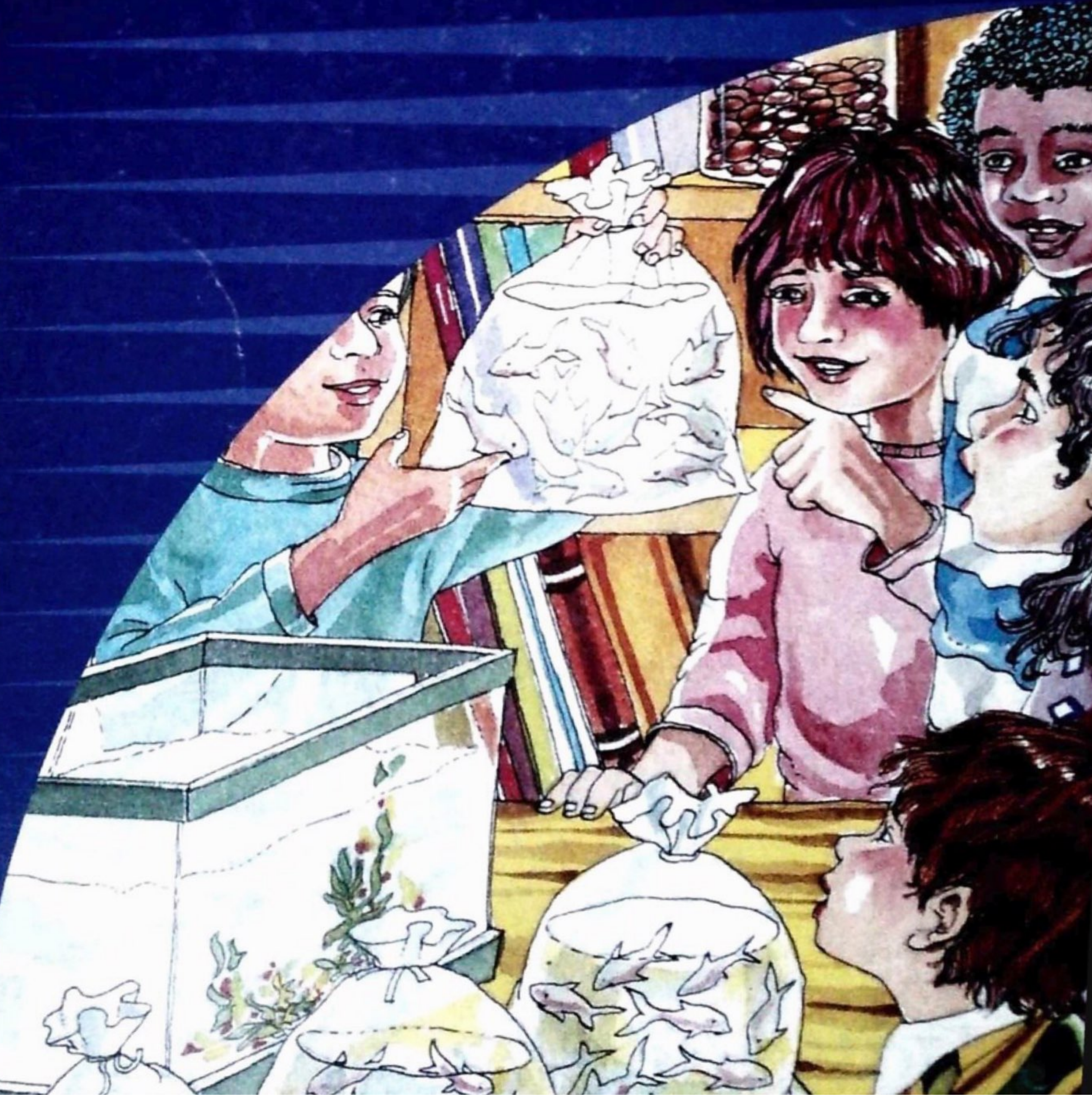
Por la Bogotá que Queremos

SERIE GUÍAS

SISTEMAS DE NUMERACIÓN CON VALOR POSICIONAL



ALCALDIA MAYOR
SANTA FE DE BOGOTA D.C.
Secretaría
EDUCACION

Por la Bogotá que Queremos

Sistemas de numeración con valor posicional

Proyecto Evaluación Competencias Básicas

Material de apoyo al trabajo de los docentes

ÁREA DE MATEMÁTICAS

ALCALDIA MAYOR
SANTA FE DE BOGOTA D.C.
Secretaría
EDUCACION

Noviembre de 1999

ENRIQUE PEÑALOSA LONDOÑO
Alcalde Mayor de Santa Fe de Bogotá

CECILIA MARÍA VÉLEZ WHITE
Secretaria de Educación Distrital

NOHEMY ARIAS OTERO
Subsecretaria Administrativa

JESÚS MEJÍA PERALTA
Subsecretario Académico

SYLVIA ESCOVAR GÓMEZ
Subsecretaria de Planeación y Finanzas

JUANA INÉS DÍAZ TAFUR
Directora de Fomento a la Calidad de la Educación

Textos de Lenguaje: Rosa Julia Guzmán Rodríguez
Textos de Matemáticas: Marina Ortiz Legarda
Integrante de la Asociación Anillo de Matemáticas
Edición: Marta Osorno Reyes
Coordinación Editorial:
Corporación para el Desarrollo de la Educación Básica
CORPOEDUCACIÓN
Diseño y Armada electrónica: Patricia Montaña Domínguez
Ilustración cubierta: Elías Taffur Miranda
Ilustración: Patricia Montaña Domínguez

Primera edición 10.000 ejemplares
Santa Fe de Bogotá, noviembre de 1999

Tabla de Contenido

Presentación 5

Reflexión 7

Aporte conceptual 11

Propuesta didáctica 15

Pensando con otros 29

Para saber más 31

Presentación

La Secretaría de Educación Distrital, en su plan sectorial para el período 1998 - 2001, se propone mejorar los resultados de la acción educativa, definidos en términos de las competencias y valores que se espera desarrollen todos los estudiantes durante su paso por las instituciones educativas.

Como parte de este propósito, realizó una evaluación censal de competencias básicas en Lenguaje y Matemáticas, aplicada a los estudiantes de tercero y quinto grados de Educación Básica del Distrito Capital, en el segundo semestre de 1998. La Universidad Nacional de Colombia tuvo a cargo la orientación académica de este proceso.

Los resultados de esta evaluación permitieron identificar algunos aspectos que requieren un mayor trabajo en las escuelas, tanto en el área de Lenguaje como en el área de Matemáticas.

El material que se presenta en esta colección de módulos aporta elementos de las dos áreas mencionadas, y tiene como propósito apoyar el trabajo de los docentes, con el ánimo de contribuir así en el mejoramiento de la educación.

Este material, está constituido por cinco módulos para el área de Lenguaje y cinco para el área de Matemáticas, que trabajan los siguientes aspectos:

- Una reflexión general sobre la temática que aborda el módulo.
- Unos aportes conceptuales que ayudan al maestro a una mejor comprensión de la situación y le dan la posibilidad de generar actividades propias en su aula.
- Unas sugerencias para trabajar con sus alumnos, que incluyen tanto la exposición de ideas, como la presentación de actividades concretas que pueden ser utilizadas directamente por los profesores con sus alumnos.
- Unas reflexiones, presentadas en forma de taller para los docentes, con el propósito de que sean compartidas en grupo, enriquezcan la discusión sobre cada tópico y generen la búsqueda de alternativas realizables en cada escuela.
- Unas sugerencias bibliográficas, para apoyar el estudio de los docentes sobre cada tema.

Las secciones presentadas en cada módulo se complementan mutuamente, y tienen la intención de aportar elementos en la construcción del discurso pedagógico necesario para sustentar las prácticas educativas particulares de cada institución escolar. Se trata además, de propuestas didácticas que pueden ser implementadas con los recursos que las instituciones educativas oficiales poseen, por lo que es de esperarse que su aplicación y seguimiento se den, en la perspectiva de mejorar los resultados que nuestros estudiantes están presentando en el momento.

Los temas desarrollados en cada uno de los módulos son los siguientes:

Lenguaje

1. Producción de textos
2. Comprensión de lectura
3. La escritura y la escuela
4. La lectura y la escuela
5. La comunicación

Matemáticas

1. Manejo de códigos matemáticos
2. Sistemas de numeración con valor posicional
3. Solución de problemas con estructuras aditiva y multiplicativa
4. Solución de problemas que requieren inferencias lógicas
5. Desarrollo del pensamiento espacial y geométrico

Otro propósito de los módulos es el de someter a la consideración de los docentes una(s) forma(s) de orientar la actividad didáctica, que han dado resultados exitosos en procesos investigativos, con el fin de proporcionar otros referentes, otros puntos de vista, que enriquezcan la discusión y amplíen los horizontes de comprensión de la complejidad del acto pedagógico, pero que también contribuyan a lograr resultados de mayor calidad en las áreas de Lenguaje y de Matemáticas.

El logro del anterior propósito podrá establecerse en la medida en que ocurran, como resultado de la distribución del material, las siguientes situaciones:

- El material sea recibido efectivamente en las instituciones educativas.
- Su contenido sea objeto de lectura y análisis cuidadoso por parte de los docentes y demás integrantes de la comunidad educativa interesados en su contenido y funcionalidad.
- Los docentes decidan experimentar en las aulas, como parte del Proyecto Educativo Institucional, las propuestas didácticas contenidas en los distintos módulos.
- El proceso de experimentación esté acompañado permanentemente por el intercambio de las experiencias particulares, en reuniones de área o en consejos de maestros.
- Los grupos de docentes compartan su experiencia con colegas de otras instituciones.
- Se comience el diseño de categorías de análisis que permitan establecer si los nuevos resultados son o no de mejor calidad que los anteriores.
- Se comunique a la Secretaría de Educación algunos de los resultados obtenidos con los estudiantes, tanto en lo afectivo como en lo cognitivo.

REFLEXIÓN

FORMAS DE REPRESENTACIÓN DEL CONOCIMIENTO MATEMATICO

La **representación** ha sido considerada como la más poderosa herramienta para lograr el conocimiento, en particular, el conocimiento matemático.

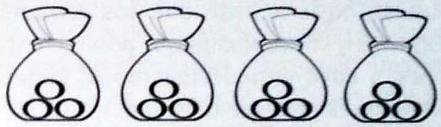
Es así como, entre las premisas que defienden algunos investigadores en educación matemática, aparece una que podría ser expresada en los siguientes términos:

> *Cuanto mayor es el número de representaciones de un concepto matemático de las que un estudiante se ha apropiado, tanto mayor es también la calidad de ese concepto; es decir, se acerca de forma más evidente, más clara al concepto propuesto por la ciencia matemática.*

La anterior afirmación puede ilustrarse con un ejemplo:

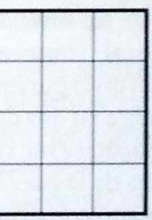
Cuando se posee el concepto de **multiplicación** o se ha formado la **estructura multiplicativa**, esa comprensión permite que el concepto se reconozca en situaciones como:

- La suma de paquetes iguales de objetos.



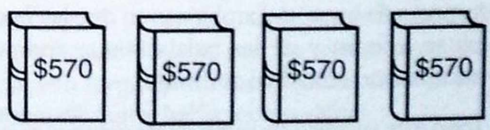
$$3 + 3 + 3 + 3 = 4 \times 3$$

- El área de un rectángulo.



3×4

- La suma repetida del precio de un mismo artículo.



570×4

- La adición de sumandos iguales, con la respectiva forma conmutativa.

$$6 + 6 + 6 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3$$

$$3 \times 6 = 6 \times 3$$

En las instituciones educativas algunos docentes diseñan su proceso didáctico en matemáticas apuntando principalmente a tres formas de representación que atienden a igual número de grados de complejidad, considerados útiles para el acercamiento de los alumnos al nivel conceptual; esas formas son:

- Manejo de material concreto.
- Representación gráfica de los objetos.
- Manejo de símbolos.

La forma de trabajar mencionada se fundamenta en un enfoque acorde con los esquemas perceptivos y conceptuales que poseen niños y jóvenes, a cuyo enriquecimiento se pretende aportar con la presente reflexión.

El manejo de niveles de representación de diferente grado de complejidad dinamiza y otorga sentido al proceso de aprehensión de conceptos: al pasar de un nivel de representación espacio–temporal (objetos que pueden manipularse) a un nivel puramente espacial (representación gráfica en dos dimensiones, donde el tiempo desaparece) se configura, al decir de los exponentes de la psicología soviética, el verdadero **momento constructivo** del proceso cognitivo, pues se toman decisiones acerca, por ejemplo, de las formas y tamaños de las figuras empleadas, de la posición que deben tener, unas respecto de otras, del ambiente en que las figuras se colocan y de las palabras que aportan información adicional al dibujo.

Todo este proceso de toma de decisiones es resultado del nivel de desarrollo cognitivo de cada estudiante; asimismo, constituye la manifestación de su capacidad para expresar –en forma gráfica– su manera de comprender los objetos de conocimiento con los que se ha relacionado. Por lo tanto la actividad del alumno consiste en construir formas de representar lo que tiene en su conciencia, con las que elabora y enriquece la información recibida en la fase anterior, porque le agrega todo lo necesario para atrapar la información en el papel, para ponerla en dos dimensiones; vale decir, su actividad consiste en *construir conocimiento*. (Davidov, Vasili. *La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico*. Editorial Progreso. Moscú. 1988. Pág. 120).

Por ejemplo, cuando un niño realiza un dibujo sobre una visita a un parque de diversiones, pone en juego una serie de esquemas perceptivos y conceptuales que le permiten plasmar en el papel aquello que quedó claro en su mente acerca de la cantidad de artefactos que observó, el tamaño de unos juegos respecto de otros, la ubicación o forma de distribución de los aparatos en el terreno del parque, las personas que estaban divirtiéndose, los colores que recuerda, los avisos, los senderos por donde caminó, la ubicación de las taquillas, de los baños, de las casetas de vigilancia, etc. En todo ello, hay un importante aporte de sus estructuras mentales; es decir se elabora y se recrea la percepción inicial y, por lo tanto, hay construcción de conocimiento.

En otro orden de ideas, es necesario destacar el papel de la representación en el desarrollo del pensamiento espacial, porque de acuerdo con Piaget, la representación requiere de la evocación de los objetos en su ausencia, lo que se refleja en las acciones ya mencionadas relacionadas con formas, tamaños, proporcionalidad y ubicación espacial de los objetos, entre otras. Pero además, cuando es necesario representar las acciones que se realizan sobre los objetos, tales como desplazamientos, agrupaciones y ordenamientos. Se emplean para ello flechas, líneas en distintas direcciones y sentidos, círculos o diagramas que encierran los objetos, etc., se configura la génesis o el inicio del desarrollo de la *función simbólica,* por cuanto se trata de proponer formas de representación de propiedades que no están adheridas al objeto concreto, sino de representar acciones que son en sí mismas intangibles, pero que muestran resultados en la transformación de las propiedades iniciales de los objetos. (Piaget, J. *Epistemología genética.* Tomo I. Paidós. México. 1987).

Posteriormente, cuando se accede a la forma de representación simbólica, ha tenido lugar una especie de juego dialéctico de pérdidas y ganancias que permite ir dejando de lado unos elementos y adquiriendo otros, mientras se cumple la tarea de expresar las acciones de aprendizaje en niveles cada vez más complejos que van, como ya se dijo, desde los objetos mismos hasta los símbolos y los signos.

En este proceso, el **lenguaje verbal** -ya sea oral o escrito- juega un papel importante; casi el más significativo en el ámbito de la conceptualización, ya que a través de él es posible que las acciones conviertan su carácter externo en carácter interno o mental.

El hecho de emplear la expresión verbal para referirse a los elementos y las relaciones entre los elementos que se van identificando permite que los estudiantes recorran el camino entre la experiencia con objetos concretos y la interiorización de la experiencia.

El lenguaje, en esta oportunidad, sirve de **nexo** entre los dos momentos del proceso cognitivo ya mencionados, a saber: la acción sobre objetos tangibles o representados y la acción en su forma mental. El empleo del lenguaje en su forma verbal permite además acciones como la ordenación de datos informativos y la creación de estructuras formales de resumen de la información, lo que facilita y dinamiza la aproximación al carácter abstracto del concepto.

Uno de los recursos didácticos que facilitan el propósito descrito (el de convertir el carácter externo de las acciones en carácter mental o interno) es conocido con el nombre de **realización verbal**, a través del cual los alumnos, con la orientación del maestro, ponen en las palabras todas las acciones (físicas o mentales) que cumplen en un evento dado.

Para lograrlo, los alumnos deben atender tanto a la función de colocarles nombres a los objetos con los que están trabajando (nominar), como a la de asignarles atributos (predicar), mientras se ocupan también de conectar las frases o proposiciones que están empleando (articular), con el propósito de otorgarle coherencia lógica y gramatical a aquello que están diciendo o escribiendo.

Además, a través de la realización verbal de las acciones, los estudiantes van adquiriendo el vocabulario básico, necesario para lograr una forma de expresión acorde con el formalismo de las matemáticas, ya que en la expresión verbal incluyen paulatinamente los términos que pertenecen al ámbito de dicho lenguaje formal.

Si se retoma el ejemplo de los cuadernos, expuesto al principio de esta reflexión, la verbalización hecha por los alumnos resultaría, con leves variaciones debidas al estilo personal de quien habla, como sigue:

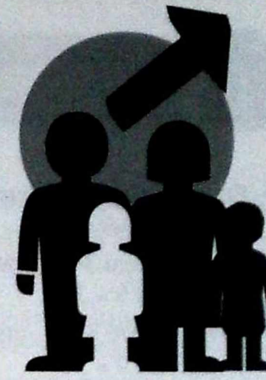
Como cada uno de los **cuatro** cuadernos que compré (nominar) tiene un valor de $ 570 (predicar) puedo decir que el valor total de los cuadernos lo puedo calcular si multiplico $ 570 por 4 (articular).

Reflexión

Durante el desarrollo de la propuesta didáctica **El juego del ábaco** se muestran otras formas de trabajar la **realización verbal de las acciones** y se argumenta acerca de su utilidad en la obtención de acciones cognitivas de valor pleno, así como la posibilidad que ofrece para conocer y comprender el **curso mental** que el proceso ha cumplido en los alumnos.

Este conocimiento de la forma como los alumnos organizan su pensamiento, es decir, de la manera como razonan, es muy importante ya que por medio de él se obtienen luces que permiten dilucidar los caminos por los que puede enrumbarse el quehacer pedagógico en el aula.

Aporte conceptual



Sistemas de numeración con valor posicional

¿Por qué solamente la base 10?

Los números naturales, los que se enseñan como aquellos que se emplean para contar, están escritos en un sistema de numeración con valor posicional y en base 10.

Podrían estar organizados en un sistema de base diferente, por ejemplo base 2, 3 ó 4, si el desarrollo histórico de las matemáticas hubiese tomado, en ese aspecto, un rumbo distinto.

En tal caso, nuestros **números naturales** no serían los conocidos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12,13, …, 19, 20, 21, …, 99, 100, 101, …, 200, …, (en base 10).

Sino que serían por ejemplo:

- 0, 1, 2, 3, 4, 10, 11, 12, 13, 14, 20, 21, 22, … (en base 5);
- 0, 1, 2, 10, 11, 12, 20, 21, 22, 100, 101, 102, 120, 121, 122, 200, … (en base 3);
- 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 20, 21, … (en base 8);
- 0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001, 1010, 1011, 1100, … (en base 2), etc.

Entonces: ¿por qué a los estudiantes se les enseña solamente la base 10, como si ella fuera la única posible?

Si bien en algunos casos a los alumnos de grados 5° y 6° se les introduce en el manejo de otras bases (principalmente la base 2, en la que se cuentan los objetos haciendo grupos de 2), también es cierto que ello se hace con un proceso **no análogo** y distinto en su génesis al que se emplea en el estudio de la base 10 (en la que se cuentan los objetos haciendo grupos de 10).

El procedimiento más usual que se propone a los alumnos es el de las divisiones sucesivas por 2, el cual no les permite realizar la analogía respectiva con la estructuración del sistema de numeración decimal.

La anterior razón permite afirmar que un buen intento para abordar la formación del **concepto de base**, independientemente de su valor numérico (base 2, base 3, base 4, ..., base 10, base 11, base 12, ...), y posteriormente concretar la situación que se desprende de la adopción de una **base específica**, sería tomar un número determinado de objetos e ir agrupándolos según el número de la base elegida: grupos de 2 para la base 2, grupos de 3 para la base 3, …

De este trabajo de agrupaciones sucesivas se deriva, de una manera natural, el valor relativo o valor posicional de cada cifra en el correspondiente sistema.

Así, dependiendo de la base, el valor de la cifra 4 en cada uno de los siguientes números, sería:

- En el número 342, que está en base diez, 4 vale: $4 \times 10 = 40$;
- En el número $342_{(5)}$, que está en base cinco, 4 vale: $4 \times 5 = 20$;
- En el número $342_{(9)}$, que está en base nueve, 4 vale: $4 \times 9 = 36$;
- En el número $342_{(7)}$, que está en base siete, 4 vale: $4 \times 7 = 28$.

Los anteriores ejemplos demuestran que el procedimiento para encontrar el valor posicional de una cifra, en este caso el 4, es análogo para todas las bases: lo único que cambia es precisamente la base, la cual depende del sistema de numeración en el que se esté trabajando.

La propuesta didáctica **El juego del ábaco**, que se desarrolla en el presente módulo, apunta a ubicar a los alumnos en esa perspectiva cognitiva.

Antes de hablarles directamente de unidades, decenas, centenas, ..., es necesario permitirles actuar sobre los objetos, de manera que primero intuyan y después conceptualicen las ideas de **base y de valor posicional** como los elementos fundamentales de su sistema de numeración.

No hay necesidad de introducirlos desde el comienzo en el manejo de la base 10; con el trabajo en otras bases los niños pueden ver y aceptar la necesidad de un símbolo para el cero.

Es de esperarse que del estudio y experimentación de la propuesta didáctica planteada en este módulo se pueda deducir la funcionalidad de base y valor posicional, es decir, que ayude a aclarar en los alumnos las posibles confusiones acerca de estos conceptos.

La lógica del sistema decimal de numeración

Un breve recorrido histórico

Como ya se anotó, nuestro sistema de numeración actual tiene como base de su funcionalidad y racionalidad dos elementos básicos:

- El principio de posición, que hace relación a la base correspondiente.
- El concepto de cero.

Contrariamente a esta situación, casi todas las culturas precedentes asignaron a sus símbolos valores fijos e independientes; tal es el caso de las civilizaciones egipcia, griega, romana y azteca.

Sin embargo, hubo algunas civilizaciones que idearon sistemas de numeración en los que el valor de las cifras sí estaba determinado por su posición dentro de la cantidad; entre dichas civilizaciones se encuentran la babilónica, la maya, la hindú y la inca[1].

El hecho de optar por una base de numeración, condujo a una situación especial que, en muchos casos creaba confusión.

Cuando, por la configuración de una cantidad determinada, se presentaba la ausencia de uno de los órdenes de unidades, la escritura de esa cantidad podía ofrecer dificultades para su comprensión. Por ejemplo, en la numeración babilónica, que optó por la base 60 (hacer grupos de 60 al contar), se podía presentar la confusión entre 1 y 60 porque para las dos cantidades se empleaba el mismo símbolo, pero el que tenía el valor de 60 tendría que estar ocu-

[1] Aspectos importantes de estos sistemas de numeración se trabajan en el módulo de adquisición de códigos matemáticos.

pando el lugar correspondiente a las unidades de segundo orden:

 = 1

 = 60

Es decir, el significado de cada símbolo no estaba siempre claro a partir de su posición y el valor exacto tenía que deducirse del contexto o de las precisiones que hacían los escribas.

Una situación similar se presentó en la numeración hindú: hacia el siglo VI, los hindúes estaban usando una especie de **ábaco de columnas,** y ya habían adoptado el 10 como la base de su sistema de numeración.

El hecho de usar el ábaco para registrar sus cantidades les permitió también solucionar el problema de la ausencia de cifras, dejando sencillamente en blanco o vacía la columna correspondiente.

De todas maneras, la invención de un símbolo para el cero o para la nada vino finalmente a solucionar la dificultad y permitió el desarrollo posterior de los sistemas de numeración, principalmente en lo que tenía que ver con la solución de operaciones.

Según lo anterior, puede afirmarse que el **sistema decimal de numeración** se consolidó como tal después de siglos de evolución, durante los cuales se cumplieron varios hechos significativos:

- Adopción del 10 como la forma más cómoda y funcional para agrupar objetos y para la escritura de cantidades.
- Invención de un símbolo para indicar los números de objetos sueltos que quedaban cuando intentaban formar grupos de 10: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
- Invención de un símbolo para cuando no quedaban objetos sueltos al hacer las agrupaciones: el cero (0).

Para determinar de manera clara este proceso, la humanidad se tomó sus buenos años. Los niños también necesitan su tiempo.

Dicho de otra manera, la comprensión de la **estructura del sistema decimal de numeración** requiere que los niños hayan accedido a elementos de pensamiento **lógico** y **numérico** como:

- Concepto de **agrupamiento**: formación de grupos iguales.
- Concepto de **representatividad**: una unidad de un orden cualquiera, superior al primero, representa 10 unidades del orden inmediatamente inferior.
- Concepto de **sistema:** las cantidades escritas en un sistema de numeración con valor posicional no son un conjunto de símbolos que actúan como objetos autónomos e independientes, sino que constituyen un sistema en el que las cifras están relacionadas entre sí, estructura que se revela en situaciones como las siguientes:

a. La base representa el total más uno del máximo de elementos admitidos en cada casilla. Por ejemplo: en la base 5 (4 + 1), el máximo número de elementos que puede aparecer en cada casilla es 4.

En la base 7 (6 + 1), el máximo de objetos de cada casilla es 6.

En la base 10 (9 + 1), el máximo es 9.

b. Cada cifra de la representación numérica está relacionada tanto con la cifra de la derecha porque representa la cantidad de grupos de unidades de ese orden que pudieron formarse, como con la cifra de la izquierda, ya que representa el número de elementos sobrantes, cuando se procedió a formar unidades de ese nuevo orden.

Por ejemplo, para el número 4.863, la situación sería como sigue:

3 representa las unidades que sobraron después de formar 486 grupos de 10 o 486 decenas.

6 representa las decenas que sobraron después de formar, con las 486 decenas, 48 centenas.

8 representa las centenas que sobraron después de formar, con las 48 centenas, 4 unidades de mil.

4 representa el número de unidades de mil que se alcanzaron a formar y constituye las unidades de orden mayor.

Pero además,

4 unidades de mil equivalen a 40 centenas.

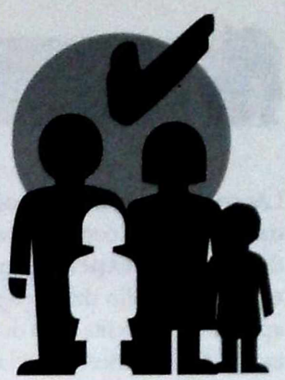
8 centenas equivalen a 80 decenas.

6 decenas equivalen a 60 unidades.

c. La aparición de un cero (0) dentro de la cantidad significa que en **ese orden** resultó un número de unidades que es múltiplo de la base. Por ejemplo, en el número 502, el **0** de la columna de las decenas significa que en el número hay una cantidad de centenas que es múltiplo de 10; efectivamente en 502 hay un total de 50 centenas.

Los anteriores elementos, básicos para la comprensión de los sistemas de numeración, no son exclusivos del sistema decimal: son igualmente válidos para los sistemas de base 2, base 3, base 4, etc. El proceso didáctico que se posibilita con **el juego del ábaco** está orientado hacia su apropiación.

PROPUESTA DIDÁCTICA



EL JUEGO DEL ÁBACO

Esta propuesta, al igual que la desarrollada en el módulo sobre adquisición de códigos matemáticos, tiene una estrecha relación con los desempeños evaluados en el primer nivel de competencia (adquisición de códigos) en la prueba de competencias básicas en lenguaje y matemáticas aplicada a los alumnos de 3º y 5º en noviembre de 1.998. Estos dos desempeños, en los que los alumnos no obtuvieron los logros esperados son:

- Leer y operar con números naturales o decimales.

- Leer información de un diagrama de barras.

Atiende igualmente un desempeño del segundo nivel de competencia (uso de códigos):

- Resolver problemas con unidades de tiempo.

Los dos primeros desempeños citados están referidos, como se ha dicho repetidamente, a la apropiación que logren los alumnos del funcionamiento del sistema decimal de numeración, así como a la comprensión de la estructura del conjunto de los números naturales, en la que la **relación de orden** constituye elemento fundamental.

Por su parte, el manejo de las unidades de tiempo (tercer desempeño), es también un problema de **bases de numeración:** base 24 cuando se están relacionando horas y días, y base 60 cuando se trabajan horas, minutos, segundos.

El juego del ábaco, como estrategia didáctica, se basa en las siguientes consideraciones teóricas, ampliadas en los distintos módulos

a. Las distintas **formas de representación** del conocimiento matemático favorecen una elaboración cada vez mayor del mismo, y posibilitan la expresión gradual del proceso de aprendizaje (Módulo sobre manejo de códigos matemáticos).

b. La **realización verbal de las acciones** de aprendizaje dinamiza el proceso de transformación del carácter interno de dichas acciones en carácter mental o interno (Módulo sobre pensamiento espacial y geométrico).

c. El avance cognitivo que se espera lograr debe hacerse a partir de colocar a los alumnos, en forma sistemática, en **zona de desarrollo próximo**, a fin de conseguir su compromiso y su interés en el proceso (Módulo de solución y formulación de problemas).

d. La **reversibilidad** es un proceso que debe proponerse y desarrollarse sistemáticamente dentro de las actividades de apropiación del conocimiento matemático, pues es la condición para hacer de una operación, una estructura algebraica completa (Módulo de problemas con inferencias lógicas).

Las sugerencias metodológicas serán presentadas en detalle, con el fin de compartir con los docentes una **experiencia exitosa** en el ámbito del desarrollo del pensamiento numérico, y aportar un referente en la discusión sobre la orientación de los procesos pedagógicos en el aula.

SUGERENCIAS METODOLÓGICAS PARA EL DESARROLLO DE LA ESTRATEGIA "EL JUEGO DEL ÁBACO"

Antes de llevar esta propuesta al aula conviene estudiarla en grupo con sus compañeros de trabajo.

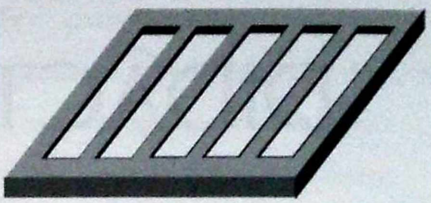
Es importante realizar cada uno de los ejercicios y apoyarse en la aclaración de las dudas que se puedan presentar.

Se sugiere aplicar esta propuesta didáctica, en forma completa, a partir de grado 3°. En los grados 1° y 2° se pueden trabajar las bases 2 a 9 en el nivel de manejo de las fichas sobre la tablilla y llevar sólo la base 10 a los niveles de representación gráfica y simbólica.

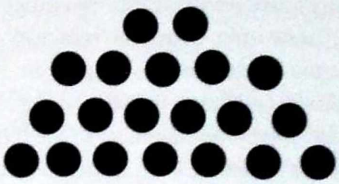
De todas maneras la decisión final sobre la forma como se trabaje corresponde al docente y su grupo de estudiantes, por lo que es necesario su estudio previo en forma concienzuda.

Materiales:

- Tabla de calcular (ábaco) que puede ser elaborada en madera, cartón grueso o cartón paja dividida en 5 o 6 casillas verticales. Se sugiere una tablilla de 30 × 20 cm construida en lo posible por los mismos alumnos; es necesario el material individual.



- Fichas para contar (pueden ser fichas plásticas, de cartón, o botones); conviene un mínimo de 20 fichas por alumno.



EL JUEGO DE FORMAR GRUPOS DE 2

Juego inicial

La actividad inicial se apoya en la idea de ficha **representante** como la que actúa a nombre de un grupo de determinado número de fichas.

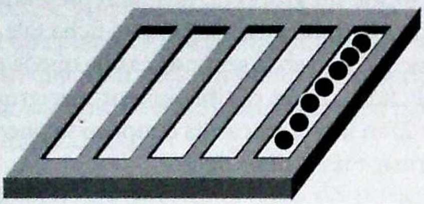
En el primer acercamiento de los niños a esta actividad, es necesario acordar con ellos las reglas del juego, y más adelante permitir que esas mismas reglas se redescubran o adquieran diversos significados, a la luz de las nuevas tareas o ejercicios que se propongan.

Las reglas del juego se van presentando a medida que se desarrolla el primer ejercicio, que debe ser lo más sencillo posible; la primera regla se refiere al nombre de los "espacios", "campos" o "partes" en los que está repartido el ábaco los cuales se llamarán **casillas.**

Además se le llamará **primera casilla** a la que quede al lado derecho, **segunda casilla** a la siguiente hacia la izquierda, **tercera casilla** a la siguiente, etc.

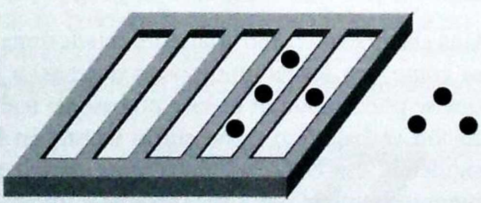
Ejemplo:

a. Colocar en la primera casilla 7 fichas.



Regla: El juego puede empezar colocando en la primera casilla un número cualquiera de fichas.

b. Con las siete fichas, formar un grupo de 2 fichas, pasar una de ellas como **representante** del grupo a la segunda casilla y ubicar la otra ficha fuera del ábaco; continuar formando grupos de 2 fichas hasta cuando **sea posible** siguiendo siempre el mismo procedimiento.



Regla: Por cada grupo de dos fichas que se pueda formar en la primera casilla, una representante de las dos pasa a la segunda casilla mientras la otra espera fuera del ábaco.

En este momento del juego pueden hacerse con los alumnos reflexiones (o preguntas) como las siguientes:

- ¿Con cuántas fichas comenzamos este juego? (Con 7 fichas)
- ¿A qué estamos jugando? (A formar grupos de dos)
- ¿Cuántos grupos se formaron? (Tres grupos y sobró una ficha)

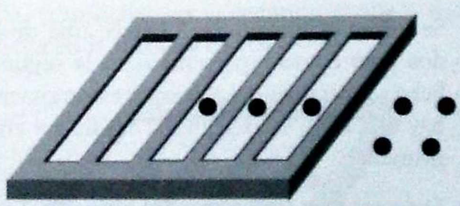
Esta última situación puede ser retomada para reafirmar el concepto de número impar (o de número par).

c. El juego continúa de forma parecida; con las fichas que llegaron a la segunda casilla se forman también grupos de 2 fichas.

Ahora la representante de cada grupo pasa a la tercera casilla, mientras la otra ficha se ubica fuera del ábaco. Como en la segunda casilla había 3 fichas, es posible formar un grupo de 2 fichas; así pasa una representante a la tercera casilla, se queda una en la segunda casilla y la otra sale del ábaco. El juego termina porque ya no es posible formar más grupos de 2 fichas.

Preguntas:

- ¿Cuántas fichas habían llegado a la segunda casilla?
- ¿Cuántas pasaron a la tercera casilla?, ¿Por qué?



d. Al terminar el juego, el ábaco quedó en la siguiente forma: una ficha en la tercera casilla, una ficha en la segunda casilla y una ficha en la primera casilla. Esta lectura también puede hacerse, por supuesto, de derecha a izquierda, cuidando la precisión en el lenguaje. De todas maneras será necesario, más adelante, un acuerdo en el sentido de leer el resultado de izquierda a derecha.

Regla: El juego termina cuando ya no sea posible formar más grupos de 2 fichas; el resultado del juego se lee en el ábaco de izquierda a derecha.

Realización verbal del juego

Al proponer el segundo juego o ejercicio, es necesario orientar a los alumnos para que realicen verbalmente (en forma oral al comienzo, y en forma oral y escrita más adelante) las acciones que están ejecutando sobre el ábaco, a fin de permitir el proceso de interiorización de dichas acciones: se trata de animarlos para que acompañen su accionar con la correspondiente realización verbal.

Ejemplo:

Vamos a jugar ahora con 6 fichas a formar grupos de 2.

La realización verbal, resultado de la orientación y guía del maestro, puede ser como sigue:

- Comenzamos colocando 6 fichas en la primera casilla.
- Se forma un grupo de 2 fichas; una de las dos pasa como representante a la segunda ficha y la otra sale del ábaco; en este momento hay una ficha en la segunda casilla y 4 en la primera.
- Se forma otro (o el segundo) grupo de 2 con las fichas que están en la primera casilla; una de ellas pasa como representante a la segunda casilla y la otra sale del ábaco; en este momento hay dos fichas en la segunda casilla y dos en la primera.
- Se forma otro (o el tercer) grupo de 2 fichas con las que están en la primera casilla; una pasa como representante a la segunda casilla y la otra sale del ábaco; no queda ninguna ficha en la primera casilla y quedan 3 en la segunda casilla.
- Con las fichas que hay en la segunda casilla se forma un grupo de dos; la representante pasa a la tercera casilla y la otra ficha sale del ábaco; como en la segunda casilla queda una sola ficha, no es posible formar más grupos de 2; en la tercera casilla tampoco se pueden formar más grupos de 2.
- El juego termina con una ficha en la tercera casilla, una ficha en la segunda casilla y ninguna ficha (o cero fichas) en la primera casilla.

Nota: lo que aquí aparece como ejemplo es apenas una muestra de lo que se puede lograr con los niños ya que los grados de minuciosidad y detalle que algunos de ellos logran son realmente notables y se trata, por supuesto, de una situación que debe ser estimulada por el maestro. La realización verbal escrita es aconsejable cuando los niños hayan accedido, más adelante, a la representación gráfica del juego.

Una elaboración como la anterior puede tomarse como una forma (entre otras muchas) a la que se puede apuntar en este proceso de realización verbal. Pero es necesario insistir en lo siguiente: esa elaboración no debe darse, de ninguna manera, porque el maestro la "dicta" o la "enseña"; debe ser el resultado del ejercicio persistente de la actividad lingüística que realicen los alumnos, con la guía y el estímulo de su maestro.

Esa realización verbal, como ya se anotó, debe lograrse primero en forma oral, tratando en lo posible de escuchar a los alumnos en forma individual (o por pequeños grupos). El acceso a la realización verbal escrita debe ser también paulatino y acorde con el nivel de su desarrollo.

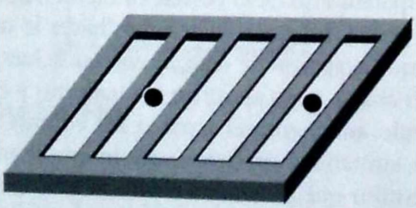
El proceso de reversibilidad

Después de realizar un número suficiente de ejercicios de derecha a izquierda, acompañado cada uno de su correspondiente realización verbal, se propone a los estudiantes una actividad que plantee el juego en sentido inverso, es decir, que a partir de un punto o forma de llegada, sea posible encontrar el punto de partida correspondiente.

Se trata de un momento crucial del proceso ya que es posible ubicar a los alumnos en **zona de desarrollo próximo** por medio de preguntas orientadoras que les permitan, de una manera autónoma, descubrir la nueva forma que adquiere el juego.

Ejemplo:

Supongamos que estábamos jugando en el ábaco a formar grupos de 2 fichas y al terminar de jugar el ábaco quedó en la siguiente forma: una ficha en la cuarta casilla; nada (o ninguna ficha) en la tercera casilla; nada (o ninguna ficha) en la segunda casilla y una ficha en la primera casilla (se sugiere a los alumnos colocar las fichas sobre el ábaco en la forma indicada).



Preguntas orientadoras (o sugerencias):

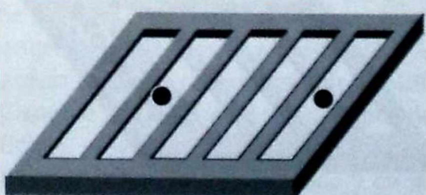
- ¿Qué será lo que nos interesa descubrir o averiguar en este momento?
- Tratemos de averiguar con cuántas fichas había empezado este juego, moviendo las fichas en el ábaco.

Cualquiera que sea la manera como cada estudiante concibe esta nueva forma del juego, ella debe manifestarse autónomamente durante el proceso; pero el propósito continúa siendo que todos accedan a la reversibilidad completa, lo cual puede orientarse o inducirse también a través de preguntas o sugerencias:

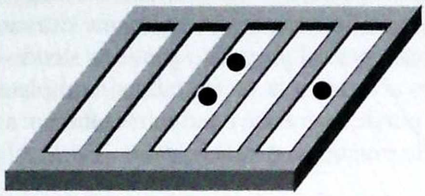
- ¿Cuál fue el resultado del juego?
  (Una ficha en la cuarta casilla, ninguna en la tercera, ninguna en la segunda, una en la primera).
- ¿A qué estábamos jugando?
  (A formar grupos de dos).
- ¿Cuál fue la ficha que llegó más lejos?
  (La que llegó a la cuarta casilla).
- ¿Qué tendrá que hacer esa ficha? o ¿cómo hizo esa ficha para llegar a esa casilla?, ¿dónde estaba antes?, etc.

Una forma de **reversibilidad completa**, para el caso del presente ejemplo, podría ser la siguiente:

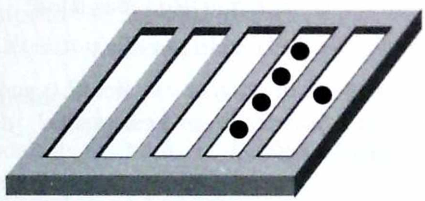
- El juego había terminado con una ficha en la cuarta casilla, cero fichas en la tercera casilla, cero fichas en la segunda casilla y una ficha en la primera casilla.



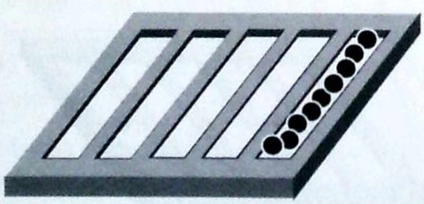
- Como se había jugado a formar grupos de dos fichas, la ficha de la cuarta casilla debe reunirse con su ficha compañera y ubicarse como grupo de dos fichas en la tercera casilla.



- Cada una de las fichas de la tercera casilla debe también buscar a su compañera y ubicarse como grupo de dos en la segunda casilla; entonces en la segunda casilla quedan por todas cuatro fichas.



- Cada una de las cuatro fichas de la segunda casilla busca a su compañera fuera del ábaco y se ubica con ella, formando grupos de dos, en la primera casilla; entonces a la primera casilla pasan por todas ocho fichas.



- Como en la primera casilla había una ficha, se completan nueve fichas. El juego había comenzado con nueve fichas.

Los alumnos resuelven a continuación otros ejercicios en los que se plantee el proceso de izquierda a derecha; a través de ellos, deben ir avanzando en su apropiación del proceso de reversibilidad completa.

Representación gráfica del juego

Hasta este momento del proceso, el juego del ábaco se ha cumplido en el nivel de representación espacio-temporal, a través de la manipulación de las fichas sobre la tablilla. Lo que sigue, entonces, es estimular el acceso a una forma de representación puramente espacial del juego, es decir, a su representación gráfica.

Pero, de la misma manera como se ha hecho antes, se insiste en la necesidad de permitir el surgimiento de esa actividad en forma autónoma es decir, que no sea el resultado de copiar un modelo propuesto por el maestro o por otro estudiante.

En ese sentido, se sugiere presentar la propuesta de trabajo en la siguiente forma:

Ejemplo:

Juguemos con 5 fichas a formar grupos de 2.

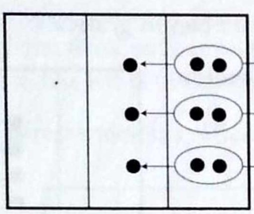
Los alumnos cumplen la tarea individualmente efectuando el juego de derecha a izquierda y acompañándolo de la correspondiente realización verbal; luego se les solicita "hacer lo mismo" que acabaron de realizar con las fichas sobre el ábaco, pero ahora en el cuaderno y empleando solamente el lápiz o los colores (es decir, sin tabla y sin fichas). De lo que se trata es permitir que afloren en el aula la multiplicidad de formas de concebir, o de comprender el proceso.

Después de ello, a través de la explicitación o **socialización** de esas múltiples formas, debe ser posible ir elaborando conjuntamente el método que al grupo le parezca el más claro, el más completo, el mejor.

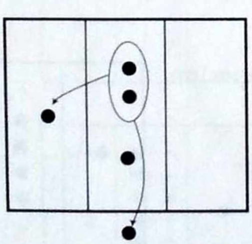
Después de llegar a un acuerdo en ese sentido, se puede sugerir a los alumnos que agreguen siempre un ábaco con el resultado final del juego, ya que ello permitirá el acceso al siguiente nivel de representación.

Por ejemplo, si se quiere representar gráficamente el juego de formar grupos de dos con 6 fichas y se llegó al siguiente acuerdo; lo que se sugiere es agregar otro ábaco en el que aparezcan solamente las fichas que quedaron cuando terminó el juego:

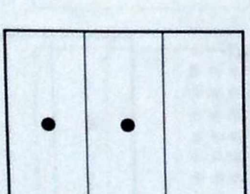
Primera agrupación



Segunda agrupación



Situación final



También en este caso la representación gráfica debe acompañarse de la realización verbal escrita completa.

El juego del ábaco en las bases 3, 4, 5...

El grado de interiorización de las reglas del juego (en base 2) logrado hasta el momento debe permitir el acceso, en forma autónoma, al manejo de las demás bases.

De igual manera que en otros momentos cruciales del proceso, los niños se colocan en zona de desarrollo próximo a través de la pregunta:

¿Cómo será el juego de formar grupos de 3 fichas?

A partir de allí se genera una dinámica similar a la que se dio en el juego con la base 2, ya que las reglas de juego son similares, y las estrategias cognitivas (reversibilidad, realización verbal y representación gráfica del juego) se manifiestan de manera análoga.

Ejemplo:

a. Juguemos con 11 fichas a formar grupos de 3 fichas.

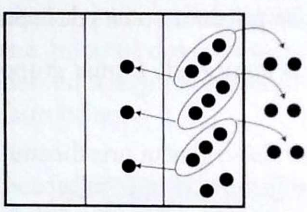
Realización verbal:

- Comenzamos el juego colocando once fichas en la primera casilla.
- Se forman grupos de tres fichas; por cada grupo se pasa una representante a la segunda casilla; las otras dos, salen del ábaco. Como se pueden formar tres grupos de tres fichas, pasan tres fichas a la segunda casilla, seis fichas salen del ábaco y en la primera casilla se quedan las dos fichas que sobraron.

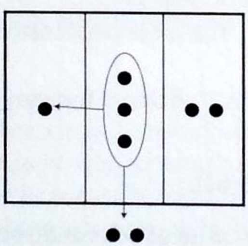
- Con las fichas que llegaron a la segunda casilla se puede formar un grupo de tres fichas; la representante pasa a la tercera casilla, las otras dos salen del ábaco y en la segunda casilla no queda ninguna ficha.
- Como no se pueden formar más grupos de tres fichas el juego termina con una ficha en la tercera casilla, ninguna en la segunda y dos fichas en la primera casilla.

Posible representación gráfica:

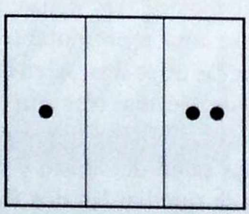
Primera agrupación:



Segunda agrupación:



Situación final:



Representación numérica:

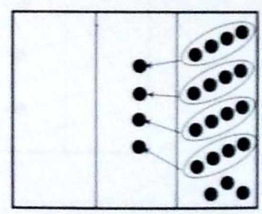
		11
	3	2
1	0	$2_{(3)}$

b. Juguemos con 19 fichas a formar grupos de 4.

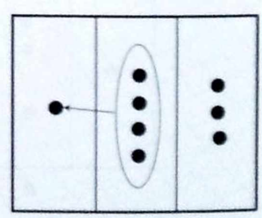
A estas alturas, si los niños ya se han familiarizado bastante con las reglas del juego, se puede omitir la representación de las fichas que van saliendo del ábaco en cada uno de los pasos.

Posible representación gráfica:

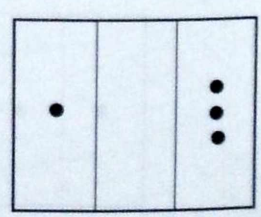
Primera agrupación:



Segunda agrupación:



Situación final:



Representación numérica:

Situación inicial →			19
Situación después de la primera agrupación. →		4	3
Situación después de la segunda agrupación. →	1	0	$3_{(4)}$

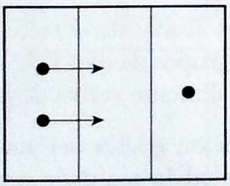
Procesos de reversibilidad

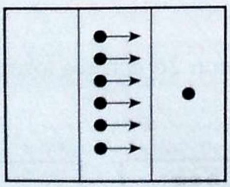
Para el juego de cada una de las bases, es necesario plantear el proceso de reversibilidad.

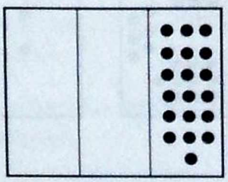
Ejemplos:

a. Si después de jugar a formar grupos de tres fichas el ábaco quedó con dos fichas en la tercera casilla, ninguna ficha en la segunda casilla y una ficha en la primera casilla ¿con cuántas fichas había comenzado el juego?

Posible representación gráfica:





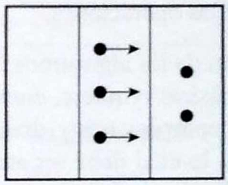


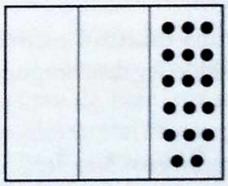
Representación numérica:

2	0	$1_{(3)}$
	6	1
		19

b. Después de jugar a formar grupos de cinco fichas, el ábaco quedó con tres fichas en la segunda casilla y dos fichas en la primera casilla, ¿con cuántas fichas había comenzado el juego?

Posible representación gráfica:





Representación numérica:

	3	$2_{(5)}$
		17

EL SISTEMA DECIMAL DE NUMERACIÓN

En el caso de la base diez, tanto la forma general del juego como el manejo de las distintas formas de conocer (representación, reversibilidad y realización verbal) son similares al juego en las demás bases.

Cuando los alumnos acceden al sistema decimal, después de haber desarrollado la estrategia del juego del ábaco, poseen elementos conceptuales de orden lógico, espacial y numérico que les permiten una apropiación consciente de la estructura de este sistema y un conocimiento más profundo de los mecanismos necesarios para el manejo comprensivo de los algoritmos de las operaciones.

La aprehensión de los algoritmos de las cuatro operaciones básicas requiere, entre otros conceptos, de la composición y descomposición de cantidades, lo cual debe ser atendido en la base 10 y en las demás bases.

Por ejemplo, una cantidad escrita en base 5, como $304_{(5)}$ puede ser descompuesta de diversas maneras:

$$\begin{aligned} \mathbf{304}_{(5)} &= 300_{(5)} + 4_{(5)} \\ &= 200_{(5)} + 100_{(5)} + 4_{(5)} \\ &= 220_{(5)} + 34_{(5)} \end{aligned}$$

De manera análoga, una cantidad escrita en base 10, por ejemplo 3459, también se puede descomponer de diversas maneras:

$$\begin{aligned} 3459 &= 3000 + 300 + 100 + 40 + 10 + 9 \\ &= 2000 + 500 + 500 + 400 + 40 + 19 \\ &= 1000 + 1000 + 1000 + 200 + 200 \\ &\quad + 30 + 29 \end{aligned}$$

y no necesaria y exclusivamente en los valores que toman sus cifras según el orden de sus unidades:

$$3459 = 3000 + 400 + 50 + 9$$

Este tipo de situaciones requiere de una ejercitación constante por parte de los alumnos de educación básica, ya que facilita la comprensión de los algoritmos y la agilidad en los cálculos.

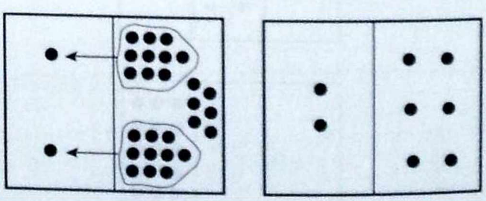
Una dificultad que se debe atender cuando se trabaja la base 10 en el ábaco estaría relacionada con la naturaleza del material concreto (las fichas, en este caso) ya que los grupos que se deben formar pueden resultar difíciles de manejar por su tamaño. Por esa razón es recomendable preparar otro tipo de material (por ejemplo fichas en cartulina), con el que sea más sencillo el manejo de **grupos de diez.**

El proceso para trabajar la **base diez** se puede resumir en los siguientes puntos:

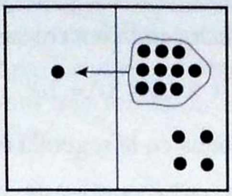
- Juego en el ábaco, de derecha a izquierda, formando grupos de diez fichas; acompañado de la realización verbal de la acción.
- Representación gráfica del juego, de acuerdo con el modelo acordado por el grupo.

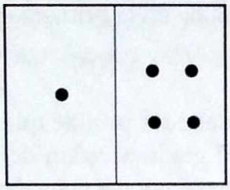
Ejemplo:

a. Juguemos con 26 fichas a formar grupos de 10.

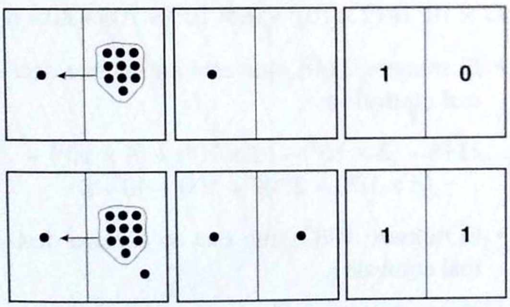


b. Juguemos con 14 fichas a formar grupos de 10.





- Representación en forma simbólica (con números) del juego.



- Asignación de nombres específicos a las fichas que quedan en la primera casilla y a las representantes que pasan a las demás casillas.

Decenas de mil	Unidades de mil	Centenas	Decenas	Unidades

Los desarrollos posteriores deben permitir elaboraciones como:

a. Representación numérica del juego de derecha a izquierda.

Centenas	Decenas	Unidades
		146
	14	6
1	4	6

b. Representación numérica del juego de izquierda a derecha.

Centenas	Decenas	Unidades
4	0	2
	40	2
		402

CONCEPTO DE VALOR POSICIONAL

El concepto de valor posicional sirve de fundamento o soporte para inducir y formalizar, posteriormente, el concepto de potenciación; además, el concepto de base que se maneja en la operación potenciación se corresponde con el concepto de base que hace referencia a un sistema de numeración.

Ejemplos:

a. Cuando se juega en base dos:

El valor de una ficha en la quinta casilla se puede expresar como

$$1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4$$

El valor de una ficha en la cuarta casilla

$$1 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^3$$

El valor de una ficha en la tercera casilla

$$1 \times 2 \times 2 = 2^2$$

El valor de una ficha en la segunda casilla

$$1 \times 2 = 2^1$$

El valor de una ficha en la primera casilla:

$$1 = 2^0$$

●	●	●	●	●
$2^4 = 16$	$2^3 = 8$	$2^2 = 4$	$2^1 = 1$	$2^0 = 1$

b. Cuando se juega en base tres:

El valor de una ficha en la quinta casilla:

$$1 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4$$

El valor de una ficha en la cuarta casilla:

$$1 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^3$$

El valor de una ficha en la tercera casilla:

$$1 \times 3 \times 3 = 3^2$$

El valor de una ficha en la segunda casilla:

$$1 \times 3 = 3^1$$

El valor de una ficha en la primera casilla:

$$1 = 3^0$$

●	●	●	●	●
$3^4 = 81$	$3^3 = 27$	$3^2 = 9$	$3^1 = 3$	$3^0 = 1$

c. Cuando se juega en base 10:

Valor de una ficha en la quinta casilla:

$$1 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4$$

Valor de una ficha en la cuarta casilla:

$$1 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^3$$

Valor de una ficha en la tercera casilla:

$$1 \times 10 \times 10 = 10^2$$

Valor de una ficha en la segunda casilla:

$$1 \times 10 = 10^1$$

Valor de una ficha en la primera casilla:

$$1 = 10^0$$

Por lo tanto, debe ser posible que alumnos de grados 4° y 5° grado accedan de una manera comprensiva a expresiones como las siguientes:

- El número 726, que está en sistema decimal equivale a:

$$(7 \times 10^2) + (2 \times 10^1) + (6 \times 10^0) = 700 + 20 + 6$$

- El número 2148, que está en sistema decimal equivale a:

$$2148 = (2 \times 10^3) + (1 \times 10^2) + (4 \times 10^1) + (8 \times 10^0) = 2000 + 100 + 40 + 8$$

- El número 4082, que está en sistema decimal equivale a:

$$4082 = (4 \times 10^3) + (0 \times 10^2) + (8 \times 10^1) + (2 \times 10^0) = 4000 + 0 + 80 + 2$$

El concepto de **potenciación** constituye un elemento básico para la comprensión de la estructura del sistema decimal de numeración, además de los que se han mencionado repetidamente: **base, valor posicional y significado del cero.**

Las acciones que los alumnos cumplen con el material durante el juego del ábaco les permiten también acceder a elementos conceptuales relacionados con el desarrollo de **estructura aditiva y estructura multiplicativa:**

- En el juego de derecha a izquierda se realiza la acción de *formar grupos iguales* en la doble posibilidad de que la repartición sea exacta (que no sobren fichas) o que sea inexacta (que sí sobren); el juego se configura, igualmente, como una forma de *sustracciones o restas sucesivas*.

- En el juego de izquierda a derecha, la situación se presenta en forma inversa a la anterior: el juego se traduce como la *adición o suma de grupos iguales* y da lugar, además, a la *adición* de las fichas que habían sobrado en el juego inicial.

Por otra parte, el desarrollo conceptual de los estudiantes, en lo que se refiere a las nociones citadas, es condición necesaria para la apropiación de los algoritmos de las operaciones y para el manejo comprensivo de las situaciones cotidianas de la matemática escolar: sumar llevando, restar prestando, memorizar y comprender las tablas de multiplicación, etc.

Pensando con otros

- Dialogue con sus compañeros acerca de la siguiente afirmación:

> *En la clase de matemáticas es posible promover el ejercicio del respeto al uso de la palabra, tener en cuenta el punto de vista de las demás personas y cultivar actitudes generosas y altruistas que permitan el avance de* **todo** *el grupo de alumnos.*

- Si está de acuerdo con la afirmación, comparta con sus compañeros las experiencias que usted ha tenido en tal sentido y proponga otras formas de lograr este propósito.

- En la suma de números naturales, ¿se puede comenzar el proceso por una columna diferente a las unidades? ¿Cómo sería, en tal caso, el procedimiento?

- El siguiente es un ejemplo de multiplicación por duplicaciones sucesivas:

  Multiplicar 35×19

→	1	35 *
→	2	70 *
	4	140
	8	280
→	16	560 *
	19	665

La suma de los números señalados en la columna de la izquierda es 19 y la de sus correspondientes en la derecha, 665.

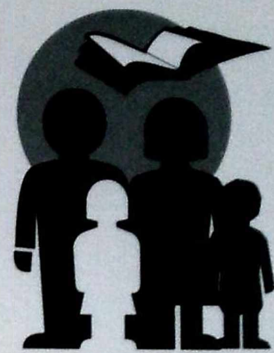
Eso significa que $19 \times 35 = 665$

- ¿Cuál es la *lógica* de este sistema? (...si se basa en el funcionamiento del sistema binario o de base dos).

Pensando con otros

- ¿Cómo se resolverían, con este mismo método, otras multiplicaciones de números naturales?
- ¿Cuál sería el procedimiento para multiplicar números naturales, a partir del manejo de otras bases?

PARA SABER MÁS



Asociación Anillo de Matemáticas. AMA. *Una experiencia de formación de maestros en Educación Matemática. Avances y posibilidades.* Santa Fe de Bogotá. 1997.

Castaño, Jorge. *El sistema decimal de numeración.* En Hojas Pedagógicas 6. Ministerio de Educación Nacional. Santa Fe de Bogotá. 1997.

Kamii, Constance. *El niño reinventa la Aritmética.* Visor. Madrid. 1993.

Lovell, K. *Desarrollo de los conceptos básicos matemáticos y científicos en los niños.* Morata. Madrid. 1986.

Mockus, Antanas y otros. *Las fronteras de la escuela.* Cooperativa Editorial Magisterio. Santa Fe de Bogotá. 1994.

Not, Louis. *Pedagogías del conocimiento.* Fondo de Cultura Económica. México. 1994.

Orton, A. *Didáctica de las matemáticas.* Morata. Madrid. 1990.

Pérez, Jesús Hernando. *Geometría euclideana y construcción de conocimiento.* Preimpreso. Santa Fe de Bogotá. 1990.

Pimm, David. *El lenguaje matemático en el aula.* Ediciones Morata. Madrid. 1990.

Talizina, N. *Psicología de la enseñanza.* Editorial Progreso. Moscú. 1988.

Vasco, Carlos E. *Conjuntos, estructuras y sistemas.* Revista Academia Colombiana de la Ciencia. No. 18. Universidad Nacional de Colombia. Santa Fe de Bogotá. 1991.

Wood, Larry. *Estrategias de pensamiento.* Editorial Labor S.A. Barcelona. 1988.

En esta serie se han publicado los siguientes títulos:

Área del lenguaje

1. Producción de textos
2. Comprensión de lectura
3. La escritura y la escuela
4. La lectura y la escuela
5. La comunicación

Matemáticas

1. Manejo de códigos matemáticos
2. Sistemas de numeración con valor posicional
3. Solución de problemas con estructuras aditiva y multiplicativa
4. Solución de problemas que requieren inferencias lógicas
5. Desarrollo del pensamiento espacial y geométrico