuyo como maestra destacarías, cuando de lo que se trata es de hacer posibles clases de matemáticas, formas de aprender matemáticas como las que pudiste experimentar por momentos al final de la innovación?*

CCF: Algunos de esos cambios ya los he mencionado. Están, por ejemplo, en la planeación, en la preparación de las clases, en la evaluación. Otros podrían ser la organización de los muchachos en clase y los acuerdos a que se llegue con ellos como responsables de su aprendizaje Uno que creo el más importante es la profundización en el análisis didáctico de las nociones y los conceptos a aprender por parte de los estudiantes

FHLA: Finalmente,

14. Cuéntanos un poco sobre las presiones que enfrentaste durante la innovación y cómo hiciste para soportarlas

CCF: Hubo varias presiones. La primera es de índole personal, ya que después de tantos años de formación es difícil asumir que aún falta mucho para ser un orientador de aprendizaje; además, darse cuenta de que a veces, por más esfuerzos que se hagan y buena voluntad que se tenga, unos y otra no son suficientes para lograr cambios efectivos en el aula. De otro lado, el que una o varias personas externas observen tus clases es algo difícil de aceptar, con mayor razón cuando se sabe a ciencia cierta que la observación será objeto de crítica, por supuesto, objetiva y con la mejor de las intenciones, para fortalecimiento del maestro y de los estudiantes, pero no deja de ser un conflicto personal el asumir estas críticas y las propuestas que surgen a partir de la observación.

Otra presión es la de los estudiantes, quienes no ignoraban que los "temas" que se trabajaron ya se habían visto, aunque no eran tan concientes de la necesidad de aprenderlos así tuvieran que aplazar otros temas Los amigos y los hermanos les preguntaban sobre el "atraso" en esos temas respecto al curso en que están, como en el caso del grado octavo También hubo presión de los padres en el mismo sentido, exigencias sobre la cantidad de temas a ver en cada curso, sin importar la calidad en el aprendizaje de los mismos Esto también se refleja en las exigencias de la institución respecto de las evaluaciones y los posibles traslados a otras instituciones, porque probablemente quienes se vayan encontrarán que allá tienen planes con enfoques tradicional y de acuerdo con lo que exige la Secretaría de Educación Esto es motivo de preocupación para directivos, padres y estudiantes.

Por las particularidades de la institución, en el momento de la innovación se vio reducida a la mitad la cantidad de horas en el área de matemáticas. Además, debí asumir el trabajo en el área en todos los cursos de bachillerato, lo que hizo necesario reestructurar tanto la innovación como los planes de cada curso. A esto le podemos sumar las diferentes actividades que como maestra se deben asumir en una institución, como la dirección de curso, la pertenencia a diferentes comités y proyectos institucionales, la organización de izadas de bandera y actos culturales, las salidas pedagógicas, etc Todo esto, sumado al proyecto de innovación, generó una sobrecarga de trabajo de la que afortunadamente salí avante

Por otra parte, tuve la presión de las actividades de la innovación misma –asistencia a seminarios, registros escritos, revisión de los mismos y de los otros registros (de audio y de video), etc.–, y la exigencia de avanzar en mis conocimientos en matemáticas y didáctica, que es en último término lo que da sentido todo el esfuerzo, pues a partir de esto es que se pueden llevar al aula diferentes propuestas

¿Cómo hice para aguantar? Primero, por el apoyo que recibí de la institución asesora, el ánimo que me daban y, al final, al ver los resultados en los chicos Afortunadamente tuve el apoyo constante de las directivas del colegio y, por supuesto, de mis colegas. Y no debo dejar de lado a mis estudiantes, quienes tienen que aguantar lo que a los maestros se nos ocurra y lo hacen con el mayor de los agrados. Ver en ellos la expectativa por lo que se haría en cada clase, y la manera como asumieron, en general, la realización de las actividades, me dio ánimo para continuar con el trabajo propuesto.

Qué aritmética ligada a situaciones cotidianas deberíamos saber y podríamos aprender

Myriam Ortiz Hurtado

En desarrollo del proyecto de innovación e investigación en el aula **De las fracciones como partes de..., al racional como cociente**, se partió de la caracterización de los contextos de vida de estudiantes y maestros, buscando su proximidad con los conocimientos relacionados con los números fraccionarios; para ello se identificaron las situaciones cotidianas que posibilitan conocimientos prácticos acerca de las partes iguales, las fracciones y los fraccionarios.

Las experiencias fuera de la escuela, la práctica individual cotidiana y la práctica colectiva que centran el quehacer de los niños y adultos en el entorno próximo, constituyen el contexto de vida y de aprendizaje primario de cada individuo y, en particular, de los estudiantes y los maestros.

Actividades como hacer mandados, comprar o vender; reparar autos, artículos o, instalaciones; transportar personas, alimentos, mercancías o animales; construir viviendas; hacer instalaciones eléctricas, de agua o de gas; preparar alimentos; ejercitar un deporte; en fin, toda práctica exige tener y a vez permite lograr a quien la ejerce importantes conocimientos derivados de ella misma

En la propuesta de innovación que se desarrolló, estos conocimientos son punto de partida del aprendizaje escolar, y determinan las condiciones y las posibilidades para que los estudiantes aprendan lo que pretende el maestro Esos mismos conocimientos, y la actividad práctica a través de la cual se logran, son referentes que dan significación a las tareas que se proponen en el aula. Además de aproximar a conocimientos aritméticos, contribuyen a que los estudiantes logren mayor comprensión sobre la actividad práctica misma, y sobre el contexto de vida y de aprendizaje en que cada quien se desempeña.

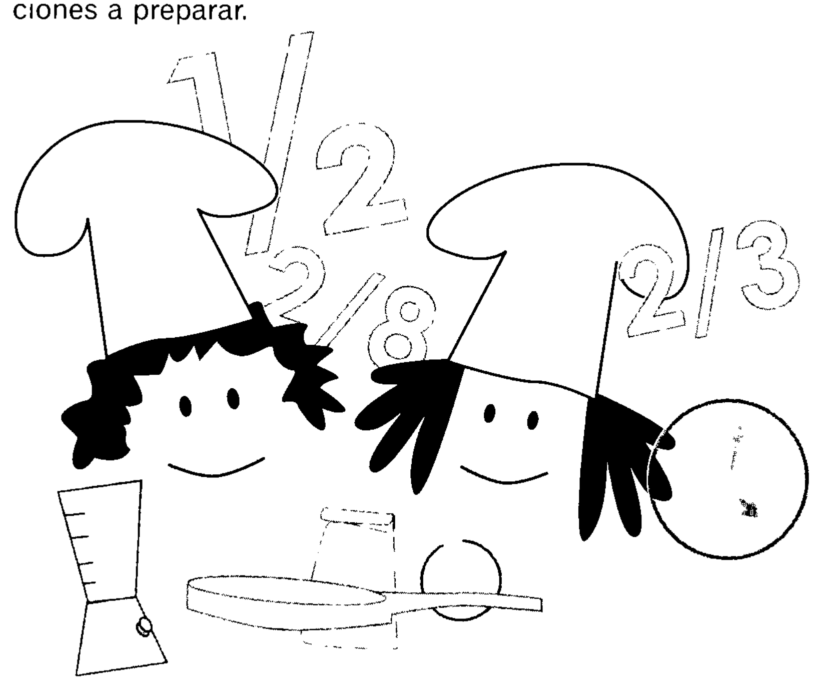
Atender a los elementos del contexto, y caracterizar éste con base en la propuesta epistemológica que orienta la indagación, significa identificar situaciones cotidianas que propician aprendizajes relacionados con lo que se espera aprendan los estudiantes en la escuela; igualmente, facilita identificar, comprender y manejar los conocimientos que esas situaciones posibilitan en ambientes extraescolares y los que se podrían generar significativamente con la orientación del maestro.

Una actividad que permitió identificar situaciones cotidianas que aproximan a los estudiantes y a los maestros al manejo de conocimientos relacionados con los números fraccionarios fue el taller "Las fracciones como partes de ", que realizamos con profesores de matemáticas de instituciones educativas de la localidad quinta[6]. En él se propuso a los maestros indagar de manera personal, y preguntar a sus estudiantes, acerca de situaciones de su vida diaria en la cuales se hace referencia a fracciones, partes iguales, o números fraccionarios.

Se formularon preguntas como las siguientes· ¿Ha pensado usted, maestro o maestra, en las múltiples oportunidades que tenemos diariamente de poner a prueba nuestros conocimientos acerca de las partes y las fracciones?, ¿sabe qué tipo de conocimientos demanda la comprensión de esas situaciones?

Algunas de las situaciones que fueron identificadas con los maestros fueron:

- El uso de recetas de cocina y la determinación de la cantidad de ingredientes que se requieren dependiendo de la cantidad de porciones a preparar.



[6] *El taller se efectuó entre el 25 de septiembre y el 30 de octubre del 2002, en el CADEL de la localidad quinta En él participaron, de manera regular, además de la maestra innovadora, dos profesores del CED Chuniza, uno del CED Valle de Cafam, y uno del CED Estanislao Zuleta Otros seis profesores de otras instituciones de la localidad sólo participaron en una o dos sesiones*

El conocimiento adecuado de los alimentos de acuerdo con el valor nutritivo que de los mismos se describe en los empaques.

El uso de tuercas, tornillos, tubos, acoples y herramientas, cuyas medidas son referenciadas como partes de la pulgada o del centímetro.

El uso adecuado de las marcas o registros que indican capacidades diferentes de un recipiente.

· La referencia y el manejo del tiempo en cuanto a suscripciones a periódicos o revistas; la duración de partidos, competencias o pruebas. Y, por supuesto, la medida del mismo como duración.

La repartición en partes iguales de alimentos, dinero, espacios, tiempos.

· La organización de grupos iguales y la repartición de a tantos, o entre tantos.

Las partes iguales del reloj.

Los objetos que por su diseño permiten identificar partes iguales estantes, cajoneras, rejas, ventanas, puertas, casas, edificios, urbanizaciones, parques, ..

Las partes iguales de los campos deportivos.

Las partes de una unidad o de un patrón de medida.

Las partes iguales de un trayecto o recorrido.

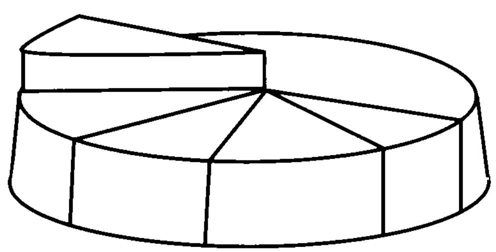
Los porcentajes, las ampliaciones y las reducciones.

La administración dosificada de medicamentos.

Al preguntar uno de los maestros participantes en el taller a sus estudiantes por el uso de partes iguales en la cotidianidad, ellos mencionaron los siguientes casos o situaciones:

Al partir una manzana por la mitad, y luego cada mitad en dos partes iguales, quedan cuartos

Puedo dividir una torta en ocho partes iguales.



Puedo dividir una salchicha en diez partes iguales.

Me dan $20.000 pesos para dos semanas; los divido en diez partes iguales de $2.000 de lunes a viernes.

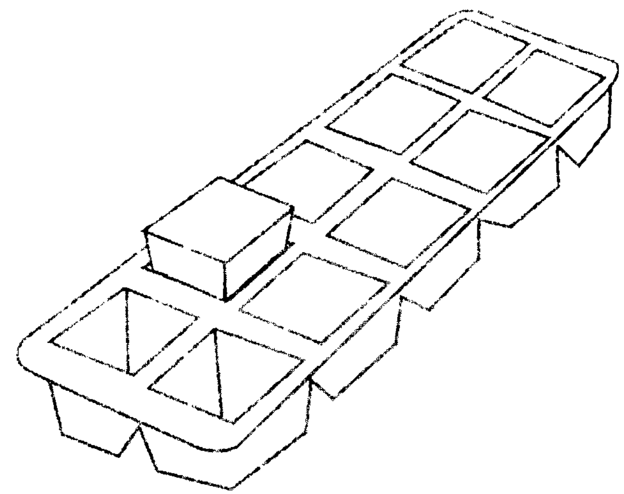
· La ventana de mi casa es de 5x5 y la dividieron en cuadros del mismo tamaño, resultando 25 cuadros.

· El día domingo hubo un asado y compramos siete libras de carne y mi mamá la dividió en ½.

Divido un tubo en diez partes iguales y al colocar cada parte sobre otra quedan iguales

· Un kilo de arroz lo divido de tal manera que me salen ocho pocillos iguales para dos días.

Una cubeta de hielo se divide en diez partes iguales.



En una caja de bocadillo veleño viene 36 unidades iguales.

Las galletas Ducales vienen divididas en dos tacos iguales.

El jabón de ropa se puede dividir en partes iguales.

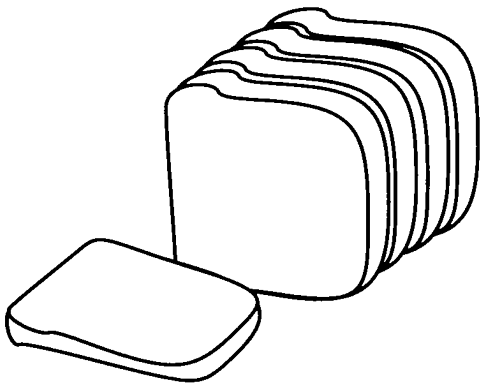
Un chocolatina viene dividida en cuadritos.

El tablero está dividido en cuadrados iguales.

· Los polígonos o parches de un balón son iguales.

· En mi casa, al preparar gelatina, la partimos en porciones iguales.

En la bolsa del tajapan viene el pan en partes iguales.



- Mi mamá compra una cubeta de huevos y la parte en la mitad.
- El ponqué tradicional viene partido en ocho partes iguales.

En mi casa cada, día de por medio mi papá compra pan de $1000 para dividirlo en cinco partes iguales.

Podría decir que en mi casa hay dos habitaciones iguales, o sea un local y hay una pared, entonces quedan dos piezas bien medidas.

En mi casa partimos la panela en cuatro partes iguales.

- Un cuaderno tiene hojas, las hojas tienen cuadritos y cada cuadrito mide lo mismo que el otro.

¿Cuáles de las situaciones a que se refieren los estudiantes podrían ser objeto de reflexión y trabajo en la clase de matemáticas, y qué conocimientos acerca de las partes y las fracciones podrían estudiarse a partir de ellas?

Un análisis somero de las situaciones enunciadas puso en evidencia lo mucho que desconocemos sobre la cotidianidad de fuera de la escuela, y lo mucho que probablemente aportaría al conocimiento del entorno y al aprendizaje comprensivo de nociones aritméticas por parte de los estudiantes el que los maestros lograran un conocimiento aritmético más profundo de esa cotidianidad. A partir de ella, y de los conocimientos aritméticos que se espera lograr, podrían proponerse actividades significativas en las cuales el entorno sería punto de partida del aprendizaje escolar.

Algunas de las situaciones enunciadas por los estudiante y por los maestros tienen relación con partes iguales de un todo o referente específico, un patrón o una unidad de medida.

Diferenciar una llave de tres octavos de una de media pulgada es una habilidad que un ayudante de taller debe lograr rápidamente. ¿A qué parte de la llave se refiere el dato que usan como referencia?, ¿cuál de las llaves es más grande?, ¿qué tipo de dibujo o ilustración puede indicar a qué se refiere dicho dato? Esto es algo que posiblemente conocen algunos de nuestros estudiantes (los ayudantes de talleres) y, por lo tanto, les resulta significativo si es tomado como referente en la clase de matemáticas. ¿Qué tanto sabemos al respecto los maestros?, ¿qué otros conocimientos acerca de las fracciones están involucrados en el conocimiento y el manejo de estas llaves, y de los patrones de medida a los que aluden el tamaño de las mismas, así como de tubos, tuercas y tornillos? Y las puntillas ¿cómo se denominan según su tamaño?, ¿es lo mismo hablar de una puntilla de media, que de una llave de media?

Un albañil, que a la vez es aficionado a reparar carros, le explicaba a un litógrafo, que poco de carros sabe, qué significan las denominaciones de las llaves herramientas, de la manera siguiente:

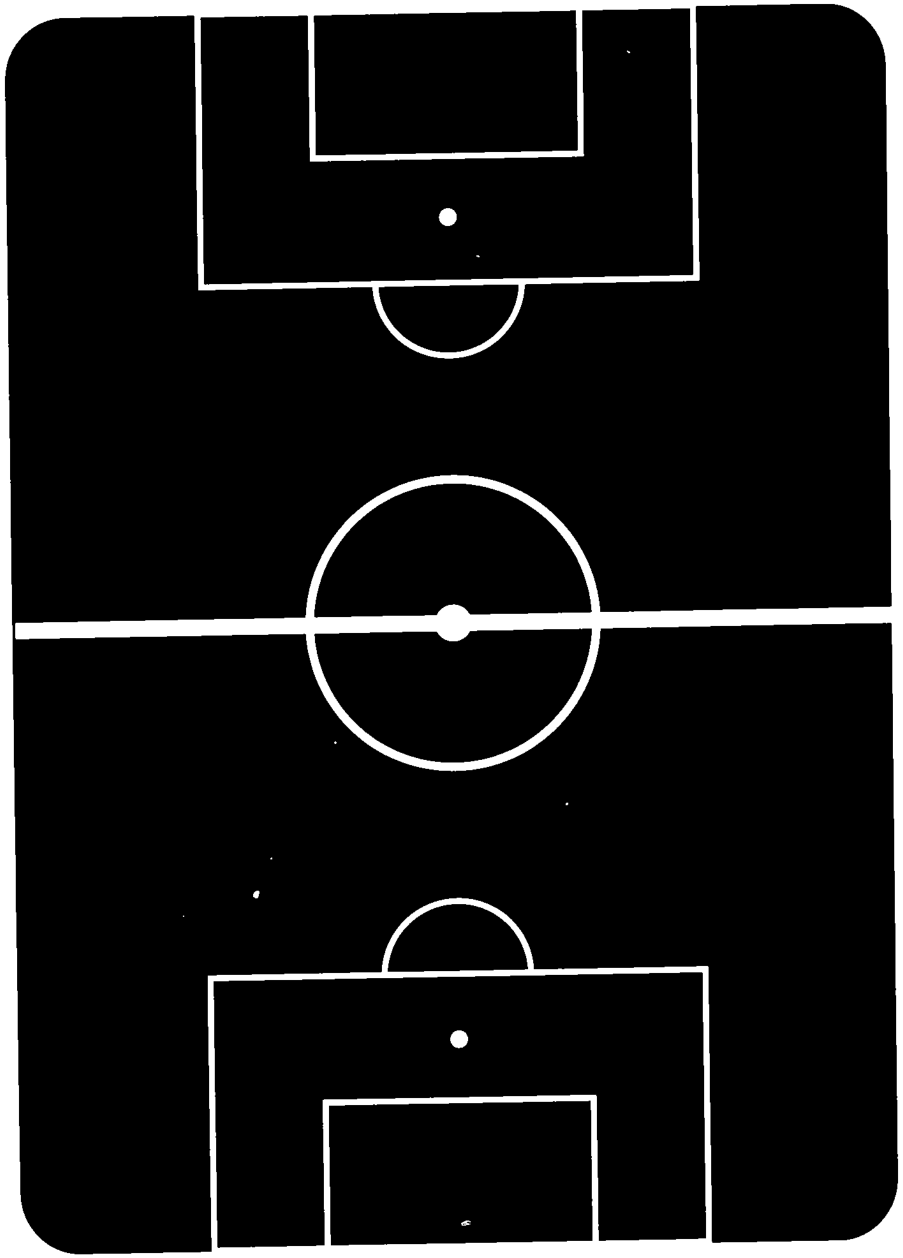
> *"La medida diametral de media significa que es la mitad de una pulgada. Y la de un cuarto es la mitad de la de media; hay de un cuarto y de tres cuartos, pero no hay de dos cuartos porque ya está. Le siguen las de octavo, que es la mitad de la de cuartos. Hay de un octavo, tres octavos y cinco octavos, pero no hay de cuatro octavos, ni de seis octavos, porque ya están".*

Los cocineros profesionales, pero también las amas de casa y quienes a diario tienen que preparar alimentos, están familiarizados con expresiones como "mincha", "tris", poquito, media cucharada, una taza, una libra, y calculan con relativa facilidad cuánta agua y cuánta sal deben echar a una, dos o tres tazas de arroz para hacer la preparación.

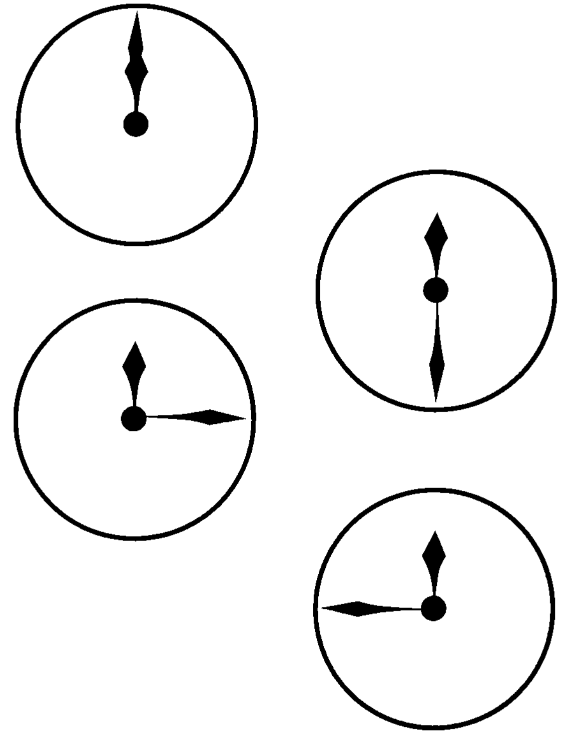
¿Qué conocimientos acerca de las partes iguales, las fracciones o los fraccionarios están involucrados en el manejo de las recetas de cocina?, ¿cuáles son los referentes que sirven como unidad en la medida de los ingredientes?, ¿qué características tiene cada unidad?

Las onzas son partes que sirven para determinar diferentes cantidades del tetero de los bebés, pero también son partes de la libra: una libra de chocolate tiene 16 pastillas y cada pastilla corresponde a una onza. ¿Cuál es la diferencia entre estas onzas?, ¿qué parte de la libra es cada pastilla, y a qué patrón de medida o unidad se refiere la onza de tetero y qué parte de ésta es?

La distribución de los campos deportivos es familiar para los profesores de Educación Física, y son objeto de estudio para los estudiantes en su formación. La organización y la distribución de una cancha de futbol, así como de los jugadores, son familiares para los aficionados, y en ellas se manejan expresiones como medio campo, cuarto de campo; o delanteros, defensas, mediocampistas, laterales ¿Hay algunos conocimientos de partes iguales o de fracciones involucrados en estas expresiones?



Tomando como punto de partida el reloj no digital (o analó-gico), con horario, minutero y segundero, es posible identificar múltiples maneras de considerar las partes de una circunferencia, teniendo diferentes referentes. Si se piensa en las partes determinadas por el horario, por ejemplo, se tienen doce partes iguales: cada hora es un doceavo, dos horas son un sexto, tres horas son un cuarto y cuatro horas son un tercio Pero si las partes son las que determina el minutero, se tendrán sesentavos de la hora o setecientos veinteavos de la circunferencia. Y si el referente no son las partes de la circunferencia sino las partes de una vuelta, tendremos que la mitad podría corresponder a medio día, o seis horas, a media hora o treinta minutos, a medio minuto o treinta segundos.



Podría ser interesante mirar como se comportan las equivalencias, el orden y la representación de las partes del reloj, de la circunferencia, del día, o de la hora, o de las vueltas del horario, el minutero o el segundero.

En lo que los estudiantes identifican como uso de las partes iguales, se puede identificar que se refieren a particiones de diferentes tipos de unidades. Unas que escolarmente, podemos denominar continuas. manzana, torta, chocolatina, pan, panela, tubo, ventana, jabón, tablero, cubierta del balón, espacio de las habitaciones. Otras discretas: dinero, huevos de la cubeta, bocadillos.

Hay otras que podríamos decir son discretas, pero que a través de un instrumento adecuado se pueden asumir como continuas: taco de galletas, kilo de arroz. Igualmente, otras que podríamos decir son continuas pero se han discretizado a través de un instrumento o unidad apropiada: porciones de la cubeta de hielo, libras de carne, porciones de gelatina.

Algunos conocimientos en los que es posible profundizar a partir de las situaciones enunciadas por los estudiantes, una vez el maestro los haya estudiado y comprendido, y considere que aportan al aprendizaje de nociones matemáticas, son los que tienen relación con:

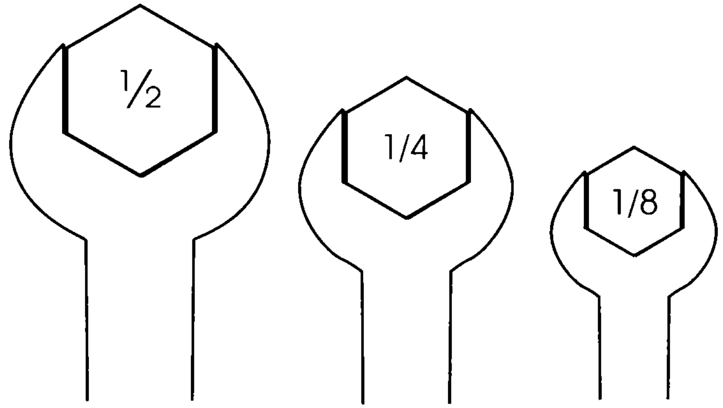
- Identificar la unidad y las partes a que se hace mención en cada situación. Conocer diferentes formas de denominar, representar, notar y/o simbolizar las partes iguales de la unidad que se asume en cada caso (la mitad de, medio o media, mitades de, una de dos partes iguales de, un medio).

- Partes equivalentes de la unidad y posibilidades de obtenerlas. Análisis respecto al tamaño de las partes equivalentes obtenidas en una representación y de la conveniencia práctica de las mismas. Análisis de las posibilidades de determinar otras partes iguales con base en las mismas unidades. Por ejemplo, ¿tendría sentido pensar en una llave herramienta cuya referencia a su tamaño sea algo como un doceavo, o un treinta y seisavo de pulgada?

  El análisis de las partes equivalentes, las posibilidades de determinar otros "tipo de partes iguales" con las mismas unidades, y la comparación y ordenación de las mismas, recurriendo a la denominación, el símbolo, la representación. Igualmente, el análisis de las partes iguales que se obtienen en unidades de la misma naturaleza pero de diferente tamaño. Por ejemplo, las partes iguales de un ponqué que no sea el tradicional de ocho porciones sino uno mucho más grande.

  La identificación de la "cantidad específica" que se reparte y de las características del patrón o instrumento que permite comparar las partes de esa cantidad. Igualmente, la conveniencia práctica de usar uno u otro instrumento o patrón de comparación. Por ejemplo, los "recipientes porción" de la cubeta de hielo permiten separar partes "iguales" de agua que luego de congelada serán pedazos de hielo. Estos mismos recipientes podrían servir para separar porciones de gelatina y, luego de que cuaje, la gelatina se podría comparar con las porciones de hielo. Igualmente sirven para separar porciones de helado comparables con las anteriores. Pero no son adecuados para separar y comparar, por ejemplo, partes iguales de carne, de ponqué o de chocolatina, o partes iguales del reloj.

A las llaves herramientas se hace referencia a través de datos, expresados en partes de pulgada. ¿Qué otras partes iguales se podrían referenciar con este tipo de datos y a qué tipo de unidades corresponden esas partes?, ¿son comparables con las llaves herramientas?, ¿qué mide el dato en pulgadas en cada parte considerada?



A partir de la tarea propuesta a los maestros, y realizada por el grupo responsable de la investigación, de indagar acerca de la situaciones cotidianas, aprendimos muchas cosas respecto de lo que en el entorno de maestros y estudiantes está relacionado con el manejo de partes iguales, fracciones y números fraccionarios. Una tarea similar puede permitir al maestro conocer de manera específica lo que es próximo al quehacer propio y de sus estudiantes, y los conocimientos que en ese entorno próximo tienen relación con nociones aritméticas. El entorno de cada escuela y el de cada estudiante tienen características peculiares, determinadas por la ocupación individual y colectiva cotidianas, así como por el nivel de vida de cada uno. Estas características dan relevancia a una u otra experiencia y actividad cotidiana. Recorrer distancias a pie, en transporte público o en bicicleta, por ejemplo, determina y diferencia el tipo de experiencias diarias que se tienen en los desplazamientos al sitio de estudio o de trabajo.

La invitación a los maestros es que se aventuren a identificar lo específico de su entorno y a analizar detenidamente cada situación, con el fin de establecer y estudiar los conocimientos aritméticos que están involucrados en ellas. De esta manera, conociendo lo que es significativo para los estudiantes, lo que saben de aritmética y lo que pueden aprender a partir de lo que la experiencia cotidiana les posibilita, y teniendo en cuenta los requerimientos escolares y las posibilidades de aprendizaje de los niños y jóvenes, pueden optar –con autonomía académica– porque el referente cotidiano sea o no, además de punto de partida del aprendizaje escolar, objeto de estudio en el aula.

Conocimientos que se requieren para resolver comprensivamente problemas escolares[7]

Paralelamente al desarrollo de la innovación en el aula, los asesores y la maestra innovadora realizamos una serie de seminarios de estudio, diseño y evaluación de las actividades que se propusieron a los estudiantes.

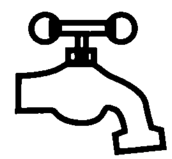
Al observar la lista de las actividades que se propusieron a los estudiantes[8], inicialmente en grado octavo y luego en grado séptimo, se puede ver cómo fueron variando éstas en cuanto al tipo de actividad, la extensión de la misma, el nivel de profundidad de los conocimientos involucrados en ellas y las tareas que debían realizar los estudiantes. Estos cambios se dieron de acuerdo con los avances que tanto la maestra innovadora como el grupo asesor fueron teniendo respecto al conocimiento de los hábitos de trabajo en el aula, y a qué sabían y qué podían hacer los estudiantes También de acuerdo con los avances en el conocimiento didáctico y matemático sobre las fracciones y los números fraccionarios.

En grado octavo se propuso inicialmente una actividad con la que se pretendía que los estudiantes trabajaran con números fraccionarios, resolviendo unos cuantos problemas escolares, con la idea de determinar qué tanto manejo comprensivo de éstos tenía y, partir de ahí, proponiéndoles actividades que los aproximaran a los números racionales. Por lo observado en el aula durante las sesiones en que se propusieron los problemas, fue necesario proponer a los estudiantes el ejercicio de leer hasta comprender el enunciado de éstos y expresarlo con sus propias palabras. Posteriormente debimos regresar a proponer actividades de identificación de fracciones, representación, denominación y simbolización; de comparación y ordenación, y de cálculo de fracciones equivalentes, e incluso de partición de diferentes unidades Estas tareas debían realizarse usando materiales concretos, representaciones y símbolos numéricos.

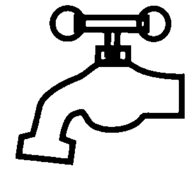
[7] *La expresión problemas escolares se refiere a los enunciados que en los libros de texto se plantean como problemas y que, con modificaciones o sin ellas, los profesores proponen a los estudiantes como evaluación, o como tarea o durante la clase*

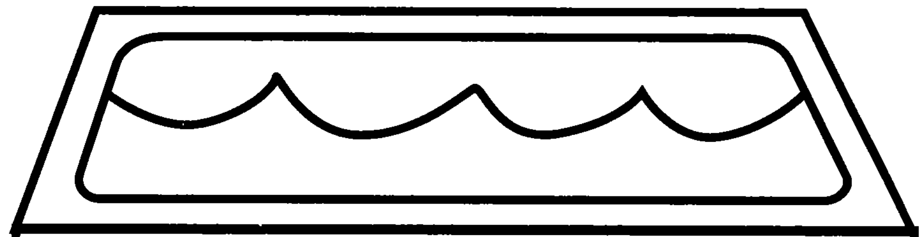
[8] *Ver documento 3 del informe final "Actividades propuestas"*

Veamos lo que significó para el grupo asesor y la maestra innovadora el ejercicio de lectura compresiva del enunciado de los problemas, con el siguiente ejemplo:



"Una alberca se llena utilizando 2 llaves De la primera salen 3/27 m^3 de agua por minuto y de la segunda 7/27 m^3 de agua por minuto. ¿Qué cantidad de agua sale de las dos llaves en un minuto?"





Es necesario señalar que la lectura comprensiva no fue un requisito para que los estudiantes encontraran rápidamente, de manera mecánica, la respuesta requerida. Aún sin saber lleer el símbolo, respondían que "da 10/27".

La lectura comprensiva del problema nos puso ante la evidencia de los muchos conocimientos involucrados en el enunciado y que se requieren para la comprensión del mismo; también en la discusión sobre qué significa entender el enunciado de un problema y qué significación puede tener para el aprendizaje el que los estudiantes "resuelvan" aparentes problemas, de los cuales no comprenden su enunciado. Por supuesto, también cabe aquí la reflexión acerca de qué es un problema y qué un problema pertinente para una determinada situación de aprendizaje.

En cuanto a los conocimientos que se requieren para la comprensión del texto, tenemos:

Saber qué significa que "una alberca se está llenando", quizás sólo requiere de la evocación de una situación cotidiana en la que se ha llenado la alberca de la casa, o cualquier otro recipiente en el que se almacene agua (una caneca, una olla, un timbo, un balde), pero no es familiar que dos llaves llenen la misma alberca. Aquí hay que jugar con la imaginación, más aún si se cuestiona por la posibilidad de abrir las llaves en diferente momento. Sin embargo, también es posible que no se tenga la experiencia de llenar la alberca con una llave.

Saber qué significan las expresiones "de una (llave) salen 3/27 m^3 de agua por minuto y de la otra 7/27 m^3 de agua por minuto" requiere mucho más que evocación

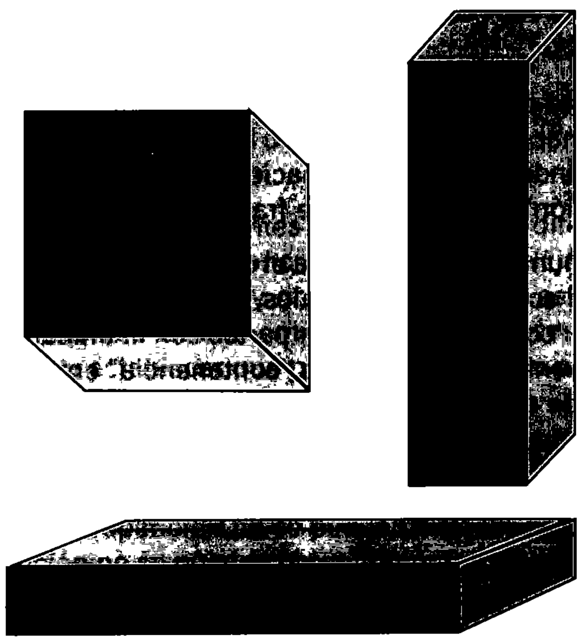
En primera instancia, se requiere una lectura no simbólica del texto "de una de las llaves salen tres veintisieteavos de metro cúbico de agua por minuto, y de la otra llave salen siete veintisieteavos de metro cúbico de agua por minuto"[9]. Algunos estudiantes leen el símbolo tal como está escrito, "tres, raya, veintisiete" y omiten la expresión m^3. En segunda instancia, se requiere saber qué son los veintisieteavos como partes iguales de una unidad, y qué son tres y siete veintisieteavos En tercera instancia, hay que saber qué es el metro cúbico como unidad, y qué como medida de la capacidad de un recipiente y como medida de una cantidad de sustancia o de una cantidad de espacio. Y, además, es necesario poder evocar y representar qué tanto son, respectivamente, tres y siete veintisieteavos de un metro cúbico, en cada una de las significaciones posibles de éste. También se debe poder hacer referencia a la alberca, con los supuestos de que tenga más o menos de un metro cúbico de capacidad, así como a la cantidad de agua que cae por minuto, por una llave, por la segunda, y por las dos llaves al tiempo Podría ser necesario, además, diferenciar entre una llave que llena más rápido un recipiente y otra que lo llena más despacio, y poder evocar en términos de la duración qué tanto es un minuto y qué significa que las dos llaves estén abiertas al mismo tiempo durante un minuto. Conociendo a qué se refiere cada expresión y cada símbolo involucrados en el texto, se comprende el enunciado, que quizás se puede expresar de tantas maneras como personas intervengan en el ejercicio.

En cuanto a los conocimientos que se posibilitan al hacer del enunciado objeto de estudio, o punto de partida del aprendizaje, podemos mencionar, además de los anteriores, los siguientes: Evocar qué es llenar la alberca puede servir como referente para indagar acerca de cómo se llenan las piscinas, y de qué depende el tiempo que dure llenándose un recipiente; además de poder hablar del material, las formas, los tamaños y los usos de los recipientes y, ligados a estos, trabajar acerca de las medidas de capacidad y volumen, igualmente, sobre los patrones y unidades de medida, las partes iguales de éstos, la equivalencia, el orden, la representación y la simbolización de aquellas

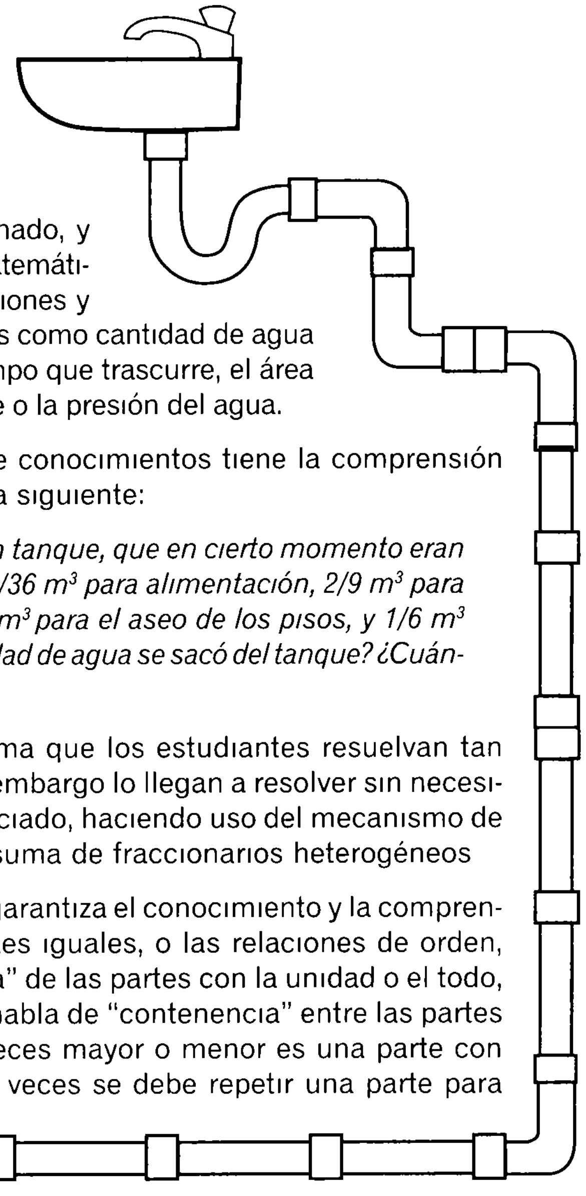
[9] *Aquí se puede observar que no es relevante considerar una de las llaves como "la primera" y la otra como "la segunda"*

Tazas, onzas, litros, botellas, galones, pies, metros, decímetros o centímetros cúbicos, son algunas de las denominaciones usadas en la determinación de la capacidad o el volumen. ¿Qué tanto sabemos los maestros al respecto de estas denominaciones y qué tanto podrían aprender y comprender los estudiantes acerca de su entorno, las medidas, los patrones y las unidades de medida, y los números fraccionarios?

Entender qué significan las partes iguales de un metro cúbico abre la posibilidad de conocer y comprender mejor qué son un metro, un metro cuadrado y un metro cúbico, y de imaginar el tamaño, por ejemplo, de un alberca en la que quepa un metro cúbico de agua. La alberca, por supuesto, podría tener diferentes formas e incluso diferentes tamaños, salvo que se planteen condiciones específicas. Considerar las partes iguales de diferentes unidades (o todos) es un ejercicio que posibilita imaginar, evocar y abstraer, y que tiene que ver con el tanteo, la predicción, la comparación de tamaños o cantidades, y la representación, para finalmente aproximarse a comprender la equivalencia entre partes, e identificar partes equivalentes y partes que son mayores o menores que otras.



En el manejo de la capacidad y el volumen están en juego la comprensión de la independencia del tamaño respecto de la forma, o la conservación del volumen. También la diferenciación entre el patrón de medida del volumen y las unidades de medida de las capacidades y los volúmenes de recipientes, sustancias, objetos y espacios.



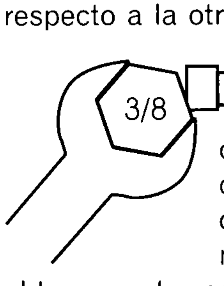
Analizar de qué depende que un recipiente sea llenado más rápidamente podría ser un interesante desafío para estudiar con el profesor de Ciencias los líquidos, la presión, la velocidad de llenado, y luego con el profesor de Matemáticas el problema de las relaciones y las razones entre magnitudes como cantidad de agua que sale por la llave y el tiempo que trascurre, el área trasversal del tubo de la llave o la presión del agua.

Similares exigencias de conocimientos tiene la comprensión del enunciado del problema siguiente:

"Del agua que había en un tanque, que en cierto momento eran 26/36 m^3, se han sacado 5/36 m^3 para alimentación, 2/9 m^3 para el lavado de la ropa, 3/18 m^3 para el aseo de los pisos, y 1/6 m^3 para los baños.¿Qué cantidad de agua se sacó del tanque? ¿Cuánta agua quedó?"

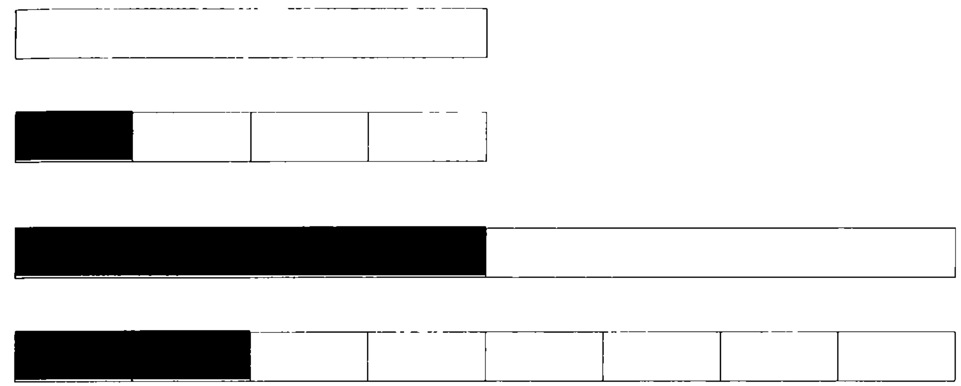
Sin ser este un problema que los estudiantes resuelvan tan fácil como sumar 3 y 7, sin embargo lo llegan a resolver sin necesidad de comprender el enunciado, haciendo uso del mecanismo de "homogenización" para la suma de fraccionarios heterogéneos

Saber el enunciado no garantiza el conocimiento y la comprensión de lo que son las partes iguales, o las relaciones de orden, equivalencia y "contenencia" de las partes con la unidad o el todo, y de las partes entre sí. Se habla de "contenencia" entre las partes en el sentido de cuántas veces mayor o menor es una parte con respecto a la otra, cuántas veces se debe repetir una parte para



obtener la otra, y qué parte de una parte dada permite obtener por repetición la parte dada. El manejo del mecanismo de "homogenización" tampoco garantiza el manejo comprensivo de otros procedimientos que permiten obtener partes equivalentes, y menos aún el saber qué significa, en términos de las partes, transformar unas en otras equivalentes. A continuación nos referimos a los conocimientos que hemos identificado como comprendidos en el conocimiento, el manejo y el cálculo comprensivo de fracciones equivalentes.

Con materiales concretos adecuados se obtienen partes equivalentes, juntando o partiendo partes. Si se tienen cuartos, es posible obtener doceavos, partiendo cada parte en tres partes iguales; y pueden obtenerse medios juntando dos de los cuartos Esto para el caso de partes de la unidad de un sólo tamaño, que hemos denominado "partes iguales del mismo tipo". Lo anterior exige, sin embargo, comprender qué significa juntar partes del mismo o de diferente tipo, e identificar lo que se obtiene, así como partir y repartir partes.



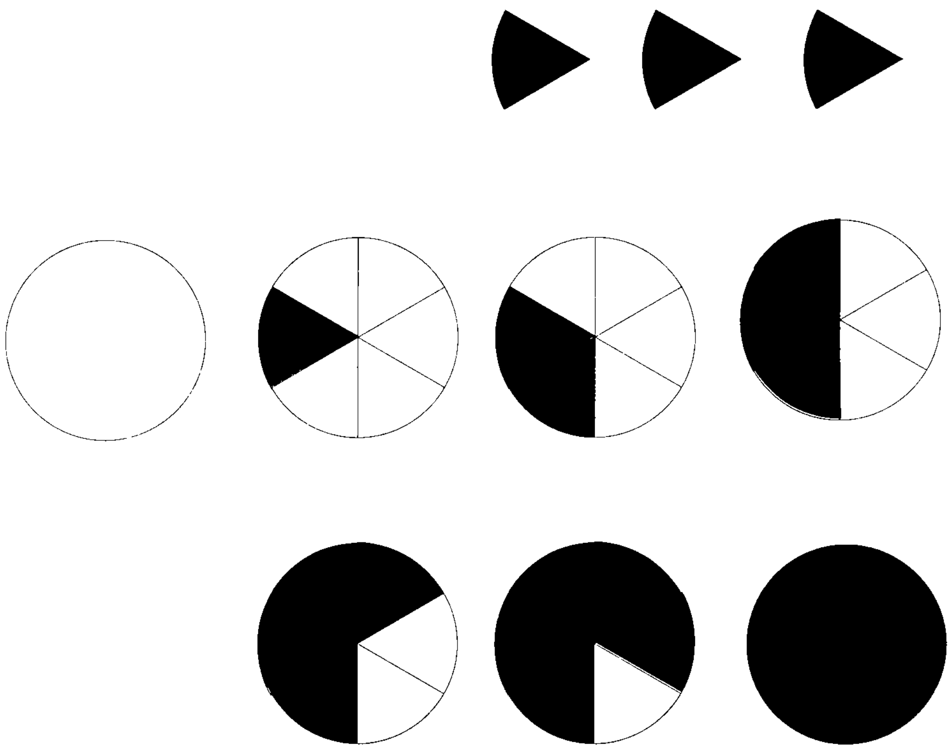
Para obtener partes equivalentes a otras partes de diferente tamaño, el procedimiento con material concreto es más complejo y requiere de otros conocimientos. Comparar y ordenar las partes, establecer si hay relación de "contenencia exacta" entre cada par de partes o entre partes menores de éstas, y establecer qué parte por repetición permite obtener cada una del par de partes iniciales.

Si se quiere, por ejemplo, obtener partes del mismo tipo equivalentes a un medio y un quinto, se sabe que un quito es menor que un medio, que con quintos por repetición no se pueden obtener medios, y que con medios por partición no se pueden obtener quintos. Pero partiendo quintos por mitad se obtienen décimos, y con décimos se obtienen medios, y con medios por partición también se obtienen décimos. Así que cinco décimos y dos décimos son partes del mismo tipo, respectivamente equivalentes a un medio y un quinto.

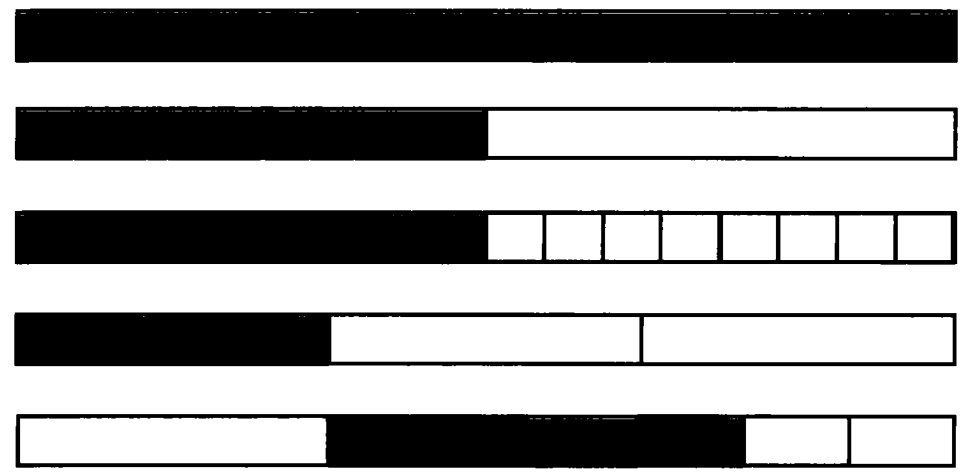
Utilizando la representación gráfica de las partes es posible obtener otras partes iguales, trazando convenientemente más o menos cortes, lo cual corresponde a juntar partes iguales, o a partir en partes iguales más pequeñas y comparar por superposición.

Para obtener partes equivalentes por un procedimiento aritmético, además de establecer equivalencias entre partes, o de hacer representaciones de partes equivalentes y de construir partes equivalentes a otras partes dadas, se requiere conocer y comprender la compensación (de carácter multiplicativo) que se da al partir una unidad o una cantidad (que se asumen como un todo) en una mayor o menor cantidad de partes iguales, obteniendo partes de menor o mayor tamaño.

En segunda instancia, es necesario conocer y manejar los símbolos numéricos (fracciones o números fraccionarios) como representaciones simbólicas de las partes iguales, así como las denominaciones y las posibles representaciones de los símbolos y de las partes iguales de unidades específicas; asociar las denominaciones de los símbolos con el tamaño de las partes, obtener partes iguales de unidades específicas a partir de símbolos o de representaciones y, a la vez, simbolizar y representar partes iguales; identificar la igualdad entre símbolos como la expresión utilizada para indicar equivalencia entre partes iguales; ordenar números fraccionarios a partir de la comparación de partes correspondientes; y verificar la equivalencia entre fracciones recurriendo a la representación.



En tercera instancia, se necesita comprender y manejar qué significa repetir tantas veces una parte específica de una unidad, o partirla en tantas partes iguales, identificando en cada caso la parte o las partes resultantes, y la relación de tamaño de éstas con la unidad y con la parte específica; además, asociar los fraccionarios no unitarios con la simbolización de partes que pueden ser el resultado de repetir otras partes de menor tamaño. Por ejemplo, $\frac{3}{4}$ puede corresponder a 3 veces $\frac{1}{4}$ o, lo que es lo mismo, $\frac{3}{4}$ es 3 veces mayor que $\frac{1}{4}$, o en $\frac{3}{4}$ están contenidos exactamente 3 partes del tamaño de los cuartos. Análogamente, 6/5 corresponde a 3 veces 2/5, o a 2 veces 3/5, o a 6 veces 1/5 y, por lo tanto, 6/5 es respectivamente 3, 2 o 6 veces mayor que 2/5, 3/5 o 1/5. Recíprocamente, 2/5, 3/5 y 1/5 son, respectivamente, 3, 2 y 6 veces menores que 6/5 o, lo que es lo mismo, son el resultado de partir (o repartir) 6/5 en (o entre) 3, 2 y 5.



La familiarización con las relaciones entre los números fraccionarios exige, además, conocer bien las relaciones de múltiplo y divisor entre los números naturales, e identificar los números fraccionarios como símbolos que representan el resultado de repartir una parte en un número determinado de partes iguales. Así, 1/5 puede ser el resultado de repartir 6/5 entre 6.

Para las fracciones $\frac{1}{2}$ y 5/10, que son equivalentes, se tiene que 5/10 es el resultado de partir $\frac{1}{2}$ en 5 partes iguales, obteniendo quintos del medio que son, a la vez, décimos de la unidad inicial. Del mismo modo, $\frac{1}{2}$ es el resultado de juntar cinco décimos.

Con fracciones de diferente tipo se pueden obtener, partiendo, muchas fracciones del mismo tipo que sean equivalentes. Por ejemplo, $\frac{1}{2}$ y

2/3 se pueden obtener con sextos, doceavos y dieciochoavos; si se parte el medio en tres, seis o nueve partes iguales, y cada tercio en dos, cuatro o seis partes iguales. Con ello se obtienen, de un lado, tercios, sextos y novenos del medio que a la vez son, respectivamente, sextos, doceavos y dieciochoavos de la unidad. De otro lado, se obtienen medios de un tercio que son cuartos de los dos tercios y sextos de la unidad, cuartos de un tercio que son octavos de dos tercios y doceavos de la unidad; y sextos de un tercio que son doceavos de dos tercios y dieciochoavos de la unidad.

Comprender y manejar las diferentes relaciones entre las partes de partes, y entre éstas y la unidad, y establecer cuáles y cuántas son equivalentes a otras dadas (a un medio y dos tercios, para el ejemplo), es algo que se requiere saber para aproximarse a identificar y comprender mecanismos aritméticos que sirvan para hallar fracciones equivalentes

La simbolización de relaciones de equivalencia entre números fraccionarios permite aproximar a un conocimiento en el que posteriormente se soporta la introducción al sistema de los números racionales, y que permite ampliar la comprensión del hecho aritmético de ser el 1 (uno) módulo de la multiplicación, y el manejo de los números fraccionarios como símbolos del resultado de repetir o repartir partes (un número específico de veces o entre un número específico de parte iguales). En términos de operaciones aritméticas elementales, esto corresponde a multiplicar y dividir un número fraccionario por un número natural.

Así, por ejemplo, se tiene que ½ es equivalente a 3/6, 3/6 es lo mismo que 3 veces 1/6; 1/6 es el resultado de repartir 1/3 entre 2, y también el resultado de repartir ½ entre 3 y, además, 6 es 3 veces 2, o 2 veces 3 Todo lo cual se puede simbolizar de la manera siguiente·

$$½ = 3/6;\ \ 3/6 = 3x1/6;\ \ 1/6 = (1/3)/2,\ \ 1/6 = (1/2)/3,\ \ 6 = 3x2 \text{ y } 6 = 2x3$$

En este punto hay otros requerimientos básicos de conocimientos, relativos al significado y las propiedades de la igualdad y las operaciones, y al uso de signos de agrupación, los cuales posibilitan escribir algo como lo siguiente

$$½ = 3/6 = 3x1/6 = 3x(1/3)/2 = 3x(1/2)/3 = (3/3)x1/2 = 1x1/2$$

Una fracción equivalente a otra dada se puede obtener multiplicando ésta por la unidad, expresada como fracción de manera conveniente.

Lo cual, en un nivel mayor de generalización, se puede expresar diciendo que un medio es equivalente a un medio multiplicado por uno expresado en medios, tercios, cuartos o quintos; o escribiendo algo como:

$$½ = ½ x 1 = ½ x 3/3 = ½ x 2/2 = 1/2 x 10/10$$

o

$$½ = 2/4 = 3/6 = 4/8 = 10/20$$

o afirmando, por ejemplo, que los medios se pueden convertir en fracciones equivalentes que sean cuartos, sextos, octavos, décimos, y no se pueden convertir en fracciones equivalentes que sean tercios, quintos, séptimos Lo que parece natural al pensar en los múltiplos de dos y asociar éstos con la cantidad de partes que resultan al partir los medios (dos partes de una unidad) en dos, tres, cuatro, cinco, ... partes iguales.

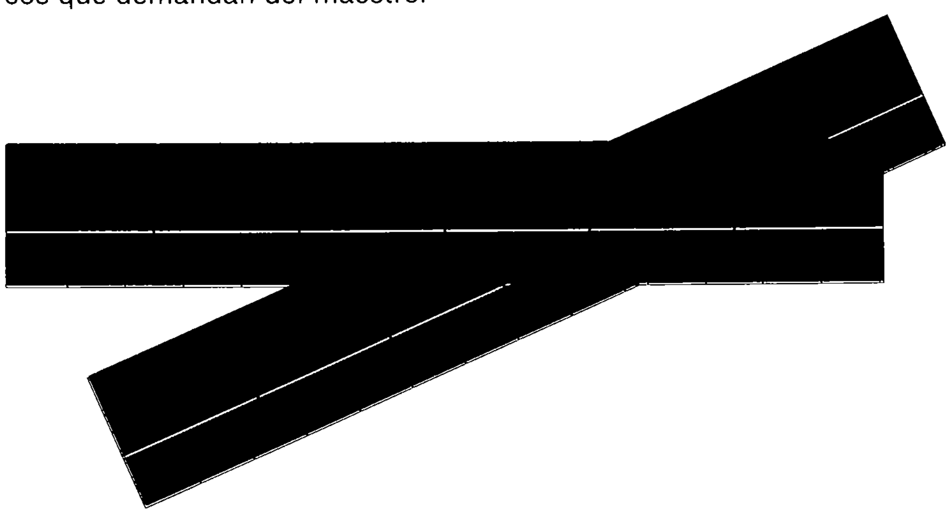
En estas condiciones de conocimiento, el mecanismo de cálculo de fracciones equivalentes se reduce a indagar cuál es la manera conveniente y posible de expresar la unidad en cada caso, y a hacer multiplicaciones generalmente sencillas, siendo relevantes las nociones de múltiplo y divisor común.

Las fracciones de diferente tipo se convierten en fracciones equivalentes del mismo tipo para poder sumarlas o restarlas. Entre los números fraccionarios se cumple el principio fundamental de la suma· sólo se suman números que representan cantidades de la misma naturaleza. Sólo se suman números fraccionarios del mismo tipo.

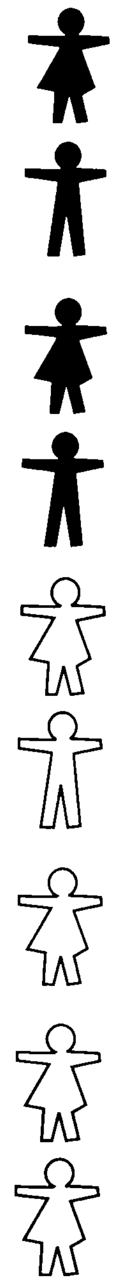
Hasta aquí, podríamos decir que el manejo comprensivo de procedimientos aritméticos que permitan calcular fracciones equivalentes requiere de conocimientos respecto de las partes iguales y las fracciones, en los cuales, a su vez, se sintetizan los que es imprescindible saber para manejar comprensivamente los números fraccionarios y las operaciones entre éstos.

En la propuesta en que se basa la innovación, no se hace alusión a las expresiones de numerador y denominador para hacer referencia a los números fraccionarios. Estos se introducen como símbolos que representan partes iguales, o fracciones de una unidad específica, y poco a poco se amplía la significación de estos símbolos numéricos La denominación de los números fraccionarios o fracciones se asocia al tamaño de las partes, que a las vez determina la relación "parte-todo" y depende de la cantidad de partes iguales que se consideren en la unidad: los tercios son terceras partes de la unidad, y tres de éstos la constituyen Las acciones fundamentales con las partes son juntarlas y partirlas o repartirlas Si las junto, agrego, duplico o quito no cambian de nombre, porque sólo he aumentado o disminuido la cantidad de ellas; si las parto o las reparto cambia el nombre, porque se ha modificado el tamaño de éstas.

Para finalizar este apartado, es pertinente dejar como inquietud la pregunta sobre la conveniencia o inconveniencia de introducir procedimientos aritméticos, como el llamado de "homogenización", que requieren para su comprensión conocimientos de los cuales no se tiene certeza que los estudiantes los hayan logrado, no sólo por el nivel de abstracción y generalización que implican sino por los conocimientos aritméticos que demandan del maestro.



¿Diferentes conocimientos posibilitan distintas maneras de resolver problemas, o distintas maneras de resolver problemas requieren diferentes conocimientos?



Preparar las actividades que se iban a proponer a los estudiantes exigió que los asesores y la maestra innovadora resolvieran cada tarea que se incluiría. A la vez que se analizaba qué significa comprender el enunciado de los problemas, se resolvieron varios de ellos y se evaluaron las posibles soluciones. Veamos lo que este ejercicio significó en términos de aprendizajes didácticos.

Al observar la actividad de los estudiantes de grado octavo y resolver de manera detallada el siguiente problema:

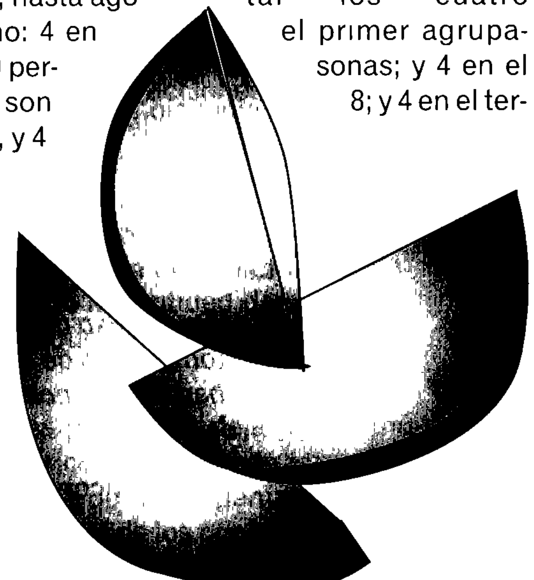
"En el curso de Sara, 4 de cada 9 niños toman jugo de naranja al desayuno. Si hay 36 alumnos, ¿cuántos toman jugo de naranja?"

se encontraron las siguientes opciones de solución.

1. Como 4 de cada 9 niños toma jugo, podría pensarse en averiguar cuántos grupos de 9 se pueden formar con 36 niños. Sabiendo cuántos grupos de nueve hay, y que en cada grupo 4 toman jugo, se tiene lo fundamental de la solución. El cálculo de los grupos se puede hacer de varias maneras:

Por representación y conteo de uno en uno, inicialmente hasta 36 (bolas o palos) y luego de uno hasta nueve, una, dos, tres y cuatro veces, hasta agotar los 36. Resultan cuatro agrupamientos de nueve. De nuevo por conteo en cada grupo, de uno hasta cuatro, se marcan 4 "cualesquiera" que podrían ser los que toman jugo. Y, finalmente, de uno en uno se cuentan todos los marcados. Si se comprende lo que significa la expresión "cuatro de cada nueve", para esta solución bastaría con saber contar.

- Por doble conteo, uno de 9 en 9 hasta 36 haciendo agrupamientos, y otro conteo simultáneo de uno en uno de los agrupamientos: algo como "9 y 1, 18 y 2; 27 y 3; 36 y 4". Hay cuatro agrupamientos, y por cada agrupamiento 4 toman jugo, entonces, de nuevo se hacen dos conteos simultáneos: uno de 4 en cuatro, y otro que podría ser con ordinales o con cardinales, hasta agotar los cuatro agrupamientos. Algo como: 4 en el primer agrupamiento, o en las primeras 9 personas; y 4 en el segundo agrupamiento y son 8; y 4 en el tercer agrupamiento y son 12, y 4 en el cuarto agrupamiento y son 16. O como: 4 en uno de 9; y 8 en dos de 9, y 12 en tres de nueve, y 16 en los cuatro de nueve que resultaron. El nivel de complejidad en este tipo de solución comprende un ejercicio de cálculo mental, manejando dos conteos con diferente pauta y de dos diferentes elementos (personas, y personas que toman jugo), y grupos de nueve.



- Otra forma sería escribir nueves e ir sumándo mentalmente hasta completar 36. Luego se escribe un cuatro por cada nueve y se suman. Nueve y nueve son dieciocho (9+9), y nueve veintisiete (9+9+9+9), y nueve treinta y seis (9+9+9+9). Por cada nueve se escribe un cuatro y se suman (4 + 4 + 4 + 4 = 16). El nivel de complejidad aquí comprende escribir dígitos y sumar. Pero bastaría con contar con apoyo de los dedos, por ejemplo.

2. Otra posible forma de resolver el problema es interpretando la expresión "cuatro de nueve" como una parte o una fracción de un todo discreto, 9, que se escribe como 4/9 y se lee "cuatro de nueve". El problema consiste, entonces, en indagar cuál es la parte o fracción de 36 que es equivalente a 4/9 (¿?/36), y se reduce a hallar una fracción equivalente: ¿cuántas unidades de 36 son tantas como 4 de 9?, o ¿cuántas partes

del tamaño de los treinta seisavos son como cuatro del tamaño de los cuartos?, o ¿de qué manera expreso la unidad para convertir 4/9 en treinta seisavos? El nivel de complejidad en este caso comprende el manejo de las fracciones equivalentes y el manejo comprensivo de la noción del todo, o unidad continua y unidad discreta y, por supuesto, la comprensión de las expresiones "4 de 9" o "por cada 9, 4".

3. Si se considera la relación entre la cantidad de personas que toman jugo y la cantidad de personas, que es en una razón de 4 a 9, la solución puede incluir el cálculo y el análisis de qué pasa al aumentar en 9 cada vez (la cantidad de personas), o aumentar en 4 (la cantidad de personas que toman jugo), y diligenciar la tabla calculando, entre otros, el valor de los tomadores de jugo correspondiente a 36 personas.

4	9
8	18
12	27
16	36
20	45
24	54
28	63

Igualmente, sería posible calcular uno cualesquiera de los datos correspondiente a otro dado, por uso de múltiplos de 4 o de 9, o por igualdad de razones y cálculo de fracciones equivalentes.

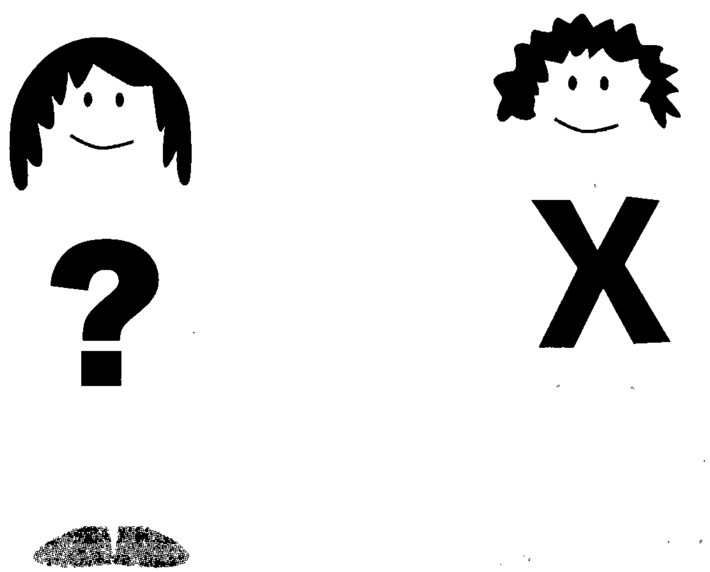
El nivel de complejidad en esta solución de varias alternativas tiene que ver con el manejo de relaciones multiplicativas entre cantidades discretas, o la comprensión de la razón constante con la que se establece la relación entre cantidades, la comprensión de la igualdad entre razones como equivalencia entre fracciones, y el cálculo de múltiplos o de fracciones equivalentes.

4. En el aula, algunos estudiantes resolvieron el problema con cálculos similares a los enunciados en el numeral uno. Otros por tanteo, y otros sin mayor comprensión dividieron 36 entre 9 y multiplicaron. Lo repetitivo de los datos del problema (4, 9, 36, 4 grupos de 9; y 4x4 en el resultado) posibilitó a los estudiantes hacer cálculos sin comprender mucho lo que hacían y hallar una respuesta.

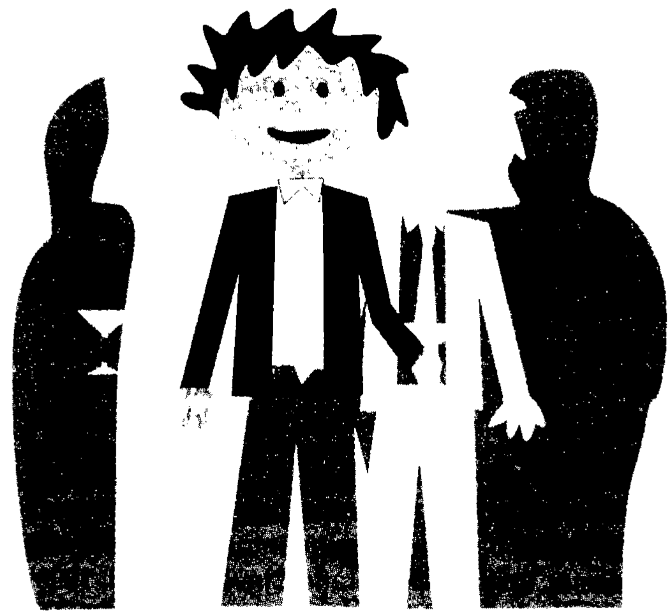
El análisis de las soluciones mostró que hay problemas escolares que se pueden resolver sin comprender el enunciado y que hay diversas maneras de resolver un problema pero, más que eso, nos permitió identificar diferentes niveles de complejidad de los conocimientos que se ponen en juego en algunas de las formas de solución posibles.

En los problemas que se enuncian a continuación es posible emplear las mismas formas de resolverlos, salvo por diferencias en los números utilizados:

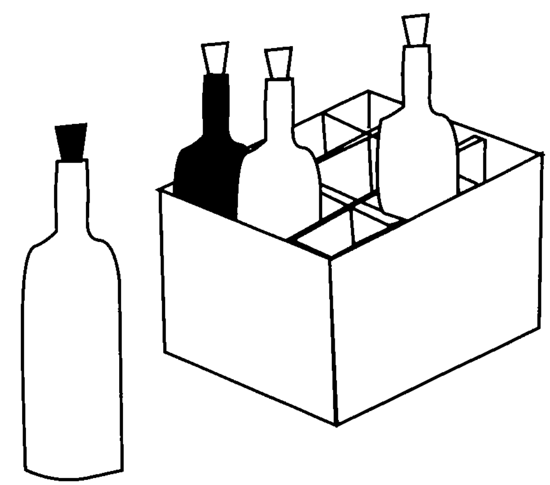
"En una población hay 12 mujeres por cada 22 habitantes. Si hay 880 habitantes, ¿cuántas mujeres hay?"



"De una encuesta se concluyó que "veinte centésimos de los encuestados fuma". ¿Cómo se representa gráficamente esta situación? ¿Esto qué quiere decir?"



"Entre los 40 invitados a una fiesta se reparten 2 botellas de vino por cada 5 personas ¿Cuántas botellas de vino se repartirán en total? Si la cantidad de invitados aumenta a 120, ¿cuántas botellas se repartirán? Si se tienen 18 botellas, ¿para cuántos invitados alcanzarán?"



En estos problemas, como en el de los jugos, surge la pregunta de si es necesario para comprender el enunciado conocer y comprender lo que significan los datos estadísticos referidos a características o comportamientos de poblaciones, o estar familiarizados y diferenciar entre expresiones que dan información de registros de comportamientos globales observados, y los que se refieren a individuos específicos. Igualmente, cabe preguntarnos cómo entienden e interpretan los jóvenes, y también los maestros, datos como los de los problemas anteriores.

Bibliografía

BATESON, G. *Pasos Hacía una Ecología de la Mente.* Buenos Aires: Lohle-Lumen, 1972.

BROOKS, E *Philosophy of Arithmetic* Lancaster PA . Washington Librarian of Congress, 1880

NEWMAN, J *El Papiro Rhind.* En. NEWMAN, J. El Mundo de las matemáticas. Colección Sigma, Vol. 1 Barcelona. Grijalbo, 1980. pp 97

ORTIZ H. M., y otros. *Números fraccionarios Cuadernillo de taller* En: Memorias del IV coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas, 1987

ORTIZ H. M. *Iniciación de la aritmética. Un programa de formación para maestros desde la perspectiva del aprendizaje* En: El entorno, punto de partida y una de las categorías de conocimientos que determinan el aprendizaje escolar. México: Tesis de doctorado Cinvestav IPN, 1999 Cáp 1, 3 y 4

UNA PROPUESTA PARA LA CONSTRICCIÓN DE CONCEPTOS BÁSICOS DE ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA EN CONTEXTOS COTIDIANOS

Instituto para la Investigación Educativa y el Desarrollo Pedagógico
IDEP

Institución Educativa Distrital Montebello

Fabio Pedraza
Evaldo Rubio
Gladys Barrera
Olga Lucía Niño

Institución Educativa
Distrital Montebello

La enseñanza de la estadistica con un enfoque interdisciplinario

INTERDISCIPLINARIEDAD EN CONTEXTOS EDUCATIVOS

Estamos viviendo hoy en día cambios políticos, económicos, culturales y tecnológicos de gran trascendencia; es decir, estamos inmersos en un cambio estructural de la sociedad, en el que todos los estamentos están implicados Estos cambios plantean innumerables problemas, que sólo será posible resolver por la vía de la globalidad, convirtiendo la educación en el principal medio para que los seres humanos tomen conciencia sobre su función en el planeta. Podemos expresar el principio de globalización mediante la idea de que el aprendizaje no se lleva a cabo por simple adición o acumulación de saberes. las personas construyen esquemas de conocimiento que mantienen entre sí complejas y numerosas relaciones, de manera que la incorporación a los mismos de nuevos elementos da lugar a aprendizajes tanto más significativos cuanto mayor es la complejidad de las relaciones establecidas. El aprendizaje significativo es, por definición, un aprendizaje globalizado, en la medida en que supone que el nuevo material de aprendizaje se relaciona en forma substantiva con lo que el estudiante ya sabe

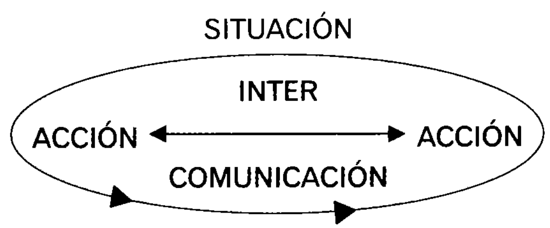
El enfoque globalizador de la enseñanza, entonces, parece ser la manera más adecuada para afrontar los problemas sociales. Ninguna ciencia por sí sola puede dar soluciones a los numerosos y cada día más difíciles problemas con los que el ser humano se encuentra a lo largo de su vida, razón por la cual esta globalización debe recurrir a diferentes ciencias y disciplinas que ayuden a enfrentarlos. La interdisciplinariedad es uno de los medios para conocer globalmente la realidad y para transformarla.

En el desarrollo de los diferentes procesos educativos, siempre se han contemplado proyectos transversales que permitan la interacción de diferentes disciplinas en los contextos educativos, dando lugar a la puesta en común de una temática a partir de diferentes ópticas, y materializando una visión integral de lo que en última instancia busca como fin la educación. un ser íntegro Esta búsqueda parece utópica para las mayoría de las instituciones educativas, en la medida que las metodologías empleadas al interior de las aulas atomizan el conocimiento y dejan espacios limitados y convencionales para cada asignaturas; en filosofía, por ejemplo, podría pensarse que el conocimiento sólo está presente cuando media un alto nivel de racionalización; en las matemáticas se tendería a pensar en utilizar procesos lógicos como fuente única para la verificación de situaciones, en la educación física a poner en práctica esquemas corporales mecánicos, o en las Ciencias Sociales a contemplar la memoria exclusivamente como herramienta que permite almacenar datos.

La propuesta de pensar en cómo establecer espacios para que las prácticas educativas se conviertan en prácticas integrales, y entender estos espacios como instancias en las que las dimensiones lógica, práctica y creativa se integren en la búsqueda de soluciones, es decir, en las que las vivencias que tenemos a través de todos los sentidos, del hacer, el conocer y el sentir dejen una huella más profunda en los sujetos que cuando se trabaja con base en un solo ámbito o extensión del ser, deberá permitir acercarnos a la verdadera formación integral, por la cual ha trabajado permanentemente la educación

Cabría preguntarse por qué este tipo de prácticas da lugar a aprendizajes significativos. La respuesta a este interrogante está contenida en la presentación de esta propuesta, en la cual la puesta en común se enriquece desde todos y cada uno de los escenarios en que se trabaja, encontrando un mismo norte partiendo de la perspectiva propia de cada una de las disciplinas, y fortaleciendo la emergencia de lenguajes comunes que permiten abordar desde diferentes frentes una misma situación. El trabajo inter-disciplinar tiene lugar cuando se activan la capacidad de comunicación y de interacción en una línea horizontal.

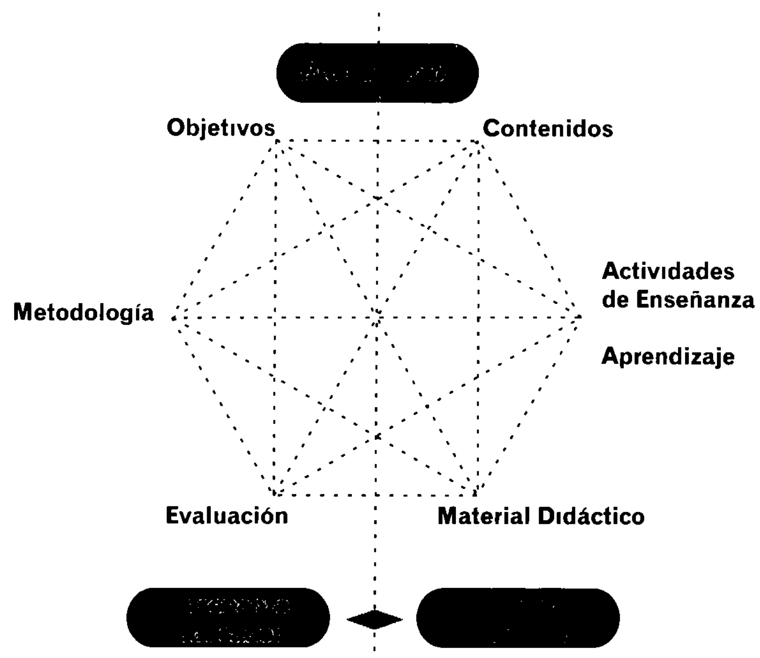
El prefijo ´inter´, contiene una serie de ideas tales como comunicación, dialéctica, trabajo en equipo... Seguir ignorando durante años lo que se hace alrededor de uno supone negar el deleite que ofrecen no sólo la innovación y la optimización de las propias ideas, recursos y aplicaciones, sino la relación social entre colegas. (Globalidad e Interdisciplina Curricular en la Enseñanza Primaria. EUGENIA TRIGO ASA).



Centros de interés de Decroly	Parte de una serie de actividades que culminarán en el conocimiento de un tema real	1 Observación 2 Asociación 3 Expresión
Proyectos de Kilpatrick	Gira en torno al diseño y la elaboración de un objeto o la realización de un montaje	1 Intención 2 Preparación 3 Ejecución 4 Evaluación
Investigación del medio	Resolución de problemas y cuestiones sobre un tema de interés para el alumno mediante la búsqueda y la indagación	1 Motivación 2 Planteamiento de preguntas 3 Planteamiento de suposiciones e hipótesis 4 Establecimiento de medios de información 5 Búsqueda de información 6 Selección y clasificación de datos 7 Determinación de conclusiones 8 Generalización 9 Expresión y comunicación de conclusiones

EJES ESENCIALES DE INTERDISCIPLINARIEDAD

El siguiente esquema muestra, de manera holística, elementos que deben ser tenidos en cuenta para el trabajo interdisciplinar:



MODELOS INTERDISCIPLINARES

La integración de conocimientos, de igual manera, se contempla en diferentes modelos que se pueden clasificar en tres grupos.

MODELOS INTERDISCIPLINARES	
GRUPO	**MODELO**
DENTRO DE LA MISMA DISCIPLINA Se trata de unir diversos aspectos de un tema, estudiándolo en diversas lecciones e insistiendo en aquellos aspectos que le son más propios	**Fragmentado** (periscopio) Cada profesor enfoca el problema dentro de un tema específico y con la visión particular de una disciplina
	Conectado (vía férrea) Cada profesor hace conexiones del problema con diversos temas o aspectos, pero sin salirse de una disciplina
	Epicéntrico (en espiral) Cada uno de los profesores estudia el problema desde diversas dimensiones y actividades para llegar al fondo del mismo
ENTRE VARIAS DISCIPLINAS Conecta el tema con dos o más disciplinas diferentes Cada profesor puede tratarlo independientemente o poniéndose previamente de acuerdo con otros	**Paralelo** (gafas) Dos o más profesores estudian al mismo tiempo el tema, logrando al final una mejor y única imagen
	Superpuestos (prismáticos) Dos o más profesores se ponen de acuerdo para que uno explique una técnica que pueda aplicarse al tema que el otro explica
	Constelación (telescopio) Un tema parece simple, pero si se le aplica el telescopio aparecen ramificaciones para todas las disciplinas
	Metadisciplinar (lupa) Diversos profesores trabajan con distintas habilidades que luego, ampliándolas, valdrán para todas las disciplinas
	Integrado (caleidoscopio) Sólo dándole vueltas al tema a través de diversas disciplinas aparece una realidad nueva y distinta
DENTRO DE LA MISMA PERSONA El educando debe ser capaz de interrelacionar los diversos aspectos que presenta determinado problema	**Inmersión** (microscopio) Todos los temas tienen un pequeño detalle que puede conectar con algún interés básico del alumno
	Prisma (prisma de colores) Cada vez que le das una vuelta al tema aparece una nueva perspectiva

INTERDISCIPLINARIEDAD EN CONTEXTOS ESTADÍSTICOS

Pensar en puntos de encuentro entre dos o más disciplinas no es más fácil y, por el contrario, termina haciendo muy dispendioso el trabajo El tema formal de la matemática implica el uso de nuevas modalidades

de notaciones simbólicas, así como definiciones más explícitas de imágenes y palabras. La mayoría de los niños no encuentra fácil traducir sus intuiciones en términos de este tipo de expresiones matemáticas El mundo de los números y de las relaciones numéricas, tal y como se perciben en las operaciones en el mundo hablado y en las fórmulas de los libros de texto, nunca se unen de modo sinérgico. Por ello la Estadística se convierte en una herramienta que permite transversalizar diferentes disciplinas, haciendo de la matemática una ciencia más entendible y práctica para el trabajo con los estudiantes.

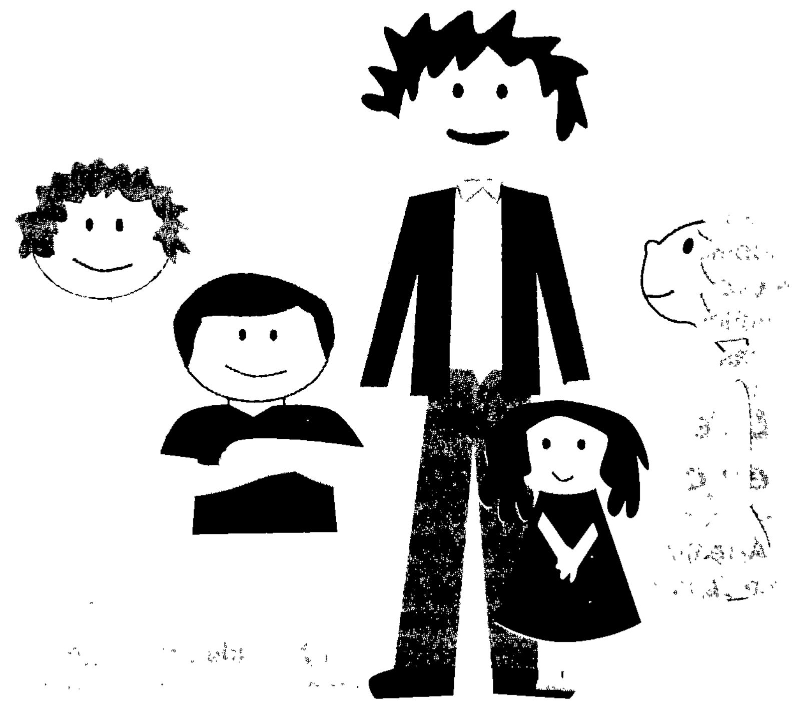
Nuestra experiencia Interdisciplinar nos permitió mostrar cómo el trabajo en equipo logró que los estudiantes se establecieran desde diferentes frentes métodos de entendimiento en realidades vividas, traduciéndolas en resultados estadísticos, que se transformaron luego en inferencias sobre la realidad. La imaginación posibilitó la combinación de modelos internos y externos para solucionar fluidamente las problemáticas encontradas

La enseñanza de la estadística en contextos cotidianos

Al realizar una aproximación a la situación de la enseñanza y el aprendizaje de la Estadística en los ámbitos nacional e internacional (preferiblemente latinoamericano), es posible identificar una preocupación común a los diferentes investigadores y estudiosos: en general, el trabajo que se hace en los colegios en Estadística, en las pocas ocasiones en que ello ocurre, se limita a una instrucción de carácter teórico, apoyada fundamentalmente en las matemáticas y en la adquisición de habilidades. Sin embargo, la comprensión necesaria para tomar decisiones está fuera del alcance de la mayoría de los estudiantes, porque la aproximación tradicional proporciona básicamente recetas algorítmicas que no se relacionan con la inferencia estadística.

En este sentido, el documento Estándares Curriculares de la National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) presenta importantes aportes en la identificación de los grandes logros que deben procurarse en el campo de la Estadística. Ellos son: resolver problemas estadísticos, comunicar y comprender información estadística, integrar conceptos estocásticos con otras áreas de la matemática y con otras materias, y razonar estadísticamente.

En el ámbito nacional, es necesario hacer referencia al documento Lineamientos Curriculares en Matemáticas (MEN, 1988), en el que se proponen algunas categorías básicas como constitutivas del desarrollo del pensamiento estadístico y probabilístico en los estudiantes. Tales categorías se refieren a los conceptos de aleatoriedad, probabilidad, y recolección y análisis de datos, lo que incluye poner en práctica conocimientos sobre los números, las mediciones y la estimación, así como sobre estrategias de solución de problemas



La reflexión sobre los elementos anteriores condujo a que en la Institución Educativa Distrital Montebello se diseñara y llevara a cabo el proyecto de innovación *UNA PROPUESTA PARA LA CONSTRUCCIÓN DE CONCEPTOS BÁSICOS DE ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA EN CONTEXTOS COTIDIANOS. APLICACIÓN EN SISTEMAS PARTICULARES DE LAS CIENCIAS SOCIALES Y LA EDUCACIÓN FÍSICA*, puesto que el grupo de docentes reconoció que la Estadística se ha trabajado de manera tangencial y que, partiendo del manejo conceptual, su enseñanza ha tenido un carácter trivial y desligado de los contextos reales de los estudiantes

Se consideró importante abordar una propuesta innovadora para el estudio de la Estadística Descriptiva que permitiera asumir, de manera transversal, conocimientos cotidianos de las Ciencias Sociales y la Educación Física, y que permitiera la ampliación y el enriquecimiento de los ámbitos restringidos en los que nos veníamos desempeñando.

ACERCA DE LA NATURALEZA DEL CONOCIMIENTO ESTADÍSTICO

El proyecto de innovación asumió un punto de vista acerca de la naturaleza del conocimiento estadístico en el cual la Estadística se considera como el estudio del "comportamiento de los fenómenos llamados de colectivo" (Pacheco, 1998) Se trata de buscar respuestas a situaciones relacionadas con la realidad social, cultural y física, organizando la información que sobre dichas realidades se obtenga y estableciendo la pertinencia de las formas interpretativas que se empleen. En general, se adoptó una perspectiva teórica sobre organización de datos estadísticos que apuntara a la apropiación, por parte de los estudiantes, de herramientas accesibles a ellos (distintas del computador) como tablas, diagramas de frecuencia, histogramas, pictogramas, ojivas y diagramas circulares. El análisis de datos se refirió en el proyecto a una perspectiva de "análisis exploratorio", basado en la apropiación, el manejo y la solución de problemas de medidas de tendencia central, principalmente media, mediana y moda.

Desde el punto de vista pedagógico, el proyecto tuvo en cuenta que la Estadística establece relaciones importantes con otros ámbitos del conocimiento matemático, principalmente el lógico, el numérico y el de la medición. Por lo tanto, se trataba de profundizar en el tipo de razonamiento que los estudiantes pueden lograr en cada uno de esos ámbitos y establecer así la validez de la propuesta de innovación El enfoque de solución de problemas fue el aspecto central del componente pedagógico del proyecto, pues a través de él se buscó cumplir con la construcción de sentido del conocimiento estadístico, procurando permanentemente que los estudiantes decidieran sobre la pertinencia de la información necesaria, así como las formas de recogerla, representarla e interpretarla

De acuerdo con los lineamientos curriculares, al proponer al estudiante situaciones en las cuales se vinculan el procesamiento de datos y la elaboración de análisis de éstos, se configura en el aula una situación en la que se da concreción al aforismo. "el desarrollo de pensamiento aleatorio significa resolución de problemas". Los lineamientos señalan que "La búsqueda de respuestas a preguntas que sobre el mundo físico se hacen los niños resulta ser una actividad rica y llena de sentido si se hace a través de recolección y análisis de datos. Decidir la pertinencia de la información necesaria, la forma de recogerla, de representarla y de interpretarla para obtener las respuestas, lleva a nuevas hipótesis y a exploraciones muy enriquecedoras para los estudiantes. Estas actividades permiten, además, encontrar relaciones con otras áreas del currículo y poner en práctica conocimientos sobre los números, las mediciones, la estimación, y estrategias de resolución de problemas" (MEN, 1998)

El enfoque de solución de problemas adoptado por el proyecto de innovación se basó en la técnica según la cual se propone a los estudiantes cumplir de manera reflexiva los siguientes pasos

Obtención de la información acerca del problema, con el fin de comprender la pregunta y determinar el objetivo del problema, aún sin saber cómo llegar a la solución

Organización de un plan para resolver el problema Se trata de organizar la información obtenida de manera que se facilite el análisis del problema tratado

Análisis del problema, que puede llamarse la etapa algebraica y ocurre cuando se han identificado los conceptos relevantes que se van a emplear en la solución.

Aprendiendo de los propios esfuerzos, que incluye la consideración de algunas preguntas fundamentales: ¿la respuesta propuesta en la etapa de análisis concuerda con la encontrada?, ¿pueden existir excepciones o casos especiales?, ¿existen momentos en los que estas consideraciones no son válidas?, ¿qué ecuaciones encontradas durante el análisis podrían ser empleadas en problemas futuros?, ¿por qué me fue asignado este problema?, ¿qué conocimiento he ganado trabajando en él?

LA ESTADÍSTICA EN EL ESTUDIO DE LAS CIENCIAS SOCIALES

El estudio de las Ciencias Sociales requiere de diversas estrategias y técnicas, así como de un enfoque que aporte rigor a la investigación. Un rasgo científico en la investigación en Ciencias Sociales es la medición, es decir, la aplicación de la estadística emanada de la comprensión crítica de los procesos sociales, además de la comprensión objetiva y analítica a través de la operacionalidad de la realidad para hallar leyes y principios.

La aplicación de la Estadística en el estudio de las Ciencias Sociales hace necesario establecer el tipo de investigación más acorde con la objetividad y la racionalidad de los datos que brinda la realidad a estudiar. Algunos de ellos se han caracterizado como:

Investigación cuantitativa. Este tipo de investigación cuantifica y racionaliza la realidad a partir del análisis de un número de datos Se trata de una forma de investigación que "parte con problemas y objetivos claramente definidos, y utiliza instrumentos de recolección de información y medición de variables muy estructurados. Todo esto para

asegurar la confiabilidad y la validez de los datos" (Briones, G Pag 51). Otras características de la investigación cuantitativa son: se deriva de la concepción positivista, ya sea empirista o hipotético deductiva, asume la realidad social externa regida por leyes mecánicas de movimiento; busca explicar sus problemas, descubriendo las relaciones causales y las regularidades de su comportamiento; hace mediciones controladas de variables e indicadores; utiliza información cuantitativa y técnicas estadísticas para tratarla y analizarla; privilegia la lectura "desde afuera", busca obtener generalizaciones con validez universal (Torres, A. Pág. 12).

[redacted]

Investigación cualitativa. Por su metodología, se antepone a la investigación cuantitativa, por cuanto su prioridad no son los datos estadísticos y la medición de variables. En ella se "parte de hipótesis, por lo tanto, no pretende demostrar teorías existentes; más bien, pretende generar teoría a partir de los resultados obtenidos Agrupa la información en categorías, para cuantificar utiliza frecuencias simples: la observación no estructurada, la observación participante, documentos (trabajos de los estudiantes en la investigación educativa), planos, grabaciones de video, etc (Briones, Pag 64).

Investigación descriptiva. Se trata de otro tipo de investigación aplicado a las Ciencias Sociales que busca la medición estadística "Su propósito es describir situaciones y eventos; es decir, cómo es y cómo se manifiesta determinado fenómeno. Busca especificar las propiedades importantes de personas, grupos, comunidades o cualquier otro fenómeno que sea sometido a análisis. Mide o evalúa diversos aspectos, dimensiones o componentes del fenómeno a investigar". Para este tipo de investigación describir es medir, seleccionando una serie de factores y midiendo cada uno de ellos independientemente para así describir lo que se investiga. Por ejemplo, en un censo nacional de población se elige una serie de conceptos a medir, que se denominan variables y que se refieren a conceptos que pueden adquirir diversos valores, los cuales sirven para describir el fenómeno de interés.

Investigación explicativa. La comprensión de las prácticas sociales, desde un punto de vista científico, debe dar cabida al análisis objetivo y profundo para hallar las raíces de la problemática estudiada y para ofrecer soluciones De ahí que la investigación explicativa "...busca encontrar las razones o causas que provocan ciertos fenómenos a nivel cotidiano y personal. Responde a preguntas tales como ¿qué efectos tiene , a qué se deben estos efectos..., por qué prefiere.. , qué usos se dan de ? Este tipo de investigación es más estructurada que las demás clases de estudio, e implica los propósitos de ellas: exploración, descripción y correlación. Además, proporciona un sentido de entendimiento del fenómeno al que hacen referencia

LA ESTADÍSTICA EN EL ESTUDIO DE LA EDUCACIÓN FÍSICA

La Estadística aplicada a la Educación Física es un campo de estudio de gran impacto, potencializador de conceptos de esta área. Con base en este eje conductor claro y preciso, constituye una propuesta didáctica original, rigurosa y de amplia incidencia en el proceso enseñanza-aprendizaje, de ahí que se insista en la necesaria reflexión sobre el papel educativo del área, cuya producción se ha caracterizado por ser meramente instrumental.

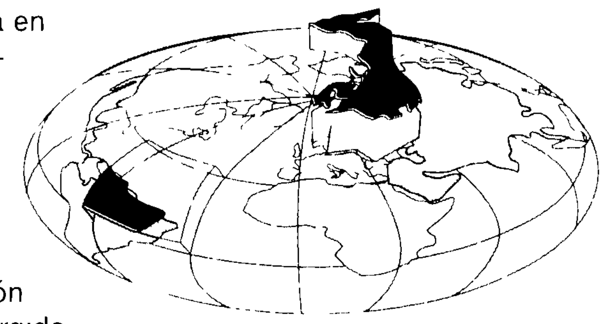
Ciertamente, con este enfoque se requiere de nuevos planteamientos transformadores de la práctica socio-motriz en el aula, y de espacios abiertos trazados mediante propuestas del área de las matemáticas con enfoque estadístico.

De acuerdo con el significado etimológico del término, la Estadística se refiere a algún tipo de análisis de problemas, su interpretación, y la deducción basada en el análisis y la interpretación. Ahora bien, en este sentido, la Estadística aparece como una ciencia, una técnica o una tecnología con una clara orientación hacia la práctica, que se expresa en la capacidad de pensar y analizar situaciones de la cotidianidad. Vista así, la clase de Educación Física nos ofrece una perspectiva más lógica, analítica y futurista de las acciones y los datos que arrojan sus diferentes actividades y contenidos, aunque con un atenuante: el poco uso de este contexto en el ejercicio reflexivo, quizás originado en la falta de encuentro de un significado sobre su proyección social. Así, la proyección y transversalización de los elementos teóricos de la Estadística se convierte en una herramienta para manejar ámbitos significativos y cognitivos de la clase de Educación Física.

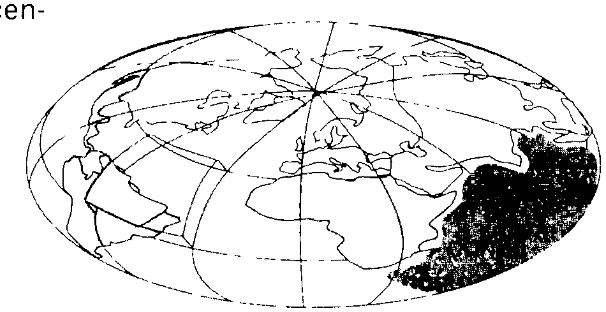
MICROPROYECTOS EN CIENCIAS SOCIALES

Los conceptos básicos de Estadística descriptiva se aplicaron a la clase de Ciencias Sociales en los siguientes temas:

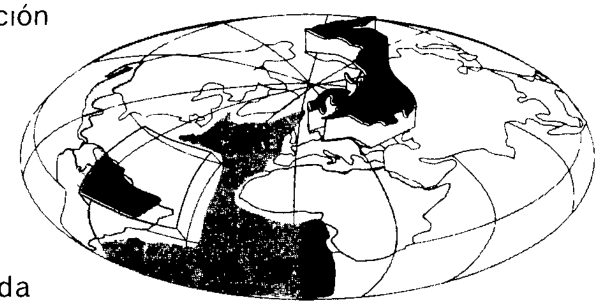
- Descripción de la composición de la superficie terrestre. Para ello se tuvo en cuenta la extensión, tanto de la porción terrestre como de la porción líquida en relación con la extensión de todo el globo terráqueo



- Comparación porcentual de cada continente en relación con la extensión de la superficie emergida.
- Comparación porcentual de los continentes entre sí, de acuerdo con la extensión de cada uno; se hizo, en particular, la comparación de Europa con los demás continentes.



- Comparación porcentual de cada océano en relación con la extensión de la porción líquida.
- Comparación porcentual de los océanos entre sí, teniendo en cuenta la extensión de cada uno, en particular, se hizo la comparación del océano Pacífico con los demás océanos.



Los resultados de estos análisis se presentaron tanto en tablas como en diagramas de barras y diagramas circulares.

- A partir de los resultados en la elección de Personero y Consejo Estudiantil, se calcularon algunos porcentajes que relacionaban número de votos obtenidos por los candidatos con la cantidad total de votantes, y comparaban la cantidad de votos de los candidatos entre sí. En este caso, también los resultados se fueron presentando tanto en tablas como en diagramas de barras y diagramas circulares.

A continuación se describen algunos momentos significativos en el desarrollo del proyecto en Ciencias Sociales, en lo que tiene que ver con el aprendizaje de la geografía:

a. La composición del globo terráqueo se analizó teniendo en cuenta el porcentaje de tierra emergida y el porcentaje de porción líquida, en el taller se aplicó el porcentaje para hallar el ángulo (en grados) correspondiente a cada sector, para luego hacer la representación en un diagrama circular.

b. En un segundo momento, el taller se realizó teniendo en cuenta la extensión de cada continente con respecto a la totalidad de la tierra emergida; se representó cada continente en un diagrame circular para mirar su proporción en relación con la totalidad de la tierra emergida Finalmente, se hizo la representación de la totalidad de los continentes en un solo diagrama circular y se hizo el análisis de la gráfica.

c. Se realizó un tercer taller con la extensión de los océanos desarrollando el mismo procedimiento anterior; se hallaron el total de la extensión de la masa oceánica y el porcentaje de cada océano con respecto a la totalidad de la masa oceánica Esta relación también se representó en un diagrama de barras y en un diagrama circular. Se efectuaron la lectura y el análisis de cada gráfica estableciendo las respectivas comparaciones, buscando semejanzas y diferencias entre la extensión de los océanos, y comparando cada uno con la extensión de la masa oceánica.

d. El cuarto taller se desarrolló aplicando el mismo procedimiento a la relación entre las poblaciones de cada continente y la población mundial.

MICROPROYECTOS EN EDUCACIÓN FÍSICA

En la justificación metodológica la propuesta innovadora se identifica con los métodos holísticos, ya que ellos permiten tener una mirada cercana a la realidad de los contextos en los que interactúa el estudiante; igualmente, se considera su ámbito multicultural como elemento que permite entender al estudiante desde diferentes ópticas y construir un proceso adecuado para el desarrollo de la propuesta de intervención pedagógica. En cuanto a la estrategia de investigación, se aplicó el método de investigación colaborativa, presentada como un modo alternativo para investigar los problemas de la educación Su definición hace énfasis en el hecho de que investigadores y educadores trabajan juntos en la planificación, la implementación y el análisis para resolver problemas inmediatos y prácticos, compartiendo responsabilidades en la toma

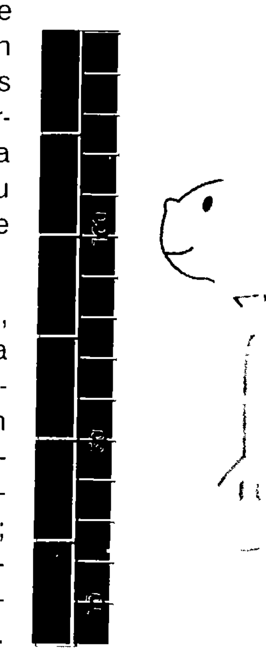
de decisiones y en la realización de las tareas de la investigación (Bartolomé, M 1986 "La Investigación Cooperativa").

Aplicación Conceptual. En esta etapa los alumnos desarrollan 4 talleres específicos, en los cuales los preconceptos adquiridos en forma teórica en clase de matemáticas se aplican a situaciones específicas de la clase de Educación Física. Estos talleres se trabajan en forma individual, y después se socializa, se organiza y se analizan los resultados en grupos de 5 a 10 estudiantes

Organización y Construcción de Gráficas Estadísticas. En esta etapa los alumnos trabajan grupalmente en la organización, la interpretación y la traducción de la información a gráficas básicas, estableciendo inferencias y comparaciones frente a patrones propios de la población y otros referentes.

Instrumentos. Se diseñaron instrumentos a partir de la experiencia en los talleres, la aplicación de métodos de observación y la elaboración de diarios de campo. Este proceso tomó aproximadamente 8 semanas, con una intensidad de 2 horas semanales.

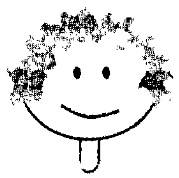
Este tipo de talleres tiene como objetivo que los alumnos apliquen en forma significativa, en el contexto de la clase de Educación Física, los preconceptos de estadística descriptiva a partir del ejercicio investigativo que comprende la observación, la recolección de información, su organización, el análisis y la interpretación de los datos que se acopian.



Para el grado sexto se tuvieron en cuenta, como eje temático, el Esquema Corporal y la identificación de datos generales en las costumbres deportivas y los hábitos alimenticios En primera instancia, los alumnos emplearon cintas métricas y una báscula para colectar la información, en grupos de máximo 8integrantes; la organizaron, la tabularon y la analizaron estableciendo relaciones, inferencias y conclusiones dentro de cada grupo y respecto al curso. Entre las variables que se relacionaron se encuentran el perímetro corporal, la talla, el peso, y algunos datos cualitativos. A partir de estos datos y variables los estudiantes lograron realizar descripciones e inferencias sobre sí mismos y sobre la población estudiada, manejando las tres etapas descritas anteriormente.

Para el grado séptimo se establecieron 2 ejes a desarrollar: 1) Ficha Antropométrica y 2) Cualidades Físicas. A partir de estos 2 ejes, los alumnos construyeron la información en forma didáctica y lúdica por medio de 5 talleres, así:

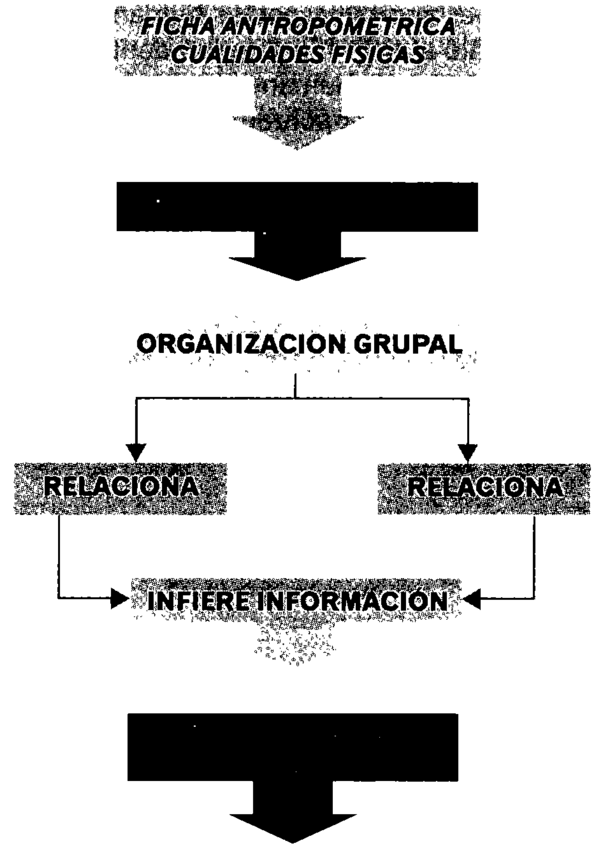
1. Ficha Antropométrica
2. Taller de Población y Muestra
3. Taller de Medidas de Tendencia Central
4. Taller de Frecuencia
5. Taller de Interpretación Gráfica



En términos generales, los estudiantes cumplieron el siguiente proceso:

- A partir de la información, debieron identificar las variables cuyos valores se buscaban, partiendo de los datos obtenidos y de las constantes dadas
- Desarrollo de un taller sobre el tema de población y muestra. A partir de preconceptos, los estudiantes identificaron la población por género, por total del curso y por grado, representando gráficamente las relaciones que se pudieran establecer.
- En el tercer taller los estudiantes identificaron las medidas de tendencia central (moda, media, mediana), teniendo en cuenta los datos de edad, talla, peso y contornos corporales, además de la información sobre algunas costumbres, e identificando en cada caso los conceptos de tendencia central en grupos.
- En cada uno de los grados se establecieron grupos de 5 a 8 alumnos. Cada grupo, basado en la apropiación conceptual y en la aplicación de conceptos de estadística descriptiva, diseñó un micro proyecto libre que contemplara contextos de la Educación Física y el deporte. Aplicando el proceso metodológico previsto, siempre guiado por el equipo de innovación, se elaboró el siguiente flujograma, el cual se socializó como producto final del proceso con el fin de mostrar la aplicación de la estadística descriptiva en contextos cotidianos.

DIAGRAMA PROCESO METODOLÓGICO EN EDUCACIÓN FÍSICA



ALGUNOS RESULTADOS OBTENIDOS EN LA APLICACIÓN DEL PROYECTO

En desarrollo del Proyecto, se logró la apropiación de conceptos estadísticos básicos como resultado del proceso cumplido en las áreas de Matemáticas, Ciencias Sociales y Educación Física. En el diseño y la aplicación de encuestas los estudiantes desarrollaron capacidades para organizar la información y tabularla, así como para analizar e interpretar datos, y para la elaboración de gráficos de barras y circulares. Para ello, procedían a calcular porcentajes practicando las operaciones matemáticas, y desarrollaron habilidades argumentativas. Se avanzó en la aplicación de una ciencia considerada matemática, y al hacerla práctica los estudiantes conjugaron las fases anecdótica, narrativa e interpretativa de las Ciencias Sociales con la objetividad y minuciosidad de las matemáticas.

Los alcances implícitos de la Estadística en la Ciencias Sociales están dados por la interdisciplinariedad, porque se integran varias herramientas metodológicas el análisis y la interpretación de datos, en los que las Ciencias Sociales aportan aspectos humanos, culturales e históricos como complemento al dato frío y contundente, de alguna manera, se complementa la subjetividad humana con la objetividad matemática. La información actual, casi monopolizada por la informática, arroja datos numéricos que no dan cuenta de los procesos humanos que le dieron origen; las Ciencias Sociales, con su visión integral de la actividad humana en sus relaciones sociales, económicas, políticas, históricas , dan otra interpretación a dichos datos.

Por su parte, la Educación Física ofrece las mayores posibilidades de servir como contexto para desarrollar aplicaciones prácticas de conceptos teóricos que se aprenden en el aula. Los entornos, las medios y los tipos de prácticas físicas y deportivas la califican como potencial laboratorio escolar para desarrollar desempeños en el ámbito de competencias pedagógicas.

Ahora bien, el asunto no es si se aplica o no la Estadística en la clase de Educación Física, sino cómo esta clase aporta al desarrollo de las competencias en matemáticas mediante la estadística descriptiva.

La experiencia con este Proyecto nos autoriza a afirmar que, por su naturaleza, la Educación Física aporta un escenario que permite poner en práctica elementos conceptuales adquiridos en la Estadística Igualmente, se manejan magnitudes de tiempo, longitudes, trayectorias, velocidad y fuerza, elementos que pueden llevarse a contextos interpretativos y significativos si se integran los conceptos básicos de la estadística descriptiva. Esta situación hace posible que el estudiante infiera, establezca relaciones, interprete gráficos y proyecte situaciones hacia el futuro con base en esa información: así, ve cómo la información y el trabajo en clase adquieren un significado en sus contextos cotidianos.

En conclusión, podría afirmarse que si todas las áreas curriculares ofrecen un marco adecuado para el desarrollo integral de contenidos transversales, la Educación Física, como evidenciamos en el presente Proyecto, es potencial impulsora de temas transversales, ya que en su temática programática integra significativamente la aplicación de conceptos de estadística descriptiva dentro de sus contextos cotidianos A partir de conceptos teóricos de la clase de Estadística, los estudiantes inician un microproyecto partiendo de los contenidos programáticos de la clase de Educación Física, haciendo más significativos los temas desarrollados en una y otra

Bibliografía

BRIONES, Guillermo. *La investigación social y educativa.* Bogotá· Convenio Andrés Bello, 1988

CERDA, Hugo. *Los elementos de la investigación* Bogotá: El Búho, 2000.

CONTRERAS, Onofre *Didáctica de la educación física.* Inde, 1998

DICKSON, L y otros. *El aprendizaje de las matemáticas* México Labor, 1991.

GARCÍA MORENTE, Ezequiel. *Lecciones preliminares de filosofía.* Bogotá. Ediciones Universales, 1989

HERNÁNDEZ, SAMPIERI, y otros *Metodología de la Investigación.* España: Mc Graw Hill, 1998

MÁRQUEZ, L , ÁVILA, J., y RAMÍREZ, R. *Diagnóstico de la enseñanza de la estadística para el desarrollo de un ambiente de aprendizaje basado en la computadora.* México: UNAM, 1999.

OEI *Fundamentos curriculares en las Ciencias Sociales.* 2001.

MEN. *Lineamientos curriculares en matemáticas* Bogotá. Magisterio, 1988.

MEN. *Resolución 2343 de junio de 1996.* Bogotá: Magisterio, 1996.

MUSKA, Moston *La enseñanza de la educación física.* Argentina· Paidós, 1988.

PACHECO, P y SOTO *Didáctica de la probabilidad y la estadística* Bogotá: XV Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística, 1998.

PIAGET, Jean. *La construcción de lo real en el niño.* Barcelona: Crítica, 1969.

POLYA, G. *Cómo plantear y resolver problemas.* México: Trillas, 1996.

SÁNCHEZ, E. *Fines y objetivos de la enseñanza de la estadística* En: Actas de la Conferencia Internacional "Experiencias y Expectativas de la Enseñanza de la Estadística, desafíos para el siglo XXI" Santa Catalina: Florianópolis HTML, 1989.

SCHOENFELD, A. *Learning to Think Mathematically. Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics.* En: GROUWS, D. Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. New York: MacMillan Publishing Company, 1992. pp. 334 - 370.

TRIGO, Eugenia. *Motricidad creativa, una forma de investigar.* España Universidad La Coruña, 1992.

VASCO, C *Sistemas de datos. El constructivismo genético* Bogotá. Universidad Nacional, 1998

DESARROLLO DEL

PENSAMIENTO MULTIPLICATIVO

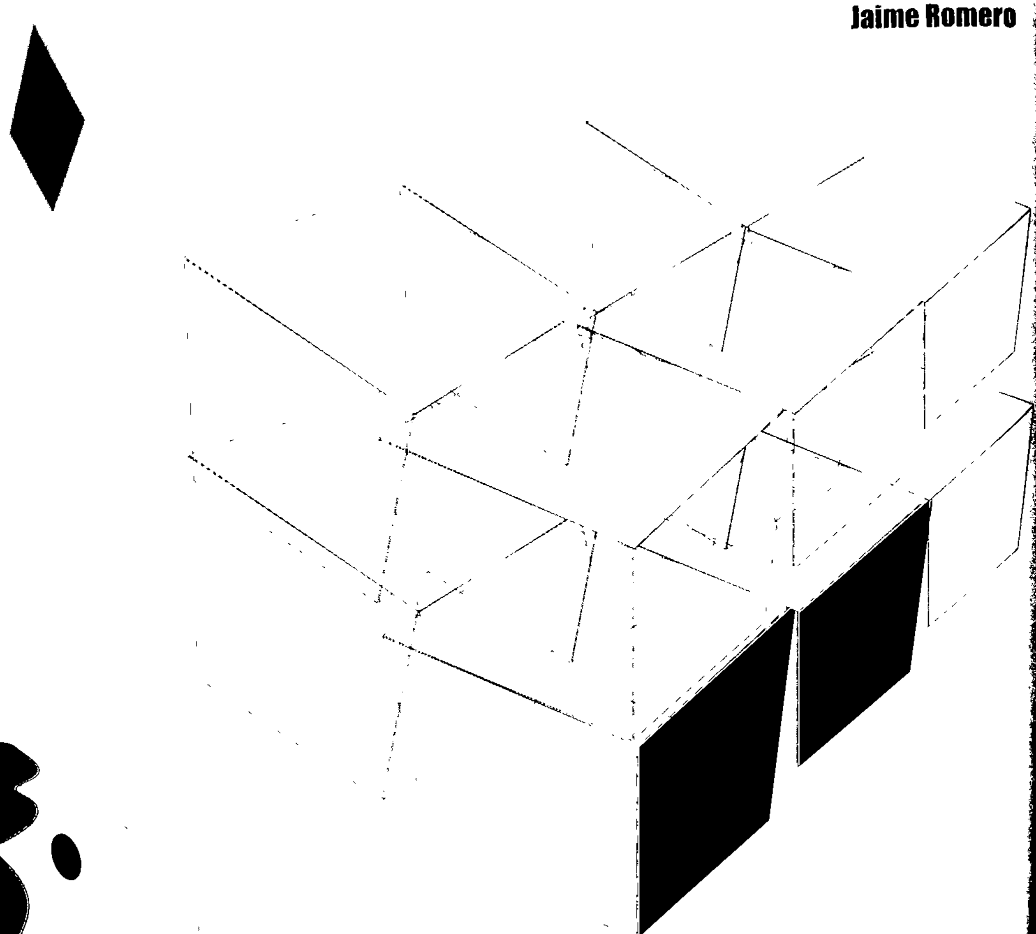
HACIENDO USO DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MEDIADA POR INSTRUMENTOS DIDÁCTICOS

Instituto para la Investigación Educativa y el Desarrollo Pedagógico IDEP

Institución Educativa Distrital Rafael Uribe Uribe

Autores / Investigadores:
Flor Gladys Rodríguez
Gladys Sandoval
Gloria Vergel
César Espitia
Rosa Adelina Rodríguez
Magdalena Tafur
Elsa Miguez
Mercedes Lotero
Juan Sanabria
Consuelo Cediel

Asesor:
Jaime Romero



DESARROLLO DEL PENSAMIENTO

MULTIPLICATIVO

HACIENDO USO DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MEDIADA POR INSTRUMENTOS DIDÁCTICOS

1. Presentación

Un equipo interdisciplinario construyendo una propuesta curricular

Los profesores de la Institución Educativa Distrital Rafael Uribe Uribe, pertenecientes en los años 2002 y 2003 al Departamento de Matemática, Física, Tecnología e Informática –una gama de asignaturas afines que se complementan y apoyan entre sí–, deseosos de emprender actividades que nos ayudaran a enfrentar la difícil tarea de renovar el currículo, cambiar metodológicamente el quehacer del maestro, ganarnos la voluntad de los niños y, lo más importante, estimular el desarrollo de su pensamiento a través de las diferentes disciplinas del saber, encontramos en la convocatoria del IDEP (2002) la oportunidad para desarrollar un proyecto que llenara este conjunto de expectativas.

Resaltamos la estrecha relación que de años atrás hemos tenido con el Proyecto Curricular de Matemáticas de la Universidad Distrital, que nos permitió contar con el apoyo de 8 estudiantes de último semestre, vinculados al colegio como practicantes en enero de 2002. Estos estudiantes se constituyeron en Auxiliares de Investigación del Proyecto, como parte de su trabajo de grado, siendo piezas clave para la observación participante y el registro de los desempeños de los maestros en la ejecución del proyecto.

Con una intención investigativa y en conjunto con los practicantes, los docentes habíamos venido revisando, analizando y evaluando los enfoques en el tratamiento de la estructura multiplicativa y de los instrumentos (tecnológicos) propuestos para el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas, encontrando que se trabajaba con el enfoque tradicional o normativo y el enfoque tecnológico, con una estructura basada en planteamiento de objetivos, explicación del tema, ejercicios de aplicación y verificación de respuestas (en algunos momentos se presentan actividades con calculadora). En el enfoque tecnológico, más evidente en las rutas pedagógicas, el profesor presenta definiciones tratando de conectarlas, establece prioridad entre conceptos, prevé la discusión sobre posibles errores comunes y muestra ejemplos de ejecución. El aprendizaje del estudiante se concibe como un acto cíclico que sigue la secuencia de oír, prestar atención, memorizar el ejemplo, discutir el contraejemplo, ejercitar el mecanismo y aplicar lo practicado. El saber está previamente determinado y, aunque estructurado, es básicamente acumulativo La comprensión del estudiante se refleja en la calidad de la aplicación (buena o mala) de lo practicado y de lo que el maestro espera de él.

Con asesoría del profesor Jaime Romero, elegimos **El Pensamiento Multiplicativo** como eje articulador de nuestra propuesta, dada la potencia de éste para el desarrollo de los diferentes conceptos matemáticos que estábamos acostumbrados a desarrollar Consideramos, de acuerdo con Piaget y Dubinski, que el número natural a través del conteo es constructor de unidades múltiples, que la fracción es un mediador entre el número racional y el número real, y que la multiplicación aparece en todos los sistemas numéricos que trata la escuela, lo cual demuestra la naturaleza multiplicativa de los números naturales, enteros racionales y reales. Por lo tanto, planteamos que la determinación de una base experiencial para que los estudiantes puedan construir posibles mundos multiplicativos (sus estructuras multiplicativas, sus esquemas multiplicativos) de manera versátil y flexible es una necesidad teórica ineludible

La propuesta se articula también con el proyecto que viene impulsando el Ministerio de Educación sobre la implementación de la tecnología en el aula mediada por la calculadora graficadora. Ante la necesidad de un cambio metodológico, formulamos el proyecto **Desarrollo del Pensamiento Multiplicativo haciendo uso de la Resolución de Problemas mediada por Instrumentos Didácticos**

Con este proyecto buscamos: 1) Diseñar, implementar y evaluar actividades de trabajo curricular en busca del desarrollo de competencias matemáticas a partir del pensamiento multiplicativo; 2) observar los cambios metodológicos y del quehacer del maestro en la búsqueda de un aprendizaje autónomo del estudiante, así como el sacrificio del maestro por perder su propia autonomía; 3) describir y analizar los diferentes niveles de razonamiento multiplicativo alcanzados por los estudiantes, según sus grados de escolaridad, teniendo en cuenta la mediación de los instrumentos didácticos ofrecidos por los maestros como recursos metodológicos.

Como resultado del intercambio universidad-colegio, de los procesos de actualización y formación permanente de docentes, y del desarrollo mismo del proyecto, se fueron transformando las prácticas docentes. Entonces, algunas rutas empezaron a transcurrir con un enfoque investigativo en el que el profesor reconoce la estructuración y la existencia del saber de los individuos involucrados en el proceso de enseñanza-aprendizaje, manteniendo la interconectividad de las relaciones entre el profesor (con su saber), el estudiante (con su saber) y el saber (con su estructura), y que asume el aprendizaje como un proceso constructivo que avanza desde lo que se sabe hacia lo que se va a aprender. De esta manera el estudiante comprende, pues arma sus propias estructuras conceptuales y puede entonces establecer y comunicar relaciones entre lo que sabe y lo nuevo por medio de instrumentos, logrando la propia verificación del conocimiento Desde el objeto matemático, logra comprender las propiedades que lo definen; su conocimiento conceptual se caracteriza por ser rico en relaciones entre su saber previo y el que está construyendo.

El trabajo de innovación consistió en la puesta en escena de la hipótesis de trabajo curricular del área concretada en cada uno de los proyectos de trabajo de aula, que propende por la generación de aprendizaje en el ámbito de lo multiplicativo, incorporando la metodología de resolución de problemas y el uso de instrumental didáctico.

El marco metodológico en el cual se desarrolló el proyecto de trabajo en el aula es el siguiente:

FASES	ACTIVIDADES	ORGANIZACIÓN DEL CURSO	ROL DEL PROFESOR	ROL DEL ESTUDIANTE
1	Negociación de la propuesta de trabajo	Colectivo	Ayudar a comprender el sentido de la propuesta Abrir espacios de discusión para conseguir propósitos comunes Planear los cronogramas de trabajo	Opinar Proponer Argumentar Comprometerse en el cumplimiento de los acuerdos
2	Exploración	Grupos o individuos	Apoyar la organización del trabajo en grupos Organizar el uso del material Apoyar la construcción de normas del debate y de la argumentación válidas en clase	Organizar su trabajo individual y en grupo Participar en la construcción de las normas del debate matemático
3	Investigación	Grupos	Apoyar la búsqueda de información y de soluciones Aportar pautas cuando entienda que el problema para el estudiante no esté en su zona de desarrollo actual	Leer y producir los textos necesarios Realizar la búsqueda de soluciones a las situaciones problema Apoyar a los compañeros en la búsqueda de soluciones
4	Socialización	Grupos Colectivos	Dirigir el proceso procurando el cumplimiento de las normas de debate, argumentación y validación Supervisar la organización de la puesta en comun	Presentar a los demás el producto de su trabajo Escuchar el trabajo de los demás Cumplir y procurar que se cumplan las normas del debate
5	Evaluación de la propuesta	Colectivo (Evaluación individual y grupal)	Dirigir la evaluacion - proponiendo indices de logro, - clasificando argumentos, - promoviendo la reflexión sobre aquello que es posible mejorar - registrando las soluciones	Opinar Reflexionar Escuchar y considerar las opiniones de los demás Proponer nuevas soluciones y mejoramiento de las formas
6	Instituciona-lización	Profesor	Identificar los aprendizajes alcanzados y ayudar a sistematizarlos Estimular a los alumnos para que realicen el registro de sus aprendizajes	Hacer reflexion metacognitiva individualmente y con sus compañeros Registrar sus aprendizajes en las carpetas de trabajo

La construcción de cada una de las situaciones problema, que promueven el aprendizaje y que orienten la actuación del profesor, se basó en el diseño de un "contexto social" de la clase· cómo se estructura la participación y la actuación de los alumnos, y cuáles son las reglas del debate matemático aceptadas. Estas reglas y normas se construyen comunitariamente. Un referente para ello lo tendremos en la metodología de resolución de problemas implementada en los cursos seleccionados.

Un segundo elemento son los recursos físicos que se utilizan en clase, es decir el instrumental seleccionado para la enseñanza.

El tercer elemento es el papel proactivo del profesor, quien actúa como regulador de normas a la vez que como quien posibilita la introducción de formas cada vez más sofisticadas de razonamiento matemático

El instrumental y el profesor, interactuando para desarrollar el dominio específico de conocimiento, obligan a concebir y poner en práctica una didáctica específica. En este caso, una que permita el desarrollo del razonamiento matemático y sus interacciones, así como la reconstrucción del pensamiento multiplicativo presente en el aula, tanto de manera comunal como individual.

En este contexto se desarrolló el Proyecto, con un modelo de enseñanza INVESTIGATIVO en el que el *centro* es la construcción del saber por parte del alumno Nos propusimos transformar *el papel de profesor*, en el sentido de planear situaciones didácticas basadas en las dificultades y los obstáculos de aprendizaje, y gestionar la clase especificando momentos diferentes para las fases de investigación, formulación, validación e institucionalización De esta forma, el *alumno* ensayaría, buscaría soluciones y las comunicaría argumentadamente a sus compañeros. Partimos de una concepción del *saber* como un producto humano, cuya falibilidad es inherente a esta condición, con una historia y unos movimientos no lineales ni predeterminados, y que exige como criterio de validez racional su aceptación por parte de una comunidad interesada en la solución de la problemática que se plantea Así, no existen criterios de verdad sino de validez. En este proyecto, el *papel del problema* consiste en ser fuente de conocimiento, lugar de su construcción social y su criterio de validación. Tanto las situaciones problémicas novedosas como los nuevos enfoques para tratar con situaciones viejas son la fuente, el lugar y el criterio de validación y elaboración del *conocimiento* El *error* es indicativo de una forma de conocimiento que ha sido exitosa en otras situaciones, y no manifestación de una ausencia de saber; constituye el punto de partida para proponer nuevas situaciones problémicas que traten de hacer evidentes para el alumno otras maneras de concebir, distintas de la suya El *aprendizaje* se asume como la modificación incremental de un esquema, y desde allí caracterizamos el aprendizaje de las matemáticas. De acuerdo con Piaget, comprendemos que ningún aprendizaje es producto de una abstracción de las cualidades de los objetos físicos, sino mínimo de las cualidades de las acciones del sujeto sobre su mundo de experiencia (esta es la abstracción empírica y produce los objetos físicos); por eso nos basamos en su afirmación de que "Toda acción que es repetible o generalizable a lo largo de nuevos objetos, engendra... un *esquema*." (Piaget, 1980)

Asumimos la teoría de Charnay, quien considera como constitutivo de un problema una terna situación-alumno-entorno, con la certeza de que sólo hay problema si el alumno percibe una dificultad, una determinada situación que "se convierte en problema" para él pero que puede ser inmediatamente resuelta por otro (y entonces no será percibida por este último como tal).

Desde este punto de vista, formulamos dos tipos de objetivos interdependientes entre sí, en la resolución de problemas: un *objetivo metodológico*, aprender a resolver problemas, a investigar, a comunicar, a argumentar, a aceptar las críticas y otros puntos de vista, lo cual se logra en la actividad misma, y un *objetivo cognitivo*, que apunta a la reconceptualización de los conocimientos presentes, o hacia la construcción de un nuevo conocimiento a través de la actividad de resolución de problemas.

Así, en la clase los profesores y los alumnos participamos de maneras diferentes, que se manifiestan en las siguientes formas de accionar de unos y otros:

RUTA PEDAGÓGICA DEL PROFESOR

- Busca enunciados y actividades que generen situaciones problémicas.

  Introduce y privilegia "nuevos" modelos de representación (lugar privilegiado del instrumental didáctico), contribuye con la búsqueda de contradicciones y ambiguedades en los razonamientos y propuestas de solución a la situación problémica.

  Propicia la construcción de lenguaje matemático usual (LMU).

  Reflexiona sobre la diferencia entre el LMU y el vernacular (pretensión de univocidad en la significación, potencia de lenguaje algebraico como esquema)

  Hace aparecer en forma expresa en el aula conocimientos, reflexiones, argumentaciones que provienen de alguna(s) actividad(es) previa(s) desplegada(s) por los estudiantes, mediante un enunciado en el que se propone una situación que cuestiona un conocimiento previo de los estudiantes.

RUTA PEDAGÓGICA DEL ESTUDIANTE

Partimos de la realidad de que ningún estudiante cuenta, en el momento en que aparece el enunciado, con todas las herramientas para resolver lo que se pregunta. Así, logramos asegurar que:

Los estudiantes tengan herramientas suficientes para abordar los enunciados, e interés por hacerlo

Afloren diferentes puntos de vista respecto de un enunciado específico (que, recalcamos, no es lo que constituye el problema sino uno de los motivos que despliega la actividad en el aula).

Cuando llegue el momento de institucionalizar el conocimiento logrado, los estudiantes hayan atravesado por las fases de investigación, formulación, argumentación y validación, con lo cual se multiplican las opciones de comprensión y reestructuración de los conocimientos iniciales.

Participen en la actividad propuesta mediante un enunciado, un reto intelectual.

Participen en la actividad de formulación (expresión ordenada de la manera y los recursos usados en una solución del enunciado, así como las preguntas que procuran obtener mayor comprensión del procedimiento y de los conocimientos usados por el alumno que expone su solución)

Participen en la actividad de argumentación (sostener mediante criterios racionales que sustenten, frente a las preguntas de los compañeros, por qué es buena su solución y qué justifica sus maneras de proceder).

Participen en la actividad de validación (someter a juicio comparativo por qué su solución debe mantenerse a pesar de otras soluciones posibles).

Participar en esta serie de actividades es para el estudiante una manera de mantener control y responsabilidad sobre su propio conocimiento, teniendo siempre como regulador y potenciador de sus construcciones las construcciones de los otros.

Finalmente, el profesor debe responsabilizarse por el proceso de institucionalización de los conocimientos disciplinares logrados, de los diferentes métodos de solución presentados, y de las soluciones mostradas a través de las restantes fases.

LA INVESTIGACIÓN. DIRECTRICES GENERALES

La descripción del proceso de investigación-innovación muestra un diseño de investigación fundado en la acción participativa, con elementos de investigación etnográfica. Tanto los docentes como los practicantes de la Universidad Distrital fuimos objetos y sujetos de la investigación. Revisamos y reflexionamos sobre nuestro rol de docentes, transformamos nuestras prácticas, diseñamos actividades didácticas con el objeto de desarrollar pensamiento multiplicativo, introdujimos o perfeccionamos nuestra metodología de resolución de problemas, y aprovechamos al máximo las posibilidades del instrumental didáctico. Esta tarea innovadora y a la vez investigadora se cumplió de manera participativa, considerando las deficiencias y los progresos de nuestros estudiantes, validando la eficacia de los diseños didácticos y, especialmente, buscando la acción autónoma y regulada hacia el aprendizaje.

De acuerdo con el enfoque etnográfico, la investigación se centró en la reflexión permanente sobre las prácticas pedagógicas, buscando explicaciones y causas frente a los problemas que se presentan en el aula. Los docentes nos convertimos en observadores participantes de las conexiones entre la institución educativa y el contexto general dentro del cual se desarrollan los procesos educativos. Así, como parte de la comunidad educativa aprendimos a mediar tensiones al interior del aula y enmarcados por la organización institucional, basados en nuestras propias experiencias y en los procesos comunicativos en el grupo innovador. Los conocimientos que circulan en el aula fueron objeto de estudio dentro de los grupos de trabajo en cada grado y en las socializaciones generales.

LA GESTIÓN DE AULA

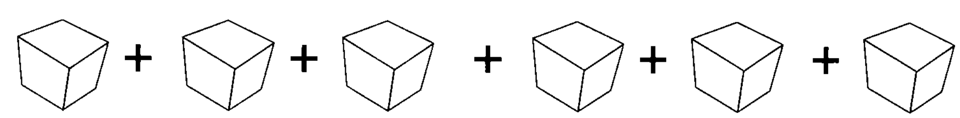
Es considerada como un sistema complejo y dinámico en el que se entrelazan el aprendizaje común, los aprendizajes individuales y las rutas de aprendizaje, tanto de docentes como de estudiantes.

Este principio de interrelación dinámica también estuvo presente en la reestructuración permanente de los diseños, teniendo en cuenta las trayectorias de aprendizaje posible y los resultados de la investigación cognitiva conocidos.

Como equipo de investigación, tanto docentes como observadores centramos nuestros mayores esfuerzos en la transformación del rol del maestro y el rol del estudiante. Así, cuando intentamos describir y analizar los diferentes niveles de razonamiento multiplicativo alcanzados por los estudiantes, según los grados de escolaridad, comprendimos que

debíamos establecerlos a partir del análisis y la interpretación de sus desempeños. Estos desempeños, en términos matemáticos, se logran cuando los estudiantes hacen uso de las unidades múltiples que atraviesan todos los ejes temáticos del campo conceptual multiplicativo con diferente nivel de complejidad (números enteros, multiplicación y división, fracciones, números racionales, funciones lineales, razón y proporción, combinaciones, logaritmos y potenciación), sobre dos acciones que engendran pensamiento multiplicativo: la multiplicación como suma repetida y el splitting (manejo de unidades múltiples).

La metodología implicaba afectar la interrelación con el entorno institucional, desde donde aparecieron muchas tensiones expresas por parte de la dirección y del cuerpo profesoral A propósito, un directivo docente afirmó en repetidas ocasiones: "El proyecto de matemáticas a cada rato interfiere con la planeación institucional". Por otra parte una docente manifestó, sobre las limitaciones de los maestros hoy para dedicarnos a la investigación: "Cada día se nos cortan las alas, cada día se nos exige trabajar, trabajar y trabajar. Pero este trabajar se refiere a *"dictar clase"*, a permanecer en el aula, a evitar la pérdida de tiempo en actividades distintas a la labor pedagógica. Y no quiero decir con esto último que investigar no corresponda a la labor pedagógica; por el contrario, debe ser inherente a ella. Pero parece que nuestras directrices ministeriales no pensaran en ello. Lo único que cuenta es que se cumpla la jornada laboral sin desperdiciar un minuto de clase Pero termino por no entender y mucho menos aceptar las políticas de racionalización que impiden dedicar tiempo a innovar e investigar; por eso sigo empeñada en robarle tiempo a mis actividades personales, a mi familia, a mi descanso. Estos han terminado damnificados en los últimos años en los que, a pesar de todos los obstáculos, me empecino en la investigación en el aula".



Estas y muchas otras limitaciones demuestran que "lo administrativo interfiere demasiado en lo académico", unido a una falta muy sentida de liderazgo académico en el grupo general de docentes; no se es consciente de cuánto es necesario seguir estudiando para seguir enseñando.

2. Una vivencia pedagógica e investigativa: entre las tensiones y las satisfacciones

"El aprendizaje de los niños debe observarse en contextos donde el profesor pueda intervenir con la intención de influirlo, examinando sus límites y examinando el poder y la flexibilidad generativa de los niños " (Steffe)

LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS, UN PROBLEMA DE TRANSFORMACIÓN DE ROLES

La siguiente reflexión, tomada del informe final del proyecto, puede ser la de muchos maestros que nos proponemos innovar e investigar en el aula·

"Cuando empezamos el proyecto del desarrollo del pensamiento multiplicativo, nos encontramos con niños que pensaban que el mejor papel que podía desempeñar el maestro es el de expositor de un modelo a seguir, y el de los estudiantes repetir este modelo. Fue difícil que los niños aceptaran el nuevo rol que debían asumir ("Profesora, ¿por qué usted no hace como todos los profesores. va y nos explica en el tablero, nos da la formulita y listo?"), el de ser los agentes principales, portadores de un conocimiento que poco a poco y bajo su propia validación van reacomodando, modificando esquemas, produciendo sus propias teorías y validándoles paso a paso.

También fue difícil, tanto para la maestra como para los alumnos, romper el lazo de convalidar o no las acciones de los niños Para ellos era muy importante recibir la aprobación de su profesor, pero ahora sólo reciben una contra-pregunta que los deja pisando en terreno movedizo, en el cual no se quieren sentir. No se sienten muy seguros de lo que sus compañeros les dicen, no hay como que el profesor diga la última palabra. Con el transcurso del tiempo los niños perdieron las debilidades, ganaron fortalezas, se sintieron más seguros, producían teorías propias que eran reconocidas por sus compañeros. La participación fue activa, dinámica; y a cada paso aparece un nuevo ¿Qué es?, ¿Qué significa?, *y cada nuevo concepto nos fue llevando al intrincado mundo de las matemáticas: a la interpretación de un racional, a la fracción, o bien al decimal (anexo1). Fue interesante la discusión generada entre los estudiantes; la profesora sólo participó cuando la situación era ya muy clara para hacer la respectiva institucionalización de lo discutido. Claro está que contando de esta forma parece que la transformación del niño receptivo*

al niño participativo hubiera sido muy fácil, de un día para otro. No, todo lo contrario; y si bien es cierto que para la maestra fue doloroso no poder aceptar abiertamente las respuestas de los niños, o evitar darlas, teniendo que morderse la lengua, ese dolor no es nada ante la agonía vivida por los niños, que estaban acostumbrados a escuchar, escribir y repetir un discurso, un esquema o un modelo, acostumbrados a tener sus mentes en blanco en espera de que el maestro "iluminado" les coloque el conocimiento en sus cabezas cual mago con movimientos de su varita "

ZONA DE DESARROLLO PRÓXIMO, MUY LEJANA PARA EL MAESTRO

"En el proceso de aula y en las interacciones permanentes de la tríada docente-estudiante-conocimiento es donde se crean condiciones para el desarrollo de la autonomía (moral e intelectual). Llegar a ser capaz de pensar por sí mismo con sentido crítico, teniendo en cuenta tanto los puntos de vista del ámbito moral como del ámbito intelectual."

"No, la maestra se negaba a seguir presentando su "Show", así que tenían que llenar sus cabezas de ideas sacadas de no se sabe dónde Hubo niños que no encontraban el sombrero mágico para sacar ideas. Otros trataban de evocar cosas ya conocidas, pero como estaban ante una situación nunca vivida, el susto y la angustia no permitían aclarar el nudo de ideas; algunos porque no tenían ni una, otros porque no podían desatar el nudo. Pero esta angustia no la percibía la maestra. Ella sólo les exigía hablar, participar... *"Francy, ¿qué opina?, ¿será cierto lo que dice Camilo?, Angie, ¿qué piensa de lo que acaba de decir Angélica?.* Y Angie tenía el cerebro paralizado a tal punto que estuvo hospitalizada porque se le estaban paralizando las piernas; dice la Sicóloga que por el estrés al que la maestra de matemáticas la tenía sometida. Pero la maestra no vio eso, a pesar del contexto. Como dice Steffe, la maestra vio salir la niña caminando, pero la procesión la llevaba por dentro y fue en otro contexto en el que se manifestó la parálisis que, para fortuna de la profesora, no pasó a mayores. Ella todavía tiene el corazón en la boca, desde que lo supo a través de la comisión de evaluación. ¿Qué tanto sabe ella sobre lo que sufrieron los niños en su nueva experiencia? No tiene ni idea del sudor y las lágrimas que les costó producir las hipótesis enunciadas por ellos. Esto demuestra que en el aula sucedían tantas cosas y la maestra no las percibió. Ahora se pregunta la maestra: ¿Era por eso el temor a decir frente a sus compañeros o, mejor, era el temor a que su maestra no lo escuchara? Por ejemplo, en una clase en la que se estaba haciendo la Criba de Eratóstenes, Francy, quien nunca participa activamente, se acercó a la maestra y le dijo: *"Profesora, yo veo que todos los* *números primos son impares"*. La maestra, que ya había aprendido "algo", le respondió *"¿Está segura de que no hay ningún primo par?*. La niña se sentó, y al rato se acercó nuevamente para decir *"Sí, el 2 también es primo"*. La maestra, entonces, rompió el encanto anunciando a voz en cuello: *"Francy les va a contar una teoría"*. La maestra no le consultó a Francy si la quería compartir. ¿No ve que a ella no le gusta hablar en público?

Volviendo a reflexionar, por eso sería que los grandes pensadores de la maestra la embarraban cuando tenían que decir algo públicamente. De esto sólo se llega a una conclusión: este proceso debe hacerse más lento, más despacio, dando oportunidad para que el pollito solo rompa la cascarita, y no forzándolo a romperla. Definitivamente, todos estos nuevos espacios fueron muy poco para los estudiantes y aún para la maestra, que en estos momentos se prepara a enfocar las estrategias de los niños desde una perspectiva teórica Ahora la que tiene varios nudos en la cabeza es otra." (Confusiones Teóricas, M.Lotero)[1].

DESARROLLO DEL PENSAMIENTO MULTIPLICATIVO COMO DESARROLLO DE LA UNITIZACIÓN Y LA NORMACIÓN. UNA MUESTRA DE NUESTRO TRABAJO

En el siguiente relato, producto de los protocolos de los observadores, se muestra un ejemplo sobre el control de unidades múltiples anidadas, hasta llegar a la unitización y la formación en dominios matemáticos cada vez más complejos.

Encontramos que los estudiantes utilizan diversas estrategias para afrontar soluciones a situaciones dadas y éstas fueron contextualizadas por ellos, así la situación no lo estuviera. Por ejemplo, idear un método para encontrar 0,67 como resultado de la división 27/40, sin utilizar el algoritmo

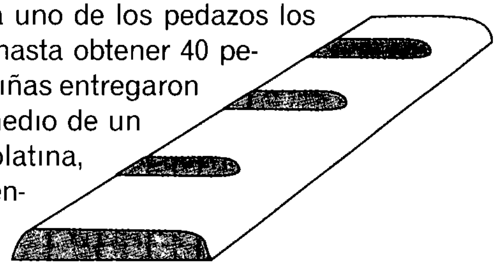
El primer paso fue contextualizar el problema. 27 chocolatinas para repartir entre 40 niños. El segundo paso general fue representar cada chocolatina en forma rectangular, dando una interpretación parte-todo de la fracción. A partir de allí, cada grupo ofreció una diversidad de estrategias cuyo común denominador era la partición en segmentos de igual tamaño y forma, haciendo evidente la normación y el significado de la fracción en términos de lo continuo y lo discreto. Lo discreto, porque eran 27 chocolatinas; lo continuo, cuando consideraban una de las unidades y las partían en porciones iguales: había un momento en la repartición en que sólo quedaba una chocolatina o parte de ella, y allí se convertía en continuo.

[1] *Maestra de matemáticas grado 7º I E D Rabel Uribe Uribe 2002-2003*

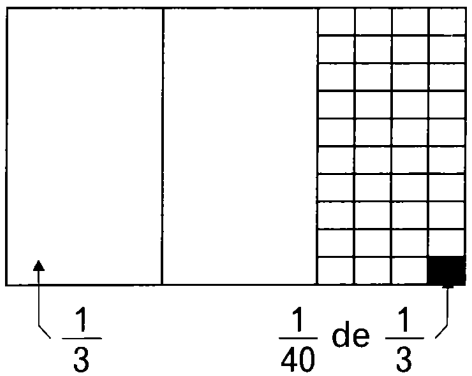
Las primeras estrategias planteadas fueron muy curiosas, pues los niños decían: *"muy simple profe· 27+40= 67, le anteponemos el cero y ya"*; como no podían realizar el algoritmo de la división, nada les impedía realizar el de la suma, *pues el cero no importa, porque a la izquierda no vale*. Colocaban el cero sin importar de qué sombrero mágico salía. Pero la dicha les duró poco, hasta cuando se cambió la situación por una en la cual la coincidencia no se daba Realmente, el grupo de investigación no previó que podía presentarse esta situación. Los niños, al convencerse de que su estrategia no era válida para otras divisiones, tuvieron que afrontarlo como un verdadero problema.

Las estrategias de un segundo momento fueron.

Un grupo dibuja las 27 chocolatinas y divide las primeras 20 por la mitad, resultándoles 40 medios de chocolatina que entregaron a cada persona. Así, sobran 7 chocolatinas, de las cuales dividen 5 por la mitad, resultando 10 medios de medios. Luego, cada uno de los pedazos los partieron nuevamente en mitades hasta obtener 40 pedazos. En una segunda ronda, las niñas entregaron a cada persona un medio de un medio de un medio (1/2 de1/2 de 1/2) de chocolatina, sobrando 2 chocolatinas, y ya fácilmente cada chocolatina la dividieron en 20 pedazos cada una, correspondiendo a cada persona un nuevo pedazo equivalente a 1/20 de la chocolatina. Dado lo anterior les pregunté: ¿Cuánto le corresponde a cada persona al final de la fiesta? 1/2 + 1/2(1/2 de 1/2)+1/20.



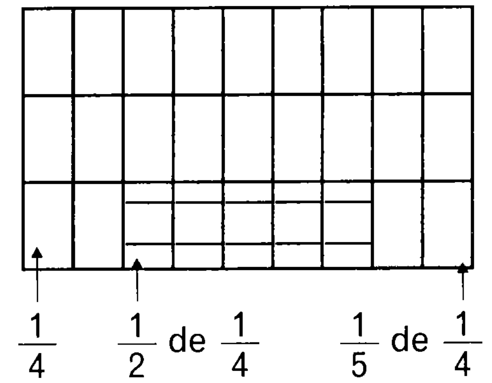
Otro estudiante tomó las 27 chocolatinas y se dio cuenta de que si dividía en tres partes cada chocolatina obtenía 81 tercios, y ya casi tenía solucionado el problema porque repartía 2/3 a cada persona y sólo le quedaba 1/3 para repartir entre los 40 (ver gráfica). Con lo que cada persona se come 2/3 y 1/40 de 1/3.



Los niños presentan una estructura multiplicativa simple cuando responden qué es 1/2 de 1/4, presentándose paralelamente un cambio de unidad porque no es lo mismo la mitad de un cuarto que la mitad de la unidad o que un octavo de la unidad El esfuerzo mental del niño para identificar el significado de cada parte es poderoso, porque los esquemas mentales deben estar muy bien estructurados en su pensamiento. Esto es evidente en la siguiente estrategia

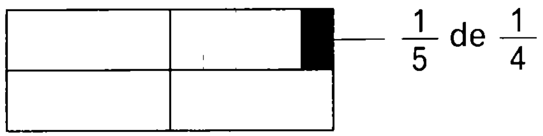
La siguiente estrategia fracciona cada chocolatina en cuatro partes.

Para obtener 108 pedazos de 1/4, se reparte de a un pedazo a cada persona (se realiza la resta de esos cuarenta pedazos repartidos 108 – 40 = 68), y como se observa que todavía se le puede dar otro pedazo a cada persona, se restan los pedazos del resultado anterior (68 – 40 = 28). Con esos 28 cuartos toman 20 y los dividen en la mitad, para que a cada persona la corresponda 1/2 de 1/4.



Hasta allí fluye el pensamiento fácilmente, pero cuando se pregunta ¿qué parte de la chocolatina se está comiendo en este momento? Empieza el conflicto y grafican·

de la chocolatina, dividen cada cuarto en



de la chocolatina

la mitad para llegar a que se comen .

Salen con éxito, contentos, pero más adelante se les ve patinar en otra situación similar. Los ocho cuartos restantes, para hacerlos alcanzar para las cuarenta personas, se dividen en quintos de cuartos de la chocolatina Pero llegó la pregunta. ¿Qué parte de la chocolatina se están comiendo en esta oportunidad? Nuevamente los niños se apoyan en la gráfica

Todas estas estrategias son muy interesantes y ricas como producto del pensamiento del niño al intentar responder ¿cómo saber cuánta chocolatina comió cada una de las cuarenta personas?

La respuesta única fue y no se llegó a lo esperado, 0,67.

Entonces otro estudiante sugirió una nueva estrategia, que muestra características de manera numérica explícitamente anidada, porque considera la mitad de la unidad como el 50% (es decir 0,50); luego explicita la décimas contenidas en la otra media unidad donde se puede iterar cinco veces el décimo para luego iterar nuevos decimos e implícitamente dentro de uno de ellos hay 10 partes más pequeñas, que el estudiante en este momento no alcanza a evidenciar para llegar a la siguiente explicación.

El niño explica el 0,67, diciendo 0,50 corresponde a la mitad de la chocolatina (el cincuenta por ciento), entonces, existe una parte más pequeña que corresponde al 0,10 y otra que corresponde al 0,7. Pero cuando la llama 0,7 está afirmando que 0,7 es menor que 0,10, lo que prende nuevamente los motores y genera otro ciclo de discusión

Otra estrategia en esta parte del proceso es un clásico en el manejo de las unidades múltiples, porque el niño toma las 27 unidades y forma con ellas una nueva unidad (el todo), quedando la unidad original como una pastilla (parte) de la gran chocolatina

Luego dividió cada pastillita en 1000 partes, formándose 27000 partes y los reparte en cuatro partes iguales, así que corresponden 6 pastilla y media de 1000, sobrando una pastilla de mil. Nuevamente divide ésta entre cuatro, correspondiéndole al final 65000 (milésimos) + 250 (milésimos) = 6750 (milésimos). Estando en este punto se dio cuenta que lo dividió entre 4 y no entre 40, así que para solucionar el problema toma los 6750 y le quita el cero para que a cada persona le correspondan 675 milésimas.

Otra estrategia fue convertir las 27 chocolatinas en 27000 pedazos y empezar a repartir... Aquí se observa una secuencia numérica tácitamente anidada, pues está uniendo conteos en unidades compuestas cada vez de distinto tamaño, a la vez que esta confrontando el número para ajustarse a él

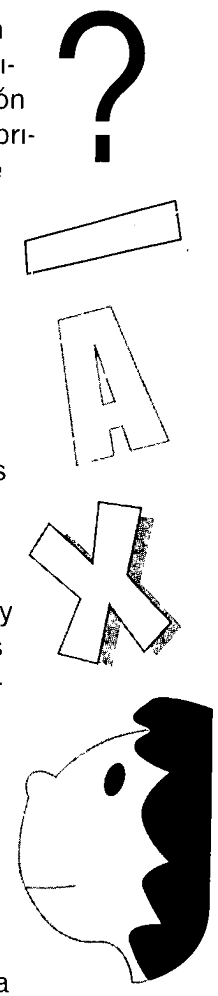
LA MEDIACION INSTRUMENTAL, UN MEDIO PARA LA RELACIÓN DIALÓGICA

Desde la transformación del mono en hombre, éste pudo mantener el cuerpo erecto, la cabeza levantada permitiéndole observar un horizonte más amplio y, además, la posición del dedo pulgar frente al resto de la mano le permitió asir y manipular ramas y piedras que más tarde convertiría en herramientas. El uso de herramientas favoreció el desarrollo del cerebro, triplicando su tamaño e incrementando sus facultades mentales. Posteriormente, gracias a esta inteligencia, el hombre empezó a crear signos, símbolos, representaciones orales y registros escritos.

Reconocemos que "Todo acto cognitivo está mediado por un instrumento que puede ser material o simbólico" (Moreno, 2002). Hemos usado el lenguaje natural como herramienta mediadora que permite dar forma a las representaciones mentales del niño, de manera que facilite su comunicación entre pares y con el maestro. Esta comunicación se hace verbal o escrita, permitiendo al niño expresar su pensamiento y darle forma ayudado con la interacción de sus pares más competentes.

Ante la afirmación de que "el lenguaje es el instrumento psicológico de primer orden que ocupa un lugar de privilegio en este esquema de desarrollo" (Moreno, 2002), deducimos que el hecho de someter una idea a la discusión, argumentarla y tratar de defenderla, permitirá al niño perfeccionarla e interiorizarla organizando sus propias ideas

En este proyecto los niños, ante una situación problema, aportan diferentes puntos de vista, diferentes métodos e incluso diferentes respuestas. Ante la diversidad de opciones, el niño entra en conflicto frente a sus compañeros y frente a sí mismo, pues empieza a dudar de sus propias respuestas; por ende, de la veracidad de su proceso mental Este conflicto cognitivo tiene resultados positivos cuando tiene la capacidad necesaria para tomar conciencia de las contradicciones ante las que se encuentra en las diferentes respuestas Por medio de la argumentación y los acuerdos mutuos los niños llegan a una respuesta única. Los acuerdos permiten una reelaboración de los esquemas mentales, elevando a un nivel superior el pensamiento del niño.



Este crecimiento en el pensamiento del niño se aprecia cuando él puede generalizar y se vuelve "un gran pensador". Descubre, por ejemplo, que los números primos son impares, para más tarde mejorar su elaboración diciendo que "a excepción del dos, todos los número primos son impares". Es muy emocionante ver niños que difícilmente participan, niños de 12 ó 13 años, sacando conclusiones o enunciados que los grandes matemáticos y los sabios demoraron años para conjeturar o formalizar como una ley. Estos enunciados no son otra cosa que "expresiones matemáticas más generales, que todavía dependen del medio de expresión empleado" (Moreno. 2001)

Otro instrumento fuertemente usado por los niños es la representación gráfica y simbólica de las situaciones problema. Este sistema de representación permite al niño tomar un punto de vista concreto, para poderlo analizar desde sus conocimientos previos, solucionarlo y discutirlo para poder construir nuevos conocimientos que puede traducir o transformar en expresiones simbólicas con sentido y significado. Es aquí donde se observa el desarrollo del pensamiento multiplicativo con el manejo de las unidades múltiples, la normación, y la unitización y el dominio del número fraccionario.

Por otra parte, el instrumento de evaluación se constituyó en indicador del control de unidades múltiples En las pocas ocasiones en que se aplicó una prueba, en la mayoría de los grados ésta fue pensada para situar al niño en el mismo contexto de la clase y llevarlo ante situaciones similares a las discutidas durante el proceso.

3. Las reflexiones, hallazgo de las ganancias y los dolores de los maestros y estudiantes desde los diferentes ejes

EN PENSAMIENTO MULTIPLICATIVO

El pensamiento multiplicativo, tema aparentemente de fácil dominio para un docente, resultó un tratado profundo y difícil de digerir. Realmente, lo que hicimos en este proyecto fue documentarnos, estudiar, leer una y otra vez tratando de interiorizar los conceptos de Splitting, unitización, normación, unidad múltiple, etc. El proceso se reveló como de descubrimiento y aceptación de la existencia de lagunas en el dominio de la disciplina en la que cada docente se sentía dominante, capaz e idóneo, y planteó la necesidad de abrir los ojos y darse cuenta de que hay mucho por explorar e investigar para tener completos dominio e internalización del pensamiento multiplicativo. El avance en este aspecto fue el reconocimiento del poder del pensamiento multiplicativo como esquema articulador de los conceptos que aisladamente se dictaban, a tal punto que la proporcionalidad y las funciones de cualquier tipo son vistas desde un perfil diferente, más amplio, permitiendo al maestro reorientar el trabajo con los estudiantes de manera que resulte más significativo y agradable para los niños

Sobre pensamiento multiplicativo, como maestros, reconocemos hoy que objetos matemáticos (Godino, 1991) como función exponencial, proporcionalidad, logaritmación, procesos iterativos y sistema posicional, entre otros, forman parte de una estructura de pensamiento multiplicativo y no pueden considerarse como sucesiones temáticas.

A partir del conocimiento de la zona próxima de desarrollo del estudiante, el docente puede elegir un objeto matemático como eje articulador de una propuesta curricular. En nuestro proyecto, encontramos que uno de los ejes articuladores más ricos en el desarrollo del pensamiento multiplicativo es la proporcionalidad, ya que permite enlazar un buen número de objetos

A partir del análisis sobre las dificultades presentadas por los estudiantes, tal como señala Steffe, pudimos comprobar que mientras no tengan una comprensión clara de aspectos del número, como el conteo en el que esta involucrado como esquema anticipatorio, no podrán operarlo.

EN RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

En este campo salimos mejor librados, porque teníamos suficiente información y comprensión, lo que faltaba era empezar a ejecutar la acción El papel del maestro cambió: dejó de saberlo todo, de validar o descalificar la acción del niño, de dar respuesta a todas las preguntas. Se perdió el poder de la nota de la previa, y el poder del maestro se vino abajo. Se empezó a dar tiempo para que el niño pensara, aprovechando sus conocimientos previos, y provocando desequilibrio en sus esquemas mentales hasta lograr (era lo esperado) un cambio en sus esquemas conceptuales.

La observación de los errores y las dificultades del niño se constituyó en un punto de referencia para programar la actividad de la clase

siguiente, logrando romper con los contenidos curriculares, que es otro de los grandes avances de los maestros.

El poder del maestro salía a flote en los momentos de la institucionalización, de los acuerdos de los niños haciendo la síntesis de la discusión Se hizo seguimiento a cada estudiante en cuanto a su participación en las discusiones y sus aportes En cada clase se tomaban los registros correspondientes, que eran usados cuando la institución requería el informe académico Así, las pruebas y evaluaciones de confrontación del conocimiento desaparecieron en la mayoría de los casos.

Otro aspecto tenido en cuenta para registrar en los informes es el control que debían llevar los estudiantes en los cuadernos o carpetas. Aunque se logró que escribieran, les faltó expresar su propio criterio. Quizás la velocidad de las discusiones no permitió registrar una posición crítica sobre lo discutido en clase. Buscamos que los apuntes se dieran no como tareas impuestas sino como registros de sus aprendizajes. Tal vez los maestros fuimos muy ambiciosos en ese aspecto, pues había que esperar que los niños maduraran un poco más en este proceso.

Para concluir, se produjo un cambio de rol del estudiante, evidenciado en la actitud participativa y activa en tanto que:

Apoya la búsqueda de información mediante la consulta, la sistematización y la discusión de información con sus pares en el trabajo en el aula.

Formula conjeturas y las valida.

Busca nuevas soluciones generando su conocimiento, siendo capaz de sustentarlo, discutirlo y validar la propuesta del otro.

Participa en la construcción de normas de trabajo y reglas de juego (contrato didáctico)

Tanto para el maestro como para el estudiante, **el error** constituyó un punto de partida para la revalidación de sus conjeturas.

Desde el grupo de trabajo se discutió cuales serían las situaciones problema que serían llevadas al aula para que resultaran significativas para el estudiante.

- El docente se convirtió en orientador del proceso, permitiendo al estudiante interactuar y formular sus hipótesis, cuestionando el proceso y aprendiendo a callar para dar paso a la expresión del grupo.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DESDE LA PERSPECTIVA DEL DOCENTE

En este aspecto, los docentes enfrentamos básicamente tres tareas:

1.Buscar enunciados y actividades que generen situaciones problémicas

- Para construir la secuencia de actividades llegamos a un consenso con el equipo de trabajo en el desarrollo de actividades, con el fin de permitir a los estudiantes la construcción de un espacio lúdico.
- Reconocemos un fuerte potencial en actividades de construcción y experimentación, por la disposición de los estudiantes frente a ese tipo de trabajo.
- Concebimos un orden en las temáticas que se supone deben trabajarse en cada grado, buscando su relación con aspectos a trabajar en Tecnología.

2 Introducir y privilegiar "nuevos" modelos de representación (lugar privilegiado del instrumental didáctico), contribuir con la búsqueda de contradicciones y ambiguedades en los razonamientos y las propuestas de solución a la situación problémica.

- La dinámica de discusión planteada permitió al estudiante interactuar y formular sus hipótesis, cuestionando y comparando el proceso llevado entre diferentes estudiantes.
- Se generaron espacios libres en los que el estudiante compartiera las discusiones generadas y realizara procesos a su propio ritmo, aunque los planteamientos de preguntas variaban según el ritmo de trabajo y las orientaciones.

3. Propiciar la construcción de lenguaje matemático usual (LMU)

- Se diseñan actividades que permitan al estudiante ir construyendo soluciones y encontrar formas de representación que modelen la situación, privilegiándose las representaciones canónicas tradicionales
- Para el manejo del error en actividades y soluciones propuestas, se cuestionaba sobre lo que se pedía, lo realizado por el estudiante y por sus compañeros, intentando observar la validez del trabajo realizado con el grupo.
- Se adelantó una reflexión sobre la diferencia entre el LMU y el lenguaje común.

- Se hizo una comparación entre los modelos y su eficacia, preguntándose implícitamente cuál modelo es mejor en determinada situación.
- De manera expresa, se trabajaron en el aula conocimientos, reflexiones, argumentaciones... que provenían de alguna(s) actividad(es) previa(s) desplegada(s) por los estudiantes, sobre un enunciado que propone una situación que cuestiona un conocimiento previo de los estudiantes
- El proceso de institucionalización fue interesante porque devolvió el poder de proponer ejemplos sobre una teoría, permitiendo concretar lo dicho por los estudiantes y ubicarlo como un conocimiento, y buscando la transposición de ese conocimiento a otras situaciones.

LO PROPUESTO Y LO ALCANZADO: RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN LA PERSPECTIVA DEL ESTUDIANTE

Participar en la actividad propuesta mediante un enunciado, un reto intelectual.

- Se intenta en un inicio plantear las reglas de juego con los estudiantes planeando la construcción de un contrato didáctico.
- Cuando el estudiante plantea el contrato didáctico no expone sus intereses en cuanto a las temáticas que se deben abordar; el contrato que los estudiante plantean es normativo, ya que están acostumbrados a seguir una línea de trabajo, pero no a proponerla.

Participar en la actividad de formulación (expresión ordenada de la manera y los recursos usados en una solución del enunciado, así como las preguntas que procuran obtener mayor comprensión del procedimiento y de los conocimientos usados por el alumno que expone su solución).

- El estudiante parte de un enunciado y no presenta propuestas.
- El estudiante sólo participaba en el planteamiento de la solución.
- En las actividades, los estudiantes muestran interés tratando de discutir entre ellos e intentando comprender lo que se dice.

Participar en la actividad de argumentación (sostener mediante criterios racionales que sustenten, frente a las preguntas de los compañeros, por qué es buena su solución, y qué justifica sus maneras de proceder).

- Al iniciar las actividades, el estudiante está motivado (maneja motivaciones y no retos).

- El estudiante participa en la actividad interpretando el problema planteado por el profesor, aporta sus puntos de vista y comparte la discusión con otros estudiantes

- A través de las discusiones generadas, algunos estudiantes presentan sus propuestas para sintetizar lo que se ha trabajado.

- Partiendo de observar que al inicio del proceso a los estudiantes se les dificultó el argumentar, se reconocen en el transcurso de las actividades avances en el intento por dar un por qué a sus respuestas significándolas en un contexto.

- Se generó bastante dificultad porque no se ha aprendido a escuchar, porque todos querían hablar y no se intentaba analizar Ante esto, se necesitó usar continuamente el llamado de atención y la reflexión para la escucha y el respeto hacia la palabra del otro.

Participar en la actividad de validación (someter a juicio comparativo por qué su solución debe mantenerse a pesar de otras soluciones posibles).

- Se observan algunos estudiante hiperactivos, que al inicio no son organizados en cuanto a repartir tareas y asignarse roles.

- Los cuestionamientos no se quedan en la declaración de que no se entiende, y trascienden a preguntas puntuales sobre el trabajo realizado, ya sea planteándolas al profesor o a los compañeros.

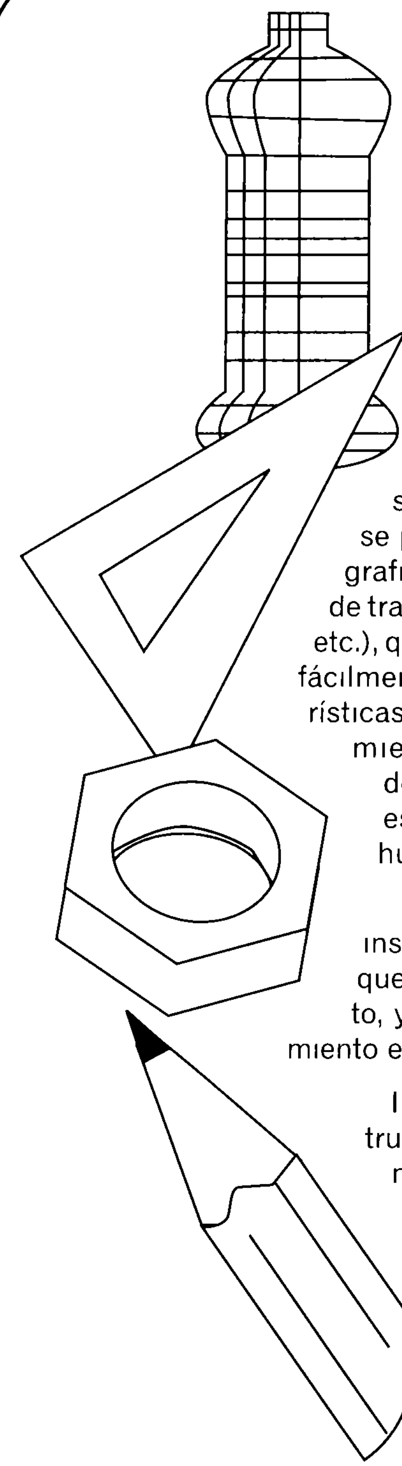
- Entre los estudiantes se cuestionan respecto de sus errores, haciendo que se reformulen el problema o la situación aplicada, logrando mayor apropiación del conocimiento.

- En ocasiones se generaban errores, no porque no sepan sino por la comprensión de uso puesta en juego; esto, debido a que tenían esquemas que servían para solucionar otras situaciones pero que en un contexto particular no tenían completa validez (este proceso mejoró su nivel interpretativo)

- Cuando el docente hace la institucionalización, el estudiante trata de aclarar lo trabajado, identificando la equivalencia entre diferentes estrategias de solución, y aportando en la validación y concreción del docente usando en nuevos contextos.

EN MEDIACION INSTRUMENTAL

Consideramos que la mayor innovación consistió en potenciar el lenguaje como el instrumento por excelencia; el mayor interés de los maestros fue dar la oportunidad al niño para desarrollar las competencias



argumentativas y propositivas, que se perdiera el miedo de hablar y defender puntos de vista propios, porque sólo así el niño podía reconocer sus equivocaciones y aceptarlas para luego modificar sus esquemas de pensamiento. Al principio eran muy pocos los que participaban, fue doloroso para los niños Poco a poco fueron ganando confianza, y finalmente la mayoría de los niños tenía algo que decir o algo en que no estuviese de acuerdo.

La mayor parte de nuestra atención en el trabajo en las sesiones grupales se centró en los instrumentos de trabajo físicos y simbólicos que se aplicaron en el aula de clase para las actividades propuestas (calculadora graficadora T.I. 92, tornillos, aceite, granos, guías de trabajo, regletas, unidades de medida, quintillas, etc.), que permitieron a los estudiantes apropiar más fácilmente el conocimiento. "Muchas de las características que hemos dado por sentadas en el pensamiento dentro de la ciencia... se originaron debido a los recursos que la tecnología de la escritura pone a disposición de la conciencia humana". (Ong, 1999)

En nuestra reflexión de grupo se requieren instrumentos físicos o simbólicos tan potentes que lleven a dialogar para mediar el conocimiento, y que en la discusión se construya el conocimiento entre todos

Inicialmente fue difícil definir cuál era el instrumental más apropiado para mediar el conocimiento que se buscaba construir. Esto nos llevó gran parte del trabajo en equipo. La adquisición y adaptación de los materiales, la formulación de preguntas mediadoras e instructivas, la elección del material simbólico, fueron el reto más importante, especialmente porque sabíamos que si no eran los más adecuados podría conducir hacia un camino diferente, incluidas las evaluaciones desde la diagnóstica hasta la evaluación final. Vimos los instrumentos como un medio de comunicación que nos permitió rediseñar las diferentes actividades, pues en la medida que ellos dejan ver las evidencias de los avances logramos acercarnos a la forma como los estudiantes van comprendiendo y construyendo su conocimiento

4. ¿Cómo perciben los estudiantes el aprendizaje de la matemática?

Los estudiantes describen cómo aprendían matemáticas antes del proyecto así.

"La profesora de matemáticas del grado quinto era muy estricta y por esto nosotros aprendimos rápido, para que la profesora no nos regañara", "Yo aprendía matemáticas con la explicación de la profesora y la información de los libros, con la ayuda de mi familia y de los practicantes", "Yo estudiaba con ejercicios del calendario matemático y con algunos problemas difíciles para desarrollar en la calculadora", "Estudiaba lo que nos dictaban y con las evaluaciones sacaban las notas", "Aprendía con la explicación de la profesora y con ejercicios hechos en casa, cuando nos equivocábamos nos hacia pasar al tablero a explicar y nos hacía caer en cuenta del error cometido."

Se evidencia así que los estudiantes aprendían mediante la explicación reiterada de la profesora o el practicante y la repetición de ejercicios, con la aprobación última del docente, a través de la evaluación escrita. El uso de los instrumentos se centraba igualmente en la realización de ejercicios basados en talleres, el calendario matemático y guías para el trabajo con calculadora.

En la medida que se fue desarrollando el proyecto, cambiaron su visión acerca de la forma como estudian y aprenden, de acuerdo con las siguientes evidencias:

"Yo aprendí con la explicación del profe, además, pasamos al tablero y a realizar los ejercicios, y si hay algún error se corrige entre todos", "Aprendí repasando mis cuadernos, preguntándole a mis compañeras y pasando al tablero", "Aprendí trabajando con la calculadora y todo es más fácil y didáctico", "Aprendí poniendo en práctica los problemas de la clase a la vida cotidiana, ya que las soluciones son simples y fáciles de comprender", "Aprendí estudiando y consultando, e investigando temas impuestos que nos servían para encontrar la solución", "Me colocaba problemas de matemáticas, los analizaba y respondía; después verificaba que

estuvieran correctos y pedía a un mayor que los revisara", "Yo aprendía con la ayuda de los practicantes, la explicación de la profesora y la coherencia de mis propios trabajos; entendía lo que hacia y por medio de esto aprendía matemáticas", "Cada persona colocaba problemas y la profesora no los resolvía, lo único que hacía era preguntar. ¿y por qué?; todos teníamos que participar y esa era la nota del período", "Aprendí que no aprendí casi nada de esa clase, me parecía aburrida y por eso, aunque pusiera atención, no lograba entender lo que decía la profesora; ella sólo quería que uno se la pasara participando y a mí no me gusta participar mucho", "Se estudiaba por medio de debates y discusiones", "Se dejaban trabajos de investigación y se explicaba en clase lo que no entendíamos; luego se dejaba tarea de ejercicios de álgebra o de aritmética el que cumplía, participaba y asistía -no sólo en cuerpo sino en mente- pasaba, pues muy rara vez se hicieron evaluaciones"

De acuerdo con lo anterior, vemos que los estudiantes evidenciaron algunos cambios metodológicos como el trabajo participativo, la consulta y la lectura extraclase, el uso del error como parte de su aprendizaje, la realización de debates y discusiones dentro de la clase promovidos por el uso de instrumentos, el respeto a la palabra del otro tuviera o no razón. Los estudiantes perciben cómo, a pesar del debate de las propuestas, la institucionalización del conocimiento la hacía el docente.

LA MIRADA INSTITUCIONAL. JUICIOS Y PREJUICOS

Desde la mirada de una compañera del área de Sociales, quien a propósito es una investigadora, nuestro trabajo en el proyecto es visto así:

Como parte integrante de la institución nos insertamos en las discusiones triviales, y en las académicas y administrativas, sobre el trabajo que demandan la investigación y la innovación pedagógica. De esta manera percibimos situaciones que se convierten en juicios y prejuicios que construyeron nuestros compañeros docentes y directivos, que traducimos en interrogantes para una posterior discusión a nivel institucional:

¿Hubo suficiente conciencia de la priorización que se debe dar a este tipo de proyectos?

¿Qué tanta integración hubo por parte de los directivos para estar al tanto del proyecto y acompañarnos en él a través de los procesos realizados?

¿En qué medida lo administrativo interfiere con lo académico?

¿Qué es más importante para la institución, una directiva del CADEL o una discusión en torno los proyectos?

¿Cómo se percibe y se maneja la interferencia que este proyecto generó para las labores académicas de la institución?

¿Cómo la institución respalda un proyecto ante la comunidad educativa? ¿La discusión que da el padre de familia en torno a los proyectos debe ser afrontada por la institución o por parte del maestro en forma individual?

¿Qué le queda al alumno al final del proceso?

¿Existe entre nosotros como docentes el liderazgo necesario que permita permear toda la institución con este tipo de trabajos?

¿Por qué algunos docentes no confían en la labor de otros?

¿Es cierto que estos proyectos se ven como una amenaza para la comodidad y la estabilidad laboral en lo personal?

¿Qué representa la voz del colectivo investigador ante la ausencia de liderazgo académico?

¿Qué tanto compromiso muestran los maestros en la organización del currículo?

5. A pesar de las tensiones

Como hemos manifestado en varias oportunidades, este proceso fue muy doloroso. El planteamiento de problemas macro como eje del desarrollo del proyecto en cada grado no tuvo continuidad, debido a que nos centramos en los avances y las dificultades evidentes de nuestros estudiantes a través de sus intervenciones, aportes y escritos. Teníamos la intención, convertida en tensión, de diseñar instrumentos didácticos para el desarrollo del pensamiento multiplicativo. En un terreno desconocido desde lo teórico, nuevo y sin la agudeza mental para explotar al máximo al "splitting" y las unidades múltiplos, vacilamos

muchas veces, nos deteníamos, retrocedíamos hasta la revisión de los contenidos y estándares curriculares. En muchas oportunidades sentimos el dolor de concluir que no se hizo ni lo uno ni lo otro, pero estamos seguros de que estamos listos para recomenzar para unos y empezar para otros.

Sin embargo, quedamos satisfechos porque logramos romper muchas taras metodológicas; nos dolió mucho ver pasar el tiempo y "no avanzar en los contenidos programáticos", fue difícil convencernos de que no teníamos por qué pensar en los números enteros Hoy estamos más tranquilos y esperamos haber contribuido para que nuestros niños ganen autonomía en sus procesos de aprendizaje, facilidad de expresión oral y deseos de participación. Que se den cuenta que la matemática se hace discutiendo y analizando, no llenando un cuaderno con ejercicios de un texto

En últimas, un logro importante en este proceso de interacción social es la gestión de clase por parte de los estudiantes, pues mediante ella comenzaron a ser agentes activos en la construcción de la clase, aunque no lo percibieran así Cada clase se desarrolló de acuerdo con sus avances, que sólo fueron evidentes para el grupo de investigación a través de su participación. Los niños ganaron en autonomía, tomando sus propias decisiones, cosa que no fue fácil porque implicaba romper con la tradición y las creencias que tenían frente a la clase de matemáticas en particular, pues ellos sentían muchas veces que no se estaba haciendo matemáticas. Los estudiantes hoy reconocen que las matemáticas se construyen a través de la discusión, que a través de ellas desarrollan su pensamiento y que les servirán para su vida.

6. Sobre la sostenibilidad del proyecto

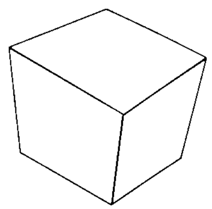
Hoy podemos afirmar que nuestros estudiantes manifiestan los efectos del proyecto en dos sentidos:

Uno *negativo*, frente a la insistencia en retomar temas y conceptos ya trabajados. Los estudiantes no quieren devolverse en los procesos, pero a la hora de resolver un problema en contextos distintos no muestran suficiente destreza. Durante el proyecto hicimos mucho énfasis en el registro de aprendizajes en forma escrita, aspecto que parece haber creado un ambiente adverso a la construcción escrita, el registro, la toma de apuntes y la organización de información, situación que se evidencia en la escasa o nula realización de tareas.

En sentido *positivo* podemos observar que nuestros estudiantes han adquirido una capacidad de análisis tal que pueden predecir respuestas o hacer inferencias argumentando su validez; son capaces de descubrir el error en los enunciados de sus pares, han perdido el temor a participar y proponer soluciones ante un interrogante, utilizan el lenguaje matemático en tanto comprenden que tiene importancia en la representación. La argumentación y la puesta en común hacen parte del trabajo cotidiano de los estudiantes, todo esto como resultado de las preguntas de reflexión que se plantean en diferentes actividades, problemas y situaciones problema que les permiten interrogarse en relación con el conocimiento puesto en juego. El desarrollo de la clase no está basado en la explicación magistral ni en la repetición de ejercicios sino en el abordaje de interrogantes o preguntas que dirigen el aprendizaje a través de la reflexión sobre el instrumento planteado, llámese guía de calculadora, situación problema, ejercicios de construcción o experimentación, sobre el cual deben utilizar el lenguaje o proceso matemático adecuado que lo exprese.

En el grado octavo se evidencia un buen manejo de razones y proporciones al solucionar situaciones problema; los estudiantes pueden predecir un resultado numérico y esperan aplicar la solución propuesta para convalidarlas.

En grado décimo, en las áreas de Física y Tecnología, los estudiantes son capaces de sustentar sus argumentos con ayuda de leyes físicas o tecnológicas, y los presentan en lenguaje matemático como solución a un problema. Se puede afirmar que han incorporado el lenguaje técnico al cotidiano. Aceptan que su rol es el de contestar las preguntas o buscar soluciones, tratando de encontrar proposiciones y respuestas de calidad. La docente se siente mediadora en el proceso de aprendizaje ("Soy capaz de quedarme callada"), es decir, de no dar respuestas sino buscar enunciados que faciliten descubrir soluciones, siempre formulando preguntas que los conduzcan.



Nuestro rol de docentes ha seguido cualificándose en cuanto al diseño de actividades e instrumentos de aprendizaje, y a la metodología de la clase, en la que ya no somos protagonistas y jueces sino incentivadores de la participación, la argumentación y el planteamiento de propuestas de solución. No damos la respuesta sino que conducimos a su hallazgo, el error es un punto de partida para la validación Seguimos trabajando como equipo en el diseño y en la apropiación teórica Comprendemos que para que los estudiantes reflexionen sobre la matemática, no necesariamente se deben trabajar procesos matemáticos sino que pueden plantearse procesos de experimentación expresados con lenguaje matemático y asumidos como punto de partida para la construcción del conocimiento matemático

La calculadora sigue siendo hoy, con mayor fuerza, un instrumento de mediación en la construcción de conocimiento, porque permite el diálogo directo entre el estudiante y el instrumento En la medida en se va incorporando al trabajo matemático y facilita procesos, muestra posibilidades que pueden ser variadas y experimentadas según las inferencias que se hacen y las preguntas que se plantean. La calculadora no sólo es utilizada para determinar resultados sino para encontrar relaciones entre cantidades. Por otra parte, la escritura matemática de una ley o una relación son vistas como instrumentos que ayudan en la construcción de conocimientos. Es decir, las matemáticas se constituyen en instrumento de aprendizaje para la Física y para la Tecnología.

Anexo A

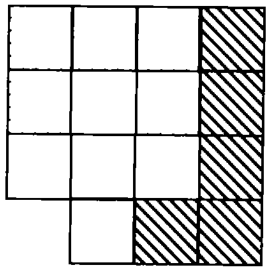
LOGROS EN LOS TRES EJES DEL PROYECTO EN CADA GRADO

Como producto de nuestra reflexión y del análisis de los desempeños alcanzados por nuestros estudiantes en los distintos grados de escolaridad, diseñamos una matriz en la que se pueden ver dichos desempeños con respecto a los tres ejes fundamentales del proyecto (pensamiento multiplicativo, mediación instrumental y resolución de problemas).

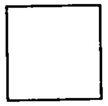
Grado sexto

EN PENSAMIENTO MULTIPLICATIVO. Reconociendo las diferentes actividades se puntualiza en los instrumentos físicos y simbólicos que permitieron una intencionalidad en el desarrollo del trabajo (la flecha que aparece en el cuadro corresponde al proceso que se siguió en el desarrollo de la actividad).

FORMACIÓN DE UNIDADES	CONTROL DE UNIDADES PARA RESOLVER UN PROBLEMA
1 Reconocimiento de la unidad en diferentes contextos - Continuo (Ej) Dado el tangram, reconoce el triángulo pequeño como unidad de área - Discreto (Ej) Reconocimiento de los granos como elementos para construir unidades cuya numerosidad es mayor que uno	1 Contar uno a uno, señalando o manipulando el objeto a (Ej) Señalando el grano y haciendo la correspondencia numérica para asignar el total "secuencia numérica inicial" b Marcando y contando los lados para determinar el perímetro
2 Generalización de la forma de controlar la igualdad de una unidad, utilizando la forma y aplicándola de manera recurrente - (Ej) Utilización de la huella del dedo índice como unidad para cubrir la superficie de una hoja	2 Encapsulación en la que un cierto número de ítem sueltos, se agrupan en un solo paquete y así se operan y controlan hasta agotar la colección inicial a (Ej) b (Ej)
3 Comparación de unidades múltiples a Re-cubrimiento de una hoja con diferentes unidades no estándar (Granos, triángulos, cuadrados, huellas) B Relacionando una unidad construida a partir de cierto patrón, con la unidad base (Ej) Un cuadrado rosado es igual a cinco cuadrados azules, un cuadrado naranja es igual a cinco rosados c Compara diferentes unidades estableciendo relaciones entre ellas (Ej) Regletas de Cussinaire, una regleta amarilla es igual a una roja más una verde	3 Contar una unidad más compleja, tomando un patrón a Cuenta uno a uno para construir un patrón que se corrobora constantemente a lo largo de la situación (Ej) Contar los cuadros que forman las fichas del pentominó para luego sumarlos y obtener "cinco como cardinal de ese conteo" b Cuenta una vez uno a uno para luego construir un patrón con forma rectangular que permita construir una "unidad múltiple experencial"

4 Construcción de nuevas unidades a partir de las anteriores a Aplicando Splitting b Aplicando proporciones (Doble, Triple) c Relaciones entre unidades múltiples (Ej) Sistemas de empaques 6 Bombillos ----- 1 caja pequeña 8 cajas pequeñas ----- 1 caja mediana 1 caja mediana	4 a El estudiante establece implícitamente (un isomorfismo de medida en el mismo espacio) dos espacios de medida, controlando cada uno a partir de una unidad Cantidad de fichas 1 2 3 Unidad de área 5 10 15 Acciones del estudiante como evidencia este esquema (Ej) 15 unidades de área - tres fichas del pentominó b El estudiante establece implícitamente (isomorfismo entre espacios de medida) dos espacios de medida controlándolos a partir de la razón entre las dos unidades de medida Cantidades de fichas 1 2 3 Unidades de área 5 10 15 (Ej) 1 ficha cinco unidades razón 5 7 Fichas 7X5 = 35 unidades de área 5 El estudiante establece dos o más espacios de medida controlándolos a partir de regularidades que se pueden establecer entre ellos Figura inicial Figura ampliada Figura ampliada $A = 1^2 * 5U^2$ $P = 1 * 12U$ $A = 2^2 * 5U^2$ $P = 2 * 12U$ $A = 3^2 * 5U^2$ $P = 3 * 12U$ Los estudiantes determinan cuál es el área y el perímetro de la posición 10
5 Control a la unidad múltiple estableciendo la correspondencia entre la cantidad de fichas y la unidad (Ej) Cinco por ser una ficha del pentominó "secuencia numérica anidada" 	

EN MEDIACIÓN INSTRUMENTAL

FÍSICA	SIMBÓLICA
A partir de granos, tiza o esquemas de conteo, el estudiante realiza agrupaciones de distinto orden, creando nuevas unidades que le permitan construir sistemas de numeración 	Continúa con la búsqueda de representaciones simbólicas a través de texto, gráficos, y el uso de la estructura aditiva y multiplicativa Evidencias de este tipo de instrumental se muestran a continuación 15 elementos es igual a 7 grupos de dos elementos y sobra un elemento 15 = 7g x 2e + 1e =3gx2gx2e+1gx2e+1e =1gx2gx2gx2e+1gx2gx2e+1e Paso 1g2g2g2e 1g2g2e g de 2 e elementos 1 15 2 7 1 3 3 1 1 4 1 1 1 1
Se construyen cuadrados de diferente tamaño, asignándoles un valor posicional con colores distintos según el tamaño Se crea un sistema de intercambio de fichas entre los estudiantes tratando de que reconozcan las características de cada unidad, representando diferentes números a través de un número mínimo de fichas Para la construcción de las fichas los estudiantes usaron tijeras, regla y lápiz	El profesor, a partir de una situación problema sobre el sistema de valor posicional base cinco (que involucra el conteo de un país imaginario) Se pretende que los estudiantes reafirmen conceptos de valor posicional, manejo y cambio de bases El estudiante utiliza como herramientas gráficos, palabras, símbolos y discusiones, intentando dar respuestas a las preguntas planteadas

El estudiante construye cuadrados de un mismo tamaño para recubrir una superficie, teniendo como finalidad (planteada por el docente) la construcción de las fichas del pentominó Para ello se utilizan cartulina, tijeras, lápiz, tablero, escuadras y hojas blancas, se aplican teselaciones a los cuadrados, desarrollando disposiciones espaciales y procesos de medición Se realizan construcciones usando el empalme de figuras, ampliándolas y tomándolos como unidad de área, a partir de cuadrados de diferente tamaño Se utilizan cuadrícula, hojas blancas y papel periódico	Se trabaja con proporciones a través de Las figuras construidas, realizando a partir de la figura original duplicaciones, triplicaciones del perímetro, y comparaciones del área y el perímetro Las magnitudes, descomponiéndolas en factores, y observando diferencias, similitudes y regularidades entre la figura original y sus ampliaciones

EN RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

PROFESOR

I Buscar los enunciados y actividades que generen situaciones problémicas

1 Para construir la secuencia de actividades

Llega a un consenso con el equipo de trabajo en el desarrollo de actividades, con el fin de permitir a los estudiantes la construcción de un espacio lúdico

Reconoce en actividades de construcción un fuerte potencial, por la disposición de los estudiantes a ese tipo de trabajo

A su vez, concibe un orden en las temáticas que se supone deben trabajarse en este grado, buscando su relación con aspectos a trabajar en el área de Tecnología

2 Empieza a producirse una separación de la propuesta conjunta, debido a que los docentes intentan dar a los estudiantes herramientas para abordar los enunciados desviándose en pro de las temáticas (sobre todo en temáticas)

3 En la construcción de problemas Por ejemplo, a partir de la pregunta ¿Cómo abordar sistemas de numeración?, se plantean diferentes alternativas

A traves de una situación experencial (actividad de los granos, actividad del pentominó)

A través de un enunciado escrito (botellines, quintillas)

A su vez, concibe un orden en las temáticas que se supone deben trabajarse en este grado, buscando su relación con aspectos a trabajar en Tecnología

II Introducir y privilegiar "nuevos" modelos de representación (lugar privilegiado del instrumental didáctico), contribuir con la búsqueda de contradicciones y ambiguedades en los razonamientos y propuestas de solución a la situación problemática

La dinámica de discusión planteada permitió al estudiante interactuar y

ESTUDIANTES

I Participar en la actividad propuesta mediante un enunciado , un reto intelectual

Se intenta en un inicio plantear las reglas de juego con los estudiantes planeando la construcción de un contrato didáctico

Cuando el estudiante plantea el contrato didáctico no expone sus intereses en cuanto a la temáticas que se deben abordar, el contrato que los estudiantes plantean es normativo, ya que están acostumbrados a seguir una línea de trabajo, pero no ha proponerla

II Participar en las actividades de formulación (expresión ordenada de la manera y los recursos usados en una solución del enunciado, así como las preguntas que procuran obtener mayor compresión del procedimiento y de los conocimientos usados por el alumno que expone su solución

El estudiante parte de un enunciado y no presenta propuestas

El estudiante solo participaba en el planteamiento de la solucion

En las actividades se muestra interes tratando de discutir entre ellos, e intentando comprender lo que se dice

III Participar en las actividades de argumentación (sostener mediante criterios racionales que sustenten, frente a las preguntas de los compañeros por que es buena su solución, y que justifica su manera de proceder)

Al iniciar las actividades están motivados (manejan motivaciones y no retos)

Participan en la actividad interpretando el problema planteado por el profesor colocando su punto de vista y lo comparte discutiendo con algunos estudiantes

A través de discusiones generadas algunos presentan su propuesta para sintetizar lo que se ha trabajado

Formular sus hipótesis, cuestionando y comparando el proceso llevado entre diferentes estudiantes

Se generaron espacios libres en los que el estudiante compartiera discusiones y realizara procesos a su propio ritmo, aunque los planteamientos de preguntas variaban según el ritmo de trabajo y las orientaciones

III Propiciar la construcción de lenguaje matemático usual (LMU)

Se diseñan actividades que permitan al estudiante construir soluciones y encontrar formas de representación que modelen la situación, privilegiándose las representaciones canónicas tradicionales

Para el manejo del error en actividades y soluciones propuestas, se cuestionan sobre lo que se pedía, lo realizado por el estudiante y por sus compañeros, intentando observar la validez de los hechos con el grupo

IV Reflexión sobre la diferencia entre el LUM y el vernacular (pretensión de univocidad en la significación, potencia de lenguaje algebraico como esquema una sola frase refiere o puede referir infinita cantidad de eventos , formas argumentativas validas en LMU)

Comparando los modelos y la eficiencia, preguntándose implícitamente cual modelo es mejor en determinada situación

V De manera expresa, hacer aparecer en el aula conocimientos, reflexiones, argumentaciones que provienen de alguna(s) actividad(es) previa(s) desplegada(s) por los estudiantes, sobre un enunciado que propone una situación que cuestiona un conocimiento previo de los estudiantes

El proceso de institucionalización fue interesante, porque devolvió el poder de colocar ejemplos sobre una teoría permitiendo concentrar lo dicho por los estudiantes y ubicarlo como un conocimiento buscando finalmente la transposición de ese conocimiento a otras situaciones

Partiendo de observar que los estudiantes al inicio del proceso se les dificulto el argumentar, se reconoce en el transcurso de las actividades avances en el intento de dar un por qué su respuesta significándola en un contexto

Se genero bastante dificultad porque no se ha aprendido a escuchar, porque todos querían hablar, no se intentaba analizar Ante esto se necesito usar continuamente el llamado de atención

IV Participar en las actividades de validación (someter a jucio comparativo porque su solucion debe mantenerse a pesar de otras soluciones posibles)

Se observa algunos estudiantes hiperactivos, que al inicio no son organizados en cuanto a repartir tareas y asignarles roles

Los cuestionamientos no se quedan en el no entiendo, y trascienden a preguntas puntuales sobre el trabajo realizado, ya sea planteándoselos al profesor, o a sus compañeros

Entre ellos se cuestionan respecto de sus errores haciendo que se reformule el problema o la situación aplicada, logrando mayor apropiación del conocimiento

En ocasiones se generaban errores, no porque no sepan sino por la comprensión de uso puesto en juego esto debido a que tenían esquemas que le servían para solucionar otras situaciones, pero que en ese contexto no tenían completa validez (este proceso mejoro su nivel interpretativo)

Cuando el docente hace la institucionalización, el estudiante trata de clarificar lo trabajado, identificando la equivalencia de diferentes estrategias de solución y aportando en la validación y concreción del docente usando en nuevos contextos

Grado séptimo

PENSAMIENTO MULTIPLICATIVO	MEDIACIÓN INSTRUMENTAL		RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS	
	FISICA	SIMBOLICO	PROFESOR	ESTUDIANTE
En el diseño del proyecto se esperaba desarrollar el pensamiento multiplicativo del niño en el dominio de las unidades similares por forma, para resolver problemas de fracciones desde lo discreto y lo continuo Las estrategias usadas por los niños en la solución de situaciones planteadas nos permitieron observar lo siguiente Se evidencia la estructura multiplicativa simple cuando se quería responder a la pregunta "¿qué es un medio de un cuarto?", presentándose un cambio de unidad de la chocolatina dividen cada cuarto en la mitad para llegar a que se comen Otras evidencias muestran características de manera numérica explícitamente anidada, porque se considera la mitad de la unidad como el 50%, (es decir 0,50), luego explicita la décimas contenidas en la otra media unidad donde se puede iterar cinco veces el décimo para luego iterar nuevos decimos e implícitamente dentro de uno de ellos hay 10 partes más pequeñas que el estudiante en este momento no alcanza a evidenciar	Se diseñó una guía de trabajo orientada al desarrollo del pensamiento multiplicativo del niño Se creó un diseño de dos pistas de carros circulares, cuyos radios están en una relación de 1 2 La programación de la animación permitía al niño registrar las variaciones del tiempo y la distancia en cuadros, para relacionar esos resultados Desafortunadamente esta actividad no pudo llevarse a feliz término por problemas logísticos Otro problema es la saturación de las calculadoras o el mal manejo de los estudiantes, ya que el programa desaparecía de las calculadoras y debía instalarse nuevamente	El lenguaje es el instrumento psicológico de primer orden que ocupa un lugar de privilegio en el esquema de desarrollo del pensamiento del niño, como afirma Luis Moreno Al poner una idea en discusión, argumentarla y defenderla, le permite al niño perfeccionarla e interiorizarla organizando sus propias ideas Este lenguaje interiorizado se convierte en una herramienta intelectual, un instrumento de planificación de las actividades mentales Ante una situación problema, los niños aportan puntos de vista, estrategias diversas e, incluso, diferentes respuestas Frente a esta variedad de opciones, el niño entra en conflicto frente a sus compañeros y frente a sí mismo, pues empieza a dudar de sus propias respuestas	Entre las ganancias de la maestra se pueden citar Permitir al niño usar sus preconceptos, y llevarlo a dudar de sus propios conceptos, a no validar sus avances, hasta lograr que sea el grupo el que los valide Usar los errores y dificultades de los niños para diseñar nuevas situaciones, rompiendo seriamente con el currículo de grado séptimo Se perdió el poder de la nota, el chantaje de la previa Se hizo una evaluación permanente de registros diarios, de los aportes y la participación en las discusiones de la clase Aunque se hacían registros negativos de charla en clase, éstos nunca se tuvieron en cuenta cuando se tenía que dar el informe del período académico	Se observó la transformacion del niño pasivo, receptivo, al niño participativo y generador de su propio conocimiento El proceso fue doloroso y lento para los niños, especialmente el tener que organizar ideas y evocar conceptos, que no eran acciones habituales en ellos, ademas, debieron enfrentar grupos difíciles e implacables frente a los errores, lo que provocaba reticencia y temor en muchos de ellos Otro escollo que tuvieron que superar fue la falta de validacion por parte de la maestra para ellos era frustrante el que su maestra no les dijera si iban por buen camino o expresara un juicio sobre lo que habían hecho Se sentían solos y en pisos movedizos cuando en lugar de una aprobación recibían una contra-pregunta que los hacía dudar de lo que estaban afirmando

Grado octavo

EN PENSAMIENTO MULTIPLICATIVO

FORMACIÓN DE UNIDADES	CONTROL DE UNIDADES PARA RESOLVER PROBLEMAS CON FRACCIONES
Creación de unidades iterativas	- Creación de la unidad - La unidad se formó a partir de la comparación de objetos metálicos de diferentes tamaños en forma proporcional, clasificándolos a partir de una unidad (uno) con la cual construyen otra unidad iterativa - La unidad de medida del líquido es creada por los estudiantes (unidad arbitraria) La medición no fue rigurosa, pero luego se hizo con mayor precisión - Registro de datos de medición de volumen de tornillos
Unidades similares por forma para resolver problemas con fracciones Unidades iterables (inclusión de unidades dentro de otra)	- Con base en U (unidad de referencia) fraccionan la unidad en tantas partes como tornillos sumergidos hay - Suma de unidades fraccionadas - Uso de la fracción como operador Evidencia de un esquema anticipatorio sobre el uso de la fracción al iterar
Unidades similares por forma (pueden ser discretas o continuas) con diferente medida continua o discreta) en procesos de medida iterativos pero finitos	-Comparación de magnitudes - Uso de la fracción como razón - Comparación de volúmenes (relación con la masa) - Intercolección - Relación entre las masas de igual volumen y relación entre los volúmenes de igual masa
Unidad similar por forma y medida en procesos iterativos de medida	-Determinar la parte del volumen que flota de un cuerpo a partir de la densidad del líquido y de la densidad del objeto que está sumergido - Se usó la razón entre las densidades (cuerpo y líquido) como operador del volumen, como unidad para calcular el volumen del cuerpo sumergido - Establecer el volumen sumergido y el volumen que flota como fracciones de la unidad

EN MEDIACIÓN INSTRUMENTAL

FÍSICA	SIMBÓLICA
Experimentación de propiedades de los líquidos A partir de una situación experiencial, el alumno debe determinar el volumen de los tornillos con base en la unidad de medida creada Se sumergen los tornillos hasta conseguir que el desplazamiento del agua coincida con una U dentro de la escala Utilización de la escala	- Creación de una escala de acuerdo al tamaño del tornillo - La escala como patrón de medida del volumen de los tornillos - Representación gráfica El desplazamiento de un grupo de tornillos se representa como una U (unidad de medida)
Sumergen los tornillos y observan el desplazamiento del líquido	Representación gráfica de cada U fraccionada según el número de tornillos 1U= 5/5 y un tornillo desplaza 4/5 de U 4U=20/5 y un tornillo desplaza 4/20 de 4U

EN RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

PROFESOR	ALUMNO
Preguntas incitadoras Narren experiencias con líquidos ¿por qué se produce la flotación?, ¿por qué nos hundimos en una piscina? **Enunciados que proponen indagación** Revisemos las propiedades de los fluidos, principio de Arquímedes, flotación de los cuerpos	Preguntas ¿Por qué sentimos que pesamos menos en el agua? ¿ Por qué cuando colocamos un cuerpo de igual volumen pero de diferente forma en unos casos se hunde y en otros no? Enunciado Los cuerpos flotan de acuerdo a su peso
Formulación de preguntas ¿Cómo determinar el volumen de los tornillos (o de objetos de forma irregular)? ¿Cómo se clasifica el tamaño del tornillo? Formulación de enunciados Conozcamos la historia de La Corona de Arquímedes	¿Existen formulas?, ¿cómo medimos el agua? Enunciado Podemos medir el largo, y el resto ¿cómo? Propuesta de medición de longitud y diámetro por separado, para sumar partes Con un solo tornillo no se nota suficiente desplazamiento para marcar Las vasijas son muy anchas y hay demasiada agua Toca medir de a dos, tres, cuatro tornillos a la vez
¿Qué parte del líquido se desplaza con respecto a 1U? ¿Qué parte del líquido desplaza un tornillo con respecto a las 4U?	Propuesta dividir los cinco tornillos en las cuatro unidades Dividir las cuatro unidades entre los cinco tornillos, subdividir cada fracción de la unidad entre el número de tornillos Gráficamente, superponer líneas de unidades con respecto al líquido que desplaza cada tornillo
¿Por qué si los cuerpos son igual volumen tienen diferente peso? ¿Cómo establecemos la densidad de cada uno de los materiales? ¿Se pueden comparar la densidad de los materiales entre si?	El material de unos objetos es más compacto que el de otros, porque sus moléculas están más juntas, unos son más densos que otros Comparación de objetos más pesados y livianos con igual volumen Propuesta Dividir la masa entre el volumen (recurren a la operación), dividir volumen entre masa
Construyan un cuerpo de determinado volumen que flote hasta la mitad ¿Qué características debe tener el material para lograr esta condición?	Argumentación a partir de criterios reales hay cuerpos que flotan más que otros, a pesar de tener igual volumen, porque son más densos El material debe ser menos denso que el líquido, Se puede hacer que el objeto tenga igual volumen pero diferente forma, debe haber más cantidad de agua para que el objeto logre este estado, aplanar los objetos Si hay más área sobre la superficie del líquido entonces existe mayor empuje Una manzana fresca es más densa que una manzana añeja Esta pierde volumen, entonces pierde peso ¿Queda con la misma densidad?

Grado noveno

PENSAMIENTO MULTIPLICATIVO		MEDIACIÓN INSTRUMENTAL		RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS	
FORMACIÓN DE UNIDADES[1]	CONTROL DE UNIDADES PARA RESOLVER PROBLEMAS CON FRACCIONES	FÍSICA	SIMBOLICO	PROFESOR	ESTUDIANTE
Creación de una unidad arbitraria Y construcción de instrumento de medida [1] *Formacion de unidades a partir de relaciones proporcionales entre conjuntos*	Señalar las elongaciones de un resorte al que se le suspende una masa en el aire y luego se introduce en el agua Definición de la unidad de medida no estándar	Laboratorio de Física (caja mecánica) Unidad de medida creada por los estudiantes Tapa de esferográfico Arete Cinta de enmascarar Cinta de papel Grosor del lápiz	Raya de diferente color para señalar la elongación del resorte, dependiendo de si la masa estaba en el aire o en el agua Cinta de papel cuyo ancho correspondía a la distancia entre las dos rayas de diferente color (una raya señalaba la elongación en el aire y la otra en el agua)	Formula el siguiente problema experimento ¿Qué relación existe entre la masa suspendida de un resorte y su elongación? ¿Se percibe algún cambio si la masa es sumergida en agua? Preguntas formuladas para direccionar la solución del problema ¿Cuál es la diferencia entre medida y medición? ¿Cómo hacer los registros de la elongación para cada una de las masas?	Expresaron la predicción del experimento Sugirieron recursos para el registro de las elongaciones Al notar que una hoja suspendida en el aire, sobre la que se harían las marcaciones, no era una buena opción, propusieron un perfeccionamiento Cinta de enmascarar sobre una tabla de madera **Preguntas que resuelve el estudiante·** - ¿Qué tareas están propuestas en el problema a trabajar? **Preguntas formuladas por los estudiantes.** - ¿Con qué mido? - ¿Cómo mido? - ¿Cualquier cosa sirve para medir? Se escucharon frases como la siguiente "La unidad de medida que escogimos es la longitud entre 6 de agua y 5 de aire"

	Construcción del instrumento de medida	Instrumento de medida (cinta graduada con la unidad arbitraria)	Concepto de cinta métrica tomado como referencia Unidad de medida como instrumento cognitivo que permite medir	**Preguntas formuladas para direccionar la solución del problema.** - ¿Ustedes tienen tan buena precisión al colocar la unidad exactamente a continuación de la otra? Sugirió la elaboración del instrumento de medida	Los estudiantes querían hacer las mediciones colocando la unidad de medida por repetición **Preguntas formuladas por los estudiantes:** - ¿Es decir que vamos a hacer como un metro? - No me da exacto ¿qué hago?
2 Splitting	Construcción de unidades continuas a partir de las divisiones	Instrumento de medida (cinta graduada con la unidad arbitraria)	Aparece la fracción como mediador para enumerar correctamente la partición de la unidad de medida elegida Asignación de valor numérico a cada partición	**Direccionamiento de la solución del problema:** Note que las marcaciones hechas sobre la cinta de enmascarar no coinciden con las unidades del instrumento de medida	**Preguntas formuladas por los estudiantes** - No me da exacto ¿Qué hago? Para dar respuesta a esta pregunta algunos optaron por hacer splitting en la unidad discreta, y otros, le hacen particiones a la misma[2] [2] *Algunos grupos realizaron particiones no congruentes y ademas no fueron rigurosos (exactos) a la hora de asignar un valor numerico a dichas particiones*

3 Unidades similares por forma (con diferente medida) en procesos de medida iterativos	Utilización del instrumento de medida para medir los registros de la cinta utilizada en el laboratorio, para señalar las elongaciones de un resorte al cual se le suspendía una masa en el aire y luego en el agua	Instrumento de medida creado por los estudiantes	Formas de representación de la forma a/b, ejemplo 1/2,1/4,1/5,1/8	**Preguntas formuladas para direccionar la solución del problema.** - Al efectuar mediciones con su instrumento de medida, ¿usted puede hacer mediciones exactas?	De los estudiantes se escucharon frases como "con la unidad de medida no nos da una medida exacta, entonces la dividimos en 4 partes iguales, y ahora hay una probabilidad de un 100%
Unidades similares por forma (con diferente medida) en procesos de medida iterativos	Representación tabular como sistematización de las mediciones realizadas con el instrumento de medida	Tabla de registro de datos Instrumentos de medida Papel blanco Papel milimetrado Regla Calculadora	Representación tabular como instrumento que permite hallar la razón de cambio Asignación de valor numérico a la medición Isomorfismos de medida en el mismo espacio y entre espacios de medida Datos de las tablas y relaciones entre ellos	**Direccionamiento** - Organice sus datos masa suspendida y elongación en dos tablas (una para elongación en el aire y otra para el agua) Esta actividad fue dejada como tarea Dado que los estudiantes no cumplieron con la realización de la tarea, el profesor propone la forma de hacer la tabla	**Preguntas formuladas por los estudiantes** - No entendemos cómo hacer la representación tabular El estudiante se limita a seguir instrucciones El estudiante explica que las elongaciones son menores cuando la masa está en el agua debido al empuje

			Relaciones entre Δ m y Δ x	**Preguntas formuladas para direccionar la solución del problema.** - ¿Por qué las diferencias entre los resultados de las medidas para las elongaciones, registrados en la tabla 1 y en la 2? - ¿Existe alguna regularidad entre la masa y el desplazamiento en el aire?	Los estudiantes siguieron las indicaciones y encontraron que el incremento en la variación de los desplazamientos entre dos datos consecutivos eran valores muy parecidos Los estudiantes en la clase de tecnología habían hecho búsquedas en Internet sobre la ley de Hooke. Entonces, algunos estudiantes pudieron transponer la información adquirida en la determinación de la constante de proporcionalidad
			Traducción entre formas de representación (de un texto plano a una tabla)	**Direccionamiento** - Analice los datos de la tabla en sentido horizontal y en sentido vertical - Usted puede sumarlos, restarlos o hacer alguna otra operación **Preguntas formuladas para direccionar la solución del problema** - ¿Qué regularidad encontró? - ¿Existe algún valor constante en el incremento de los datos? - ¿Cuál es la constante de proporcionalidad? **Pregunta de indagación** - ¿Al graficar estos datos en el plano cartesiano, qué tipo de gráfica obtendrían?	

Bibliografía

AZCÁRATE, P *El conocimiento profesional de los profesores sobre las nociones de aleatoriedad y probabilidad. Su estudio en el caso de la Educación Primaria.* Universidad de Cádiz: Tesis doctoral inédita

BONILLA, M , SÁNCHEZ, N. y VIDAL, M *Cómo enseñamos aritmética* Bogotá: IDEP - Universidad Distrital Francisco José de Caldas, 1999.

CHARNAY, R. *Aprender por medio de la resolución de problemas.* Comahue· Universidad Nacional, 1988

CHARNAY, R. *Aprender (por medio de) la resolución de problemas.* En: PARRA, C , y SAIZ, I. (Comp) Didáctica de las matemáticas: Aportes y Reflexiones. Buenos Aires. Paidos, 1993. pp. 51 - 63.

CONFREY, J. *Splitting, similarity, and rate or change. A new Approach to multiplication and exponential functions.* En. HAREL, G., y CONFREY, J. (Ed) The development of multiplicative reasoning in the Learning of Mathematics Research in Mathematics Education Series New York, Albany: State University or New York Press, 1994 pp. 291 - 330.

DUBINSKY, *Reflective abstraction in advanced mathematical thinking* En: TALL, D. (Ed.) Advanced mathematical thinking. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991 pp 127 - 139.

DUVAL, R. *Semiosis y pensamiento humano registros semióticos y aprendizajes intelectuales* Vega, M (trad.) Cali: Universidad del Valle, 1999, reedición.

ELLIOTT, J. *La investigación acción en educación.* Madrid Morata, 1990 Citado En: AZCÁRATE, P. *El conocimiento profesional de los profesores sobre las nociones de aleatoriedad y probabilidad· Su estudio en el caso de la Educación Primaria* Universidad de Cádiz· Tesis doctoral inédita.

FISCHBEIN, E., DERI, M., NELLO, M., y MARINO, M. Citado En: HAREL, G., y CONFREY, J. (Ed.) The development of multiplicative reasoning in the Learning of Mathematics. Research in Mathematics Education Series. New York, Albany: State University or New York Press, 1994.

FREUDENTHAL, H *Fenomenología de las Estructuras Aritméticas Elementales.* México: Iberoamericana, 1994.

GRUPO PRETEXTO *La transición aritmética - álgebra.* Bogotá: Universidad Distrital - Gaia, 1997.

GRUPO PRETEXTO. *La Variable en Matemáticas como Problema Puntual: Búsqueda de Causas en octavo grado* Informe Final de Investigación. Bogotá: Universidad Distrital - COLCIENCIAS, 1996.

HAREL, BEHR, LESH, POST,. *Intuitive models* En: HAREL, G., y CONFREY, J. (Ed.) The development of multiplicative reasoning in the Learning of Mathematics. Research in Mathematics Education Series. New York, Albany: State University or New York Press, 1994. pp. 363 - 384.

LAMON, S. *Ratio and Proportion: Cognitive Foundations in Unitizing and Norming* En: HAREL, G., y CONFREY, J. (Ed.) The development of multiplicative reasoning in the Learning of Mathematics. Research in Mathematics Education Series. New York, Albany· State University or New York Press, 1994. pp 89 - 120

LEÓN, O. y CALDERÓN, D. *Requerimientos didácticos y competencias argumentativas en matemáticas.* Contrato de Investigación con COLCIENCIAS - IDEP. Bogotá: Jorge Antonio Vega, Impresos y Publicidad.

LLINARES, S. y SÁNCHEZ, M. Fracciones. *La relación parte todo.* Madrid: Síntesis. Pp 17 - 168.

MARTIN, S. *Future primary teacher's knowledge about division.* En: Journal Research in Mathematics Education, vol. 24 Nº3. Pennsylvania: University Press, 1993 pp. 233 - 254.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. *Matemáticas. Lineamientos curriculares* Bogotá· Creamos Alternativas, 1998.

MOCKUS, A. *Representar y Disponer* Bogotá: Universidad Nacional de Colombia, 1998.

MORENO, L. y SANTOS, L. *Proceso de transformación del uso de tecnología de herramienta a instrumento para solucionar problemas de matemáticas por los estudiantes* En. Memorias Seminario Nacional de Formación de Docentes: Uso de nuevas tecnologías en el aula de matemáticas Proyecto de incorporación de Nuevas Tecnologías al currículo de matemáticas de la educación media de Colombia. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional, 2000 pp. 263 - 268.

PIAGET, J *Genetic epistemology.* Duckworth, E. (trad.) New York. Columbia university Press, 1970. Citado En: DUBINSKY, reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En: TALL, D. (Ed.) Advanced mathematical thinking. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991.

PIAGET, J. *The principles of genetic epistemology.* Mays, W. (trad.) London Routledge & Kegan Paul. 1970, reedición. Citado En: DUBINSKY, *Reflective abstraction in advanced mathematical thinking.* En: TALL, D. (Ed.) Advanced mathematical thinking. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991.

PIAGET, J *The equilibration of cognitive structures.* Brown, T, y Thampy, K. J. (eds.) Cambridge: Harvard University Press. 1985, reeedición. Citado En: DUBINSKY, *Reflective abstraction in advanced mathematical thinking.* En: TALL, D. (Ed.) Advanced mathematical thinking Dordrecht. Kluwer Academic Publishers, 1991.

PIAGET, J. y SZEMINSKA, A. *Génesis del número en el Niño* Vasallo, S (trad.) Buenos Aires· Guadalupe, 1980, reedición

PORLÁN, R. *Constructivismo y Escuela* Sevilla· Diada, 1995

STEFFE, L. *Children's multiplying schemes* En: HAREL, G , y CONFREY, J. (Ed.) The development of multiplicative reasoning in the Learning of Mathematics. Research in Mathematics Education Series. New York, Albany. State University or New York Press, 1994. pp 3 - 39.

VERGNAUD, G. *La theorie des champs conceptuales* En: Recherches en didactique des mathemátics, Vol. 10, t 2, Nº 3. París: 1990. pp. 133 - 170.

VIGOTSKI, L. *Desarrollo de los procesos psicológicos superiores* Madrid: Crítica, 1989.

Bibliografía secundaria

AZCÁRATE y DEULOFEU *Funciones y Gráficas* Madrid. Síntesis, 1990.

CASTRO, A *Metodología novedosa para la Enseñanza de la Geometría con la T. I. 92 Plus* San José: Universidad de Costa Rica, 1998.

D'AMORE, B. *Semiótica e noetica nell'apprendimento del concetti matematici.* En: D'AMORE, B. (Ed) Matemática e didattica: tra sperimentaziione e ricerca. Bologna: Pitagora, 200. pp. 87 - 48

ESPECIALIZACIÓN EN LENGUAJE Y PEDAGOGÍA DE PROYECTOS *Antología de proyectos pedagógicos* En· Cuadernos de Trabajo Nº2, Centro de Investigaciones y Desarrollo Científico Universidad Distrital. Bogotá. Fondo de Publicaciones Universidad Distrital, 2001

GODINO, J. *Uso del material tangible y gráfico textual en el estudio de las matemáticas: Superando algunas posiciones ingenuas.* En: CAMACHO, A y otros. (Ed.) Actas de ProfMat 98. Guimaraes: Associaçao de professores de Matemática, 1998 pp. 117 - 124.

HABERMAS, J. *Teoría de la Acción Comunicativa, Vol. 1* Madrid: Taurus Humanidades, 1982.

JANVIER, C. *The notion of function as graphic Learning of mathematics representation and understanding.* New Jersey: LEA, 1987. pp 67 - 71.

LEÓN, J. y VERGEL, R. *Enseñanza del concepto de Función Lineal en octavo grado de Educación Básica Secundaria.* Bogotá: Universidad Distrital, Monografía, 1997.

LLINARES, S., SÁNCHEZ, V. y GARCÍA, M. *Conocimiento de contenido pedagógico del profesor. Tareas y modos de representación para las fracciones* En. Revista de Educación, Nº 304. Madrid: Centro de publicaciones del Ministerio de Educación y Ciencia, 1994.

LÓPEZ, A *Propuesta metodológica para la Enseñanza de la Geometría Plana a través de la T I 92 Plus.* Reporte de Investigación México: Universidad Nacional. 1998.

LURDUY, O. Y ROMERO, J. *Estructura multiplicativa y formación de profesores para la educación básica.* En: La enseñanza de la matemática escolar y la formación del profesor. Serie Cuadernos de Matemática del Grupo de Matemáticas Escolares de la Universidad Distrital, Vol. 1 Bogotá: Gaia, 1999. pp 87 - 125.

MOCKUS, A. y otros *Las Fronteras de la Escuela* Bogotá. Magisterio, 1994.

MORA, O., ROJAS, P y BARÓN, C *Los niños y las Fracciones.* En: La enseñanza de la matemática escolar y la formación del profesor Serie Cuadernos de Matemática del Grupo de Matemáticas Escolares de la Universidad Distrital, Vol. 1. Bogotá· Gaia, 1999. pp.125 - 146.

MORENO, L. *Instrumentos matemáticos computacionales* En: Memorias del Seminario Nacional de Formación de Docentes. Uso de nuevas tecnologías matemáticas. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional, 2002. pp. 83.

BERNARDS, P. *Tecnología educativa.* España: Mc. Graw Hill, 1999.

ROJAS, N. *Integración de las matemáticas a la geometría en el Curso Cuarto de Educación Básica Primaria.* Bogotá· Trabajo de Tesis, inédito, 1991.