

# Experiencias pedagógicas en matemáticas:

alternativas para el quehacer  
pedagógico en la escuela primaria



ALCALDÍA MAYOR  
DE BOGOTÁ D.C.



Instituto para la Investigación  
Educativa y el Desarrollo Pedagógico





ALCALDÍA MAYOR  
DE BOGOTÁ D.C.

IDEP

Instituto para la Investigación  
Educativa y el Desarrollo Pedagógico

BOGOTÁ

ALCALDÍA MAYOR DE BOGOTÁ  
EDUCACIÓN

**Experiencias pedagógicas en matemáticas: alternativas para el  
quehacer pedagógico en la escuela primaria**

**Instituto para la Investigación Educativa y el Desarrollo Pedagógico, IDEP**

© Autores

Óscar Leonardo Cárdenas Forero, Sonia Milena Uribe Garzón  
Maestros en Colectivo

Alcaldesa Mayor: **ALCALDÍA MAYOR DE BOGOTÁ**  
Claudia Nayibe López Hernández  
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN DEL DISTRITO CAPITAL, SED  
Secretaria de Educación del Distrito Capital: Edna Cristina Bonilla Sebá

© IDEP  
Director General: Alexander Rubio Álvarez  
Subdirectora Académica: Mary Simpson Vargas  
Asesores de Dirección: Ruth Amanda Cortés Salcedo  
Oscar Alexander Ballén Cifuentes  
Luis Miguel Bermúdez Gutiérrez

Edición y adecuación: Universidad EAFIT  
Diseño y diagramación: Universidad EAFIT

La presente publicación se produce en el marco de las actividades para el apoyo a redes, colectivos y semilleros escolares de investigación de docentes y directivos docentes del Distrito.

ISBN: 978-628-7535-23-7  
Primera edición Año 2021

Este libro se podrá reproducir y/o traducir siempre que se indique la fuente y no se utilice con fines lucrativos, previa autorización escrita del idep. Los artículos publicados, así como todo material gráfico que en estos aparece fueron aportados y autorizados por los autores. Las opiniones son responsabilidad de los autores.

**Instituto para la Investigación Educativa y el Desarrollo Pedagógico, IDEP**  
Avenida calle 26 No. 69D – 91, oficinas 805 y 806 Torre Peatonal – Centro Empresarial Teléfono  
+57 (601) 263 06 03 - Teléfono móvil (314)4889979. [www.idep.edu.co](http://www.idep.edu.co) – [idep@idep.edu.co](mailto:idep@idep.edu.co)

Bogotá, D. C. – Colombia  
Año 2021

## **Contenido**

<b>Presentación.....</b>	<b>6</b>
<b>La enseñanza de la topología a través de la cartografía .....</b>	<b>8</b>
<b>Teselaciones para niños: una estrategia para el desarrollo del pensamiento geométrico y espacial de las niñas y niños en el aula .....</b>	<b>17</b>
<b>Mundo fractal: propuesta didáctica para el desarrollo del pensamiento espacial y geométrico de los niños .....</b>	<b>24</b>
<b>La abstracción geométrica: estrategia didáctica para el desarrollo del pensamiento geométrico de los niños en la escuela primaria .....</b>	<b>31</b>
<b>Bibliografía.....</b>	<b>37</b>

**Óscar Leonardo Cárdenas Forero**

**Colegio Entre Nubes Sur Oriental**

**<https://orcid.org/0000-0003-4894-7888>.**

Magister en Desarrollo Educativo y Social de la Universidad Pedagógica Nacional –CINDE-. Docente del colegio Entre Nubes Sur Oriental y de la Universidad del Tolima. Director del grupo de investigación “Historia de las disciplinas escolares” e integrante del equipo pedagógico “Maestros en Colectivo”. correo electrónico: olcardenasf@ut.edu.co,

**Sonia Milena Uribe Garzón**

**Colegio Entre Nubes Sur Oriental**

**<https://orcid.org/0000-0002-8401-1780>**

Magister en Desarrollo Educativo y Social de la Universidad Pedagógica Nacional –CINDE. Integrante del equipo pedagógico “Maestros en Colectivo”. correo electrónico: sonia.smug80@gmail.com

**Maestros en Colectivo**

**[maestrosencolectivo@gmail.com](mailto:maestrosencolectivo@gmail.com)**

## Presentación

Desde el año 2004 irrumpieron en la escuela primaria una serie de experiencias pedagógicas en el campo del saber matemático, delineadas e implementadas por maestros interesados en la transformación de las prácticas educativas y como un modo alternativo para enfrentar el acontecer establecido de la enseñanza de las matemáticas escolares. Esto es, un escenario de aprendizaje marcado por la tendencia a privilegiar los asuntos aritméticos y la apropiación y el manejo de las cuatro operaciones básicas en la formación matemática infantil. Este asunto se convirtió en una posibilidad para diseñar y ejecutar intervenciones pedagógicas dirigidas a trascender la instrucción aritmética y la operatoria matemática e instalarse, por ejemplo, en el desarrollo de los aspectos relacionados con el pensamiento matemático de los niños.

Estas reflexiones posibilitaron la gestación, formulación y socialización de trabajos como *“Aritmética: un proceso en contra del desarrollo del pensamiento matemático”*, *“¿Qué tiene para ofrecer la clase de matemáticas al desarrollo del pensamiento?”* Y *“Quehacer matemático en la escuela: una reflexión desde el enfoque de maestros no matemáticos”*, con las que se pretendió irrumpir en el escenario académico para cuestionar lo que estaba establecido respecto al ambiente de aprendizaje matemático y, con ello, plantear *otro modo* de enseñanza, de ser del maestro, de ser del saber matemático y de ser de la escuela misma.

Estas alternativas pedagógicas, articuladas a la racionalidad educativa de la época y a las pretensiones de formación subjetiva instaladas, consideraron que “[...] potenciar el pensamiento matemático [era] un reto

escolar” (Ministerio de Educación Nacional (MEN), 2006, p. 46) al que se le debía apostar, en la medida en que con estos propósitos era posible trascender el deseo instalado en la escuela de privilegiar el aprendizaje aritmético y el manejo de las cuatro operaciones básicas como condiciones del saber matemático. La sistematización de estas experiencias educativas se materializó y divulgó en diversas publicaciones, a modo de libros, artículos, ponencias, etc., procurando constituirse en saber pedagógico y didáctico para la enseñanza matemática escolar. Y, con esto, validar la condición del maestro como sujeto investigador y productor de conocimiento disciplinar y pedagógico e interesado por implementar alternativas de quehacer matemático escolar.

En esta perspectiva, a continuación, se exponen las experiencias pedagógicas **“La enseñanza de la topología a través de la cartografía”**; **“Teselaciones para niños”**; **“Mundo Fractal”** y **“Abstracción Geométrica”**, cada una de ellas implementadas en la escuela primaria entre los años 2004- 2021, las cuales procuraron constituirse en una posibilidad para la reflexión del trabajo pedagógico en el aula y en unas alternativas para el desarrollo del pensamiento matemático y la enseñanza de este saber escolar.

Cada una de estas acciones de intervención pedagógica en el campo de las matemáticas escolares, buscaron enfocarse primordialmente en el desarrollo del pensamiento matemático, específicamente, de las habilidades, conocimientos, valores y competencias relacionadas con lo espacial y geométrico; con lo que, adicionalmente, se apostó a la constitución de un sujeto infantil escolar distinto. Esto es, una subjetividad con potenciales intelectuales, con capacidad para resolver problemas matemáticos y con la facultad para trabajar con otros en

escenarios de este campo del saber. Por lo que, además, se procuró avanzar en el desvanecimiento de aquella subjetividad infantil en la que se priorizan los aspectos aritméticos y la adquisición de los algoritmos de las cuatro operaciones básicas como condiciones esenciales de relación y comprensión con el mundo matemático.

Así, con estas acciones de intervención pedagógica, no solo se intentó transformar el acontecer escolar del saber matemático, sino formar una subjetividad infantil a la que se le reconoció su capacidad para construir el espacio geométrico, a partir del desarrollo de sus habilidades espaciales y geométricas, a resolver situaciones matemáticas involucrando la multiplicidad de potenciales intelectuales que poseía y a la que se le implantó la importancia de las matemáticas como una potente herramienta para el desarrollo de destrezas de pensamiento, necesarias y fundamentales para su desempeño escolar, desenvolvimiento profesional y social.





ISBN 978-628-7535-23-7

# **La enseñanza de la topología a través de la cartografía**



En el 2004, efecto de las reflexiones alrededor del campo de las matemáticas escolares, irrumpió en la escuela “*La enseñanza de la topología a través de la cartografía: una experiencia matemática en básica primaria*”, elaborada por los profesores María Liliana Benítez Agudelo y Óscar Leonardo Cárdenas Forero. Esta propuesta pedagógica le apostó a lograr el desarrollo de pensamiento espacial y geométrico de los estudiantes en la educación primaria, como alternativa para realizar exploraciones y proponer innovaciones en el aula que pretendieran transformar, aportar elementos y dar un sentido diferente a la práctica pedagógica del maestro, particularmente, la asociada a la enseñanza del saber matemático.

Además, se pretendía integrar ese saber escolar en la forma de la topología y dichas acciones de intervención, con otras disciplinas del universo de posibilidades que significa la matemática escolar. Precisamente, a continuación, se describen los aspectos relevantes de la propuesta.

## Presentación

Trabajos como los realizados por Dienes y Golding (1973), Sherard (1976), Hoffer (1977), Frostig (1978), Lurcat (1979), Sauvy et al (1980), Dickson (1984), Bishop (1986), Del Grande (1987), Martínez (1993), Cárdenas (2004), entre otros, al momento de ser explorados, resaltaron la idea de que cuando los niños ingresan a la escuela poseen múltiples nociones intuitivas sobre el espacio, las cuales contribuyen a la resolución de problemas a los que se enfrentan cotidianamente. Este hecho se convierte en una posibilidad para que la escuela, desde los niveles iniciales de formación, incentive acciones que enriquezcan y amplíen dichas nociones, intuiciones e ideas infantiles sobre el espacio, para

contribuir en el proceso de su representación, construcción y aprehensión y desde allí incorporar aquellas habilidades básicas de matematización (Bishop, 1986) como, por ejemplo, las habilidades visuales, verbales, de dibujo y de análisis, entre otras.

Como se observa, a pesar de su importancia, en la mayoría de las instituciones escolares de educación primaria esta situación no se concibe al momento de estructurar y organizar los procesos y actividades del quehacer matemático en el aula. En parte, esto se debe a la proclividad a potenciar y legitimar los aspectos relacionados con la aritmética y la adquisición de las cuatro operaciones matemáticas esenciales.

Y es que, precisamente, reconocer y valorar la existencia de esas vivencias y experiencias de conocimiento espacial de los niños es un componente primordial para la iniciación, desarrollo y constitución del pensamiento espacial y geométrico —componentes fundamentales del *pensamiento matemático*— y de proyectos pedagógicos en esta vertiente. Pero, además, es una apertura al universo simbólico de las matemáticas escolares; y más cuando uno de los objetivos fundamentales de este saber radica en el enriquecimiento de estas formas de pensamiento infantil. Pues, para entonces, se comprendió que, en tanto se impulsara su enseñanza, se estaba favoreciendo el conocimiento, la exploración, orientación, localización y distribución del espacio, así como el manejo de información espacial y geométrica que aporta elementos de análisis a la solución de problemas que el mundo en el que actuaban les planteaba.

Al respecto, los estudios realizados por Alan Hoffer (1977) han probado que *es posible aprehender simultáneamente las habilidades de percepción visual* (propias

del pensamiento espacial) y *conceptos geométricos, como una manera de favorecer el proceso de construcción espacial*. No obstante, la limitada preocupación de la escuela por ayudar a los estudiantes a apropiarse, moverse y construir sus representaciones espaciales provocaba, entre otras cosas, que la geometría prácticamente hubiese desaparecido de los planes de estudio (Castañeda 2000).

Aun cuando se ha pretendido la enseñanza geométrica en la escuela, el proceso se ha simplificado a la enseñanza de algunos elementos de la geometría euclidiana (véase, por ejemplo, los conceptos de *figuras planas* como el cuadrado, rectángulo, triángulo, circunferencias y sólidos como el cono, cilindro, pirámide), desconociendo como lo afirman Sauvy, et al (1980) que el espacio es una totalidad que se compone de relaciones topológicas, proyectivas y euclidianas. Siendo las relaciones topológicas aprehendidas primero por los niños antes que las proyectivas y sobre todo que las euclidianas. Por esto, según Piaget e Inhelder, “las relaciones topológicas, tales como abierto-cerrado, compacto-agujereado, entrelazado-superpuesto, etcétera, se reconocen antes que relaciones euclidianas tales como curvilíneo-rectilíneo, igualdad-desigualdad de los lados, amplitud de los ángulos, número de ángulos, relaciones métricas intrasfigurales, etcétera” (Vurpillot, 1985, p. 87).

Posición que es cuestionada por diversos investigadores, entre ellos, Lovell (1959), quien en sus estudios “no encuentra que sus sujetos tengan más dificultad en distinguir un círculo de una elipse o de un semicírculo que una forma abierta de una forma cerrada”. A pesar de esta divergencia, lo importante radica en devolverle la importancia a la geometría —ya sea desde lo topológico, proyectivo o euclidiano— dentro de los currículos

escolares principalmente en la educación primaria, puesto que es una de las rutas para impulsar el desarrollo del pensamiento espacial y geométrico de los niños. En conjunto, varios estudios (véase, por ejemplo, los realizados por Colmez (1977), Fey (1979), citados por Bishop (1986)) han logrado demostrar que algunos docentes de la educación primaria, privilegian, en gran medida para la clase de matemáticas, la adquisición de destrezas, habilidades y conocimientos aritméticos y numéricos, manejo de algoritmos relacionados con las cuatro operaciones básicas y memorización de procedimientos mecánicos para la resolución de problemas y ejercicios, muchas veces descontextualizados.

Es clave destacar adicionalmente que las habilidades básicas en matemática no son exactamente aquellas que se necesitan para sobrevivir, sino que son aquellas habilidades esenciales para experimentar una vida completa, independiente, razonable y exitosa (Sherard, 1976). Lo que significa comprender que aquello «*que deberían enseñar los maestros y aprender los niños*» con respecto a las matemáticas escolares, es decir, el desarrollo de destrezas relacionadas con operaciones aritméticas es demasiado restringido y no ofrece mayores posibilidades de exploración matemática. Lo que reduce en gran medida el accionar de los docentes y, por supuesto, de los estudiantes a la mecanización de procesos algorítmicos, hundiendo la matemática escolar en las más profundas aguas del aburrimiento y la apatía. Lo que, al mismo tiempo, se constituye en un obstáculo para formular alternativas pedagógicas que redunden en la transformación del quehacer matemático en la escuela.

Por esta razón, se observa cómo aún, a pesar de estas narrativas

[...] hoy en día los niños son torturados con una rutina de años de insípidas tareas; métodos cuyos orígenes se remontan a los inicios de la era de la industrialización y que ya deberían estar completamente superados. Hasta mediados del siglo XX el mercado laboral exigía de los trabajadores básicamente tres destrezas: leer, escribir, restar y sumar (aritmética) (Enzensberger, 2001, p. 20).

Ahora bien, a pesar de ser importante en el proceso de aprendizaje matemático escolar, el desarrollo de estas habilidades operatorias absolutamente nada tienen que ver con el *pensamiento matemático*. Por el contrario, en muchas ocasiones se convierten en uno de los mayores impedimentos para lograr su desarrollo, permaneciendo inmerso en los imaginarios colectivos de los maestros como lo más importante en la enseñanza de las matemáticas en la educación primaria y como la garantía de aprendizaje matemático.

Lo preocupante de ello es que estos *requerimientos del siglo pasado* se mantuvieron —y se mantienen todavía— inamovibles en el imaginario colectivo de los maestros y de su quehacer pedagógico, de los padres de familia y al parecer de la sociedad en general, encajándose como verdades que orientan las prácticas de enseñanza y como una *condición social* para lograr desempeñarse y ser reconocido escolar, laboral y económicamente. Y esto gracias a que generación tras generación han sido validados por las mismas comunidades, sin sufrir alteración alguna, lo cual se vislumbra cotidianamente en que los mismos padres de familia formados bajo estas orientaciones pedagógicas exigen de la escuela los mismos requerimientos y resultados para sus hijos. Lo anterior abre una posibilidad de intervención pedagógica y didáctica con acciones para desarrollar el pensamiento matemático infantil.

Y es que cuando los maestros privilegian solo la aritmética, tienden a oscurecer la idea de que casi todo el mundo —en especial los niños— afronta con mayor frecuencia problemas espaciales que problemas aritméticos y numéricos en su vida cotidiana; este planteamiento persiste y se valida en la comunidad educativa, a pesar del reconocimiento que se hace en diversos estudios, como los llevados a cabo en el marco de los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998), por el Ministerio de Educación Nacional (MEN) y por Mason (1988), en los que se valora la importancia del desarrollo integral de los elementos que constituyen el *pensamiento matemático*. Es decir, los campos de lo *métrico*, lo *numérico*, lo *variacional*, lo *probabilístico*, lo *aleatorio* y, por supuesto, lo *espacial y geométrico* desde el inicio del aprendizaje escolar. Por tal motivo, cabe recordar que el *pensamiento matemático* es una forma de representar y comprender el mundo, esto es un proceso dinámico que, al aumentar la complejidad de las ideas, extiende la capacidad de comprensión de los seres humanos (como lo sostiene Mason (1988)) y les permite a los niños conectarse con el mundo e interactuar de un modo distinto con él.

En este sentido, es necesario preguntarse: si los niños poseen diversas nociones y vivencias de conocimiento espacial, ¿por qué seguir manteniendo un esquema de enseñanza en el aula centrado en lo aritmético y numérico — claro está, sin desconocer su importancia y la de los otros elementos constitutivos del pensamiento matemático en el trabajo escolar—, dejando de lado lo geométrico y espacial?

Lo anterior suscitó que se planteara como alternativa de trabajo pedagógico “*La enseñanza de la topología a través de la cartografía*”, que integra la enseñanza de la topología con la cartografía para articular el *pensamiento matemático* — en los componentes *espacial* (habilidades de percepción visual) y *geométrico* (nociones topológicas) — al quehacer en el aula y transformar la mirada existente sobre este ambiente de aprendizaje en la escuela.

De este modo se apostó por involucrar otras disciplinas, como la geografía, la astronomía y la cartografía a la enseñanza geométrica; pues mediante el empleo de materiales como los mapas y planos de diversos lugares en los que se destacan sitios, se trazan itinerarios en forma de rutas y caminos, en donde los cruces de calles y carreras pueden ser asumidos como *vértices* y las calles y carreras mismas como aristas, es factible orientar procesos de aprendizaje e introducir el conocimiento de nociones topológicas como *abierto*, *cerrado*, *adentro*, *afuera*, *frontera*, *región*, (interior y exterior), *grafo*, *camino*, *vecindad*.

## El pensamiento matemático: el desarrollo de la percepción espacial y la enseñanza de la geometría

Una de las tendencias actuales frente al quehacer matemático en las instituciones educativas es el desarrollo del *pensamiento matemático* de los estudiantes como una condición para reorientar las prácticas pedagógicas, las actividades didácticas, las metodologías y, en general, todo aquello que acontece en el ambiente de aprendizaje

matemático. De esta forma, se trasciende aquel modo de enseñanza enfocado al aprendizaje de contenidos y la adquisición de habilidades operatorias y aritméticas, para enfocarse en los procesos de pensamiento propios de la matemática.

Pero, al mismo tiempo, con ello se trastoca la imagen de la matemática escolar como un saber acabado, aburridor, de estructura rígida y

[...] consistente, sin contradicciones y secuencial, en donde un concepto es prerequisite del siguiente, [en que] lo importante es establecer leyes o algoritmos para aplicar y solucionar problemas similares, [dejando] poca opción de crear y las satisfacciones se presentan solo cuando se coincide en los resultados (Corporación Escuela Pedagógica Experimental (CEPE), 1989, p. 2).

Ahora bien, entre las razones que han influenciado la persistencia de esta manera particular de comprender el saber matemático, está la creencia de que los niños no están capacitados para pensar de manera abstracta antes de una edad determinada, y que su pensamiento es el producto del desarrollo de un estadio evolutivo, lo que circunscribe *su pensar* en una serie de etapas que los niños deben alcanzar y superar, facultándolos solamente para apropiarse concretamente del mundo de la matemática.

Y es que cuando los niños transforman las imágenes en símbolos y representaciones, sostiene Gattegno (1964), *están pensando*, puesto que poseen un *pensamiento multivalente* de gran intelectualidad y simbolismo. A lo que se suma lo señalado por Arnheim (1986), quien argumenta que el acto de pensar exige imágenes y las

imágenes contienen pensamiento. Por consiguiente, al observar cada uno de estos planteamientos, se valida el hecho de que los niños durante su proceso de escolarización primaria están desarrollando y constituyendo su pensamiento. Bajo esta perspectiva, cabe entonces preguntarse por qué no contribuir en el crecimiento de esta facultad mediante las actividades que se proponen en el ambiente de aprendizaje matemático, para que, de esta manera, se dé inicio al camino del progreso del *pensamiento matemático*.

Esto implica que al presentarse la matemática escolar como un contenido *terminado*, y a su vez considerar que los niños no *piensan matemáticamente* antes de una edad determinada, se corre el riesgo de que “la única actitud posible de quien se aproxima a su estudio [sea] la aceptación” (CEPE, 1989, p. 2). Lo anterior genera que se aborde esta disciplina escolar *mecánicamente*, favoreciendo procesos de memorización que implican la aplicación de algoritmos a ejercicios descontextualizados que escasamente inducen a los niños a la sorpresa y contradicción, a abordar desafíos y retos, a ser creativos, propositivos, a emprender búsquedas particulares y colectivas, a ser recurrentes, a conjeturar, a establecer estrategias. En fin, a llevar a cabo el sinnúmero de procesos que le permitan constituir su pensamiento matemático, pues carecen del desarrollo evolutivo de su pensamiento para realizarlos.

Efectivamente, afirma Dienes (1970), ante estas condiciones son muchos los niños que sienten antipatía por las matemáticas, la cual aumenta con la edad; la mayor parte de ellos nunca logra comprender el significado

real de los conceptos matemáticos y, en el mejor de los casos, se convierten en *consumados técnicos* en el arte de manejar complicados conjuntos de símbolos y operaciones que simplemente sirven para su desenvolvimiento escolar. La mayor parte de las veces, acaban renunciando a comprender las imposibles situaciones en que las exigencias matemáticas de hoy los colocan, asumiendo una actitud particular y usual, la de esforzarse por aprobar un examen, tras lo cual nadie dedica a las matemáticas pensamiento alguno.

A pesar de esto, es fundamental destacar que esta situación ha ido cambiando paulatinamente en las instituciones de educación primaria. Prueba de ello son cada una de las transformaciones que se les han realizado a los planes de estudio escolares, y las experiencias pedagógicas que han apostado por el desarrollo y constitución del pensamiento matemático de los niños<sup>3</sup>, lo que ha demostrado que el pensamiento matemático no está relacionado con edades y estadios de evolución definidos. Esto ha posibilitado además reconocer que en cualquier momento dentro del proceso de la educación escolar, los niños pueden enfrentarse y abordar actividades matemáticas que orienten su sentido hacia el desarrollo de su pensamiento matemático; *pensar matemáticamente* no es un hecho *aislado y casual*, sino que es un horizonte que incita a reflexionar a los maestros sobre sus acciones pedagógicas frente al quehacer matemático escolar y la necesidad de modificarlas, acondicionarlas y ajustarlas.

Esto al mismo tiempo posibilita que, cada vez con mayor frecuencia, los padres de familia se sientan identificados

---

**3** Algunos de esos trabajos están desarrollados en Maestros en colectivo. Ambientes de Aprendizaje en el Aula. Una experiencia en colectivo. IDEP. Bogotá. 2006. p. 38-78.

con el desarrollo del pensamiento matemático, en la medida en que se sorprenden ante los desafíos y las *nuevas actividades* matemáticas que desarrollan los niños y comparten en casa. Ahora comúnmente se escucha a los niños pronunciar términos propios del lenguaje matemático, como «grafos», «continuidad», «fronteras», «conexión», que reflejan un paulatino cambio no solamente en la enseñanza de la matemática escolar, sino en los imaginarios de los padres de familia y de la comunidad educativa en general frente a este campo. Esto es el fruto de la influencia de los adelantos que en los últimos años ha tenido la matemática, entre los que se destacan la *teoría de grafos*, *de los cuatro colores*, *los fractales*, *las teselaciones*, y por supuesto la *topología*.

## Diseño y aplicación de la propuesta

El desarrollo de la propuesta estuvo enmarcado por cuatro momentos:

- *Diseño de la propuesta*
- *Implementación y ajustes de la propuesta en el aula*
- *Sistematización, evaluación, ajustes y seguimiento*
- *Análisis de resultados y reflexiones finales.*

En el primer momento, se llevó a cabo una indagación teórica alrededor de los estudios e investigaciones que apoyaban el desarrollo del pensamiento espacial y geométrico en la perspectiva de relacionar la cartografía con la topología, así mismo se exploraron los referentes legales que afirmaban la propuesta. Es así como aparecen, por ejemplo, los argumentos expuestos en los *Lineamientos Curriculares* (1998), en donde se aprecia la lectura de mapas y la construcción geométrica como una ruta para acercar a los estudiantes a la medición y el desarrollo de conceptos y destrezas matemáticas.

Para complementar, se destacó la importancia de las unidades didácticas como la estrategia metodológica en el aula más adecuada y conforme con los planteamientos de la propuesta, y como una forma de programación y actuación que organiza los procesos, actividades y contenidos del aprendizaje estudiantil frente a las intenciones pedagógicas del maestro. Epistemológicamente, se adoptaron los planteamientos expuestos por Ander-Egg (1996), quien define una unidad didáctica como una estructura basada en la integración sistemática de un conjunto de elementos, a saber, las *actividades*, *los contenidos*, *las opciones metodológicas*, *la secuenciación de contenidos* y *los materiales y recursos didácticos*.

En esta perspectiva, se diseñó e implementó la unidad didáctica "Mapas planos y rutas" teniendo en cuenta como referentes de la estructura los siguientes aspectos:

- Las **Nociones Topológicas** para desarrollar: 1. Región (interior, exterior), 2. Frontera (conexa, no conexa, simple, no simple), 3. Caminos (curvos, cerrados, rectos, abiertos), 4. Puntos (frontera interior, exterior), 5. Vecindad, 6. Grafos (recorrible, no recorribles), 7. Vecindad y teoría de los cuatro colores.
- Las siete **habilidades de percepción espacial**: 1. Coordinación viso-motriz 2. Percepción figura-fondo 3. Constancia perceptual 4. Percepción posición en el espacio, 5. Discriminación visual, 6. Relaciones de percepción espacial 7. Memoria visual.
- Los **recursos didácticos** para utilizar (materiales y textos): geoplanos, laberintos, mapas temáticos, históricos, políticos, de viaje y rutas, planos de la escuela, salón de clases, lugares del barrio, ciudades, cuadrículas, fotografías aéreas, satelitales, cartas astronómicas; textos como atlas, libros escolares, guías de trabajo.



- Los **contenidos programáticos** abarcan tres grandes niveles por capítulos: Caminos y fronteras; Regiones y Puntos; Grafos y polígonos, Polígonos, Movimiento y Teselaciones.

- Las **actividades para desarrollar**. Se diseñaron como actividades: *Dibujando caminos y rutas por los planos y mapas; Dibujando fronteras por los mapas y planos; Regiones, fronteras y grafos en movimiento; Fronteras, caminos y polígonos; Laberintos; Regiones y puntos; Coloreando regiones sobre mapas; Trazando polígonos sobre mapas y planos; Dibujando grafos sobre mapas y planos; Dibujando y coloreando teselaciones. Las anteriores subdivididas a su vez en actividades preliminares a desarrollar y de extensión*, cada una con sus intenciones u objetivos y criterios de evaluación.

- Por último, se construye la forma como se lleva a cabo el proceso de **secuenciación de las actividades**, que hace referencia a los tiempos y al orden que se establecen en el cronograma general, para implementar los contenidos y actividades de la unidad didáctica.

Una vez diseñada la unidad didáctica, se da paso al segundo momento, *la implementación en el ambiente de aprendizaje matemático*. Se entiende que el ambiente de aprendizaje es una interacción intersubjetiva que favorece el trabajo colectivo, pues es allí donde se construyen formas de relación entre los sujetos mismos y el conocimiento escolar; además, se contribuye en el proceso del reconocimiento del otro, en la participación y validación del saber y hacer de cada uno de los niños.

Sin embargo, es necesario destacar que en algunas ocasiones, en el planteamiento de las actividades, se favorece el trabajo individual como una estrategia para reconocer las maneras distintas y particulares en que

los niños enfrentan y abordan los desafíos matemáticos propuestos. Es importante mencionar que las actividades a desarrollar deben procurar ser *interesantes* para los niños y adoptar la forma de retos y desafíos, pues ello incentiva la curiosidad, creatividad, exploración y búsqueda de posibles soluciones, permitiéndoles abordar los problemas de conocimiento matemático con una mirada diferente. Por esto, el trabajo colectivo se reconoce como una acción para aprender, conocer y construir en el aula, pues posibilita que los niños se reconozcan y acepten a sí mismos, en sus fortalezas y debilidades, y al otro como un sujeto con el que se puede construir tanto conocimiento como relaciones interpersonales y de convivencia distintas en el aula.

Durante el tercer momento de la *sistematización, evaluación, ajustes y seguimiento de la propuesta*, se enriquece el proceso de constitución del pensamiento espacial y geométrico en los niños con cada una de las actividades propuestas. Para dar cuenta de ello, se diseña una serie de instrumentos que permiten evidenciar, de un lado, el desarrollo de la propuesta misma, y de otro, el proceso de aprendizaje geométrico de los niños.

Los ajustes realizados a la propuesta estuvieron preliminarmente relacionados con el rediseño de algunas actividades planteadas. Por ejemplo, una de las actividades consistía en buscar ciertos lugares sobre el mapa, pero a algunos estudiantes, al “no saber leer”, se les dificultó el ejercicio; por tal razón fue necesario traer ya demarcados los lugares sobre el mapa que sirvieron de referente para el trabajo.

El cuarto momento, *análisis de resultados y reflexiones finales*, arroja elementos que permiten examinar, transformar y construir las categorías de análisis que van a evidenciar la práctica pedagógica, caracterizar el

ambiente de aprendizaje matemático en el aula, ajustar y evaluar los procesos de implementación y desarrollo de la propuesta y reconocer el aprendizaje geométrico de los estudiantes. De esta forma se fortalece el trabajo en el aula como una alternativa en la educación matemática — integrando otras disciplinas— en los primeros años de escolaridad, utilizando los mapas y planos en el proceso de aprehensión espacial desde las relaciones topológicas, lo que valida a su vez la hipótesis de que sí es posible desarrollar simultáneamente procesos de aprendizaje geométrico y espacial.

Es fundamental señalar cómo el trabajo en la clase revela que las intenciones y búsquedas de los niños y el maestro son distintas. Mientras el interés de los estudiantes está enfocado hacia la resolución de los retos y actividades que se formulan, el maestro centra su atención en indagar los procesos de aprendizaje estudiantiles a través de la sistematización de la propuesta y el reconocimiento de sus avances, obstáculos, dificultades y fortalezas. Los resultados esperados con la gran mayoría de estudiantes son satisfactorios, en tanto se evidencia la construcción de nociones topológicas en el trabajo sobre las representaciones cartográficas, cambios en sus verbalizaciones, en la relación con los otros en el trabajo en grupo, en su actuar.

Luego de los esfuerzos anteriores, uno de los mayores alcances fue lograr la publicación del libro *La enseñanza de la topología a través de la cartografía*, publicado por la Cooperativa Editorial Magisterio (2007), que recoge el trabajo llevado a cabo con el cual se pretende favorecer el desarrollo del pensamiento espacial y geométrico de los niños a través de la relación entre la topología y la cartografía y, en este sentido, reconocer que es posible construir otra escuela, que allí en este escenario es

posible que el maestro transforme y construya conocimiento pedagógico factible de colocar en el ámbito público y en la comunidad académica para ser discutido y enriquecido.

Así, la propuesta “*La enseñanza de la topología a través de la cartografía*” se convierte en una alternativa de la educación matemática para la escuela, que trasciende la enseñanza enfocada en la adquisición de habilidades para realizar ejercicios que implican la aplicación de las operaciones básicas, y da apertura a la exploración de otros campos que favorecen el desarrollo del pensamiento matemático en los niños.



ISBN 978-628-7535-23-7

# **Teselaciones para niños: una estrategia para el desarrollo del pensamiento geométrico y espacial de las niñas y niños en el aula**

Cuando “*Teselaciones para niños*”, una propuesta elaborada por los profesores James Frank Becerra Martínez, Óscar Leonardo Cárdenas Forero y Sonia Milena Uribe Garzón, apareció en el año 2004 como una alternativa pedagógica en el campo de las matemáticas escolares, su intención se enfocó en el desarrollo de las habilidades espaciales, geométricas y artísticas de los niños, empleando como estrategia de intervención el campo de las teselaciones. A través de este dispositivo didáctico se lograba avanzar en el desarrollo de aquellas habilidades de pensamiento que se relacionaban con unos de los campos del pensamiento matemático: el espacial-geométrico. A continuación, se describe el proceso de sistematización de esta experiencia educativa, en el marco del enfoque arqueogenalógico foucaultiano, con lo que se procuró tomar distancia de la propuesta para *problematizarla, desnaturalizarla* y develar aquellos enunciados que se manifestaban como verdades en esta apuesta de innovación pedagógica en el campo de la enseñanza del saber matemático. Como maestros, adoptamos el carácter de arqueólogos que excavan en el archivo del trabajo pedagógico los vestigios que se instalan como verdades; y de genealogistas que visibilizan los relacionamientos de poder que hicieron posible aquellas verdades develadas por la función arqueológica.

## Presentación

«No hay nada que interpretar. No hay nada absolutamente primario para interpretar, porque en el fondo ya todo es interpretación» (Foucault, 1970, p. 35-36. Citado por Jódar, 2007. p. 34)

Una de las apuestas contemporáneas de la escuela primaria ante la marcada tendencia a iniciar, constituir y desarrollar el *pensamiento matemático de los estudiantes*

a partir de “la adquisición de destrezas, habilidades y conocimientos aritméticos y numéricos, manejo de algoritmos relacionados con las cuatro operaciones básicas, memorización de procedimientos mecánicos para la resolución de problemas o ejercicios” (Benítez y Cárdenas, 2008, p. 2), se relaciona con el desarrollo de los pensamientos geométrico y espacial como uno de los aspectos constitutivos del pensamiento matemático.

Con la irrupción de esta experiencia pedagógica en la escuela, se procuró contrarrestar la manera como se venía adelantando la enseñanza de las matemáticas en el aula; es decir, otorgando una *exagerada* atención a las prácticas educativas relacionadas con el aprendizaje aritmético, el manejo de operaciones básicas, el abordaje de ejercicios matemáticos descontextualizados. Condiciones que, en su momento, fueron utilizadas para configurar una subjetividad escolar singular, caracterizada por la *afabilidad* y mecanización de su accionar en el aula, en donde se consideraba que la memorización era el factor fundamental para el ejercicio matemático y para consolidar una manera distinta de actuación frente a las matemáticas escolares.

Precisamente, cuando incursionó “*Teselaciones para niños*”, se pretendieron resquebrajar estas circunstancias que parecían establecidas para consolidar una acción de intervención pedagógica que resaltaba la necesidad e importancia del desarrollo de las habilidades espaciales, el estudio de la geometría y la construcción de una imagen distinta del saber geométrico y espacial. En fin, una alternativa que destacó y reconoció que era posible desarrollar el pensamiento geométrico y espacial de los niños a través de las teselaciones.

Gracias a su implementación se resaltó el valor de la geometría en el escenario del pensamiento matemático y se contribuyó al desarrollo del razonamiento geométrico; los niños aprendieron a resolver situaciones en este campo, se apropiaron de un lenguaje y desarrollaron las habilidades geométricas esenciales para la construcción y representación geométrica del espacio, como por ejemplo las habilidades visuales, verbales, de dibujo, analíticas y aplicadas, entre otras.

Sin embargo, la intención no era solo destacar lo anteriormente señalado sino a incorporar e implantar la idea de que era posible la formación de un niño que *pensaba matemáticamente*, que ingresa con múltiples nociones espaciales que se podían mejorar y desarrollar en el contexto escolar, a través de este tipo de propuestas de innovación pedagógica y didáctica.

Esto significó que, con la inclusión en el acontecer escolar de *“Teselaciones para niños”*, se gestó e instauró en el aula una subjetividad escolar distinta, más activa, reflexiva, autónoma y dirigente de sus actuaciones, que toma decisiones, que presenta alternativas de solución a los problemas planteados. Y que, ante todo, se apropia de las capacidades, habilidades, conocimientos y valores que se requieren para su funcionamiento y desenvolvimiento en la sociedad contemporánea. Por consiguiente, la experiencia se convirtió en una *emergente* práctica educativa, en un nuevo modo de subjetivación del niño en la escuela; ya no empleando procedimientos propios del *disciplinamiento*, sino con la intervención de mecanismos de gobierno que le permite constituirse en un sujeto activo, móvil, propositivo y flexible frente a sus comportamientos, a sus pensares y actuares, vivificando sus acciones y transmutando su quehacer diario. Lo que lo convierte en una subjetividad autorregulada,

“empresario de sí”, siempre en curso y en constante transformación.

Además de estas intenciones de subjetivación, *“Teselaciones para niños”* procuró resquebrajar ciertos imaginarios y prácticas establecidas en cuanto a la enseñanza geométrica. En esta medida, resaltó que investigadores como Quaranta (2002) señalan que los avances en la didáctica de las matemáticas han develado que muchas de las nociones incluidas por Piaget respecto a la construcción de la noción de espacio, hoy están revaluadas. Y, con ello *desvirtúa* que “los niños aprenden paso a paso, acumulando adquisiciones, que aprenden lo que el maestro les enseña, tal cual se los enseña y solo lo que les enseña” (Quaranta, 1998, p. 16). De este modo, se introdujo con la apuesta pedagógica una manera distinta tanto de comprender al niño como del saber y de las prácticas de enseñanza geométrica, apostándole adicionalmente a exaltar aquellas narrativas que impulsaban la necesidad de “[...] pensar, en cambio, que el aprendizaje procede a través de progresivas aproximaciones parciales” (p. 16). Con lo anterior se avanzaba en el *rompimiento* de paradigmas instaurados en la escuela que, no solo obstaculizaban el aprendizaje y la construcción de conocimiento geométrico y espacial por parte de los estudiantes, sino la definición de alternativas pedagógicas y didácticas que se pudieran enfocar en el pensamiento matemático.

Así las cosas, *“Teselaciones para niños”* incursionó nuevamente la geometría a la escuela a través de producciones artísticas, de las teselaciones, de mosaicos, para abordar nociones y concepciones geométricas con los niños incorporando una nueva idea de saber, de enseñanza y de producción subjetiva, lo que transfiguró el diagrama escolar y pedagógico establecido para

introducir maneras distintas de ser niño, de ser maestro y de hacer matemáticas en el aula. Con lo que, paralelamente, se impulsan modos de subjetivación que instalan una nueva subjetividad escolar que piensa matemáticamente, que propone alternativas de solución frente a los retos que se le formulan, que tiene capacidad de ser creativo, de trabajar colectivamente y que, en definitiva, potencia su pensamiento espacio-matemático, geométrico y artístico como una condición de desempeño escolar y social.

## Un giro estratégico en las matemáticas escolares

Las narrativas expuestas en *“Teselaciones para niños”* develaron que durante mucho tiempo en la escuela las matemáticas consistieron esencialmente y de manera universal en el trabajo alrededor de las operaciones con los números, los aprendizajes aritméticos, la enseñanza de diversas temáticas como la regla de tres, los porcentajes, la semejanza de figuras planas, las escalas e interpretación de mapas y gráficos, el sistema métrico decimal, las definiciones y propiedades simples de las figuras geométricas, entre otras. Por lo que la enseñanza de la matemática en la educación primaria se preocupó por desarrollar la facilidad de los alumnos para la computación aritmética (Bishop, 1986, pp. 184-185), la adquisición de los algoritmos de las cuatro operaciones básicas y al desenvolvimiento aritmético.

De esta forma, según las retóricas de *“Teselaciones para niños”*, las habilidades lógico-matemáticas, a pesar de resultar insuficientes para el conocimiento matemático y el desarrollo del razonamiento matemático (Santaló, 1994, p. 26-27), especialmente de los niños, se

instituyeron como dispositivos de regulación de la niñez escolarizada y en mecanismos de reconocimiento (y «exclusión») de las subjetividades escolares. La adquisición de dichas habilidades se valida entonces como la condición necesaria para el funcionamiento escolar y social, legitimándose como verdades orientadoras de las prácticas educativas matemáticas a través de los cuales se corregían y acondicionaban determinados comportamientos y actitudes infantiles en el aula, “normalizándolas” y vigilándolas con el objeto de controlar la producción subjetiva, particularmente, en el ambiente de aprendizaje matemático.

Estas circunstancias hicieron posible que las matemáticas en la escuela, específicamente en el aula de clase, constantemente se restringieran al ejercicio y mecanización de la operatoria propia de este campo (Becerra y Cárdenas, 2004, pp. 3-4), haciendo que los niños fueran concebidos como subjetividades dóciles, frágiles, pasivas y reproductoras de conocimiento matemático. Y con esto, reconocidos como “sujetos que no sabían” y a los que se les debía impregnar de contenidos, operatorias, ejercicios y actividades asociadas al saber aritmético.

Más que tener una intención educadora, *“Teselaciones para niños”* permitió vislumbrar que esta forma de proceder de las matemáticas en el aula pretendía *amoldar* al niño a cierto estilo de vida establecido y a unas condiciones subjetivas instauradas. Esto es, convertirlo en una subjetividad obediente y heterónoma, que aprendiera mecánica y memorísticamente matemáticas, para lo cual se recurrió a unas prácticas de disciplinamiento escolar cuyo único objetivo fue el de producir una subjetividad sumisa y pasiva que funcionara conforme con las reglas de la racionalidad establecida.



A pesar de esto que parecía establecido, uno de los “giros más significativos” (Jimeno, 2002) que se comenzó a gestar en la escuela ocurrió cuando se incorporaron las “nuevas matemáticas”. Con su inclusión los niños dejaron de enfrentarse solamente a la aritmética para afrontar “la manipulación de objetos concretos” y a desarrollar actividades relacionadas con “la teoría de los conjuntos” como una manera distinta de acercarse a las matemáticas.

La curricularización de estos nuevos saberes, que entraron en conflicto con las ideas allí implantadas en torno a la aritmética, se constituyeron en las condiciones para que existiera no solo una nueva forma de comprender el saber escolar, sino una nueva manera de producir a los sujetos escolares, quienes comenzaron a ser reconocidos como poseedores de una “competencia matemática” y a comprender que hacer matemáticas no era solo un privilegio de unos pocos: todos estaban en posibilidad de “hacer matemáticas” y no solo aprender algunas rutinas y destrezas (Jimeno, 2002).

No obstante, las condiciones se iban a alterar nuevamente para posibilitar la incursión de un modo alternativo de ser de las matemáticas escolares. Esto es, un ideario que comprendió que este saber escolar era una conjunción de sistemas (numérico, espacial, métrico, aleatorio, etc.), lo que ampliaba el campo de conocimiento y permitía el desarrollo de aspectos como el pensamiento matemático infantil.

Así, “*Teselaciones para niños*” demostró que las matemáticas en la escuela no estaban reservadas para personas especiales o especialmente dotadas, capaces de descifrar este enigmático universo simbólico: pensar matemáticamente dejó de ser una excepción, un hecho

aislado, una causal y exótica manifestación de la naturaleza (Enzensberger, 2001), para configurarse en una posibilidad de actuación escolar y de transformación de la enseñanza matemática. Al dejar de ser una rareza, se configuró en una posibilidad de innovación, en un campo a explorar por la pedagogía y la didáctica, localizándose con fuerza en el campo escolar para transformar las prácticas de enseñanza, los modos de constituir sujetos, de elaborar discursos y de configurar institucionalidades. Así, con la introducción de “*Teselaciones para niños*” operando conforme las reglas de funcionamiento de la época, se gestó la producción de una nueva subjetividad infantil; un niño escolarizado al que se le reconoció con capacidad para pensar matemáticamente, con habilidades espaciales y geométricas a desarrollar, con disposición para el trabajo en equipo. Esto es, una «entidad diferente individualmente», que puede aprender conceptos y procedimientos matemáticos (Becerra y Cárdenas, 2004, pp. 3-4) más allá de las cuatro operaciones y de los aprendizajes aritméticos.

## “Potenciar el pensamiento matemático: un reto escolar”

“*Teselaciones para niños*” permitió resaltar que, para el momento de su emergencia, aparecía naturalizado en la escuela el hecho de que potenciar en los niños su pensamiento, particularmente el matemático, era un reto escolar. Sin embargo, esto no siempre fue así, ya que en cierta época se consideró que el pensamiento de los niños, es decir, “el acto de pensar”, estaba sujeto a un acto particular de un estadio de desarrollo dado (Gattegno, 1964, p. 7).

Esto generó que se enunciara que el pensamiento abstracto podía desarrollarse mucho más allá de lo que aparecía establecido, posibilitando la constitución de un niño que piensa de manera abstracta, matemáticamente, independientemente de su estadio de desarrollo (Gattegno, 1964).

De este modo, se empieza a enunciar que:

[...] pensar matemáticamente no es un fin es sí mismo; es un proceso mediante el cual podemos aumentar nuestro entendimiento del mundo que nos rodea y ampliar nuestras posibilidades de elección. Y al ser una forma de proceder, tiene unas aplicaciones muy amplias, no solo para enfrentarse a problemas matemáticos o científicos, sino mucho más generales (Mason, Burton, & Stacey, 1988, p. 163).

De hecho, la irrupción de estos planteamientos constituyó las condiciones para construir una escuela y unas subjetividades escolares distintas a la existentes. Es decir, una escuela “que en lugar de girar en torno del conocimiento lo haga del pensamiento” (Perkins, 1995, p. 21), en la que lo “importante [es] buscar en los alumnos la adquisición de un hábito de pensar matemáticamente” (Sánchez & Bonilla, 1988, p. 10).

Es reconocida por docentes, investigadores y padres de familia, la necesidad urgente de enfocar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas hacia el desarrollo de formas de pensar y de actuar que hagan a los estudiantes creativos para enfrentar la solución de problemas no solo del mundo particular de las matemáticas, sino en los diferentes ámbitos del mundo cambiante y dinámico que le corresponde vivir (Legarda, 2000, p. 5).

Son precisamente todas estas prácticas de saber, poder y subjetivación las que, actuando conjuntamente, configuraron en determinado momento las condiciones de emergencia de la experiencia pedagógica “*Teselaciones para niños*” como una acción de intervención pedagógica, didáctica y de formación subjetiva en la escuela primaria.

## Los nuevos saberes instituidos

Entre los saberes que se escolarizaron para desarrollar el pensamiento matemático de los niños, la experiencia pedagógica “*Teselaciones para niños*” adoptó el trabajo con las *teselaciones* como un nuevo saber que se instituyó para potenciar, precisamente, ese sujeto-niño que piensa matemáticamente e ingresa a la escuela con muchas nociones sobre el espacio, que tenidas en cuenta contribuyen al desarrollo de su pensamiento geométrico y espacial.

De esta manera, “*Teselaciones para niños*” fue una propuesta que nació en su momento como una innovación o alternativa pedagógica, que más que continuar con la perspectiva de disciplinamiento infantil establecido en la escuela durante mucho tiempo, y que empleaba mecanismos asociados al campo de lo aritmético o la mecanización de algoritmos, le planteó al sujeto-niño un cúmulo de alternativas distintas y de múltiples potenciales para acceder a las matemáticas y, en especial, a la geometría; con esto indujo la producción de una subjetividad distinta, intelectualmente con potenciales susceptibles de utilizarse para resolver problemas matemáticos. Con ella se configuró una nueva manera de proceder en el aula, que irrumpió para enfrentar ciertas formas o prácticas de las enseñanzas institucionalizadas, aceptadas pedagógicamente como válidas; entre las

que estaban, precisamente, considerar la aritmética y el manejo de las cuatro operaciones como fundamentales para el aprendizaje y la formación matemática infantil.

Por esta razón, “*Teselaciones para niños*”, se constituyó no solamente en una estrategia pedagógica para introducir a los niños en el estudio de las teselaciones y de los conocimientos geométricos, sino en una *práctica de gobierno infantil* que indujo la producción de una subjetividad infantil que pensaba matemáticamente y que poseía capacidades y habilidades de carácter espacial, geométrico y artístico. Así, con la experiencia, se configuran unas condiciones dentro del aula que entran en conflicto con lo establecido para permitir la emergencia de una subjetividad que piensa matemáticamente y una manera distinta de hacer la clase de matemáticas mediante el *fomento de habilidades de pensamiento matemático*. Con lo anterior se develó que “*Teselaciones para niños*” no es simplemente una apuesta efecto de la voluntad de unos maestros ni de la necesidad de innovar implementando estrategias que permitan el desarrollo de los procesos propios del pensamiento matemático, sino que, por el contrario, incursionó el efecto de unos juegos de poder específicos, de unos “juegos de acciones sobre acciones”.



ISBN 978-628-7535-23-7

# **Mundo fractal:** propuesta didáctica para el desarrollo del pensamiento espacial y geométrico de los niños

Para comienzos de 2011, a cargo del profesor Óscar Leonardo Cárdenas Forero, se incorporó en la escuela la experiencia pedagógica “*Mundo fractal: propuesta didáctica para el desarrollo del pensamiento espacial y geométrico de los niños*”, con la que se pretendió el desarrollo del pensamiento geométrico de los niños en la escuela primaria acudiendo al campo de los fractales. A continuación, se describen sus fundamentos, principios y características:

## Presentación

En las últimas décadas, se han introducido nuevos conceptos, prácticas, reflexiones y contenidos en el campo de las matemáticas que incluyen asuntos relacionados con el “caos determinista, la iteración, los sistemas dinámicos, los fractales, las teselaciones [...]” (Castañeda Tinoco, 1997, p. 3), que han derivado y contribuido en la constitución de modos distintos de abordar, en particular, la enseñanza de la geometría en la escuela. Junto con esto, se han incluido alternativas para el desarrollo del pensamiento geométrico y espacial de los niños, por lo general asumido a partir de conceptualizaciones euclidianas o, en su defecto, rezagado o supeditado al olvido en la estructuración de los contenidos matemáticos. Mientras que en las prácticas de la enseñanza de la matemática basadas en la resolución de problemas, el trabajo con geometría parece estar ausente “[...] privilegiándose actividades centradas en la presentación de los objetos geométricos y sus propiedades” (Héctor Ponce, 2000, citado por Formeliano, 2011, p. 2).

Frente a estas condiciones surgió la necesidad de proponer una alternativa pedagógica y didáctica que trascendiera la enseñanza de la geometría fundada exclusivamente en la apropiación de definiciones conceptuales y

en el manejo de contenidos de la geometría euclidiana. Dicha estrategia de intervención se basó en un escenario emergente del trabajo matemático, el *mundo de la geometría fractal*, enfocado entre otras cosas al estudio de los *fractales* y la *dimensión fractal*, términos acuñados por el matemático “[...] Benoit Mandelbrot para denotar figuras geométricas que tienen la propiedad de tener una dimensión fraccionaria, además de ser semejantes en pequeña escala. Aunque las ideas fueron establecidas en el siglo XIX por el matemático francés Gastón Julia” (Castañeda, 1997, p. 2).

Así las cosas, el mundo de los fractales se ha venido paulatinamente presentando no solo como una posibilidad de apropiarse de “bellas estructuras de una alta complejidad matemática” (Castañeda, 1997, p. 18), sino que se ha convertido en un nuevo campo de exploración para la enseñanza de la geometría y el desarrollo del pensamiento geométrico y espacial de los niños, que complementa la enseñanza de los conceptos euclidianos o topológicos presentes en ocasiones, en particular en la escuela primaria.

De este modo, como una manera alternativa de reconocer la importancia de la geometría, de producir una nueva subjetividad, de introducir en el aula nuevas formas de comprender esta disciplina escolar y de proponer alternativas para el desarrollo del pensamiento espacial y geométrico de los niños, se formulan trabajos orientados a cuestionarse acerca de qué *estrategias didácticas favorecen el desarrollo del pensamiento espacial y geométrico de los niños de básica primaria*, pues del modo como se estaban configurando las matemáticas eran muy proclives al desarrollo de los aspectos numéricos, al manejo de la operatoria y al aprendizaje mecánico y descontextualizado, dejando de lado a la geometría

como un componente y un escenario para el desarrollo del pensamiento geométrico y espacial, especialmente de los niños de la escuela primaria.

Con base en lo anterior, se posibilitó la inclusión de trabajos como el de “*Mundo fractal*”; una alternativa didáctica en el campo de la enseñanza de la geometría en la escuela primaria, orientada al desarrollo del pensamiento espacial y geométrico de los niños, que busca no solo introducirlos en el mundo maravilloso de los fractales, sino contribuir en la apropiación de las bases que conforman la geometría fractal y reconocer con ello algunas formas semirregulares creadas matemáticamente como el Triángulo de Sierpinski, Conjunto Cantor, Esponja de Menger, Curva de Peano, entre otros, para comprender asuntos geométricos y matemáticos que la geometría euclidiana no ha podido resolver. Así mismo, se busca que los niños sean productores de objetos fractales que les permitan relacionarse con el mundo de las matemáticas de una forma distinta.

Metodológicamente, esta alternativa se constituyó en tres momentos. En la **preparación** se diseña la propuesta, la cual se materializa en una secuencia didáctica que integra una serie de unidades didácticas: la unidad *Fractales en la Naturaleza*, en la que reconocen aquellas formas creadas por ella y en la que los niños vivencian, manipulan y se relacionan con objetos, productos, e imágenes fractales; se los orienta a indagar en diversos medios las múltiples maneras como en la naturaleza ciertos objetos adoptan formas fractales, y se les motiva a desarrollar procesos de pensamiento relacionados con la *comparación* y la *relación*.

En *Introducción a los fractales* los niños se enfrentan al conocimiento y construcción de los fractales creados a lo

largo de la historia por famosos matemáticos (Triángulo de Sierpinski, Curva de Koch, Esponja de Menger) y se busca desarrollar los procesos de pensamiento *observación y descripción*.



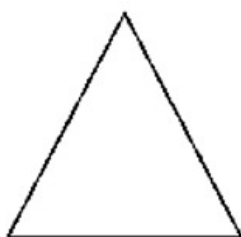
Figura 1. Ejemplo de guía de trabajo

### GUÍA DE TRABAJO TRIÁNGULO DE SIERPINSKI

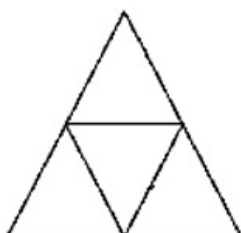
**Intención:** Reconocimiento de los triángulos

Un **triángulo equilátero** es polígono regular con tres lados iguales y de ángulos de 60 grados (agudo).

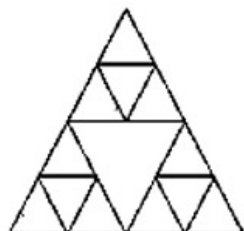
**Actividad:** Observa el triángulo y señala sus lados o aristas, sus vértices y ángulos.



**Número de lados:** \_\_\_\_\_ **Número de regiones interiores:** \_\_\_\_\_  
**Número de vértices:** \_\_\_\_\_ **Cantidad de triángulos equiláteros:** \_\_\_\_\_  
**Número de ángulos:** \_\_\_\_\_



**Número de lados:** \_\_\_\_\_ **Número de regiones interiores:** \_\_\_\_\_  
**Número de vértices:** \_\_\_\_\_ **Cantidad de triángulos equiláteros:** \_\_\_\_\_  
**Número de ángulos:** \_\_\_\_\_



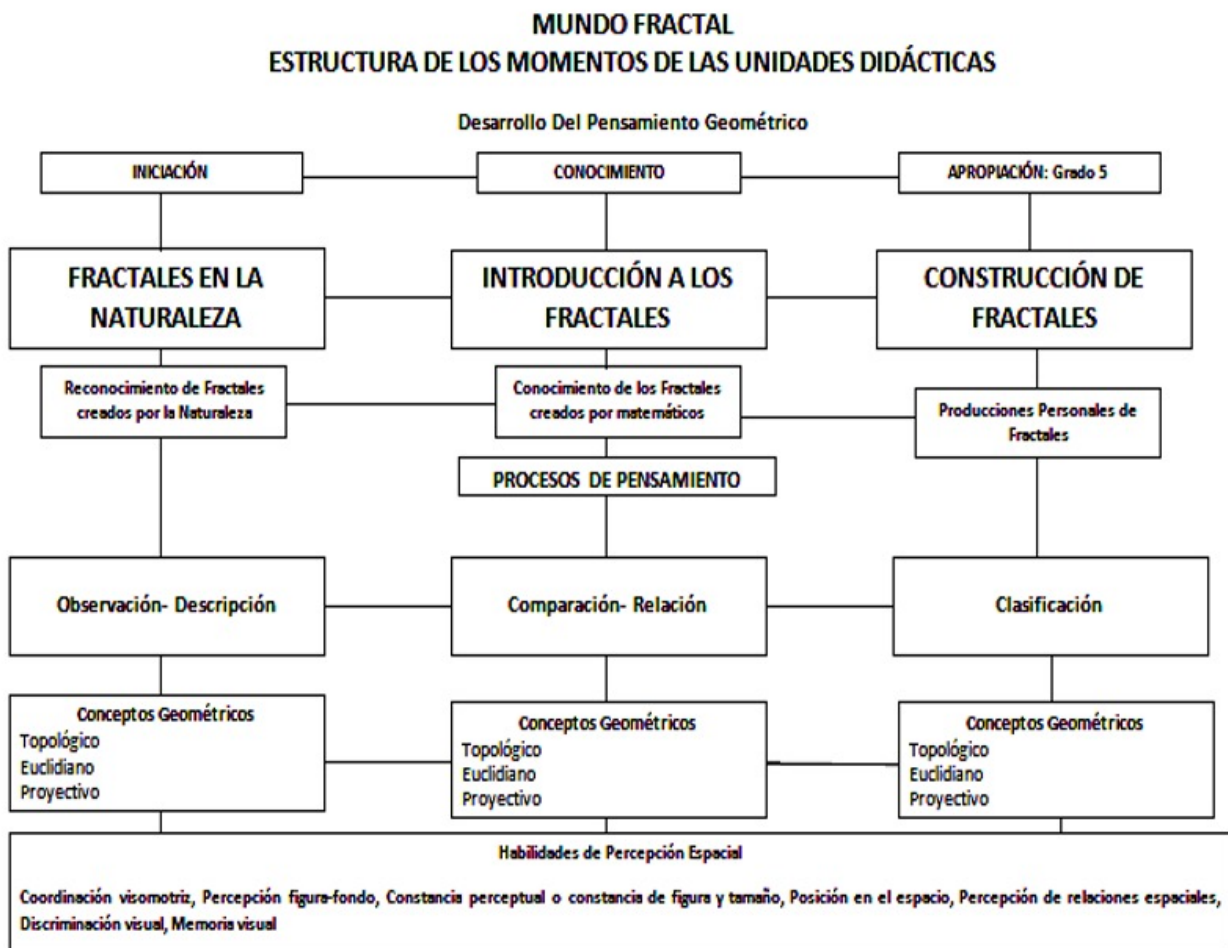
**Número de lados:** \_\_\_\_\_ **Número de regiones interiores:** \_\_\_\_\_  
**Número de vértices:** \_\_\_\_\_ **Cantidad de triángulos equiláteros:** \_\_\_\_\_  
**Número de ángulos:** \_\_\_\_\_

Fuente: elaboración propia

*Construyendo fractales*, espacio en el que se enfrentan a la producción de sus propias creaciones; cada unidad se enfoca al conocimiento y apropiación del mundo de los fractales, trabajo que se fundamenta en la exploración

preliminar de todo lo relacionado con un mundo tan complejo como este, que permite reflexionar sobre aspectos centrales de la enseñanza de la geometría en la educación primaria.

Figura 2. Estructura de los momentos de las unidades didácticas



Fuente: elaboración propia

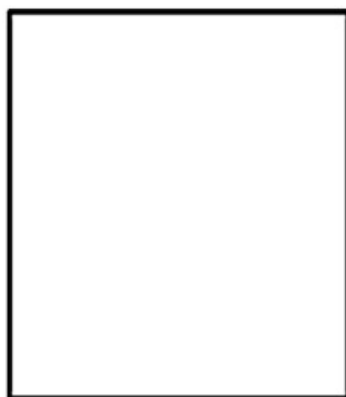
En un segundo momento, el de la *ejecución* del trabajo, se llevan al aula las actividades didácticas materializadas y articuladas a las unidades didácticas, en la forma de una serie de guías de trabajo en las que aparecen los propósitos, los contenidos geométricos a apropiar, las actividades introductorias, una breve reseña de la

historia del fractal y su creador y las actividades a desarrollar. Y, por último, la actividad para la casa, en la que los niños conjuntamente con sus padres diseñan cada uno de los fractales en distintos materiales, poniendo en acción los conceptos aprehendidos y abordados en las sesiones de clase.

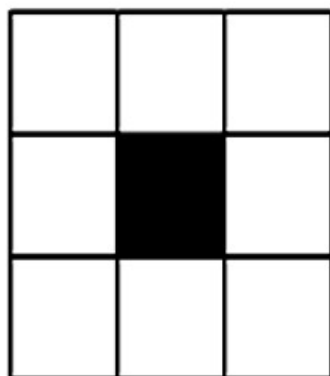
Figura 3. Actividades en el aula

### Actividades iniciales

Observa la imagen y resuelve las preguntas



1. ¿Conoces la imagen que aparece?
2. ¿Qué nombre recibe? ¿Qué tipo de polígono aparece en la imagen?
3. ¿Qué te permite afirmar que el objeto es lo que tú crees o dices?
4. ¿Qué características tiene ese polígono en términos de?
  - a. Forma:
  - b. Cantidad de lados o aristas:
  - c. Cantidad de vértices:
  - d. Cantidad de ángulos:
  - e. Cantidad de regiones interiores:



1. ¿Cuántos cuadrados aparecen dibujados?
2. ¿Cuántos lados o aristas aparecen en la imagen?
3. ¿Cuántos vértices aparecen en la imagen?
4. ¿Cuántos ángulos aparecen en la imagen?
5. ¿Cuántas regiones interiores aparecen en el dibujo?

Fuente: elaboración propia

En el tercer momento, el de la *reflexión, ajustes y evaluación*, se tiene la oportunidad de ajustar el trabajo y reflexionarlo, de transformar la práctica de enseñanza, de observar la pertinencia de los contenidos, de pensarse con lo acontecido en el aula. Cabe señalar que Mundo fractal se constituye una propuesta que se fundamenta didácticamente en los principios expresados por Brousseau, para quien la enseñanza se debe pensar en términos de un proceso centrado en la producción del conocimiento matemático en el ámbito escolar; esto significa comprender “el aula como un ámbito de producción de conocimientos matemáticos”, en el que el sujeto es un productor de conocimiento.



ISBN 978-628-7535-23-7

# **La abstracción geométrica: estrategia didáctica para el desarrollo del pensamiento geométrico de los niños en la escuela primaria**

Para 2013 irrumpió en la escuela primaria “*La abstracción geométrica: estrategia didáctica para el desarrollo del pensamiento geométrico de los niños en la escuela primaria*”, elaborada por el profesor Óscar Leonardo Cárdenas Forero e implementada en el colegio Entre Nubes Sur Oriental IED, que pretende desarrollar el pensamiento geométrico de los niños de la escuela primaria acudiendo al campo artístico de la abstracción geométrica. Y, con esto, enfrentar, mediante el desarrollo del razonamiento geométrico infantil en el aula, la marcada tendencia a privilegiar el aprendizaje de los asuntos aritméticos y a la apropiación de los algoritmos de las cuatro operaciones en la enseñanza de la matemática escolar.

Conceptualmente, se fundamenta en los aportes realizados por Hoffer, Broitman, Fripp, Benítez, Varela, Itzcovich y Quaranta, entre otros. Y, metodológicamente recurrió al diseño y ejecución de una unidad didáctica constituida por actividades de enseñanza-aprendizaje que, enmarcadas en la abstracción geométrica, procuraron el desarrollo del pensamiento geométrico infantil. Se halló que es factible acercar a los niños al estudio geométrico y a la construcción de una imagen matemática del espacio integrando los elementos de la abstracción geométrica.

Con la implementación de la propuesta, se logró destacar la importancia del pensamiento geométrico en el fortalecimiento del razonamiento matemático, la resolución de problemas geométricos, la apropiación de un lenguaje y en el desarrollo de las habilidades necesarias para la construcción geométrica del espacio. En esta medida, a continuación, se describen sus elementos constitutivos:

## Presentación

Con la incursión de determinadas narrativas y prácticas escolares, el valor educativo de la geometría se ha venido reconociendo y constituyendo en uno de los componentes fundamentales en el proceso de formación matemático de los niños en la escuela primaria. Gracias ello, se ha resaltado su importancia como un contenido escolar básico a incorporar en la estructura curricular de la enseñanza matemática y en el desarrollo del razonamiento matemático. Y con esto, como un componente necesario para la representación y la construcción geométrica espacial, así como un territorio pedagógico en el que es posible indagar, formular y definir propuestas de innovación didáctica, dirigidas ya sea hacia su aprendizaje, o al desarrollo específico de un asunto como, en este caso, del pensamiento geométrico infantil.

Junto con esto, muchas de esas acciones de innovación planteadas por actores educativos como los maestros, se han gestado, por un lado, como estrategias de resistencia frente a lo que aparece y permanece instituido respecto a la enseñanza de la geometría escolar; la marcada tendencia a resaltar el valor del *aprendizaje aritmético*, la resolución de *ejercicios y problemas descontextualizados* de la cotidianidad estudiantil, “la adquisición de destrezas, habilidades y conocimientos [...] numéricos, [el] manejo de *algoritmos* relacionados con las cuatro operaciones básicas, [y la] memorización de procedimientos mecánicos para la resolución de problemas o ejercicios” (Benítez & Cárdenas, 2007, p. 2).

Y de otro lado, han surgido para confrontar a aquellas prácticas de enseñanza que, a pesar de tener un propósito con la geometría, se concentran en utilizar sus estrategias de intervención en el desarrollo del pensamiento



espacial como condición básica de formación matemática. O, al contrario, se encaminan principalmente a “la enseñanza de algunos elementos de la *geometría euclidiana* como, por ejemplo, el manejo de ciertos conceptos relacionados con polígonos como el cuadrado, el rectángulo, el triángulo, la circunferencia y algunos sólidos como el cono, los prismas, el cilindro y la pirámide” (Uribe, Cárdenas & Becerra, 2014, pp. 136-137). Esto es, a “[...] la “presentación” de los objetos geométricos, sus relaciones y sus propiedades sin oportunidad para los alumnos de atribuir sentido a esos conocimientos” (Sadovsky, Parra, & Broitman, 1998, p. 5), negándoles a los niños “[...] la posibilidad de conocer otro modo de pensar [...] de vivir la experiencia de involucrarse con otras formas de razonamiento que son específicas de este dominio” (Itzcovich, 2005, p. 10).

De acuerdo con ello, y ante la relevancia que se le otorga al aprendizaje aritmético y al manejo mecánico de las operaciones básicas en la enseñanza matemática de la educación primaria relegando los asuntos geométricos, surgió la necesidad de cuestionarse acerca de qué estrategia didáctica aportaría elementos de reflexión para cuestionar esta prevalencia del modo de ser de la enseñanza matemática y se preocupara por el desarrollo del pensamiento geométrico de los niños de primaria. Efecto de esto, se diseñó, formuló e implementó, en el año 2013, una estrategia didáctica que se materializó en la unidad didáctica “*Los elementos básicos de la geometría: observación, relación, análisis y resolución*”, constituida por una serie de actividades de enseñanza-aprendizaje que, enmarcadas en el campo artístico de la abstracción geométrica, procuró el desarrollo del pensamiento geométrico.

Con su incorporación, se buscó además confrontar una

situación señalada por Broitman (2000), según la cual, aún en la escuela permanece emplazado aquel pensamiento piagetiano que considera que, para representar y acercar a los niños al campo de lo geométrico, es necesario transitar por el espacio real, desarrollando previamente nociones espaciales como *arriba de, abajo de, a la derecha de, encima de*, entre otras. Sin embargo, se ha logrado comprender que para aproximarlos a situaciones geométricas, *no precisamente* deben recorrer el espacio real y los aspectos matemáticos acoplados a lo espacial. Esto generó la posibilidad de que la propuesta se centrara en el desarrollo del pensamiento geométrico sin la obligación de acoplarlo al pensamiento espacial, pues se comprendió que los objetos de la geometría (puntos, figuras, cuerpos, etc.) no pertenecían a un espacio físico real, sino a un “espacio teórico, conceptualizado” (Itzcovich, 2005, p. 10). Y que, con su desarrollo, era factible enseñarles a los niños a “[...] demostrar la validez de una afirmación mediante argumentos” (Quaranta & Ressa de Moreno, 2009, p. 51).

## Desarrollo de la comunicación

Múltiples investigaciones han develado la trascendencia del desarrollo del pensamiento geométrico en la formación de los sujetos escolares, en la medida en que contribuye a “la matematización del espacio y la resolución de problemas de orden geométrico” (Uribe & Cárdenas, 2017, p. 181), a la identificación de las características de las figuras planas y los sólidos geométricos, a la relación entre variables, clasificación de objetos, planeación y verificación de hipótesis, conjetura e identificación de cambios, movimientos y alteraciones en las formas. De igual forma, permiten conocer las características y las relaciones de las figuras y los cuerpos geométricos y tener la disposición para resolver situaciones y problemas

de carácter geométrico, en las que “se ponen en juego las propiedades de los objetos geométricos” (Itzcovich, 2005, p. 13), las cuales aportan sustanciales elementos en el proceso de representación y construcción matemática del espacio.

Debido a su enseñanza, es posible aproximar a los niños al estudio de las formas geométricas (líneas, figuras, sólidos) sin que necesariamente haya un acercamiento con el espacio sensible o con la resolución de problemas cotidianos. Más allá de esto, con la exploración geométrica en el aula es posible introducirlos en el mundo de las abstracciones, las deducciones y las demostraciones, en donde, además, es factible el desarrollo de sus potenciales intelectuales básicos (observación, descripción, clasificación, relación, etc.) y el manejo y apropiación de elementos que facilitan argumentar, deducir, inferir, conjeturar y resolver problemas geométricos. Por ello, entre los objetivos de la enseñanza geométrica escolar estarían “[...] la construcción de conocimientos geométricos elaborados a lo largo de la historia de la humanidad, y en un modo de pensar propio del saber geométrico” (Quaranta & Ressa de Moreno, 2009, p. 51).

Sin embargo, más que apostarle a la relación entre el pensamiento espacial y los sistemas geométricos, en los últimos años se han venido postulando propuestas en la escuela que se distancian de esta perspectiva para circunscribirse “exclusivamente” en el desarrollo del pensamiento geométrico, sin que necesariamente se integren al desarrollo del pensamiento espacial. Para el diseño de estas propuestas, se ha logrado comprender lo primordial, como lo establecieron Berthelot y Salin (1994), de distinguir entre los *conocimientos espaciales*, de carácter empírico e intuitivo y propios del espacio físico-sensible, y los *conocimientos geométricos*,

específicos de un espacio teórico-conceptual, en el que se suscitan abstracciones y demostraciones cuya validez se instituye de modo deductivo, asociado a las propiedades singulares de las formas geométricas, al momento de formular acciones de intervención en el aula.

Frente al desarrollo del pensamiento geométrico, Hoffer (1990) señala que este proceso está asociado a la existencia esencial de cinco habilidades básicas en geometría, susceptibles de ser enseñadas en los niveles elementales, como son: *habilidades visuales* (propuestas por Frostig (1978) y Horne (1978) y Hoffer (1967)) (Benítez & Cárdenas, 2008, p. 6), que conjuntamente facilitan la representación, visualización y exploración gráfica de los niños, a través de “[...] elementos visuales o espaciales, tanto mentales como físicos, utilizados para resolver problemas o probar propiedades” (López & García, 2008, p. 48); las *habilidades verbales* o de comunicación asociadas al manejo del lenguaje y vocabulario geométrico; las *habilidades de dibujo*, integradas a la capacidad de los niños para manifestar ideas empleando como medios de representación las gráficas y diagramas; las *habilidades lógicas*, que contribuyen a que los niños aprendan “a analizar la forma de un argumento y a reconocer argumentos válidos e inválidos en el contexto de las figuras geométricas” (Hoffer, 1990, p. 14); y las *habilidades aplicadas*, relacionadas con la capacidad de poner en acción y movimiento los aprendizajes geométricos.

Es más, con el desarrollo de estas habilidades geométricas es factible avanzar y profundizar en los procesos de pensamiento de los estudiantes, los cuales se pueden articular al desarrollo del pensamiento geométrico. Esto es, siguiendo a De Sánchez (2002), organizarse alrededor de los procesos *básicos*, relacionados con las *operaciones*

*elementales* como observación, comparación, relación, clasificación simple, ordenamiento y clasificación jerárquica, y los *procesos integradores* como análisis, síntesis y evaluación, los cuales son el fundamento en los que se apoyan el conocimiento y razonamiento.

## Estructura de la unidad didáctica

La unidad didáctica “Los elementos básicos de la geometría: observación, relación, análisis y resolución”, está constituida por los contenidos de enseñanza geométricos, unos objetivos de aprendizaje, unos procesos de pensamiento (observación, descripción, comparación, clasificación, diferenciación, conceptualización, análisis, etc.); unas habilidades en geometría (visuales, verbales, de dibujo, lógicas y aplicadas) y las actividades didácticas, de carácter preliminar, de desarrollo y profundización, orientadas a contribuir a pensar geométricamente como uno de los componentes fundamentales del pensamiento matemático y como una propuesta para afrontar una de las situaciones que aún se percibe en la enseñanza de la matemática en la escuela primaria. Esto es, la tendencia a destacar el valor de la aritmética y la apropiación de los algoritmos de las operaciones básicas en el trabajo matemático escolar.

## Proceso de intervención pedagógica

El proceso de intervención pedagógica se enmarcó en tres momentos. El primero, el de **diseño**, orientado a la definición de la propuesta de intervención en el aula, que se caracterizó por la exploración *epistemológica, pedagógica y didáctica*, que permitió la indagación

conceptual, pedagógica y didáctica en relación con los elementos que sustentan el trabajo. Así, en este momento de diseño, no solo se definieron los elementos constitutivos de la unidad didáctica, sino que se acoplaron las actividades de enseñanza de la unidad didáctica al propósito del desarrollo del pensamiento geométrico de los niños y, por supuesto, a las producciones artísticas de los representantes de la *abstracción geométrica*, que sirven de contexto tanto para aproximar a los estudiantes al conocimiento geométrico como al conocimiento del arte abstracto mismo.

En el segundo momento, el de **ejecución**, se efectúa el proceso de intervención en el aula, enfrentando a los niños a las actividades de enseñanza delineadas por el maestro; para el caso de la propuesta de innovación, se privilegiaron formas de trabajo individual y colectivo para la realización de las actividades mismas. Es el instante en el que los niños resuelven las preguntas que se les plantean, hacen sus cuestionamientos y manifiestan sus ideas, respuestas y puntos de vista, pero también en el que observan, comparan, clasifican y se aproximan a la constitución de su pensamiento geométrico, apropiándose de un lenguaje y de una conceptualización propia de este saber escolar, que se emplea para explicar y comprender un espacio teórico, matematizado e ideal: el espacio geométrico. Este momento le permite al maestro recolectar la información respecto a las dificultades y avances en los procesos de aprendizaje y de desarrollo del pensamiento geométrico de los niños, lo cual se sistematiza en cuadernos de notas y diarios de campo a través de técnicas como la observación en clase.

Por tanto, es precisamente el maestro quien se encarga de organizar las interacciones entre los estudiantes y las

matemáticas, para aprender a aprender a través de ese contacto directo con este saber escolar y para “facilitar el trabajo de matematizar la realidad de los alumnos” (Sotos, 1993, p. 185).

Y, por último, está el momento de **evaluación**, referente para estudiar lo que Vergnaud (1985, citado por Sotos, 1993, p. 184) denomina el *sistema didáctico*, esto es, ese conjunto de elementos que intervienen en la enseñanza de las matemáticas para con ello analizar la *situación didáctica* (“relaciones establecidas entre alumnos, profesor y el medio que les rodea con la intención de que los alumnos adquieran un determinado saber establecido” (p. 186)) y el proceso de ejecución de las actividades de enseñanza en el aula, a fin de establecer la relación entre las intenciones formuladas y los alcances del maestro, determinando los avances, las dificultades y los asuntos a mejorar de lo ejecutado en el aula.

que se utiliza para explicar la ocurrencia de eventos y resolver las situaciones geométricas que se les presentan en clase. Gracias a lo anterior, se ha conseguido introducir en la escuela primaria una propuesta didáctica que no solo ha permitido implicar a los padres de familia en las actividades formuladas y validar la incursión de una apuesta en la que se involucran el arte y la geometría, sino reflexionar las maneras como se enseña y asume la geometría y se desarrolla el pensamiento geométrico.

## Reflexiones finales

Se ha logrado contribuir a la transformación del lugar de la geometría escolar, un saber que “[...] trabaja con objetos ideales que se pueden manipular mentalmente, que no dependen de lo que perciben [...] [los] sentidos” (López & García, p. 21), dentro de la estructura curricular matemática en la escuela en donde se ejecuta la propuesta y avanzar en el desarrollo del pensamiento geométrico. Por su parte, los niños se han aproximado al reconocimiento de los elementos básicos de la geometría, a la construcción matemática del espacio, de sus objetos, representaciones, formas y propiedades. A su vez, se ha logrado avanzar en el mejoramiento de los resultados de las evaluaciones internas (institucionales) y externas formuladas por el Estado, y con ello favorecer el manejo y la apropiación de un lenguaje geométrico

# Bibliografía

- Alsina-Catalá, C, Fortuny, J. & Pérez, R. (1997). ¿Por qué geometría? Propuestas didácticas para la ESO. Ed. Síntesis.
- Ander-egg, E. (2005). Debates y propuestas sobre la problemática educativa. Algunas reflexiones sobre los retos del futuro inmediato. Homosapiens Ediciones.
- Arnheim, R. (1986). El pensamiento visual. Ed. Paidós.
- Becerra Martínez, J. F. & Cárdenas Forero, Ó. L. (2000). El Estudio de las Inteligencias Múltiples: Una posibilidad de diseñar currículo desde el aula. (Proyecto de Investigación). Documento sin publicar.
- Becerra Martínez, J. F. & Cárdenas Forero, Ó. L. (2004). Pensar matemáticamente: Una manera distinta de enfocar el ambiente matemático en la escuela (Ponencia).
- Benítez Agudelo, M. L. & Cárdenas Forero, O. L. (2007). La enseñanza de la topología a través de la cartografía. Didácticas Magisterio. Cooperativa Editorial Magisterio.
- Benítez Agudelo, M. L. & Cárdenas Forero, O. L. (junio de 2008). La enseñanza de la topología a través de la cartografía: Una experiencia matemática en básica primaria. Ponencia presentada al V Encuentro Iberoamericano de Colectivos y redes de maestros que hacen investigación e innovación desde su escuela y comunidad.
- Berthelot, R., & Salin, M. (1994). La enseñanza de la geometría en la escuela primaria. Grand N. (53). Universidad de Bordeaux. Ministerio de Cultura y Educación. PTFD.
- Bishop, A. (1986). ¿Cuáles son algunos de obstáculos para el aprendizaje de la geometría? Estudios en Educación Matemática. Enseñanza de la Geometría. (5). Unesco. Editado por Morris.
- Bozal, A. et. al. (1994). Taller de Matemáticas. Guía para el profesorado. Narcea Ediciones. Ministerio de Educación y Ciencia.
- Broitman, C. (2000). Reflexiones en torno a la enseñanza del espacio. Educación Matemática. Propuestas de trabajo, experiencias y reflexiones. La educación en los primeros años. Ediciones Novedades Educativas. <http://books.google.com.co/books?id=3C1NH2xedbgC&pg=PA41&lpg=PA41&dq=BRUN+J+GEOMETRIA&source=bl&ots=4zuQkVvaNR&sig=jv8M2amnvdhyHHzWzVNU-jgeOtV4&hl=es&sa=X&ei=yKK3UvzJMImFkQD-8YGoDQ&ved=0CDcQ6AEwAg#v=onepage&q=BRUN%20J%20GEOMETRIA&f=false>
- Cárdenas Forero, Ó. L. (julio – diciembre de 2004). La enseñanza de la Topología a través de la Cartografía. Nodos y nudos (2)17. Universidad Pedagógica Nacional.
- Castañeda-Tinocco, R. (1997). Sistematización de una experiencia de matemáticas contemporáneas en el aula. Convenio IDEP 051-1996. CEPE.
- Castañeda-Tinocco, R. (agosto de 2000). Introducción a la Matemática Contemporánea con ayuda del ordenador. La geometría dinámica en el aula de clase. Material de apoyo pedagógico. Corporación Escuela Pedagógica Experimental (CEPE).
- Clemens-Stanley, R., O' Daffer, Phares G. & Cooney, T. J. (1988). Geometría. Geometría con aplicaciones y solución de problemas. Adisson Wesley.
- Coriat, M., Sancho-Gil, M., Gonzalvo, P. & Marín del Moral, A. (1989). Nudos y Nexos. Redes en la escuela. Editorial Síntesis.
- Corporación Escuela Pedagógica Experimental (CEPE). (noviembre de 1989). Algunas observaciones sobre la enseñanza de la matemática. Coloquio de Matemáticas.

- De Sánchez, M. (2002). La investigación sobre el desarrollo y la enseñanza de las habilidades de pensamiento. *Revista Electrónica de Investigación Educativa* (4)1. <http://redie.ens.uabc.mx/vol4no1/contenido-amestoy.h>
- Del Grande, J. (2000). Spatial Perception and Primary Geometry. En: *Learning and Teaching Geometry*, 1987. Traducido por Silvia Bonilla.
- Dickson, L. Brown, M. & Gibson, O. (1991). El aprendizaje de las matemáticas. Ed Labor.
- Dienes, Z. P. (1970). La construcción de las matemáticas. Ed. Vicens- vives.
- Dienes, Z. P. & Golding E. W. (1973). Juegos que conducen a una cierta comprensión de la geometría. En: *Exploración del espacio y práctica de la geometría*. Ed. Teide.
- Dienes, Z. P. & Golding E. W. (1973). Topología. Geometría proyectiva y afín. Ed. Teide.
- Enzensberger, M., H. (diciembre – enero de 2001). Puentes levadizos fuera de servicio. *Las matemáticas allende la cultura*. El malpensante. 20-27.
- Ferrero, A. y Villa, A. (1988). Mapas Topológicos de América Latina: Superficie, población y PIB por habitante. En: *Revista Paisajes Geográficos*. (21).
- Fripp, A. & Varela C. (2012). Pensar geoméricamente. 4º Congreso Uruguayo de Educación Matemática. <http://semur.edu.uy/curem/actas/procesadas1348011188/actas.pdf>
- Fripp, A. & Varela, C. (2012). Pensar geoméricamente. Actas del cuarto Congreso Uruguayo de Educación Matemática (CUREM 4), 11-16. <http://funes.uniandes.edu.co/17654/1/Fripp2012Pensar.pdf>
- Frostig, M. et. al. (1978). Figuras y Formas. Programa para el Desarrollo de la Percepción Visual. Ed. Médica Panamericana.
- Gardner, H. (1997). Estructuras de la Mente. La teoría de las Inteligencias Múltiples. Fondo de Cultura Económica.
- Garro Moreno, D. (2005). Historia de la Topología. En: *Historia de las matemáticas*. Universidad Autónoma de Madrid.
- Gattegno, C. (1964). El material para la enseñanza de las matemáticas. Aguilar Editores. Madrid.
- Geltner, P. & Peterson, D. (1998). Geometría. Thomson Editores. Tercera Edición México.
- Gutiérrez, Á. & Jaime A. (agosto de 1991). El modelo de razonamiento de Van Hiele como marco para el aprendizaje comprensivo de la Geometría. Un ejemplo: Los Giros. *Educación Matemática*. (3). Editorial Iberoamérica.
- Hoffer, A. (abril de 1990). La geometría más que una demostración. *Notas de Matemática*. (29), 10-24. Universidad de Oregón.
- Instituto Geográfico Agustín Codazzi (IGAC) (1998). Principios básicos de cartografía temática.
- Itzcovich, H. & Broitman, C. (2001). Orientaciones didácticas para la enseñanza de la geometría en EGB. Documento No. 3. Provincia de Buenos Aires Dirección General de Cultura y Educación Subsecretaría de Educación Dirección Provincial de Educación de Gestión Estatal Dirección de Educación General Básica Gabinete Pedagógico Curricular - Matemática <http://servicios2.abc.gov.ar/docentes/capacitaciondocente/plan98/pdf/geometria.pdf>
- Itzcovich, H. (2005). Iniciación al estudio didáctico de la geometría. De las construcciones a las demostraciones. Libros del Zorzal. <https://juliobaigorria.files.wordpress.com/2016/04/iniciaci3b3n-al-estudio-didc3a1ctico-de-la-geometr3a-da-horacio-itzcovich.pdf>



- Jaime-Pastor, A. (julio de 1994). La enseñanza de las isometrías del plano desde la perspectiva del modelo de Van Hiele. UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas. (1).
- Jimeno Pérez, M. (2002). Al otro lado de las fronteras de las matemáticas escolares problemas y dificultades en el aprendizaje matemático de los niños y niñas de tercer ciclo de primaria (Tesis Doctoral). Departamento de Didáctica y Organización Escolar. Facultad de Ciencias de la Educación. Universidad de Málaga. [www.documat.unirioja.es/servlet/listatesis?tipo...](http://www.documat.unirioja.es/servlet/listatesis?tipo...)
- Jódar, F. (2007). Alteraciones Pedagógicas. Educación y Políticas de la Experiencia. Ed. Laertes Educación. Barcelona.
- López-Escudero, O. L. & García Peña, S. (2008). La enseñanza de la geometría. Material para apoyar la práctica educativa. Textos de divulgación. Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación. México. <https://www.inee.edu.mx/wp-content/uploads/2019/01/P1D401.pdf>
- Lurcat, L. (1979). El niño y el espacio. La función del cuerpo. Ed. F.C.E.
- Maestros en colectivo. (2006). Ambientes de Aprendizaje en el Aula. Una experiencia en colectivo. IDEP.
- Malagón, J. (1998). Clase de Matemáticas. En: La Construcción de la Confianza. Una experiencia en proyectos de aula. CEPE-IDEP.
- Martínez-Álvarez, N. (1993). El aprendizaje de las nociones topológicas en el grado primero de primaria. Tesis de Grado. Universidad Externado de Colombia.
- Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1988). Pensar Matemáticamente. Ed. Labor. Barcelona.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN). (1996). Indicadores de Logros Curriculares. Resolución 2343. Documentos. Bogotá.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN). (1998). Lineamientos Curriculares Matemáticas. Editorial Delfin Ltda. Bogotá.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN). Lineamientos Curriculares en Matemáticas. Cooperativa Editorial Magisterio y Editorial Libros & Libros S. A.
- Ministerio de Obras Públicas. (1970). Diccionario de Cartografía. Centro Interamericano de Fotointerpretación.
- Monkhouse, F. J. (1978). Diccionario de términos geográficos. OIKOS-TAU. España- Ediciones.
- Morales-Giraldo, M. (2002). El problema de los puentes de Königsberg. [www.ual.jcaceres/koni.html](http://www.ual.jcaceres/koni.html).
- Muñoz-Quevedo, J. M. (2003). Topología Básica. Universidad Nacional de Colombia. Ed. Guadalupe.
- Piaget, J. (1978). La iniciación matemática, las matemáticas modernas y la psicología del niño. En: La Enseñanza de las Matemáticas Modernas. Alianza Editorial.
- Pineda Granados, M. N. (1993). La enseñanza de la geometría: ¿Un olvido permanente en la educación matemática? Tesis de Grado. Universidad Externado de Colombia.
- Pinto-Leyvas, J. C. Geoplano. Fundação Universidade Do Rio Grande- Furg.
- Quaranta, M. E. & Ressa de Moreno, B. (2009). La enseñanza de la geometría en el jardín de infantes. Serie desarrollo curricular. Dirección General de Cultura y Educación. Buenos Aires. [http://abc.gob.ar/inicial/sites/default/files/2\\_la\\_enseñanza\\_de\\_la\\_geometria\\_en\\_el\\_jardin\\_de\\_infantes.pdf](http://abc.gob.ar/inicial/sites/default/files/2_la_enseñanza_de_la_geometria_en_el_jardin_de_infantes.pdf)
- Quaranta, M. E. (1998). ¿Qué entendemos hoy por “hacer matemática en el Nivel Inicial”? Educación Matemática. Los nuevos aportes didácticos para planificar y analizar actividades en el Nivel Inicial. Ediciones Novedades

Educativas. Recuperado de: [http://books.google.com.co/books?id=w4OolfHYodoC&pg=PA18&lpg=PA18&dq=brun+jean+didactica+de+las+matem%C3%A1ticas&source=bl&ots=Db7LmB9sGY&sig=dNWS9bDIBiouO287SFv-3QM\\_yWA&hl=esLkAeDtIG4BQ&ved=0CEAQ6AEwAw#v=onepage&q=brun%20jean%20didactica%20de%20las%20matem%C3%A1ticas&f=false](http://books.google.com.co/books?id=w4OolfHYodoC&pg=PA18&lpg=PA18&dq=brun+jean+didactica+de+las+matem%C3%A1ticas&source=bl&ots=Db7LmB9sGY&sig=dNWS9bDIBiouO287SFv-3QM_yWA&hl=esLkAeDtIG4BQ&ved=0CEAQ6AEwAw#v=onepage&q=brun%20jean%20didactica%20de%20las%20matem%C3%A1ticas&f=false)

Quintero, A. H. & Costas, N. (1994). Geometría. Universidad de Puerto Rico.

Riveros, M. y Zanocco, P. (1992). Geometría: Aprendizaje y Juego. Ed. Universidad Católica de Chile.

Sadovsky, P., Parra, C. Itzcovich, H. & Broitman, C. (1998). La enseñanza de la geometría en el segundo ciclo. Documento de actualización curricular N°5. Bs As: Dirección de Curricula. <http://bde.operativos-ueicee.com.ar/documentos/67-matematica-documento-de-trabajo-no-5-la-enseñanza-de-la-geometria-en-el-2o-ciclo-actualizacion-curricular-educacion-general-basica-1998>

Sánchez, N. & Bonilla, M. (1998). Matemáticas escolares asistidas por computador. Actividades en el Aula. Módulo 3. Proyecto curricular de Licenciatura en Matemáticas. Universidad Distrital.

Sánchez, N. & Bonilla, M. (1999). Matemáticas escolares asistidas por computador. Actividades en el Aula. Proyecto Curricular de Licenciatura en Matemáticas. Universidad Distrital.

Santaló, L. A. (1994). Matemáticas para no matemáticos. Cap. I. En: Didáctica de las matemáticas. Aportes y Reflexiones. Ed. Paidós.

Sauvy, J. & Sauvy, S. (1980). El niño ante el espacio: iniciación a la topología intuitiva-de la rayuela a los laberintos. Ed. Pablo del Río.

Sherard, W. (abril de 1990) ¿Por qué es la geometría una habilidad básica? Notas de Matemática. (29), 25- 32.

Sotos Serrano, M. A. (1993). Didáctica de las matemáticas. Ensayos. (8). Facultad de Educación de Albacete. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2282535>

Terán, F. (mayo de 1972). La Cartografía y la enseñanza de la geografía. En: Revista Geográfica. (7).

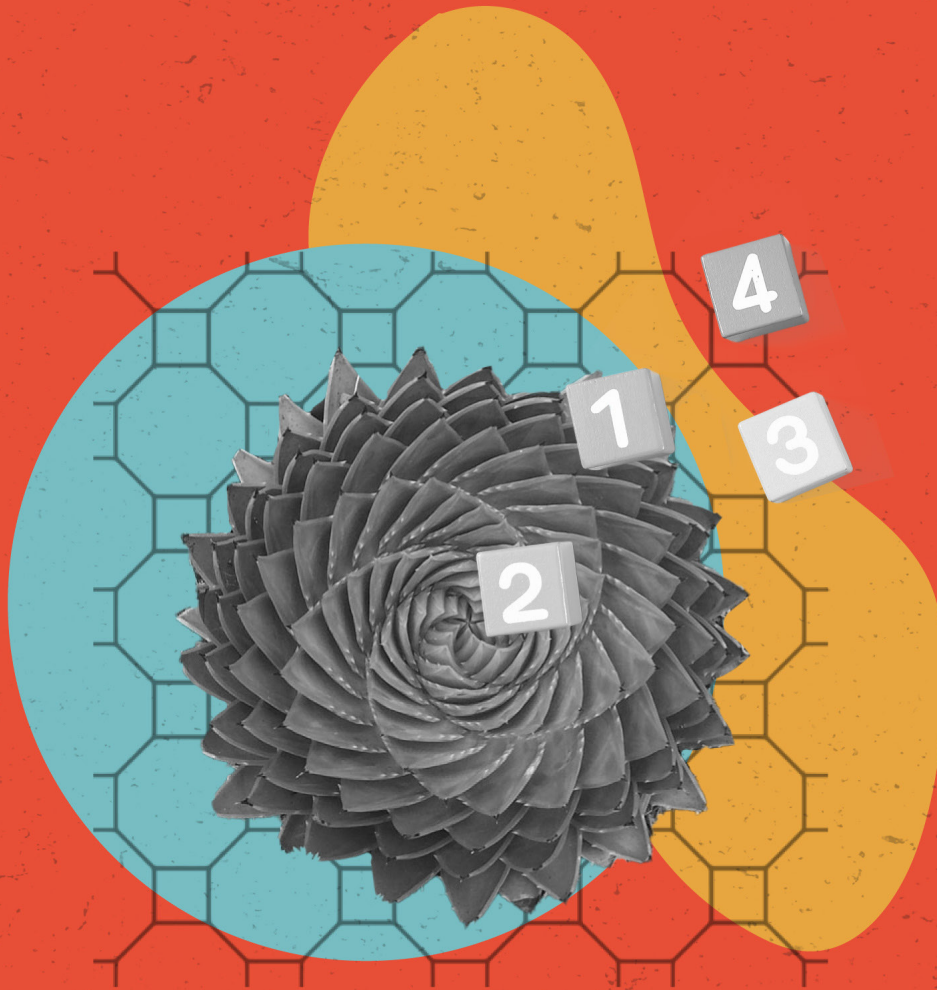
Uribe Garzón, S. M, Cárdenas Forero, Ó. L. & Becerra Martínez, J. F. (agosto de 2014). Teselaciones para niños: una estrategia para el desarrollo del pensamiento geométrico y espacial de los niños. Educación Matemática. (26)2, 135-160. <http://www.scielo.org.mx/pdf/ed/v26n2/v26n2a5.pdf>

Uribe Garzón, S. M. & Cárdenas Forero, Ó. L. (2017). El desarrollo del pensamiento geométrico y espacial de las niñas y niños en el aula es posible con Teselaciones. Premio a la Investigación e Innovación Educativa Experiencias 2017. Serie Premio Investigación e Innovación. Alcaldía Mayor de Bogotá, 179-193. file:///C:/Users/OSCAR/Desktop/CINDE/Premio%20a%20la%20investigaci%C3%B3n%20e%20innovaci%C3%B3n%20educativa%20experiencias%202017.pdf

Vurpillot, E. (1985). El mundo visual del niño. Siglo XXI Editores.

Ward, R. (2001). Geometry in the Constellations: The ER-2. California Polytechnic State University- San Luis Obispo. <http://www.dibonsmith.com/constel.htm>.

Zambrano de Paipa, A. (2001). Las nociones topológicas en el desarrollo de la percepción espacial. Universidad Externado de Colombia.



ALCALDÍA MAYOR  
DE BOGOTÁ D.C.

**IDEP**

Instituto para la Investigación  
Educativa y el Desarrollo Pedagógico

