u n a e m p r e s a d o c e n t e ®

ICEP. INNOVACIÓN CURRICULAR EN PRECÁLCULO PARA LA EDUCACIÓN MEDIA

Informe final

Cristina Carulla
Patricia Perry
Margarita de Meza
Edgar Guacaneme
Gloria Neira

Bogotá, noviembre de 2000

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
APARTADO AÉREO 4976
BOGOTÁ - COLOMBIA
TELÉFONO: 339 4949 EXT. 2717
FAX: 339 49 99 EXT. 2709

Tabla de contenido

89

Presentación

Este documento contiene el informe final del proyecto *ICEP. Innovación curricular en precálculo para la educación media*, favorecido para financiación por el IDEP mediante la resolución Nº 186 del 25 de agosto de 1999.

Está constituido por cuatro partes: La **Parte A**, *Ruta pedagógica de la mediación como experiencia de transferencia*, contiene la descripción de cinco etapas que muestran la vivencia a lo largo de el tiempo que duró el proyecto; la **Parte B**, *Logros y dificultades del proceso de adaptación de la innovación*, presenta los logros y dificultades de los maestros, los estudiantes y los coordinadores; la **Parte C**, *Descripción de los productos curriculares que se generaron a través de la innovación*, resume las características de los productos de diseño curricular que se generaron durante el año; la **Parte D**, *Sistematización de los registros de lo que va sucediendo desde la innovación*, describe, de manera somera, tres estrategias para la sistematización de algunos aspectos del proceso de innovación del proyecto y se presenta el registro logrado a través de una de ellas.

El reporte incluye seis anexos. Los tres primeros contienen el trabajo que realizaron los maestros del *Colegio Distrital "La Amistad"*, *Centro Educativo Distrital Brasilia* y *Centro Distrital Miguel Antonio Caro* a lo largo de la experiencia vivida en el proyecto. El cuarto anexo contiene una *Propuesta curricular para la introducción a las funciones representadas por polinomios de grado dos* que será publicada por "una empresa docente". El anexo quinto presenta los materiales que sirvieron de soporte durante las diferentes socializaciones del proyecto y el anexo sexto contiene un artículo que centra la atención en el proceso vivido entre los investigadores de "una empresa docente" y los profesores de las instituciones escolares del Distrito Capital, en la búsqueda de generar una innovación curricular.

PARTE A
RUTA PEDAGÓGICA DE LA MEDIACIÓN COMO EXPERIENCIA DE TRANSFERENCIA

Bogotá, noviembre de 2000

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
APARTADO AÉREO 4976
BOGOTÁ - COLOMBIA
TELÉFONO: 339 4949 EXT. 2717
FAX: 339 49 99 EXT. 2709

Ruta pedagógica de la mediación como experiencia de transferencia

En esta Parte describiremos cinco Etapas que determinaron claramente lo que sucedió durante el proceso. Dividimos el capítulo en cuatro partes: ***Etapa I**: Análisis de los contextos y definición de la manera de proceder*[1]; ***Etapa II**: Intercambios didácticos al rededor del tema de función lineal*[2]; ***Etapa III**: Elaboración e implementación de una propuesta curricular para la función cuadrática*; ***Etapa IV**: Reconstrucción de aspectos del currículo implementado durante la innovación*; y, **Etapa V**: *Socialización*.

Etapa I: análisis de los contextos y definición de la manera de proceder

En esta primera etapa trabajaron por parte de la Universidad Pedro Gómez, Margarita de Meza y Cristina Carulla en las actividades de diseño de las sesiones con los maestros, descripción del contexto Universitario y de la innovación y en la planeación del proceso para el año 2000. En diciembre de 1999 presentamos al IDEP un primer informe de avance en el cual describimos esta etapa.

Se seleccionaron las instituciones y se dialogó con los rectores, profesores del área y coordinadores académicos acerca de las condiciones de participación en el proyecto. En seguida se planearon cinco reuniones de 4 horas cada una en las cuales se hizo un análisis del contexto Universitario y sus implicaciones en las componentes curriculares, un análisis de los contextos de cada una de las instituciones y una reflexión acerca de la manera de llevar el proceso durante el año 2000.

Como resultado de este proceso, se llegó a unos acuerdos que serían los ejes conductores de la ruta pedagógica de la "mediación" como experiencia de transferencia.

Acuerdos

Después de analizar las diferentes componentes del diseño curricular de la innovación en la Universidad de los Andes, a saber, el contenido matemático a enseñar, la metodología de enseñanza, los objetivos de aprendizaje y la evaluación; de haber explicitado la visión que el grupo de personas participante en la innovación original tenía acerca del contenido a enseñar, de la enseñanza y aprendizaje del mismo (que se expresa a través de estas componentes) y de haber mirado diferentes aspectos de los tres contextos escolares, se llegó a los siguientes acuerdos:

Contenido matemático a enseñar

En primer lugar, todas las instituciones deberían trabajar simultáneamente en los mismos temas. Partiendo de la visión funcional que caracterizó la innovación en precálculo de la Universidad de los Andes y de los temas que acostumbraban dictar los maestros en cada institución, se seleccionaron los temas para los grados 10° y 11° de la educación media. La idea no era seguir con los temas tal cual se tenían organizados en las instituciones sino presentados desde una visión funcional. Entonces se seleccionaron como temas de estudio la función lineal, la función cuadrática, la función logarítmica y la función exponencial para el grado 10° y las funciones trigonométricas, las funciones racionales y la función radical para 11°. La idea de base que sustenta esta propuesta es que a través del estudio de las diferentes funciones, de sus características y de los aspectos en

1. En diciembre de 1999 se entregó un reporte que detallaba lo sucedido en esta etapa y se anexó el trabajo de los colegios.
2. En mayo de 2000 se entregó un reporte que detallaba lo sucedido durante esta etapa.

eran organizados tradicionalmente en las instituciones

(funciones diversas) → Concepto de Función

Nueva visión del contenido matemático tradicional común que tienen, se puede durante y al final del diseño tocar el tema del concepto de función en general. Igualmente pensamos que el tema de función permite volver a tratar los temas que los estudiantes han venido trabajando pero con una nueva visión.

Otro de los aspectos de la innovación inicial que se tuvo en cuenta para guiar a los maestros en cuanto a la complejidad del contenido matemático a enseñar, es el hecho de que los conceptos matemáticos se pueden ver como objetos (no materiales sino que existen en nuestras mentes) que se pueden representar en diferentes formas y que en cada una de sus representaciones podemos ver algunas de sus características pero que, la representación no es el objeto. Además enfatizamos el hecho de que existen conexiones entre cada una de las representaciones del objeto matemático estudiado, en nuestro caso una función y que esto significa que debemos explicitar esas conexiones. Para finalizar se hizo explícita la necesidad de pensar en los dos status del contenido matemático, el status de objeto y el status de proceso (dialéctica herramienta-objeto).

conceptos matemáticos = objetos ≠ representaciones (entre representaciones) → deben ser explicitadas

En resumen algunas de las características, que hacen parte de la complejidad del contenido matemático a enseñar, que se acordaron tener en cuenta fueron:

- ▲ Visión funcional
- ▲ Sistemas de representación y conexiones
- ▲ Dualidad proceso-objeto

Metodología

Una vez analizada la innovación de la Universidad de los Andes y de haber mirado los diferentes aspectos de su metodología, cada profesor podía tomar aspectos de la misma que creyera podían servirle para su clase y por otro lado se llegó al acuerdo de que iban a trabajar con los estudiantes a partir de situaciones problemáticas.

La incorporación de calculadoras gráficas en el currículo se dejó a un lado porque no se podía garantizar que, una vez terminado el proyecto con la Universidad de los Andes, los maestros pudieran seguir trabajando con ellas. Sin embargo logramos que la Texas Instruments nos donara 60 calculadoras a "una empresa docente" para la realización del proyecto ICEP y éstas llegaron el 15 de mayo. Se hará un préstamo de calculadoras a las instituciones participantes de tal manera que siempre y cuando haya un proyecto institucional para el uso de las mismas en el aula, se renueve el contrato de préstamo. Estamos en vías de redactar un contrato. Aún no hemos iniciado el diseño de situaciones didácticas que tengan en cuenta la presencia de la tecnología en clase. Sin embargo iniciamos dos talleres de tres horas cada uno con los maestros para que se familiarizaran con la calculadora y para que vieran como, al utilizarla con ciertos problemas, se pueden mostrar aspectos de las matemáticas que son muy difíciles de ver con la tecnología de lápiz y papel.

Objetivos de aprendizaje y evaluación

En cuanto a los objetivos de aprendizaje, se van explicitando a medida que se llega a cada uno de los temas generales y se llega a un acuerdo después de que cada institución hace su propuesta. Los profesores manifestaron su interés por mirar los objetivos de aprendizaje con los de algunos de los modelos de evaluación que están en este momento en el sistema educativo del Distrito Capital a saber el examen del ICFES y la evaluación por competencias de la Secretaría de Educación. Tomamos como eje de referencia la matriz de niveles de competencia de la Secretaría de Educación. Estos objetivos se fueron modificando o detallando a medida que se hayan realizado los cursos en cada una de las instituciones.

La evaluación se dejó de manera libre. No se impusieron condiciones para este tema. Sin embargo, se les pidió al iniciar que cada quien explicitara su visión al respecto. Inicialmente se había pensado que habría una evaluación común para todos los estudiantes y que justamente esta evaluación permitiría construir unos objetivos de aprendizaje que guiaran el trabajo de cada maestro. Sin embargo, cuando se inicio el diseño de las evaluaciones, se puso de manifiesto la necesidad de trabajar en la comprensión por parte de los maestros de la visión funcional, los sistemas de representación y sus conexiones, la dualidad operacional-objeto y la definición de los objetivos. Por esta razón no continuamos con la idea inicial.

Etapa II: intercambios didácticos al rededor del tema de función lineal

En enero iniciamos reuniones semanales de hora y media los jueves y los viernes. A partir de este momento participaron en el proyecto Patricia Perry, Gloria Neira, Edgar Guacaneme, Margarita de Meza y Cristina Carulla. En la reunión de los jueves el grupo de investigadores de "una empresa docente" trataba aspectos relacionados con el proceso de "mediación" de la innovación, con lo que se vivía en las sesiones de los viernes y con lo que se debía hacer en la siguiente sesión de trabajo con los maestros. Después vimos la necesidad de disponer de más tiempo para el tipo de reflexión que queríamos hacer, así que a partir de la mitad de mayo nos reunimos una hora los martes.

En las sesiones de los viernes, los maestros y los profesores de "una empresa docente" compartían sus dudas, discutían tareas, reflexionaban acerca de aspectos de contenido matemático, de enseñanza y de aprendizaje en relación con lo que estaban haciendo, compartían talleres y se discutían aspectos de la innovación inicial que podían ayudar a los maestros en sus decisiones en el aula. Igualmente, a lo largo de las sesiones les fuimos entregando documentos que les pudieran servir para resolver problemas con los que se encontraban durante el proceso.

Por otro lado cada institución debía realizar una serie de tareas que les poníamos y que tenían que ver con las necesidades que íbamos detectando.

Lo que se hizo para función lineal

Cada institución realizó un mapa conceptual que describe la función lineal. Este mapa se organizó por sistemas de representación. De acuerdo con estos mapas se seleccionaron tres grandes temas para los cuales se debía fabricar una evaluación: pendiente, proporcionalidad y ecuaciones. Simultáneamente realizaron un análisis cognitivo y de instrucción.

A partir del diseño de esta evaluación por parte de cada institución se hicieron comentarios centrados en aspectos de comprensión. Se les pidió a cada grupo que analizaran qué podrían decir acerca del estado de comprensión del estudiante cuando éste contestara a las preguntas del problema, teniendo en cuenta que queríamos ver aspectos como visión funcional del estudiante, manejo de los diferentes sistemas de representación y sus conexiones además de aspectos relacionados con el estatus del contenido matemático que se pone en juego cuando el estudiante resuelve el problema. Este ejercicio puso de manifiesto la necesidad de construir un significado común a estos conceptos para todos los participantes en el proyecto. Es así como decidimos que las evaluaciones no apuntaban a lo que se quería lograr en los estudiantes.

Después de esta experiencia se tomó la decisión de redactar entre todos unos objetivos de aprendizaje para la función lineal. Cada colegio redactó los suyos, y se tomó como base para unificar estos objetivos la matriz por competencias de la Secretaría de Educación.[3]

Al tiempo que se iban trabajando estos aspectos, cada institución tomó sus propias decisiones acerca de la manera como iba a trabajar el tema en su institución. Por lo tanto, no hubo una estructura idéntica de manejo del tema en las tres instituciones.

3. Esta información se encuentra en el informe de avance que entregamos en el mes de mayo.

Dado que no se tenía una evaluación, "una empresa" diseñó una evaluación para que todos los profesores se la aplicaran a sus estudiantes. Antes de llevarla al aula, se hicieron dos sesiones durante las cuales se discutió acerca del contenido de la misma, de la pertinencia de las preguntas, de las espectativas de logros de los estudiantes y de la manera como sería ideal mirar los resultados. La actividad de evaluación se aplicó en el mes de julio, después del periodo de vacaciones escolares.

Dado que todas las actividades que se hicieron en los viernes tomaban mucho tiempo y que se quería que se previera con tiempo lo que se iba hacer para la función cuadrática, se tomó la decisión de iniciar el trabajo en el tema de función cuadrática antes de que los maestros lo trabajaran con sus estudiantes.

Etapa III: elaboración e implementación de una propuesta curricular para la función cuadrática

Esta etapa inició a finales de julio. Para la función cuadrática ya existía un mapa de contenido que habían trabajado cada una de las personas que participaron en el proyecto de cuadráticas financiado por el IDEP durante 1999. A partir de él y de lo que se había trabajado con la función lineal se redactaron los objetivos comunes. Cada institución diseñó una actividad que trajeron a la reunión y se discutieron aspectos relacionados con el diseño de la actividad, aspectos del contenido matemático que se pone en juego en la resolución de la actividad y cuestiones relacionadas con el aprendizaje.

Sin embargo, Hubo tres razones que nos llevaron a tomar la decisión de que el equipo de "una empresa docente" diseñara una propuesta curricular común para todos los profesores. En primer lugar había una percepción de que las actividades que los maestros estaban realizando con sus estudiantes no se podían clasificar como innovadoras. En segundo lugar, que el hecho de que cada quien hiciera aspectos diferentes en sus clases no permitía un intercambio de conocimiento ya que lo que le sucedía a un profesor, no tenía sentido para otro. Y en tercer lugar, reconocimos la posibilidad de que "una empresa docente "diseñara una propuesta curricular acorde con lo que se había discutido a lo largo del año.

Es así como el equipo de investigadores de "una empresa docente" resolvió diseñar un paquete de problemas que se ajustaran a los deseos del grupo. El diseño de estos talleres respondió a unas necesidades sentidas por los investigadores en relación al aprendizaje que debían lograr los estudiantes de los profesores que participan en el proyecto.

Los maestros llevaron al aula los talleres y cada uno adaptó la actividad de acuerdo con lo que sabía de sus estudiantes y de acuerdo con lo que era para él el centro de interés del taller que se había planeado. En los recuentos de la experiencia vivida se perciben distancias entre lo que los investigadores pretendían con la puesta en funcionamiento de los talleres y lo que los profesores realmente hacían en el aula.

El trabajo del grupo cambió con respecto a lo que se vivió para la función lineal. Se dedicó el tiempo de las reuniones de los viernes para hablar de lo que cada profesor veía en el taller diseñado por "una empresa docente", lo que sucedía con sus alumnos y con él mismo. En la Parte D de este informe se verá en detalle el resultado de esta etapa.

Etapa IV: reconstrucción de aspectos del currículo implementado durante la innovación

En esta etapa que duró un mes, se quiso que los profesores reflexionaran acerca de todo el proceso vivido. Se les pidió que hicieran un reporte acerca de lo que hizo cada institución para el tema de función lineal; que describieran los aspectos innovativos respecto a la metodología, al contenido matemático, al papel de los estudiantes, al papel del profesor, a la evaluación y al tipo de conocimiento privilegiado; que describieran las dificultades detectadas en la implementación de la innovación; que mostraran los logros del proyecto; y, reflexionaran acerca de la innovación el PEI y el Plan de Estudios. Igualmente se les solicitó que hicieran un análisis de los resultados obtenidos en las evaluaciones diseñadas por "una empresa docente" para la función lineal y para la función cuadrática. En el reporte debían incluir las actividades que habían hecho con los estudiantes.

Por otro lado, para finalizar el proceso, se invitó a los rectores, a los profesores de matemáticas de las instituciones y a los coordinadores académicos y del área, a una reunión en donde se discutió acerca del futuro del proyecto en las instituciones. Las tres preguntas que guiaron la interacción fueron:

A.- ¿Qué fue lo que se hizo en el proyecto?

B.- ¿Cuáles fueron los logros del proyecto?

C.- ¿Cuáles fueron las limitaciones y las dificultades?

D.- ¿Cómo se ve el futuro en relación al proyecto?

Cada invitado, desde su mirada, dio respuesta a las anteriores y "una empresa docente" presentó sus ideas al respecto.

El objetivo de esta reunión era que se llegara a algunos acuerdos que considerábamos mínimos para garantizar la permanencia en el tiempo de lo que se había hecho durante el año.

Pusimos a consideración de los rectores las siguientes posibilidades:

No apoyar

Que la institución no apoye la continuación del trabajo colectivo de los profesores para el diseño del currículo de 11° y el mejoramiento del currículo de 10°. Es decir cada profesor haría lo que quiere en sus clases sin seguir una pauta institucional.

Apoyar pero sin la ayuda de "una empresa docente"

Que la institución dé apoyo a los maestros para seguir en el proceso de diseño que han venido realizando pero sin la ayuda de "una empresa docente":

- ▲ Guardar el espacio semanal para reunión de los profesores de 10° y 11°. En esta reunión se continuará el diseño de 10° y se iniciará el proceso de diseño de 11°. Igualmente se hará una propuesta de trabajo con la tecnología que deberá ser presentada a "una empresa docente".
- ▲ Dejar a los profesores que trabajaron en el proyecto como maestros de los niveles10° y 11°.
- ▲ Todos los profesores que dicten matemáticas en los niveles 10° y 11° deberán implementar el mismo diseño para los grados 10° y 11° producto del trabajo del grupo.

Apoyar pero con la ayuda de "una empresa docente"

Que la institución dé apoyo a los maestros para seguir en el proceso de diseño que han venido realizando con la ayuda de "una empresa docente":

A.- "una empresa docente" diseñaría un par de talleres para el uso de calculadoras gráficas para los estudiantes de grado 10° y 11°.

B.- Los profesores de las instituciones realizan un documento en el cual den cuenta de: las consideraciones que tuvieron al estudiarlo; las modificaciones que harían para la implementación del diseño; y, una observación de la implementación del diseño en donde se especifique qué es lo que querían ver y que cuenten qué pasó.

C.- "una empresa docente" haría comentarios al trabajo realizado por los profesores. La interacción se hará vía correo electrónico.

D.- "una empresa docente" facilitaría la conexión a internet por medio de la Universidad de los Andes.

E.- Los profesores diseñarían unos talleres para el uso de las calculadoras gráficas con sus estudiantes:

F.- los profesores deberán generar un documento que de cuenta de las consideraciones didácticas que tuvieron en cuenta para el diseño del taller y que contenga el taller, antes de ser implementado,

G.- "una empresa docente" se compromete vía correo electrónico a hacer comentarios con la finalidad de mejorar la calidad de los mismos,

H.- los profesores se comprometen a enviar un documento en el que den cuenta de lo que sucedió con los estudiantes durante la implantación del taller.

I.- Los profesores se comprometen a trabajar conjuntamente en el diseño del currículo del grado 11° y en hacer las mejoras necesarias al de 10°.

Los rectores manifestaron su deseo de continuar el proyecto ateniéndose a las dos últimas posibilidades. Para la última se habló de la posibilidad de que los colegios se presentaran a una convocatoria del IDEP que se centraba en el uso de la tecnología informática en el aula. Como resultado importante de esta interacción, cada institución hizo de manera coordinada, entre los investigadores de "una empresa docente" y los profesores que habían participado en el proyecto, una propuesta que se presentó al IDEP. Aun los colegios no tiene respuesta del resultado de este proceso.

Etapa V: Socialización

A continuación describimos las actividades de socialización que se llevaron a cabo y en el Anexo 5 presentamos los materiales diseñados para soportarlas.

Reuniones semanales de 2horas

Durante 11 mesesDiscusión de aspectos didácticos de las actividades que se realizarían en las clases de los maestros o que ya se habían realizado. Búsqueda de los objetivos de aprendizaje y enseñanza. Construcción de algunas actividades de evaluación para los estudiantes. Participamos 10 profesores de matemáticas pertenecientes a tres instituciones escolares del Distrito Capital y 4 investigadores de "una empresa docente".

Reuniones semanales 3 horas

Durante 11 meses se hicieron reuniones entre los investigadores para reflexionar acerca de la planificación y el seguimiento del proceso de mediación.

Socialización IDEP

Durante 2 horas se presentó un Informe parcial del proyecto ante 2 funcionarios del IDEP, la evaluadora del proyecto y 2 investigadores de "una empresa docente".

Socialización IDEP en Universidad de los Andes

Fueron presentados cinco proyectos financiados por el IDEP. Dentro de esos estaba el nuestro, contamos con 20 minutos para la ponencia acerca del proceso de mediación. Participaron investigadores de otros proyectos, profesores y funcionarios del IDEP.

Socialización del colegio Distrital "La Amistad"

Las profesoras del Colegio Distrital "La Amistad" hicieron una socialización del proyecto ICEP y su relación con el PEI. Igualmente se hizo un Taller de calculadoras gráficas cuyo tema central era los sistemas de representación.Asistieron 25 profesores de matemáticas de colegios de la región de Kennedy.

Socialización Centro Educativo Miguel Antonio Caro

Dos profesoras del Centro Educativo Miguel Antonio Caro hicieron un taller con maestros con uno de los materiales de la función cuadrática. (maestros de dónde)

Socialización con los directivos y profesores de las tres instituciones participantes.

Esta reunión se describió en detalle en el apartado anterior. Se discutió acerca del proyecto y su futuro en cada una de las instituciones.

Participaron 3 rectores, 14 profesores de matemáticas y 1 coordinadora académica y 5 investigadores de "una empresa docente".

Socialización Maloka

Durante 4 horas se hizo una presentación y un taller que ilustraban el proyecto.

En total participaron unos 20 maestros de diferentes áreas del conocimiento.

Socialización Biblioteca Luis Angel Arango

A partir de unas preguntas se quiso presentar aspectos importantes del proceso vivido. Duró de 9 de la mañana a 4 de la tarde.

Artículos

En agosto de 2000 se envió un artículo, titulado *ICEP. Innovación curricular en precálculo para la educación media,* que pidió el interventor del proyecto. Hasta la fecha no tenemos noticias de su posible publicación.

Con este informe estamos adjuntando en el anexo 6 un artículo acerca de la experiencia vivida. Se titula *Mediación: una estrategia innovativa para generar innovación.* En el se hace una revisión acerca del concepto de innovación, una descripción de la innovación de precálculo de la Universidad de los Andes a la luz de la revisión anterior y una reflexión acerca de la mediación como estrategia para generar innovación.

PARTE B
LOGROS Y DIFICULTADES DEL PROCESO DE ADAPTACIÓN DE LA INNOVACIÓN EN LA EDUCACIÓN MEDIA

Bogotá, noviembre de 2000

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
APARTADO AÉREO 4976
BOGOTÁ - COLOMBIA
TELÉFONO: 339 4949 EXT. 2717
FAX: 339 49 99 EXT. 2709

Logros y dificultades del proceso de adaptación de la innovación en la educación media

La innovación curricular en precálculo, llevada a cabo en un primer curso de matemáticas para los estudiantes de carreras técnicas de la Universidad de los Andes, fue el referente fundamental en la elaboración de la propuesta de transferencia de innovación que orientó el proyecto ICEP. A través del desarrollo del proyecto se procuró explorar, analizar y proponer una estrategia para la adaptación, mediación y/o replica de esta innovación en un contexto diferente al original, es decir, en el contexto de las matemáticas escolares de la educación media; en este sentido la pretensión del proyecto ICEP no fue implantar a ultranza la innovación, sino más bien, generar un proceso de innovación curricular que tuviera como resultado un nuevo y propio diseño curricular, que atendiera a las condiciones del contexto.

El objeto de esta parte es entonces describir, desde nuestra perspectiva, los principales logros y dificultades del desarrollo del proyecto ICEP. Para ello reportaremos unos y otras bajo categorías definidas por los diversos actores que intervinieron en el proyecto, a saber: los estudiantes, los profesores de matemáticas, las instituciones educativas, el grupo coordinador. Reconocemos que la división generada por estas categorías es un tanto ficticia y que corresponde a una necesidad de reportar una complejidad de manera analítica, más que a una característica intrínseca de tal complejidad.

Logros

Logros relativos a los estudiantes

La tradicional cultura escolar describe roles específicos arraigados en cada uno de los actores (*e.g.*, estudiantes, profesores, saberes, etc.). En esta cultura, no es habitual que los estudiantes puedan vivir experiencias de aprendizaje de las matemáticas que impliquen acciones radicalmente diferentes a copiar del tablero, hacer ejercicios y tareas, y responder evaluaciones.

La realización del proyecto ICEP, fundamentalmente la realización de la tercera etapa del mismo, permitió generar en las aulas de clase —y eventualmente fuera de ellas— un ambiente de aprendizaje que transformó el papel jugado por los estudiantes. De cumplir una función de copiantes, iniciaron procesos que involucraban generar sus propios textos descriptivos y argumentativos; esto les exigió y permitió evidenciar sus limitaciones y potencialidades en la comunicación escrita de ideas matemáticas. De ser repetidores de procedimientos pre–enseñados, se transformaron paulatinamente en interpretadores, ejecutores y/o diseñadores de procedimientos matemáticos, propuestos con el fin de descubrir y —ocasionalmente— construir sus conocimientos; estos procedimientos implicaban no sólo el aspecto algorítmico sino también procesos de generalización, identificación de regularidades, representación —entre otras competencias matemáticas.

Logros relativos a los profesores de matemáticas

Generar cambios significativos en la escuela, y particularmente en las clases de matemáticas, es un proceso extremadamente exigente, que demanda de los profesores una excelsa actitud y un compromiso excepcional con la profesionalización de su quehacer docente. Este alto nivel de exigencia se constituye en uno de los mayores obstáculos a los que se vieron enfrentados los profesores que participaron del proyecto ICEP, a la vez que configuran el ambiente donde reside el principal logro para ellos: haber podido hacer parte protagónica de una nueva experiencia que les mostró tanto la posibilidad de transformar la cultura escolar matemática, como las exigencias implicadas en este proceso.

En este sentido, la selección —de entre la amplia lista de temas de grado décimo— de unos pocos temas matemáticos, no sólo pudo reconocerse como una manera de reducir el currículo propuesto, sino también como una manera de ampliarlo, pues permite contemplar el trabajo sobre otras competencias matemáticas (*e.g.*, la generalización, la elaboración de conjeturas, el reconocimiento de regularidades, la argumentación, etc.) tradicionalmente relegadas o subordinadas por la cantidad de los contenidos temáticos.

Adicionalmente, hay que resaltar la actitud positiva y el alto nivel de compromiso, frente a los retos ligados a la innovación, expresada por los profesores a través de múltiples manifestaciones, por ejemplo en la dedicación de tiempo adicional al escolar. Con mayor frecuencia de la esperada, los profesores atendieron alumnos, realizaron sesiones de clase en días y horas extras, participaron de talleres de manejo de las calculadoras, y prepararon las tareas propuestas por los tutores de "una empresa docente", por fuera del tiempo institucional, es decir, de su jornada de trabajo. Creemos que esta actitud y compromiso fueron promovidos por la satisfacción que sentían al advertir que tanto ellos como sus estudiantes estaban viviendo nuevas experiencias de aprendizaje, difícilmente vividas al margen de un proyecto de innovación.

Logros relativos a las instituciones educativas

Las instituciones, como las personas, aprendemos de las experiencias vividas y de la reflexión sobre éstas. Este aprendizaje es mucho más potente cuando las experiencias son novedosas y cuando la reflexión tiene la intencionalidad de generar aprendizajes; éstos difícilmente se logran cuando la repetición de los ritos y roles escolares caracteriza a la institución educativa. Desde esta perspectiva, el principal logro institucional radica en poder contar con una experiencia de innovación que ha permitido identificar tanto los costos y exigencias que un proceso tal demanda a todos los agentes institucionales, como los aprendizajes que ésta puede generar.

En esta dirección, las instituciones pudieron evidenciar: la necesidad de asumir los procesos de innovación como prolongados esfuerzos de toda la comunidad educativa; la necesidad de considerar como parte de la carga académica de los profesores vinculados a la innovación, la labor que el desarrollo del proyecto les demanda; la potencialidad del trabajo en equipos de docentes; la necesidad de mantener el apoyo institucional a proyectos que permitan la continuidad y fortalecimiento de la innovación; y, la posibilidad, por falta de apoyo económico, de dar por terminado un proceso de innovación que apenas inicia —entre otras.

A este respecto es necesario reconocer que, en términos generales, se logró una adecuada colaboración de las directivas de las instituciones. Esta colaboración se pudo evidenciar: en los permisos otorgados a los profesores para asistir a diferentes actividades relacionadas con el proyecto; en la adecuación de horarios de clases que permitieron que los profesores pudieran participar de las reuniones semanales con el grupo coordinador; y, en una actitud receptiva frente a la participación institucional en el desarrollo y socialización del proyecto.

Un logro adicional para las instituciones participantes, lo constituye la elaboración y presentación de propuestas de innovación curricular en el aula, que buscan potenciar la continuación del proceso adelantado en el desarrollo del proyecto ICEP; estas propuestas fueron recientemente remitidas para su estudio al IDEP, en el marco de una de sus convocatorias públicas. La elaboración, por parte de los profesores, de las nuevas propuestas de innovación, y el apoyo institucional a éstas, son una clara muestra de la valoración lograda del proyecto ICEP. El desarrollo de esta nueva propuesta estaría favorecido por el hecho de que a partir del proyecto ICEP, cada una de las instituciones educativas, cuenta —en calidad de préstamo— con veinte calculadoras TI–83, conseguidas a través de la gestión de "una empresa docente" ante la Texas Instrument; este recurso tecnológico moviliza nuevas variables que favorecen el proceso institucional de innovación en precálculo.

Logros relativos al grupo coordinador

La experiencia en el proyecto ICEP nos permitió, en tanto grupo coordinador de la innovación, reconocer la potencialidad de la experiencia lograda a través del proceso de innovación curricular en la Universidad de los Andes, así como advertir la pertinencia de las reflexiones y estudios didácticos adelantados en torno al concepto de función. Asumimos entonces el proyecto como un nuevo paso en el camino de búsqueda de la potenciación del sistema en educación matemática, y de nuestra formación como académicos de la comunidad educativa.

De otra parte, el proyecto ICEP nos permitió adentrarnos en la reflexión sobre la caracterización de la "innovación", en tanto categoría ligada a la investigación y a la acción educativa, y sobre la posibilidad de "transferir" un proceso. Estas reflexiones condujeron a replantear y llevar a cabo estrategias metodológicas de uso no muy comunes en el trabajo de formación de docentes, adelantado por "una empresa docente". Estas estrategias nos muestran ahora un panorama alternativo para incidir en el aula, a través del diseño e implementación guiada de propuestas curriculares en matemáticas, para temas específicos.

Dificultades

Dificultades relativas a los estudiantes

La ausencia, en los estudiantes, de una disciplina académica que implique actitudes de compromiso personal con el trabajo escolar dentro y fuera del aula de clase, se convirtió en la mayor dificultad a enfrentar. El incumplimiento y la impuntualidad en la elaboración de las tareas y los bajos niveles de concentración en el desarrollo de las actividades, por parte de algunos estudiantes, fueron algunos de los factores principales que dilataron la duración prevista para las actividades. Al respecto, entendemos que no es un asunto sencillo modificar las actitudes que durante más de diez años el sistema educativo ha permitido —y hasta promovido— en los estudiantes vinculados a la innovación; pero a la vez reconocemos que la innovación procuró también modificaciones de estas actitudes.

Dificultades relativas a los profesores de matemáticas

Algunos de los profesores participantes tienen un reciente pasado académico en el que se reconoce la realización de reflexiones y acciones que favorecen su actitud y aptitud académica en pro de los procesos implicados en la innovación; para ellos las reflexiones didácticas abordadas durante el proyecto ICEP parecen tener mayor significado y relevancia, en cierto sentido, porque pueden interpretarlas desde perspectivas no tradicionales ni ingenuas. Otros profesores, al comenzar el proyecto, no mostraban acciones y compromiso significativos con su formación y actuar docente; a ellos se les percibía un poco marginales frente al proyecto. Esta diferencia de formación y acción, no siempre favorecía el desarrollo de las actividades constitutivas del proceso de innovación.

De otra parte, las diferentes aproximaciones asumidas por cada una de los grupos de profesores, en la segunda etapa del proyecto (aquella que tenía como objeto de estudio la función lineal y afín), no permitieron un lenguaje común en torno a la estrategia metodológica y a los énfasis temáticos empleados en clase; sólo posibilitaron un marco temático común. Este hecho se constituyó en una dificultad para el actuar y reflexión colectiva de los profesores participantes del proyecto.

En la tercera etapa del proyecto, la implementación de la propuesta curricular relativa a la función cuadrática se dio de manera casi simultánea al diseño de la misma; en este sentido, los profesores no tenían preestablecidos derroteros suficientemente explícitos que demarcaran el rumbo que transitarían a través de la propuesta. Este hecho dificultaba un poco el actuar docente durante las actividades y en ocasiones generó anticipar la reflexión sobre algunas temáticas consideradas en talleres posteriores. Esta dificultad se presentó fundamentalmente en los primeros talleres de la propuesta y se superó para los últimos de la misma. Para el próximo año, los profesores cuentan ya con un mapa de acción de la propuesta, lo cual permite desde ahora una mejor planeación curricular.

Dificultades relativas a las instituciones educativas

El tiempo que los maestros pasan con sus estudiantes en sus clases está condicionado por una serie de actividades institucionales (*e.g.*, paseos, jornadas sindicales, jornadas pedagógicas, izadas de bandera), por la intensidad horaria programada, y por los días en que las clases están programadas (por la Ley Emiliani, no se tiene la misma periodicidad si se tiene programadas clases los lunes o los martes).

Si bien esta situación se presenta aun sin estar desarrollando una innovación, al aparecer fue mucho más evidente para los profesores dadas las condiciones de la innovación. En efecto, los profesores advirtieron que el desarrollo de la innovación exige continuidad, y que las situaciones descritas arriba entorpecen la continuidad del proceso y lo obstaculizan, dificultando o postergando el cumplimiento de las metas semanales programadas. Estas circunstancias generaban una gran angustia en algunos de los profesores que veían un lento avance en el desarrollo de las temáticas; esta angustia se sumaba a la generada por la conciencia de estar cambiando el *statu quo* de los contenidos del curso y de los procesos metodológicos de sus clases. La dificultad generada por estas circunstancias puede ser controlada a través de una buena planeación institucional, exigida y promovida por los maestros mismos.

De otra parte, el hecho de que el proceso de articulación de la innovación al PEI de cada institución sea prolongado, dialéctico, participativo, y que además exija acciones que trasciendan la inclusión de ésta en un documento escrito, genera dificultades institucionales que pueden evidenciarse en la marcada diversidad de aproximaciones docentes a la propuesta curricular. Por ejemplo, en uno de los colegios del proyecto, uno de los profesores que participaba de la innovación fue trasladado y su reemplazo no se vinculó al proyecto, ocasionando dejar a uno de los cursos décimos por fuera de la innovación. En la medida en que la innovación haga parte real y efectiva del Proyecto Educativo Institucional, se logrará que este tipo de cosas dejen de suceder, y disminuya la incidencia negativa en las innovaciones curriculares.

Dificultades relativas al grupo coordinador

Tal vez la mayor dificultad que como grupo coordinador de la innovación tuvimos está relacionada con el manejo del tiempo. De un lado, para la interacción directa con los profesores habíamos dispuesto de hora y media cada viernes; la cantidad de temáticas a tratar respecto de la innovación, la profundidad con la que pretendíamos abordar las discusiones, la necesidad de compartir experiencias y reflexiones, son —entre otras— algunas de las condiciones que hacían que el tiempo previsto fuera insuficiente. Igualmente las dos horas de reunión semanal, como espacio de interacción, que los coordinadores del proyecto dedicábamos a la preparación de las reuniones, a la programación de las actividades, a la reflexión sobre el proceso mismo, etc., se mostraron insuficientes, y debimos programar al menos dos horas más de interacción semanal y ampliar las horas de trabajo para abordar la reflexión y el arduo trabajo que un proceso de mediación de este tipo requiere.

De otra parte, la relativa baja velocidad impuesta por el desarrollo de la propuesta curricular implicó que los profesores no pudieran disponer de un diseño curricular para desarrollar las temáticas relativas a funciones logarítmicas y exponenciales. Este hecho se justifica en la culminación de los plazos contractuales y las restricciones económicas consecuentes. No obstante, el hecho de dejar "solos" a los profesores a partir de la mitad de octubre, constituye para "una empresa docente" motivo tanto de preocupación como de expectativa, a la vez que permite un elemento de valoración de las posibilidades y potencialidades del proceso de innovación.

Finalmente, se presentaron dificultades en el proceso de la condonación de las calculadoras a las instituciones; en la mayoría de los casos el proceso fue lento y demasiado prolongado, al punto que los alumnos no alcanzaron a usarlas efectivamente en los talleres de la propuesta curricular, dificultad atribuida a la ineficiente gestión administrativa de los seguros requeridos para la entrega efectiva de los equipos a los colegios.

PARTE C
DESCRIPCIÓN DE LOS PRODUCTOS CURRICULARES QUE SE GENERARON A TRAVÉS DE LA INNOVACIÓN

Bogotá, noviembre de 2000

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
APARTADO AÉREO 4976
BOGOTÁ - COLOMBIA
TELÉFONO: 339 4949 EXT. 2717
FAX: 339 49 99 EXT. 2709

Diseño curricular para el grado 10°

Como lo mencionamos en la descripción de las etapas del proyecto, los temas seleccionados para el grado 10° fueron función lineal, función cuadrática, función logarítmica y función exponencial. Sin embargo, no fue posible, por razones de tiempo dedicado a las diferentes actividades que se diseñaron y actividades múltiples de los estudiantes, tocar todos los temas. En la descripción que sigue, sólo mencionaremos los productos curriculares relacionados con la función lineal y la función cuadrática. Nos limitaremos a explicitar los objetivos de aprendizaje que fijamos en grupo, la descripción de las actividades y orientaciones que cada colegio dio al tema de función lineal y una descripción general de la propuesta curricular diseñada por "una empresa docente" para la función cuadrática.

Función Lineal

Se plantearon unos objetivos de aprendizaje para todas las instituciones y estos fueron:

Nivel 1. Reconocer la función lineal en sus diferentes representaciones. Identificar el oficio de los parámetros m y b en las gráficas de las funciones lineal y afín (familias). Identificar la linealidad (aditividad y homogeneidad) como propiedad de las funciones de gráfica lineal. Reconocer que en las funciones lineales el cociente entre los valores de las variables es constante.

Nivel 2. Establecer conexiones entre las diferentes representaciones.

Nivel 3 . Modelar situaciones de la vida cotidiana utilizando las funciones lineales y afín. Formular y resolver situaciones problémicas aplicando la función de gráfica lineal.

Cada una de las instituciones seleccionó temas particulares y dio un orden a estos. Algunos se centraron en la proporcionalidad, otros en el tema de la pendiente y otros en aplicaciones del concepto. El resultado curricular se encuentra descrito en los Anexos 1, 2 y 3 en los apartados específicos a la función lineal y en el reporte final que hizo cada institución.

Función cuadrática

Los objetivos de aprendizaje que se discutieron y para los cuales se llegó a un acuerdo fueron los siguientes:

Nivel 1: Reconocimiento de elementos conceptuales y procedimentales

A este nivel de desempeño también se le denomina *Reconocimiento y distinción* o *Adquisición de códigos.*

Asociado con la identificación y descripción de objetos matemáticos, sus atributos o propiedades, sus representaciones y sus operaciones.

- ▲ Identificar una función cuadrática a través de la expresión simbólica; es decir, reconocer que una función descrita por un polinomio de segundo grado en una variable (o por expresiones algebraicas equivalentes a éste) es una función cuadrática.
- ▲ Identificar una función cuadrática a través de la gráfica cartesiana; es decir, reconocer que una parábola de eje vertical representa una función cuadrática.

- ▲ Identificar una función cuadrática a través de la tabla de datos; es decir, reconocer que los datos de una tabla se relacionan de "manera cuadrática".
- ▲ Identificar y describir la manera como se establecen las variaciones de las imágenes, respecto de las variaciones de las preimágenes, en las distintos sistemas de representación (simbólico, gráfico, tabular). Particularmente, reconocer la existencia de un punto o valor numérico (máximo o mínimo) en el cual se altera un comportamiento creciente (de la variable dependiente) en uno decreciente, así como, reconocer que las variaciones no son proporcionales.
- ▲ Identificar al conjunto de los reales como dominio de toda función cuadrática, así como identificar el conjunto $(-\infty,k)$ ó (k,∞) como rango de cualquier función cuadrática.
- ▲ Identificar que la función cuadrática puede tener a lo sumo dos ceros (o raíces). Además, conectado con esto, reconocer (en las diferentes representaciones) las características que determinan el número de ceros.
- ▲ Reconocer que la función cuadrática no satisface las dos condiciones que definen la linealidad (aditividad y homogeneidad).
- ▲ Reconocimiento de la simetría como característica de algunas funciones cuadráticas. Igualmente, determinar las características que definen la existencia o no de la simetría de una función cuadrática.

Nivel 2: Interpretación y uso de elementos conceptuales y procedimentales.

También denominado *Interpretación* o *Uso de códigos.*

Asociado con la competencia para relacionar, clasificar, comparar, conjeturar, estimar, organizar información, verificar resultados matemáticos y soluciones, y traducir entre diversas representaciones.

- ▲ Transformar los polinomios de segundo grado en expresiones algebraicas equivalentes en las cuales se visualicen algunas características de la función cuadrática (v.g. la existencia del mínimo o máximo (vértice), ó, la existencia de ceros (cortes con el eje de las abscisas ó coeficientes independientes de los factores lineales)).
- ▲ Transformar la expresión simbólica de una función cuadrática en una gráfica, pasando y sin pasar por una representación tabular.
- ▲ Identificar el papel que cumplen algunas características de la gráfica de una función cuadrática en la(s) expresión (es) simbólica(s) de la misma.
- ▲ Establecer las variaciones que sufre una gráfica de una función cuadrática al hacer variaciones en los coeficientes del polinomio que la describe o en los coeficientes de los polinomios cuyo producto describe la función.
- ▲ Estimar el valor (punto o números) en el cual la función cuadrática puede tener un máximo o un mínimo.
- ▲ Predecir (extrapolar o interpolar), con relativa aproximación, los valores numéricos o puntos implicados en una función cuadrática.

Nivel 3: Producción y generalización.

También denominado *Producción* o *Explicación de uso.*

Se relaciona fundamentalmente con la construcción de modelos y representaciones, formulación de problemas, la argumentación, las transformaciones analíticas y algebraicas, la inferencia y la generalización.

- ▲ Identificar la función cuadrática como modelo de variación de algunos fenómenos físicos (v.g. la relación entre espacio y tiempo en los movimientos de caida libre).
- ▲ Establecer las operaciones entre funciones cuadráticas que producen nuevas funciones cuadráticas, atendiendo a las restricciones posibles para las mismas.

Teniendo en cuenta estos objetivos y algunas consideraciones conceptuales acerca de la variación lineal y cuadrática, "una empresa docente" realizó una propuesta curricular que se describe en detalle en el Anexo 4 y de la cual se hará una publicación.

Descripción de la propuesta

La propuesta curricular consiste en una serie de seis talleres que deben ser realizados por los estudiantes. El objetivo central de estos talleres era que los estudiantes pudieran observar características de la variación de tipo cuadrático y la compararan con las variaciones de tipo lineal. Se pretendía que los estudiantes iniciaran una construcción conceptual de la noción de función cuadrática y con ello apoyaran y enriquecieran su noción de función lineal y de función en general. Se estudian a través de esos talleres, fenómenos como el por qué las gráficas cartesianas de tales funciones tienen una determinada forma, cómo se distingue la variación de cada una de estas funciones en lo numérico y cómo se caracteriza en lo simbólico. Igualmente se pensó en que se deberían hacer los talleres centrados en una situación que le diera sentido a los conceptos. La variación se estudia a través del análisis del comportamiento de la longitud, el área y el volumen como magnitudes que varían dependiendo de la altura de cajas construidas por los estudiantes. Es decir, en cada uno de los talleres se abordan aspectos teóricos que van nutriendo la comprensión de los aspectos matemáticos anteriormente mencionados. Los talleres pretenden que los estudiantes movilicen conocimiento matemático antiguo y generen nuevo conocimiento así como que conecten su conocimiento previo con lo que están aprendiendo.

Cada taller va acompañado de una reflexión didáctica que incluye aspectos como intencionalidad del taller, consideraciones metodológicas, conocimientos que se ponen en juego en la situación planteada y variables didácticas[1] del problema. Esto implica que, durante el diseño de los mismos, se ponen en juego las visiones del investigador acerca de lo que es el conocimiento matemático, acerca de lo que es aprender matemáticas, acerca de lo que es enseñar matemáticas y de hecho acerca de lo que son las matemáticas.

Los maestros llevaron al aula los talleres y cada uno tomó decisiones acerca de cómo adaptarlo de acuerdo con lo que conocía de sus estudiantes y de acuerdo con lo que era para él el centro de interés del taller que se había planeado. Las decisiones evocadas anteriormente fueron tomadas por el profesor en momentos diferentes, al analizar previamente el diseño y al implementarlo. Estas decisiones están afectadas por sus conocimientos tanto matemáticos como didácticos, sus creencias y sus ideas particulares.

1. Noción utilizada por la escuela francesa de didáctica de las matemáticas par designar aquellas variables de un problema que al cambiar su valor influyen en el comportamiento de los estudiantes.

PARTE D
SISTEMATIZACIÓN DEL REGISTRO DE LA EXPERIENCIA DE INNOVACIÓN

Bogotá, noviembre de 2000

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
APARTADO AÉREO 4976
BOGOTÁ - COLOMBIA
TELÉFONO: 339 4949 EXT. 2717
FAX: 339 49 99 EXT. 2709

Sistematización del registro de la experiencia de innovación

Introducción

Parece innegable la importancia de tener al final de una experiencia de innovación educativa un registro que suministre información del proceso vivido.

Dadas las características de la práctica en la que está inmerso el trabajo del profesor —el sinnúmero de decisiones que debe tomar en su quehacer diario, la cantidad y diversidad de asuntos a los que debe atender de manera inmediata, el poco tiempo disponible para actividades propias de su práctica que se realizan fuera del aula (e.g., planeación y evaluación de la enseñanza y sus efectos), etc.— llevar un registro escrito es imprescindible si quiere poder avanzar en la comprensión y en la reflexión de los asuntos que le preocupan o despiertan su interés. Al no hacerlo, hay una alta probabilidad de que el profesor olvide los detalles de lo que ha hecho en un determinado momento con relación a un cierto asunto, los resultados obtenidos, los problemas y dificultades encontrados, los esbozos de ideas para hacer modificaciones que fueron surgiendo durante la acción. Así, en el mejor de los casos, cuando el profesor vuelva a considerar el asunto sobre el que ya ha trabajado, sobre el que ha tenido ya experiencias, se encontrará en situación y actitud de iniciar una reflexión, un trabajo, en vez de retomarlos en el punto donde los había dejado, con la consecuencia natural de repetirse en ideas, errores y concepciones, de permanecer estancado en su comprensión del asunto.

Llevar un registro escrito —con miras a que otro pueda leerlo y entenderlo— es importante para quien lo hace no sólo porque le sirve como memoria sino también porque le abre una oportunidad de reflexión que incluye identificar las ideas relevantes, organizarlas, relacionarlas, analizarlas, explicitar supuestos, sacar conclusiones, etc., acciones estas a través de las cuales se logra comprender mejor el asunto que centra la reflexión.

Si la innovación tiene un carácter institucional, es decir, si se pretende que permanezca en el tiempo y no dependa totalmente de quienes la iniciaron sino que a ella puedan vincularse otros docentes es entonces indudable la importancia de tener un registro que dé cuenta de detalles del proceso y de los resultados que se fueron encontrando durante el mismo, de manera que sirva como fundamento para la integración de los docentes que se vayan involucrando sobre la marcha en la innovación.

Por otra parte, no es desconocido para quienes trabajamos en el sistema educativo (investigadores, formadores de profesores, funcionarios públicos del sistema educativo y los profesores mismos) que el profesor de matemáticas no tiene como prácticas sistemáticas el reflexionar ni el escribir acerca de su quehacer docente. Así, no obstante reconocer la importancia de llevar un registro escrito sobre la experiencia de innovación, somos conscientes de que realizar tal tarea exige un gran esfuerzo y una gran dedicación del profesor, en parte porque no se trata sólo de saber escribir, de saber redactar ideas de acuerdo con ciertas normas y estándares y de sacar un tiempo para hacerlo. La exigencia tiene que ver principalmente con las ideas y conceptos que se tienen y usan para dar cuenta, explicar y problematizar lo que constituye el quehacer docente, así como también tiene que ver con las exigencias que impone ser un practicante reflexivo.

Siendo conscientes, por una parte, de la importancia de tener registros escritos por lo menos de algunos aspectos del proceso vivido en este proyecto, y, por otra parte, de las dificultades de los profesores participantes para realizar esta tarea, decidimos buscar estrategias que sin desbordar el trabajo de los docentes, nos pudieran garantizar alguna suerte de registro escrito de la experiencia de innovación vivida en ICEP.

En este apartado daremos cuenta de cuáles fueron esas estrategias y centraremos la atención en el registro que logramos a través de una de ellas.

Estrategias utilizadas

Escribir un texto sobre algo sucedido en la clase que le llamara poderosamente su atención

A comienzos de mayo (hacia la mitad del desarrollo del proyecto) les pedimos a los profesores que comenzaran a llevar un registro escrito de algunos detalles de lo que ocurría en sus clases por razón de la innovación que estaban realizando. Específicamente, les solicitamos que escribieran un texto acerca de algo sucedido en alguna de sus clases, que les hubiera llamado la atención de manera especial. Se trataba de una tarea para desarrollar individualmente, que debían entregar en la reunión semanal de los viernes. La tarea de registro sistemático también se planteó para uno de los coordinadores del proyecto quien debía dar cuenta de algún incidente ocurrido durante la reunión semanal con los profesores, que le hubiera llamado poderosamente la atención.

Al plantear tal tarea (ver Tabla N° 1) hicimos explícitos los siguientes puntos que queríamos que tuvieran en cuenta al realizarla:

- ▲ Debían enfocar su atención en algo que les resultara relevante e interesante, de manera que tuviera para ellos sentido el detenerse a reflexionar sobre el asunto; además, en el texto debían explicitar qué les llamó la atención del incidente enfocado y por qué.
- ▲ Debían dar detalles del asunto sobre el que estaban enfocados; es decir, no era suficiente nombrar fenómenos (e.g., desmotivación de los estudiantes, dificultades de aprendizaje de los estudiantes) ni tampoco era suficiente dar detalles utilizando sólo adjetivos o frases adverbiales que no necesariamente tienen un significado claro y preciso para todos (e.g., mis estudiantes han aprendido muchísimo acerca de las fracciones). En cambio, se les pedía hacer descripciones incluyendo detalles que permitieran caracterizar de alguna manera aquello de lo que estaban hablando, y hacer referencia más a asuntos particulares que a asuntos generales.
- ▲ Además de la descripción se les pedía que hicieran una reflexión en torno al asunto que les hubiera llamado la atención.

Aunque la tarea se planteó para los once profesores participantes en el proyecto, se quería seguir con algún cuidado el rastro de los registros de tres profesores, y además, darles realimentación a través de comentarios escritos de parte de uno de los coordinadores de "una empresa docente", con miras a lograr que los textos cumplieran cada vez más claramente los requisitos que se habían establecido. Así, pues, de cada colegio se seleccionó un profesor que fue quien se comprometió a entregar semanalmente la tarea acerca de algún suceso ocurrido siempre en el mismo curso. Los demás profesores también debían escribir el texto, entregarlo en la reunión de los viernes y en caso de que quisieran podían darlo a conocer en la misma reunión.

Tal como se planeó, cada una de las tres profesoras seleccionadas entregó semanalmente un texto en la reunión de los viernes y, con un desfase de una semana, recibió un texto de comentarios y sugerencias acerca del texto entregado, con el que se pretendía explicar e ilustrar qué era lo que se esperaba que ellos reportaran en sus escritos. El registro escrito realizado por el miembro de "una empresa docente" acerca de algo sucedido en las reuniones de los viernes se utilizó en tres ocasiones para ilustrar el tipo de contenido que esperábamos obtener de parte de los profesores. Al comenzar el estudio e implementación de la propuesta curricular acerca de la función cuadrática, el registro

En busca de un registro sistemático de la experiencia

Importancia de registrar sistemáticamente la experiencia
En el proceso de acompañamiento que está llevando a cabo "una empresa docente' a los profesores de matemáticas participantes en ICEP, en relación con la innova-ción que ellos están introduciendo en su aula, es de gran importancia el registro sis-temático que se pueda hacer de lo que va sucediendo en el aula con el maestro, los estudiantes, el conocimiento, la metodología, los resultados, etc.

Dicho registro es importante como medio para allegar información detallada y rele-vante relativa al proceso novedoso que estamos viviendo los participantes de esta experiencia. Tener esta información puede ayudarnos a tomar decisiones sobre la marcha con respecto a la experiencia que estamos viviendo, pero también será valiosa, después de terminada la experiencia, para evaluar el proceso completo y tener fundamentos para basar las decisiones en caso de que se quiera hacer una segunda experiencia de este tipo.

Siendo conscientes de la importancia del registro de asuntos relevantes ligados con la innovación, pero también siendo conscientes de que hacerlo puede convertirse en un trabajo adicional que desborda la capacidad de todos, hemos buscado una estrategia que nos permita funcionar dentro de límites razonables.

La estrategia
Planteamos para **cada uno** de los participantes (profesores y coordinadores) la siguiente tarea semanal:

> *Elabore un texto acerca de algo que en una de sus clases de la semana próxima[a] le lla-me la atención (puede ser una dificultad o una facilidad).*

De esa manera, esperamos que al finalizar el proyecto cada participante tenga un registro escrito de algunos sucesos que percibió como sobresalientes en el curso de su experiencia al implementar la innovación.

A pesar de que la tarea está propuesta para **todos**, los coordinadores del proyecto le haremos seguimiento a los documentos escritos de **sólo** tres de los profesores parti-cipantes —uno por cada colegio. Esto significa que esperamos recibir semanal-mente, en la reunión de los viernes, de parte de un profesor de cada colegio y de parte de uno de los coordinadores del proyecto (siempre la misma persona haciendo referencia al mismo curso) un texto que contenga su respuesta a la tarea enunciada antes. También significa que entregaremos a dicha persona, en las reuniones de los viernes, un documento con comentarios a su última tarea con el fin de darle realimentación. Los demás profesores tendrán oportunidad, si así lo desean, de leer su tarea ante el grupo de profesores en las reuniones de los viernes y recibir comentarios al respecto. Sin embargo, al finalizar el proyecto se recogerán **todos** los textos elaborados por **todos** los demás participantes. En todo caso, cada vez que sea posible haremos comentarios generales (orales o escritos) relativos a este tipo de tarea, que puedan ser de utilidad para todos los profesores.

El conjunto de textos escritos de cada uno de los tres profesores junto con los comentarios de los coordinadores, se convertirá en fuente de información que podremos utilizar en el reporte que escribamos acerca del desarrollo del proyecto.

Tabla N° 1. Enunciado de la tarea propuesta a los profesores para el registro sistemático

Algunas aclaraciones y ampliaciones acerca de la tarea

1) La tarea pide enfocar algo que haya llamado su atención. Con esto queremos promover un trabajo (un detenerse a pensar) sobre algo que resulta **relevante** e **interesante** para el profesor.

Lo que llama la atención de un profesor particular está relacionado con su experiencia, sus visiones, sus intereses, su conocimiento, el contexto en el que está trabajando, etc. Esto explica que frente a la misma situación, lo que llama la atención de un profesor no necesariamente sea lo mismo que llama la atención de otro. Así pues, en el registro escrito que pedimos hacer es importante explicitar no sólo **qué** fue lo que llamó la atención del incidente que se está enfocando sino también **por qué**.

2) El registro de lo que llamó su atención puede concretarse por lo menos de dos maneras distintas. Puede ser una *etiqueta* con la que menciona todo un incidente, un evento (por ejemplo, "desmotivación de los alumnos"; "metodología apropiada para que los alumnos vean la diferencia entre variable dependiente y variable independiente", etc.). Puede ser una *descripción* de un incidente en la que se incluyen detalles que ayudan a caracterizar la situación, y por tanto, permiten distinguirla o asociarla con otras situaciones. Frente a la tarea que les hemos propuesto esperamos tener descripciones y no sólo la mención de un incidente a través de una etiqueta.

La descripción de un incidente requiere considerar cuáles detalles son relevantes para la caracterización del incidente y cuáles no, y explicitar los primeros. En estrecha relación con la cantidad de detalles relevantes que se dan como parte de la descripción está el nivel de generalidad o vaguedad que tiene el relato que se hace del incidente. Plantear el contexto en el que ocurrió el incidente, presentar el enunciado de la tarea cuya solución dio lugar al incidente que se está enfocando, presentar respuestas de los estudiantes que permitan ilustrar el problema que se está viendo, son algunas de las formas como se puede enriquecer una descripción.

3) En cuanto le sea posible, esperamos que además de una descripción del incidente sobre el que se está enfocando, busque una explicación del mismo y también lo considere en perspectiva: para relacionarlo tanto con sucesos pasados de su experiencia como con posibles sucesos futuros para los que pueda prever su actuación al respecto.

Para terminar

Es probable que en este momento —iniciación del proceso de registro— no todos los comentarios incluidos en este documento le sean significativos y suficientemente claros para tenerlos en cuenta. No importa; la hipótesis que tenemos es que a medida que se vaya progresando en este proceso de alertar la consciencia sobre asuntos particulares de la práctica y recibir comentarios a manera de realimentación sobre los textos que se presentan, se irá evolucionando y cada vez, los comentarios que hoy presentamos junto con otros que vayan surgiendo por el camino no sólo serán más entendibles para ustedes sino que tendrán sentido y los podrán tener en cuenta de manera natural.

Tabla N° 1. Enunciado de la tarea propuesta a los profesores para el registro sistemático

a. Para los coordinadores del proyecto el incidente tendrá que ver con algo que suceda en las reuniones que hacemos con motivo del proyecto: las de preparación y las de los viernes.

a cargo de uno de los miembros de "una empresa docente" se cambió por un registro oral al final de cada reunión.

Para todo el grupo, en dos reuniones se hicieron comentarios alusivos a lo que se veía que estaban incluyendo en sus textos y lo que se esperaba que incluyeran.

Poner en común detalles relativos a la implementación de una propuesta de enseñanza diseñada por los coordinadores del proyecto

Para iniciar la enseñanza del tema correspondiente a función cuadrática, se concertó con los profesores la implementación de una propuesta curricular diseñada por los coordinadores del proyecto. Esta propuesta consta de seis talleres —el último de los cuales se puede utilizar como evaluación de los logros alcanzados por los estudiantes en el proceso de realización del trabajo previo; además, la propuesta incluye para cada taller (excepto para el sexto) una serie de consideraciones fundamentales para su implementación, a saber: la intencionalidad, es decir, lo que se pretende lograr en los estudiantes con la secuencia de tareas y preguntas que se proponen; aspectos y elementos de algunas preguntas formuladas y de posibles respuestas acerca de los cuales es necesario que el profesor vea claramente cuál es el propósito, en qué dirección y hasta dónde debe ir su guía a los estudiantes cuando estén desarrollando los talleres, qué aspectos conviene detectar durante el trabajo tanto individual como grupal de los estudiantes con miras a identificar puntos claves para tratar en las puestas en común, etc. (ver Anexo: Propuesta curricular para la introducción a la función que se puede representar por un polinomio de grado dos).

Es en el contexto de estudio y recuento de la implementación de la propuesta mencionada antes en donde se llevó a cabo la segunda estrategia de registro de algunos aspectos de la innovación. En la reunión semanal que teníamos coordinadores y profesores para tratar asuntos del proyecto, a partir de finales de julio y hasta finales de septiembre, se abrió un espacio para estudiar con algún cuidado la propuesta curricular y también para que los profesores pudieran contar detalles acerca de la implementación de la misma. En tales reuniones (diez en total) se hizo una grabación de audio y luego se realizó la correspondiente transcripción. A partir de cada transcripción, se produjo un texto que es interpretación de lo reportado por los profesores con respecto a la implementación de la propuesta; tales textos incluyen, en notas de pie de página o en la subsección del final, comentarios y consideraciones formulados por los coordinadores, ya fuera en la reunión misma o durante la elaboración del texto mismo. En busca de validar el contenido de tales textos, los cuatro primeros se entregaron a los profesores para su lectura y comentarios; al respecto no hubo explicitación de diferencias u objeciones.

Así, pues, se tiene un registro escrito de comentarios hechos por los profesores con respecto a la implementación de la propuesta curricular, el cual se presentará más adelante[1].

Reconstrucción de aspectos del currículo implementado durante la innovación

A comienzos de septiembre se pidió a los profesores reconstruir con el mayor detalle posible, la experiencia vivida por cada quien en el proyecto. Esto incluía no sólo recoger y organizar los materiales utilizados en las clases para la enseñanza, sino también elaborar un documento que diera cuenta de aspectos del currículo desarrollado (objetivos propuestos, contenidos matemáticos tratados, organización y enfoque de los mismos, metodología utilizada, evaluación), junto con comentarios acerca de las dificultades, preguntas, dudas, etc. que identificaron durante el proceso de innovación.

Puesto que se pretende que en cada institución el proceso de innovación siga su curso el año próximo, se vio la conveniencia de que la actividad de reconstrucción de la expe-

1. Aunque la propuesta incluye seis talleres sólo contamos con registro de la implementación de tres talleres, logrado a través de diez reuniones del proyecto.

riencia fuera una oportunidad para que los profesores llegaran a concretar la primera versión de una propuesta institucional para el currículo de matemáticas de décimo (o por lo menos para la parte del contenido que trabajaron este año).

En las cuatro últimas reuniones del proyecto, se abrió un espacio para que los profesores expusieran cómo iban realizando la tarea de reconstrucción y qué dificultades o preguntas tenían al respecto. Como resultado de tal tarea cada colegio tiene un archivo impreso del que se da una breve descripción en la Parte C: "Descripción de los productos curriculares", y que se presenta como anexo del reporte.

Resumen del registro sistemático

A continuación hacemos una breve alusión a información recogida a través de la actividad que buscaba sistematizar el registro de algunos aspectos del proceso de innovación vivido por los participantes del proyecto ICEP.

A partir de la elaboración de textos sobre algo sucedido en la clase que le llamara poderosamente su atención

En términos generales, los profesores en sus textos no explicitaron un suceso o un incidente que les hubiera llamado la atención de manera especial. Señalaron eventos, hechos ocurridos en su clase dando una contextualización que en la mayoría de las ocasiones era insuficiente para poder reconocer la relevancia y el sentido que para el profesor podía tener el incidente en el marco correspondiente.

Aunque para los últimos textos la situación varió un poco, la mayoría de los textos revisados presentan pocos detalles, pocas explicaciones, ampliaciones o aclaraciones acerca de lo que se expone. Sin embargo, parece ser que el ejercicio de escribir este tipo de texto llevó a los profesores a revisar con algún detenimiento tareas escritas de sus estudiantes pues los registros, en la mayoría de los casos, dan una somera descripción de las respuestas de los alumnos.

Contamos con una buena cantidad de textos que registran incidentes específicos de las clases de todos los profesores participantes, sin embargo, es difícil encontrar una forma de presentar un resumen o un reporte general de lo expuesto en tales textos, y probablemente no tenga mucho sentido hacerlo. Consideramos que el valor principal de la actividad de registro así realizada está en el ejercicio de una capacidad no muy desarrollada hasta el momento en los profesores, a saber, la comunicación escrita. Adicionalmente los registros hechos pueden servir de referencia a quien los escribió para reentrar en su práctica (rememorar momentos significativos) cuando los retomen.

A partir de la implementación de la propuesta curricular compartida

Qué fue novedoso

La experiencia de profesores y alumnos con la implementación de por lo menos una parte de la propuesta curricular fue novedosa en varios sentidos. Es la primera vez que:

- dedican tanto tiempo al desarrollo de un tópico y entran en tantos detalles durante su estudio;
- hay una oportunidad real para que los estudiantes participen de manera más autónoma en su proceso de aprendizaje;
- se varía el esquema habitual de clase, revisión de tarea-explicación del tema-ejercicios de aplicación;
- la evaluación de los estudiantes se da durante el proceso de aprendizaje, influye las decisiones que toma el maestro durante tal proceso y consiste en

algo más que repetir algoritmos escritos en el cuaderno frente a situaciones similares a las tratadas en clase;

- ▲ hay una oportunidad para poner en juego y revisar muchos y diversos elementos del conocimiento matemático de los estudiantes;
- ▲ hay una oportunidad para comenzar a construir significado de "hacer matemáticas" en el salón de clase a través de realizar acciones como estimar, argumentar, conjeturar, validar resultados, etc.

La experiencia de un trabajo compartido y socializado con colegas y profesores universitarios en torno al estudio y la implementación de una misma propuesta curricular propició oportunidades para percibir elementos relativos a aspectos cognitivos y didácticos no percibidos antes de manera tan clara. Por ejemplo:

- ▲ aunque matemáticamente expresiones como $x^2 4$, $4x^2$, $(2x)^2$, $(4x)x$ son equivalentes, desde el punto de vista cognitivo, para los estudiantes no necesariamente lo son, pues cada una de ellas representa no un resultado sino más bien un proceso;
- ▲ para poder visualizar algo particular (e.g., el área del papel de la caja, el área de papel desperdiciado) desde la perspectiva de los estudiantes es diferente tener la caja desarmada o armada;
- ▲ incluso con temas matemáticos elementales (e.g., función cuadrática) es necesario y posible re-construir el conocimiento del profesor no sólo del tema sino también didáctico;
- ▲ para identificar y reconocer un objeto matemático no es suficiente atender a sus características, es necesario poderlo diferenciar de otros que le sean comparables en algún aspecto; en consecuencia, desde el punto de vista de la didáctica parece apropiado abordar la comprensión de los objetos a través de establecer semejanzas y diferencias con otros, lo que va en contravía con la compartimentación de los temas;
- ▲ el cambio más importante en el tipo de actividades propuestas a los estudiantes no está en proponerles guías para que ellos las desarrollen; está en el tipo de tareas que debe hacer el estudiante como medio para construir su comprensión (e.g., explorar regularidades, describir procedimientos, comunicar ideas matemáticas, usar diversas formas de representar un concepto, hacer conjeturas, ponerlas a prueba, discutir y argumentar acerca de soluciones que da a una pregunta, **versus**, seguir el discurso que arma el profesor a través de preguntas cerradas, recordar, poner atención a lo que dice el profesor, copiar del tablero, aplicar algoritmos para solucionar tareas específicas).

Condiciones que limitaron las posibilidades de acción en el proceso de innovación

- ▲ No es usual que los estudiantes hagan trabajo para la clase de matemáticas por fuera de ella; en consecuencia, no fue acertado el supuesto de que la realización de los talleres se podía hacer parcialmente como trabajo extraclase.
- ▲ Hay una gran cantidad de actividades escolares y circunstancias externas al profesor que se interponen en el desarrollo regular de las clases de matemáticas, lo que tiene como consecuencia la dificultad de crear y mantener un ritmo de trabajo adecuado para mantener la motivación y dedicación tanto de estudiantes como del profesor.

Preocupaciones de los profesores con respecto al cambio

Aunque los profesores no llegan a explicitarlo como se expone a continuación, de los comentarios que ellos hacen, se detectan algunas preocupaciones que los agobian durante el proceso de cambio:

- ▲ una tensión entre las intenciones, explícitas o no, del profesor con respecto al tipo de experiencia que considera deben tener sus estudiantes para aprender matemáticas, el supuesto no cuestionado que hace con relación a la cantidad de tópicos que deben tratarse en la clase de matemáticas y el tiempo real con el que cuenta para realizar lo que considera que debe realizar;
- ▲ una tensión entre la participación que se da a los estudiantes —tanto individualmente como en grupo— en la construcción del conocimiento matemático escolar y la interacción profesor-estudiantes-conocimiento matemático dirigida principalmente por el profesor puesto que es quien tiene el conocimiento y por tanto la autoridad para validar el conocimiento de los estudiantes.

En lo que sigue se presenta el registro del reporte hecho por los profesores en diez reuniones, en torno a la implementación de la propuesta curricular acerca de función cuadrática.

Registro en la primera reunión

A continuación se presenta el registro elaborado a partir del reporte hecho en la reunión del 28 de julio, en torno a la implementación del primer taller.

Aspectos generales

Hasta el momento en que fue hecho el registro, se había llevado a cabo una sesión de dos horas de clase, y los profesores estuvieron de acuerdo en que se necesitarían dos sesiones más para terminarlo: una, para completar el trabajo en grupo y la otra para hacer la plenaria.

Siguiendo lo acordado como parte del diseño, los profesores hicieron ante sus estudiantes una demostración de cómo querían que se construyeran las cajas y les dejaron como tarea para la casa construir sendas cajas; algunos profesores también pidieron responder las preguntas del trabajo individual. En la mayoría de los casos, los alumnos trajeron a la siguiente clase una caja construida según las instrucciones dadas; sin embargo, sólo unos pocos estudiantes desarrollaron el trabajo individual como tarea extraclase, así que en todos los casos hubo que dejar un tiempo de la primera sesión de clase para que los estudiantes respondieran las preguntas del trabajo individual.

En términos generales, no hay alusión explícita a cómo sucedió el trabajo individual; no se reportó si hubo o no interacción entre los estudiantes, y/o entre los estudiantes y el profesor. Dos de los cuatro profesores que hicieron su reporte, dieron detalles de algunas respuestas dadas por los alumnos al trabajo individual, sin embargo, no se sabe cómo llegaron a tener esa información, si fue a través de la observación directa mientras que los estudiantes estaban trabajando o si fue a través de la observación de las respuestas escritas de los estudiantes.

En lo que toca con el trabajo en grupo, parece ser que en todos los casos el profesor se acercó a los diferentes grupos ya fuera porque lo solicitaba el grupo o porque él decidía acercarse. En la clase de tres profesores predominó una interacción manejada por el profesor a través de preguntas más o menos directas y casi siempre encaminadas a lograr que los estudiantes llegaran a la respuesta correcta. Así lo evidencian los siguientes comentarios textuales de dos profesores:

[...] uno de ellos decía que cuando la altura es 7 entonces el área desperdiciada es 28 porque como 7 es la medida del cuadrado y como hay 4 cuadrados, es 28. Al preguntarles cuál es el área de un cuadrado dijeron que 7 × 7 , 49, y al preguntarles que si eso correspondía con lo que habían dicho anteriormente, dijeron que no porque no habían multiplicado el área sino la longitud, se dieron cuenta de inmediato que estaba mal la tabla y la corrigieron. (...) Para hallar el área de la caja, fue mucha dificultad; yo creo que es que ellos no tienen claro el concepto de área; en la mayoría de grupos, a lo último me tocó fue hacerlos desbaratar la caja, que miraran otra vez la forma para ver si podían llegar al concepto, a lo que se quería. (...) Lo otro es que no tienen una justificación de por qué hacen eso; la mayoría me decía «porque es más fácil y porque ahí están las tres medidas de la caja, entonces las tengo que utilizar todas para hallar el área de la caja».

Cuando se llegó al trabajo en grupo (...) entonces yo hice un cuadro grande para ir registrando también datos de diferentes grupos y cuando empezamos a ver cómo lo hacían, muchos lo hacían midiendo entonces les fui induciendo: ¿es necesario medirla?, ¿se podría averiguar sabiendo que la altura de la caja, por ejemplo, es 8.5, sin necesidad de medir, podría saber cuál es el largo de la caja? entonces, a través de esas preguntas —fue un poco difícil— mas, sin embargo, se llegó a la conclusión. (...) Entonces les dije si a mí se me da por construir una caja y se me da por calcular el área de esta cara, luego la de esta otra, etc. y sumo todo esto, ¿me dará lo mismo?

Con respecto a la observación vale la pena destacar que dos profesoras de diferentes colegios intercambiaron visitas a sus clases y que cada una observó la clase de la otra; además, habían establecido previamente los aspectos que querían observar.

Aspectos particulares acerca de las respuestas de los estudiantes

En el trabajo individual
Las medidas de todas las cajas construidas por los alumnos fueron números enteros. Con respecto a la pregunta 3, fue común ver que los alumnos midieron en vez de calcular, desconociendo la información que dice: "Con el dato anterior". No obstante, el hecho de que la siguiente pregunta les pida medir y confrontar los resultados obtenidos con los anteriores, pareció cumplir su cometido en el caso relatado por una de las profesoras.

Con respecto al punto 3, la mayoría de los grupos midieron no calcularon. Con el siguiente punto, entendieron mejor la diferencia entre medir y calcular y mejoraron la descripción de lo que habían hecho.

En uno de los cursos, algunos estudiantes para responder la tercera pregunta se valieron de un plano que representaba la caja desarmada[2].

Hay pocos comentarios registrados con respecto a las respuestas de los alumnos a las preguntas 5 y 6. Una profesora da cuenta de que en su salón una alumna dijo haber unido los pedazos recortados y haber calculado el área de la región resultante para calcular el área de papel desperdiciado[3]. Para calcular el área del papel de la caja, parece que en dos de los cursos, la estrategia usada fue calcular el área de las caras y sumarlas con el área de la base. En particular, no hay ninguna referencia detallada a si los estudiantes hicieron o no las descripciones pedidas en esos puntos.

2. La profesora no estableció si los estudiantes recurrieron por su cuenta a esa representación o si fue sugerida por ella.
3. Esto proporciona una estrategia de solución diferente a la que consiste en calcular el área de uno de los cuatro pedazos de la misma área y luego multiplicar por 4.

En el trabajo en grupos

Con respecto a la elaboración de la tabla que se plantea en la primera pregunta, es de destacar la insistencia que una de las profesoras le hizo a sus alumnos para que en cada casilla "escribieran el proceso numérico que da cuenta de cómo hallaron cada medida de su caja", estrategia que en su opinión[4] les facilitó a algunos estudiantes el establecer la generalización:

> *(...) algunos grupos ya llegaron a la generalización porque precisamente como yo les insistí mucho en este proceso, entonces llegaron fácilmente (los que llegaron).*

En relación con las preguntas 2, 3 y siguientes en las que se pide escribir una ecuación, los profesores dan información no muy detallada y en la que se entremezclan comentarios relativos a las respuestas a varias preguntas. Por ejemplo, una profesora dice:

> *Al trabajar en grupo, la columna con relación al área desperdiciada casi todos [los estudiantes] llegaron fácilmente; aunque no decían* $4x^2$ *, decían que multiplicaban por 4 después de haber hallado el área. Solamente dos grupos no llegaron; uno de ellos decía que cuando la altura es 7 entonces el área desperdiciada es 28 porque como 7 es la medida del cuadrado y como hay 4 cuadrados, es 28. Al preguntarles cuál es el área de un cuadrado dijeron que* 7×7 *, 49, y al preguntarles que si eso correspondía con lo que habían dicho anteriormente, dijeron que no porque no habían multiplicado el área sino la longitud, se dijeron cuenta de inmediato que estaba mal la tabla y la corrigieron.*

Una dificultad que tuvo que enfrentar una profesora con varios de sus estudiantes es relativa al concepto de *área de una caja*. En algunos casos, quizás el problema estuvo en que no sabían de qué se les hablaba, o creían que se les pedía utilizar alguna fórmula (ya hecha) para calcularla. En otros casos, el problema estuvo en que los estudiantes consideraban que una caja no tiene área.

> *Para hallar el área de la caja fue mucha dificultad; (...) Hubo un grupo de tres chicas que me pareció muy interesante, ellas me decían que una caja no tiene área, es que tiene alto, largo y ancho y no hay ninguna fórmula [de área] que utilice las tres. Decían que uno puede hallar el área de un rectángulo, de un triángulo, de un cuadrado, pero no el área de una caja; si se utilizan el largo, el ancho y el alto se halla el volumen, pero la caja en sí no tiene área. Entonces yo les decía que ellas tenían toda la razón y que ahí nos están preguntando no el área de la caja porque no la tiene sino el área del papel, que entonces buscaran una fórmula para hallar el área del papel utilizado y ellas discutieron mucho y llegaron finalmente al resultado.*

En las consideraciones que acompañaron el diseño del taller se decía "Si en la exposición de los grupos de 4 no salió sino una forma de expresar simbólicamente la cantidad de papel de la caja, sugerimos hacer preguntas para promover que se explicite otra forma y podría aprovecharse la oportunidad para verificar la equivalencia matemática entre las dos expresiones (...)". Atendiendo a ese llamado, en la clase de una profesora tuvo lugar durante el trabajo en grupo el siguiente suceso que conviene considerar. Como en el curso la única solución que salió fue "calcular el área del rectángulo de la hoja y restar lo que se recortó", la profesora decidió preguntar de manera directa si esa forma de proceder conduciría al mismo resultado que calcular las áreas de las caras y la base y sumarlas. Aunque los alumnos estaban reacios a tener en cuenta la propuesta de la profesora porque "eso es mucho más largo" ella logró que trabajaran en torno a esa cuestión argumen-

4. Infortunadamente la profesora no explica o justifica su afirmación.

tando la importancia de que ellos "no coman cuento". Después de haber hecho la prueba con valores numéricos, les solicitó a los estudiantes generalizar el hecho, con lo cual abrió espacio para la manipulación de expresiones simbólicas. Al final, los estudiantes aunque vieron que los dos procedimientos conducen a expresiones equivalentes, decían "de todas maneras, es más largo [el segundo]."

Comentarios de los profesores al diseño

Con respecto al hecho de que las medidas de todas las cajas construidas por los alumnos fueron números enteros, surgieron propuestas de plantearles a los estudiantes preguntas que los induzcan a trabajar con medidas racionales, no enteras[5].

Consideraciones acerca de cuestiones mencionadas en la reunión

1.- El hecho de que por una parte, en algunos casos no haya habido comentarios de los profesores en relación con el trabajo individual de los estudiantes (dos de las cuatro profesoras no aludieron al trabajo individual), y por otra parte, haya habido comentarios relativos al trabajo en grupo en donde se alcanza a percibir que el profesor explicó y condujo el trabajo de los estudiantes que se esperaba que hicieran en el trabajo individual, nos da indicios para pensar que los maestros subestimaron el papel del trabajo individual dentro del taller como globalidad y que quizás no vieron con suficiente claridad que aunque en la parte de trabajo individual y la de trabajo en grupo se tocan los mismos aspectos del contenido matemático implicado, esto se hace con diferentes niveles de abstracción y de generalización, y "saltarse" aquello que estaba planteado en el nivel concreto (el de las cajas construidas por los alumnos) es estar cayendo en algo que ha sido práctica usual. Para explicar esa diferencia que puede parecer sutil vale la pena presentar respuestas a preguntas que pueden parecer la misma.

2.- En el trabajo individual, la descripción pedida para el caso del largo de la caja podría ser algo del estilo: «como recorté cuadrados de lado 4 cm. en las esquinas, para calcular el largo de la caja tengo que restar 2 veces 4 a 24». Cuando en la segunda pregunta del trabajo en grupo se pide establecer las similitudes y diferencias encontradas en los procedimientos expuestos, esperábamos que fuera la oportunidad para que los alumnos que hubieran usado el mismo procedimiento se dieran cuenta de que para cajas diferentes todos habían hecho una sustracción donde el minuendo era 24 (semejanzas) y la cantidad restada en cada caso era diferente (diferencia) pero en todos los casos había algo común: el sustraendo era el doble del lado del cuadrado recortado (semejanza). Es decir, consideramos que responder a la pregunta 2 del trabajo en grupos exige en el nivel de lo concreto, buscar un patrón en el comportamiento de casos específicos, llegar a una generalización válida para los casos que se están tratando. La pregunta 3 pedía, sin más información que la de los casos tratados por el grupo, una generalización para calcular las medidas de cualquiera de las cajas posibles en el contexto, con lo que estábamos esperando algo del estilo «para calcular el largo de cualquier caja restamos a 24, 2 veces lo que mida el lado del cuadrado recortado». Esta afirmación, aunque es general para el contexto en el que se está trabajando, tiene un grado de concreción dado por la verbalización de la idea implicada. En cambio, lo que se espera que hagan los estudiantes como respuesta a la pregunta 4, no sólo es general en el contexto en cuestión sino que también es abstracto.

5. Para decidir al respecto, vale la pena responder la pregunta: ¿Por qué interesa que en esta primera parte del taller, los estudiantes trabajen con medidas no enteras? Si hay razones de peso, se podría exigir que grupos vecinos garanticen construir ocho o doce cajas de diferentes tamaños. En todo caso, es importante darse cuenta de que en la segunda y tercera parte del taller habrá espacio para trabajar con medidas no enteras para las cajas.

3.- Por comentarios surgidos en la reunión parece ser que en la parte de trabajo en grupos de 4, falta alguna pregunta o comentario que ligue explícitamente las preguntas 2 y 3, y quizás que permita ver que lo que se pide en 3 es una invitación a hacer una conjetura a partir de los casos examinados anteriormente.

El suceso ocurrido en torno a los dos procedimientos para calcular el área del papel de la caja y la equivalencia de las dos expresiones simbólicas correspondientes nos pone de manifiesto que a menos que se encuentren situaciones que verdaderamente generen interés y necesidad real en los estudiantes de explorar, comprobar, conjeturar, etc., en el mejor de los casos, ellos cumplirán con lo que se les pide pero estarán pensando en terminar rápidamente la tarea. Así que después de esta experiencia, consideramos que proponer a los estudiantes tareas para que vean la equivalencia de las dos expresiones por el solo hecho de verla no tiene caso dentro de este taller.

Registro en la segunda reunión

A continuación se presenta el registro elaborado a partir del reporte hecho en la reunión del 4 de agosto, en torno a la implementación del primer taller.

Aspectos generales

Algunos profesores sienten de manera más perentoria que otros la necesidad de dirigir, organizar y validar el trabajo de sus estudiantes; también, de ocuparse de plantear las conclusiones del trabajo realizado. Así lo indican las siguientes palabras de una profesora:

> *[Refiriéndose a qué hacer frente a los estudiantes que preguntan] Entonces toca orientarlos cómo tenían que comenzar. (...) Tengo que concluir, decirles todas las cosas, hacerles las anotaciones, sacar unas conclusiones porque no tendría sentido dejar eso así; el lunes hacer una plenaria para ver ellos qué piensan, qué obtuvieron y concretarles un poco todo.*

Parece ser que en el momento en que sucedió la reunión (4 de agosto) en varios cursos aún no se había concluido el trabajo en grupo. En el recuento que hicieron los profesores no hubo descripción detallada acerca de cómo pudo transcurrir la exposición de parte de los estudiantes ni tampoco cómo pudo ser la plenaria en los casos en que se hizo.

Aspectos particulares acerca de las respuestas de los estudiantes

En el trabajo en grupos

En uno de los cursos, se vio que para responder las preguntas 4 a 7 —donde se pedía escribir ecuaciones que expresaran el largo, ancho, área de papel desperdiciado y área de papel de la caja en términos de la altura de la caja— la mayoría de los estudiantes se apoyó en un plano[6] de la caja desarmada o en la tabla que registraba los datos para cuatro casos. Pero también hubo dos grupos que enfocaron su solución de manera distinta, la plantearon "de manera más sistemática", al decir de la profesora. Uno de los grupos hizo tablas para relacionar en cada una de ellas, la altura de la caja con una de las medidas implicadas. Para el caso del largo tomaron dos pares de valores y "utilizando la fórmula punto-pendiente encontraron la ecuación". Algo similar hicieron para obtener las otras tres ecuaciones. Como en la pregunta 8 se les pedía poner a prueba las ecuaciones

6. En el registro de la reunión anterior se hizo referencia a que no era claro si la utilización de esa representación gráfica (el plano de la caja desbaratada) había sido iniciativa de los alumnos o había sido sugerida por la profesora. En esta ocasión se aclaró que fue iniciativa de los alumnos, quizás inducida tácitamente por el hecho de que la habían usado en alguna clase anterior para resolver otro problema.

encontradas, estos estudiantes se toparon con que para el caso del área desperdiciada, la ecuación obtenida no les funcionaba para todos los casos. Así, lo relató la profesora:

> *(...) El grupo A tomó los puntos (5, 100) y (3.5, 49), la ecuación resultante era:* $d = 34x - 70$, *empezaron a probar su fórmula y ya no les funcionó; según ellos la fórmula sólo servía para valores menores de 7, hasta 6.9, porque al reemplazar los valores de sus compañeros que eran (7, 196) y (7.5, 225) ya no servía. Les pregunté si habían comprobado con otros valores menores que 7, afirmaron que sí, pero ellos sólo aplicaban la fórmula y no lo habían comprobado realmente, cuando les dije que verificaran con 4, con 2, ya no fue igual (...)*

En el otro grupo obtuvieron la ecuación $y = 2x$ y de ahí, "elevando al cuadrado"[7], pasaron a $y^2 = (2x)^2$; esto lo hicieron a partir de una tabla como la que sigue:

lado x	3	4	5	6
d	36	64	100	144
	6	8	10	12

El recuento que hace la profesora de la interacción que tuvo con ese grupo en torno a la solución que plantearon se recoge en la siguiente cita:

> *Al preguntarles por qué elevaron al cuadrado dijeron que porque era el área y que el área siempre va al cuadrado. Luego otra niña del grupo dijo que al unir los cuadrados desperdiciados se forma un cuadrado de lado 2x y luego se calcula el área entonces es 2x al cuadrado. Inicialmente cuando les pregunté por qué colocaban la tercera fila en la tabla no dieron explicación; entonces les pregunté «si van a buscar la fórmula del desperdicio del papel, ¿por qué no relacionaron por ejemplo, 3 con 36 y 6 con 144?» entonces respondieron que «no da». De acuerdo a esto supongo que ellos querían seguir explicando matemáticamente la fórmula buscada, utilizando la función afín.*

En otro curso, se observó que los estudiantes podían calcular las medidas implicadas, pero "tuvieron dificultad para generalizar, para escribir una expresión para las medidas involucradas, en términos de x"[8]. Al respecto de este problema, una profesora enfatiza que ella lo manejó impulsando a los estudiantes a escribir como forma de representar los diferentes pasos de la solución[9]:

> *A mí me parece algo importante que me sirvió para la generalización, es hacer que los estudiantes escriban. Cuando ellos tenían problemas para llegar a las fórmulas, yo les decía, cuéntenme cómo relacionaron, por ejemplo, las columnas 1 y 2; ¿qué hicieron? me decían*

7. La profesora no hizo alusión alguna acerca de cómo manejó con los alumnos (si lo hizo) lo relativo al cuadrado de la variable y.

8. Quizás vale la pena hacer una consideración cuidadosa de lo que significa *generalizar* y lo que puede implicar desde el punto de vista cognitivo. En el caso del que estamos hablando, ¿generalizar y escribir una expresión general son lo mismo? Si un alumno escribe una expresión general para el largo de la caja en términos de su altura, ¿podremos garantizar que generalizó? o ¿se requiere indagar otro tipo de cosas para saber si ha generalizado el resultado en cuestión? Lo planteado aquí se puede conectar con los comentarios hechos en el documento anterior acerca del sentido que pueden tener dentro del taller, las preguntas 2 y 3 del trabajo en grupo.

9. En el registro de la reunión anterior, aparece una iniciativa similar de otra profesora. La diferencia estaría en qué momento se pide el registro escrito que resuma las acciones del estudiante: en la tabla donde están escribiendo el resultado del cálculo de las medidas implicadas, o, posteriormente cuando intenten producir una expresión general.

pues, restamos, entonces yo les decía, pero, ¿qué restaron? entonces, los iba haciendo que escribieran, entonces me decían a 24… entonces yo decía escriba eso, a 24 menos 10, entonces yo les decía de dónde sacaron los 10, me decían porque son dos lados y cada uno mide 5, entonces, yo les decía que escribiera eso. A mí me sirvió esa estrategia para que ellos llegaran más rápido a la generalización. Después de haber hecho lo del largo, la generalización para el ancho fue más inmediata y las otras también, hubo un poco de más dificultad para lo del área, pero de todas formas sirvió haberles hecho escribir.

Con respecto a la interacción que tuvo con sus alumnos para apoyarlos en el proceso de llegar a escribir una expresión general, la profesora recuerda haber notado algo que aunque desde el punto de vista matemático pueda no tener tanta importancia, desde el punto de vista de la cognición del estudiante, sí parece ser muy relevante:

Algo que noté es que, por ejemplo, ellos escriben $x^2 \times 4$ *y cuando les pregunto la razón me dicen es el paso que hicimos, primero multiplicamos* x *por* x *y después por 4, entonces en la plenaria les decía que eso estaba bien, que hay un convenio matemático en el que primero escribimos el número, pero que el proceso estaba bien y todos los grupos hacían así, o,* $480 - x^2 \times 4$ *, me decían primero hicimos el área de un cuadrado y después, como eran cuatro, multiplicamos por 4.*

En varios de los cursos, se observó que los alumnos no tienen una noción clara de área y que en el mejor de los casos, manejan de manera automática fórmulas para calcular el área de ciertas figuras. Varios de los profesores dijeron haber tenido que hacer un pare dentro del taller para recordar o explicar lo que es el área. Por el contrario, una profesora reportó no haber observado dificultad en sus alumnos con relación al manejo del concepto de área y considera que esto es fruto del trabajo que sus alumnos hicieron hace un mes con el tangram.

Yo quiero agregar algo porque me doy cuenta que la forma como hemos tenido la experiencia y las dificultades hay algunas que son similares, pero también hay algunas diferentes, muy distintas. Esto me llama la atención. Yo no observé mayores dificultades en esto del concepto de área y ahora que aterrizo, hablando con Martha, puede ser precisamente porque nosotros dos semanas antes de salir a vacaciones de junio, trabajamos dos semanas con el tangram. Hicimos 10 sesiones que las abordamos en dos semanas. Son guías que trabajamos sobre didáctica de las matemáticas donde se trabaja mucho el concepto de área, perímetro, donde los alumnos hacían muchos ejercicios de proporcionalidad, todo esto con el tangram. En las vacaciones yo les dejé un trabajo bastante largo, ya para que ellos trabajaran en la casa y complementaran lo hecho en la clase. Lo hicimos por grupos, cada uno tenía su juego e hicimos concursos. Les gustó muchísimo, la clase ahí fue muy dinámica; pensé que estaba perdiendo tiempo (…) y ahora me doy cuenta de que quizás sí fue fructífero porque cuando hablamos lo del área, ellos no tuvieron mayor problema; ahora me doy cuenta de la importancia de ese trabajo que hicimos, que sin darnos cuenta porque no sabíamos que íbamos a hacer este taller, sirvió de prerrequisito muy fuerte para abordar el trabajo.

Comentarios de los profesores

Una profesora dice que sus estudiantes han estado muy motivados durante la realización del taller. Señala la participación real y autónoma de sus estudiantes como un elemento que ayuda a caracterizar en dónde puede residir la diferencia con lo que ha sido usual en su clase, incluso en ocasiones en los que les ha propuesto talleres.

Los muchachos están muy contentos. Uno ve mucha motivación, Pues, hay grupos que de pronto pierden un poco de tiempo, pero no es en general, ni son todos; sino que todo el mundo está como mirando cómo trabaja su taller, cómo llega a las fórmulas. A mí algo [que me parece] curioso es que ya no me preguntan cuál es la fórmula y no me preguntan si está correcto porque yo les digo pónganlo a prueba, miren a ver con sus resultados, con sus cajas, miren si eso es cierto. En mi clase, los talleres han servido mucho. (...) La metodología por talleres me ha parecido muy interesante porque ya no es lo que yo diga como verdad, que me paro allá al frente a decir lo que yo pienso y ellos me creen por fe porque yo lo digo, sino que ellos están viviendo la experiencia, están comprobando entonces eso es muy enriquecedor para ellos. [Refiriéndose a los talleres que ella había diseñado en torno a la función lineal en donde abría espacios para que sus estudiantes participaran] (...) de pronto, hay cosas similares, pero estos talleres requieren más de parte del estudiante y el hecho de que ellos tengan un material concreto de pronto, también los está motivando porque ellos pueden verificar, comprobar con sus elementos, entonces los otros talleres, eran muy de escritura, de cosas un poco más elevadas; este taller tiene como más práctica y más participación de los estudiantes.

Consideraciones acerca de cuestiones mencionadas en la reunión

1.- Con base en algunos comentarios surgidos durante la reunión no parece evidente que haya consenso acerca de cuál es la intención del primer taller, entre los profesores que lo implementaron y entre ellos y quienes lo diseñaron. El asunto de la intención que puede vérsele a una situación de enseñanza es importante porque de ello depende qué se hace en clase en la interacción con los alumnos y cómo se hace.

Por ejemplo, si un profesor ve como algo central al taller, que los estudiantes tengan una noción clara de área o se la formen a través del taller, muy probablemente comenzarán a surgir actividades al margen de lo planteado en el taller (explicaciones del profesor a los estudiantes, consultas en libros impuestas por el profesor) para intentar cubrir dicho concepto, con lo cual se producen desvíos que dependiendo de varios factores pueden echar a perder el interés y la motivación que haya podido generar la situación planteada en el taller. Con esto no se quiere quitarle valor al problema con el que un profesor se encuentra cuando supone, espera que sus alumnos tengan un cierto manejo que se requiere para realizar una cierta actividad y en la realidad ese supuesto no se cumple. Tampoco se quiere sugerir que haya una única forma de proceder frente a este tipo de problema: evadirlo. Más bien, se quieren destacar dos puntos: por una parte, la importancia de tener la claridad necesaria con respecto a la intención de la actividad para poder tomar decisiones apropiadas frente a ese tipo de problemas; por otra parte, el aporte a la comprensión del estudiante que puede hacerle cada experiencia que viva en la que se requiera poner en juego la noción que tenga (por deficiente que ella sea); de ahí, la importancia que le vemos al diseño cuidadoso de situaciones de aprendizaje.

Volviendo a centrarnos en la intencionalidad de la primera parte del taller, dos profesores consideran que:

Para mí, [la conclusión del taller][10] es cómo influye la altura de la caja en las otras medidas, o sea la variación del largo, el ancho, el área del papel desperdiciado y el área del papel de la caja en relación con la altura de la caja, con base en las generalizaciones que puedan hacer los alumnos. (...) lo más importante del taller es la variación del área desperdiciada o del área de la caja de acuerdo a la altura de la caja.

10. Se está usando aquí la conclusión que el profesor ve que se puede extraer de la realización del taller, como un indicador de cuál es la intencionalidad que le ve al taller.

Lo principal del taller es que hay funciones distintas a las que veníamos viendo que eran lineales, que salen las funciones cuadráticas. Eso es básicamente a lo que todos debemos llegar y como mirar las características de esas funciones, es el punto 10 del taller, en el que se preguntaba por caracterizar a esas funciones.

Al respecto, estamos más de acuerdo con lo expresado en la segunda cita, y estaríamos de acuerdo con lo dicho en la primera, si se reformulara así: en este taller hay oportunidad para que los estudiantes puedan ver que hay una correspondencia entre la altura de la caja y cada una de las otras variables; más exactamente hay una relación de dependencia que hace que a cada valor de la altura de la caja[11] le corresponda, mediante una ecuación, un bien determinado valor que representa, bien sea el largo, el ancho, el área del papel desperdiciado o el área del papel de la caja. Aunque el aspecto de la correspondencia entre variables esté relacionado con la variación de las variables, no son lo mismo.

2.- Consideramos que uno de los indicios más importantes para intentar ver el grado de comprensión que tiene un profesor acerca de lo que pasa en su clase, en su práctica, es la sensibilidad que tiene hacia lo que sus estudiantes dicen y hacen frente a las tareas que les propone como parte de la enseñanza. ¿Qué tan precisa y detalladamente puede describir incidentes en los que intervienen sus alumnos?, ¿con qué tanta "finura" clasifica e interpreta los incidentes con los que se enfrenta en su práctica?, son dos preguntas cuyas respuestas (de ningún modo fáciles de producir) podrían reflejar en alguna medida la comprensión del profesor acerca de aspectos específicos de su práctica.

En relación con lo dicho en el párrafo anterior, se quiere destacar que a través de lo que han expresado tanto en las reuniones como en algunos textos escritos, se evidencia que algunas profesoras están en un proceso de desarrollo de su comprensión como docentes, muy interesante. En este caso nos apoyamos en la siguiente cita:

Cuando yo tengo el área sobre una superficie plana es muy fácil decir, el área total menos el área de las esquinas. Pero cuando yo tengo esto en un volumen, es decir, en tres dimensiones, entonces es la superficie de un objeto que ocupa un cierto lugar en el espacio, entonces es como diferente, por eso algunos alumnos hicieron el área de las caras laterales y el área de la base, y les fue difícil pasar a la otra expresión $\left(480-4x^2\right)$ *puesto que desde el punto de vista espacial es diferente.*

Registro en la tercera reunión

A continuación se presenta el registro elaborado a partir del reporte hecho en la reunión del 18 de agosto, en torno a la implementación de los dos primeros talleres.

Aspectos generales

Hay cursos en los que aún no han comenzado la implementación del segundo taller (mal llamado "segunda parte del taller").

La relación entre el poco tiempo efectivo de clase con que cuentan para desarrollar su enseñanza y la gran cantidad de contenido que suponen que deben tratar en cada curso es un motivo de gran preocupación para la mayoría de los profesores. Esa preocupación con frecuencia los impulsa a tomar decisiones —que no siempre son coherentes con ideas que sostienen acerca de la importancia de que el estudiante participe en la construcción de su conocimiento y, que más bien, reflejan la gran importancia que conceden a "despachar" bastantes contenidos— con respecto al papel que tanto ellos como los alumnos pueden jugar en la realización de las actividades de clase. Por lo general, el pro-

11. En este taller no se alude para nada a cuáles son los valores posibles de la altura de la caja.

fesor decide intervenir, ayudarle al estudiante a ver, a relacionar, a llegar a lo que se quiere que llegue. La siguiente cita apoya lo dicho:

Leyendo el informe que nos dieron [los coordinadores] sobre lo que percibieron respecto de lo que nosotros dijimos en la primera sesión, me llamó mucho la atención que nosotros... talvez por el afán, o personalmente yo siento que como que me angustia que no lleguemos rápido a descubrir las fórmulas y trata uno de... como ir diciendo muchas cosas claves y no permitiéndole al estudiante que por sí mismo saque sus conclusiones, (...) Y, traté esta vez de estar un poquito lejos, dejándolos trabajar solos, observando desde lejos pero sin meterme mucho en cada grupo a saber que... o a darles ideas, mejor, sino dejando que ellos contaran y hablaran y observando solamente.

[...] Tratando siempre, aunque no deja uno de meterse a veces a opinar, aunque mi propósito era no intervenir mucho en lo que ellos dijeran, a veces, termina la costumbre o el afán también porque se queda uno mucho en la primera, en la segunda pregunta y como que hay la angustia de que no avanzamos.

El hecho de estar implementando una propuesta común para la enseñanza de un tema y además tener espacio para hablar de lo que se hace en clase, de lo que hacen y dicen los alumnos, de lo que hace y dice el profesor como parte de la implementación genera una interacción profesional entre profesores que puede tener efectos muy valiosos para quienes están implicados, ya que en dicha interacción el profesor escucha una voz que le es familiar y, quizás esto le dispone positivamente a confrontar su propia experiencia con la de colegas que están en una situación similar, hecho que da gran validez a lo que se exponga y se discuta. Los comentarios de dos profesoras permiten ilustrar la anterior observación:

(...) les dije [a los estudiantes] teniendo en cuenta alguna sugerencia que hizo (...) [una colega que participa en el proyecto ICEP], que también me pareció muy oportuna, que debían escribir y que yo iba a recoger parte de los apuntes que ellos escribieron, entonces ello hizo que los alumnos se centraran un poco más en las preguntas y la manera de responderlas.

(...) pues yo me di cuenta con una conversación que tuvimos con (...) [dos colegas que participan en el proyecto ICEP] que en vez de hacer tantos cálculos mecánicamente se podía hacer que ellos [los estudiantes] interiorizaran un poco más las ecuaciones y que vieran cómo iba variando y hacia qué valores...

Aspectos particulares acerca de las respuestas de los estudiantes

En esta ocasión sólo dos profesoras hablaron acerca de la implementación de la segunda parte del taller, e infortunadamente, fueron alusiones poco precisas, poco detalladas[12].

Con respecto a la segunda pregunta del trabajo en grupo, una profesora reportó que para justificar por qué la caja de mayor altura que se puede construir no es una que tenga altura 11.9999 cm., algunos de sus estudiantes recurrieron a considerar sobre una gráfica plana qué consecuencias se podrían derivar del hecho de que la altura de una caja fuera, por ejemplo, 11 cm., proceso en el que concluían cosas del estilo "el ancho no se podría, no alcanzaría para formar la caja". Otra profesora reportó que la forma como alumnos

12. Por ejemplo, sería muy interesante que los profesores registren en detalle cuáles son los argumentos que utilizan los alumnos para justificar su posición frente a la veracidad de las aseveraciones que se hacen en la pregunta 2 del segundo taller. También valdría la pena registrar la explicación que dan para la pregunta 3 y si la relacionan con las consideraciones hechas al responder la pregunta 2 (argumento para la segunda aseveración).

suyos decidieron que la segunda aseveración (la caja de mayor altura que se puede construir en el contexto es la de altura 9.9999 cm.) era la verdadera fue considerando la primera afirmación (la caja de mayor altura que se puede construir en el contexto es la de altura 11.9999 cm.) y dándose cuenta de que ella no era verdadera[13]:

(...) un grupo dijo que la segunda era la respuesta correcta porque si hacía cajas con la primera aparecían en el ancho valores negativos que no tenían razón de ser la caja; que por lógica no se podían hacer esas cajas en el contexto.

Con respecto a la situación planteada en la pregunta 4 (dar la altura de una caja más alta que las ya dadas —que de hecho, ya son muy altas), aunque algunos estudiantes tuvieron dificultades[14] para abordarla y considerarla acertadamente, también se encontró que otros estudiantes, en su discusión al respecto, pudieron entrever y sentir la problemática en torno a la densidad de los racionales. El siguiente comentario de una de las profesoras apoya esta aseveración:

En la cuarta pregunta se generó la discusión respecto a las cajas en la imaginación, entonces algunos decían «yo sí puedo construir una de 9.9». Un alumno intentó construirla y gastó bastante tiempo pero quería demostrarles a los demás que sí se podía hacer. En ese momento también surgió el análisis sobre qué tantos números encontraban en medio de 9.9 y de 9.99, entonces se aclararon entre ellos algunas dudas.

Alumnos de la misma profesora al abordar la pregunta 5 (describir de forma general la variación del largo, el ancho y el área del papel de la caja, cuando la altura crece) aludieron fundamentalmente al tamaño de los incrementos en la altura.

Cuando llegamos a la parte de la pregunta 5, entonces ahí algunos decían aumenta de 1 en 1 porque algunos tenían valores de 5 en 5 milímetros, por ejemplo, cajas con datos de 8.5, 9, 9.5, etc. o de 7, 7.5, 8, entonces ellos decían aumenta y disminuye de 1 en 1, pero algunos afirmaban que de 1 en 1, otro decía qué pasa si yo hice una caja de 8.2 y otra de 8.3, pero no profundizamos mucho en eso porque en la puesta en común pienso que allá van a discutir más sobre eso.

Consideraciones acerca de cuestiones mencionadas en la reunión

1.- El comentario anterior de la profesora induce a pensar que tales estudiantes no entendieron que se les pedía describir tres conjuntos de datos ordenados (los correspondientes a las funciones largo, ancho, y área del papel de la caja) y no vieron que atendiendo al registro de las tablas, para hacer esas descripciones podían hablar de por lo menos tres aspectos: el menor y el mayor de los datos; si el orden de los datos era ascendente, descendente o primero una cosa y después otra; si a variaciones iguales de la altura corresponden o no variaciones iguales de la función.

2.- Con respecto a la forma como algunos estudiantes abordaron la pregunta 2 del trabajo individual, llama la atención fundamentalmente lo que tiene que ver con la argumentación que los muchachos utilizan para negar la validez de la afirmación de Juan y Mercedes, la primera afirmación. ¿El argumento que están utilizando es por reducción al absurdo o es un contraejemplo, o ambas cosas ligadas? Parece ser que lo que está en el fondo de la argumentación de los estudiantes es algo del tipo: quiero demostrar que p es cierto, supongo que p es cierto y llego a una contradicción, por ejemplo que hay longitu-

13. Infortunadamente la profesora no reportó detalles de cómo abordó tal argumentación de los estudiantes.
14. Parece ser que la profesora no exploró en ese caso cuáles podrían ser las dificultades de los estudiantes.

des negativas; por ejemplo, que falta papel; son formas de expresar esa contradicción. Y, ¿por qué el llamado de atención sobre esto? Porque casi siempre para enseñar a pensar lógicamente se enseña un curso de lógica; sin embargo, en actividades como las que se están considerando en este taller hay oportunidades para comenzar a generar un tipo de argumentación que es valioso para desarrollar el pensamiento matemático. En este caso es posible ver una forma particular de argumentar que es diferente a la de la segunda afirmación de ese segundo punto. De alguna manera se puede decir que los dos argumentos no tienen la misma estructura lógica; uno es por contradicción mientras que el otro es directo.

3.- Consideramos que para comprender mejor qué efecto tiene en los estudiantes la implementación de estos talleres es fundamental que los profesores centren su observación en lo que hacen, dicen y piensan los estudiantes cuando discuten para abordar y solucionar las preguntas y situaciones que les plantean los talleres.

Dedicarle tiempo y esfuerzo a hacer una observación detallada del trabajo de los estudiantes, tiene por lo menos dos objetivos igualmente importantes. Por un lado, que el profesor tenga alguna manera de seguirle el rastro al proceso de comprensión de sus estudiantes lo que es completamente imprescindible para tomar decisiones acerca de cómo continuar la enseñanza, cómo ayudar a que los estudiantes vayan mejorando, ampliando su comprensión del conocimiento matemático y vayan desarrollando las competencias matemáticas que se quieren desarrollar con la escolaridad. Por otro lado, es la forma más natural como el profesor se puede volver un experto en lo que es su profesión; la observación cuidadosa y sistemático de lo que pasa en el salón de clase en torno a los procesos de enseñanza y aprendizaje le permite ir armando su propia teoría acerca de los asuntos con que tiene que habérselas día a día como parte del ejercicio de su profesión. Es la manera más efectiva de dejar de ser lego en asuntos de la enseñanza.

Dado que es tan difícil estar pendiente de atender a los estudiantes para ayudarles durante la implementación y a la vez tratar de observar desde lejos, puede ser estratégico planear qué se quiere observar en cada clase.

Registro en la cuarta reunión

A continuación se presenta el registro elaborado a partir del reporte hecho en la reunión del 25 de agosto, en torno a la implementación del segundo taller.

Aspectos generales

En un curso, la implementación de la segunda parte del taller tomó dos sesiones de dos horas y para algunos grupos, se requirió un trabajo extraclase; la plenaria se hizo en otra sesión de clase de una hora.

Una de las profesoras aún no ha comenzado la implementación de la segunda parte del taller pues

> *estoy terminando la primera parte porque me di cuenta de que los alumnos no tenían registros de las tablas, entonces estamos escribiendo todo, y no he hecho las plenarias. (...) Veo que los talleres están muy bien conectados entonces me parece que tengo que dejar muy bien lo que se hace en el taller 1.*

Dos profesoras reportan haber hecho cambios a la metodología sugerida en la cual se espera que los estudiantes trabajen en grupos, saquen conclusiones de su trabajo y expongan dichas conclusiones. En ambos casos, los cambios tienen que ver principalmente con el hecho de que es la profesora quien, a través de preguntas hechas a todo el grupo, conduce el razonamiento que se quiere que hagan los alumnos para llegar a establecer el dominio y recorrido de las tres funciones implicadas, en cada una de las versiones del taller. En uno de los casos, la razón que aduce la profesora tiene que ver principalmente con una falta de motivación de parte de los alumnos[15]. En el otro caso, son preocupaciones de la profesora el hecho de que han faltado 10 alumnos de 40 y que el taller debe ser más activo. Pero, además, menciona que puesto que los estudiantes "realmente no profundizan" en la exposición no se formularon conclusiones sino que lo que se hizo para todo el grupo fue

> *analizar pregunta por pregunta para ver qué pasaba con el largo, el ancho y el área cuando se daban determinados valores a la altura (...) pero eso no lo han llevado a gráficas cartesianas y quiero ahora mirar cómo se hace eso, o sea que ellos mismos lo hagan pero llevándolos porque es que toca llevarlos por medio de preguntas.*

Dos profesoras del mismo colegio han intercambiado visitas a sus clases. Y también se han intercambiado visitas de observación entre profesoras de instituciones diferentes. Al respecto una de las profesoras observada reconoció haber tomado una decisión no apropiada al cambiarles a los estudiantes lo que estaban realizando en la clase por razón de la llegada de la profesora que iba a hacer la observación, pues supuso que no habría nada interesante para observar en el trabajo que estaban haciendo los estudiantes.

> *Yo los tenía trabajando y como llegó [la compañera] entonces los interrumpí porque dije si lo que están haciendo es mecánico, ¿ella qué observa? Y, sí habría podido observar, el orden de las operaciones, hay muchas cosas. Yo después me arrepentí porque estaban concentrados y los interrumpí para que la profesora pudiera observar más del taller, más relacionado con el taller.*

Una profesora alude a la importancia que le está viendo a que los alumnos lleven por escrito un reporte de lo que hacen en clase y sugiere "hacer énfasis para que queden las evidencias del trabajo del muchacho registradas en los cuadernos, eso nos puede facilitar el trabajo".

Aspectos particulares acerca de las respuestas de los estudiantes

Al tener que asignar (o considerar) distintos valores a la medida de la altura de la caja, para lograr cajas muy altas y muy bajas, en la mayoría de los casos (por no decir en todos) se encontró que los alumnos trabajaron con números decimales de máximo una cifra significativa. Una profesora reporta que "Encontré que la gran mayoría de estudiantes sólo concibe medidas de milímetros (...) dicen que una caja más alta que 9.9 cm. no se puede, y que una caja más baja que 0.1 cm. tampoco se puede". El trabajo con números decimales de máximo una cifra significativa se concreta de varias maneras:

- ▲ cuando se les pregunta, por ejemplo, si hay una caja cuya altura esté entre 7.9 y 8 cm. o entre 9.5 y 9.6 cm., la respuesta es negativa;
- ▲ cuando establecen el conjunto que representa todos los valores que podría tomar la medida del lado del cuadrado recortado para construir cualquier caja en el contexto, «los nombran uno a uno: 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, hasta llegar a 9.9»;
- ▲ cuando están considerando dos cajas, por ejemplo, de altura 5 y 5.5 cm., y se les pregunta si hay cajas cuya altura sea un valor entre los dos dados, su respuesta es positiva, nombran como alturas posibles: 5.1, 5.2, 5.3, y 5.4;

15. Los detalles de la implementación se presentan más adelante.

- ▲ un grupo que estaba considerando cajas de altura 6 cm. y 8 cm., dijo que la única caja intermedia era la de altura 7 cm.

Con respecto a la pregunta 11, una profesora reporta que sus estudiantes no comprenden lo que significa hacer un estimativo para la medida del largo, el ancho y el área del papel de la caja, para un valor particular de la altura y aunque ella les explica que se trata de dar un par de valores entre los que esté ubicada cada una de las tres medidas, los alumnos lo que hacen es calcular las medidas.

Con respecto a las preguntas 15, 16 y 17 parece ser que los alumnos tuvieron dificultad para trabajarlas por su cuenta. Dice una profesora que sus alumnos respondieron tales preguntas de la misma manera como respondieron a la pregunta 14, es decir, como rango de las funciones ancho, largo y área del papel de la caja dan el dominio de tales funciones.

También con respecto a las preguntas 14 a 17, otra profesora dice que muchos de los estudiantes no tuvieron en cuenta las diferentes columnas de las tablas elaboradas, como base para dar sus respuestas y que cayeron en cuenta de que debían hacerlo cuando en la puesta en común algunos alumnos dijeron haberse remitido a las tablas para ver los valores. A raíz de esto pidieron a la profesora tiempo para revisar sus respuestas y después

> *ya más o menos, todos hablaron que en el punto 14, el intervalo estaba entre 0 y 10 sin incluir a 0 ni a 10; en el 15, 4.002 hasta ... siempre sin incluir los extremos, de acuerdo a las tablas que habían llenado daban los respectivos valores. Algunos manejaron intervalos bien, otros como dije anteriormente, solamente escribiendo números, conjuntos.*

Aspectos particulares acerca de la actuación del profesor

Fue común no explicitar detalles acerca de cómo se abordó en cada curso la problemática anterior. La profesora mencionada antes, reportó haber dejado como tarea a sus alumnos terminar de responder las preguntas del taller y parece ser que en su caso, el impasse se comenzó a resolver con comentarios de los mismos alumnos:

> *En la plenaria ya algunos estudiantes llevaron medidas de más de milímetro. Entonces ellos mismos se acercaban y decían ¿cierto que esta caja en la mente se puede construir? Una caja de 0.75, por ejemplo. Entonces ya varios llevaron otro tipo de medidas y entonces aclararon un poco para los que consideraron que sólo se podía hacer cajas con milímetros, pero eso sí, insisten que es en la mente porque en la realidad, imposible.*

Otra profesora dice haber hecho ella misma la explicación; señala que fue en el punto 11 del taller cuando

> *surgió bastante inquietud al tener que buscar un valor intermedio entre otros*[16] *porque algunos estudiantes dijeron que no había otros, que de 9.7 a 9.8 pues no había más, entonces en ese punto tuvimos que hablar de densidad de los números y explicar cómo sí había más números entre ellos y entonces algunos planteaban que qué pasaba cuando era 9.999, si*

16. Consideramos importante destacar que aunque la profesora no califica —como se pide en el enunciado de la pregunta 11— los dos valores con los que se pide trabajar (e y q) como "muy próximos entre sí", sí parece que está considerando esa condición en la escala usada por sus alumnos cuando centra el problema en el hecho de encontrar un valor intermedio entre dos valores que difieren entre sí en 1 milímetro. No vemos que esta situación haya sido la misma en otros cursos donde la respuesta de algunos estudiantes a la pregunta 11 fue que sí se podían encontrar valores intermedios entre otros dos y al concretar la respuesta se ve que es esa por razón de que los valores e y q no son tan próximos como sería deseable para hacer surgir con fuerza ante los estudiantes el problema de la densidad de los racionales.

había algunos otros y nuevamente la explicación de que si había más. (...) Después de aclarada esta situación ya quedó más fácil hablar de los demás intervalos que tenían que hallar en las preguntas 14 a 17; sin embargo, algunos estudiantes escribían conjuntos como (...) por ejemplo, 0.01, 0.02, 0.03 hasta 0.09 (...)

Otra profesora señala que para enfrentar el problema que veía que sus alumnos estaban teniendo para conectar la situación en el contexto con los conjuntos numéricos, hizo algunas preguntas, les pidió que consultaran, y considera que debe tratar el problema en la puesta en común.

(...) vi que los niños tenían problema para conectar lo que estaban haciendo ahí con las cajas y el conjunto de los números (...) entonces yo empecé a hacer preguntas y a asociar con los conjuntos de los números que daban, les preguntaba que qué era el número natural, qué era el número entero, que si ahí había números naturales, números enteros, que el número 9.8, qué más tenía fuera del entero y les dije que tenían que ir a consultar eso (...) pero luego en la puesta en común tocará añadir lo que haga falta.

Registro detallado de un cambio en la metodología de implementación

Una profesora reporta haber cambiado la metodología sugerida por considerarlo necesario y conveniente para lograr una mayor motivación tanto de sus alumnos como de ella misma. En grupos, los alumnos elaboraron la tabla de las cajas muy altas; la caja más alta que se construyó en todo el curso fue de 9.7 cm.; luego, dejó que libremente completaran la información para otras cuatro cajas más altas que las dadas previamente. Después comenzó un trabajo con todo el grupo, en el que ella lideraba el proceso a través de preguntas. Hizo una tabla en el tablero[17] y pidió que algunos alumnos registraran, en forma ascendente, los datos de sus cajas, mientras que los demás debían revisar si tales datos eran o no correctos.

Luego les empecé a llevar a través de preguntas, bueno, finalmente ¿cuál es la caja más alta que podríamos construir? ¿podríamos dar un valor exacto de cuál es la caja más alta? Ellos decían no, pues cuando... casi 10, y ¿qué es casi 10? ¿cuánto? Ellos decían, por ejemplo, 9.99999. Yo les escribí en el tablero entre 9.999 y 9.9999, ¿hay más valores? Algunos tuvieron dificultad [para responder], lo mismo que para decir que entre 9.7 y 9.8 hay más valores, o entre 9.999 y 9.9999. Ahí empezamos a explicar, a explorar que había mucho más números.

[Después de haber aludido a que hay muchos valores que "tienden a 10" pero que no es posible decir exactamente cuál es el último, entonces pregunta por el comportamiento del largo de la caja]. (...) entonces ¿hacia dónde tiende el largo? Miremos en la tabla. Ahí algunos decían que tendía hacia 4.002, o sea siempre daban el último dato registrado en la tabla. Decían, «ese valor, ¿hacia dónde tiende, hacia cuál valor lo podemos aproximar?» Bueno, que era casi 4. Entonces yo fui haciendo unas flechas de las aproximaciones en el tablero, me parece que es bien importante porque me parece que eso les ayuda a vislumbrar mucho más, a que se sistematice un poco el pensamiento de ellos.

17. Otras dos profesoras también reportan haber hecho como parte de la plenaria dos tablas grandes en el tablero para cajas muy altas y muy bajas, que registran los datos de una gran cantidad de cajas y facilitan la observación de "cómo va cambiando el largo, cuál es el valor máximo, cuál el valor mínimo; lo mismo para el ancho, el área del papel desperdiciado y el área del papel de la caja y así, se facilita que lleguen a las respuestas de las preguntas 14 a 17".

Como tarea para la casa les pidió a los alumnos que hicieran un análisis similar para describir "a dónde va tendiendo cada columna", es decir, el comportamiento, en ese aspecto, de los valores de las otras funciones: ancho y área del papel de la caja.

Al otro día tuve la alegría de que la mayoría lo había hecho, pero algunos no, entonces dejé un tiempito y entonces los noté un poco... ahí tomé una decisión, vamos a hacer algo distinto, de las tablas que ustedes tienen van a sacar la información para graficar en sus cuadernos el largo y el ancho y me lo van a hacer en un solo plano cartesiano.

No obstante, no ser la graficación de una tabla de valores una tarea nueva para los alumnos de esta profesora, y además, haber tratado ya el caso de funciones lineales y afines, la tarea les impuso un reto a algunos de ellos. La profesora les insistió en que "miraran los datos de la tabla".

Un alumno terminó rapidísimo (...) y la recta le había dado para acá [indica una recta ascendente] Entonces le pregunté si había utilizado los datos de la tabla, ¿será que están ubicados ahí? Entonces dijo «¡ay!, no da para la izquierda, no no, esto está mal». (...) Otros empezaron a decir que daba para la izquierda y yo les insistí en que miraran los datos de la tabla. Entre ellos mismos fueron apoyándose hasta que ya resultaron muchos con la gráfica y entonces dijeron «son paralelas». Bueno, ahí hicimos una discusión muy interesante.[18] *Los dejé primero que ellos hicieran, ya faltaban como 20 minutos y empieza uno a correr con el tiempo, de que yo no puedo quedarme aquí entonces mientras ellos estaban trabajando yo fui haciendo en el tablero mi escala lo más cercana posible y luego les pedí que me dijeran algunos datos de los que ellos tenían. (...) fuimos ubicando puntos (...) y elaboramos la gráfica y empezamos a hacer la determinación del dominio y del rango de cada una de esas gráficas, dándole sentido en el contexto.*

En la representación gráfica para los valores muy cercanos a los extremos, la profesora reporta[19] que los estudiantes tuvieron dificultad:

Una cosa es que los alumnos vean en la tabla los valores de las funciones y otra cosa es cuando lo van a ver gráficamente, eso noté. Hubo un alumno que me dijo no haber entendido lo último, cuando yo decía en la gráfica: ¿va hasta 12?, ¿podemos tomar 12? En la del largo, porque como la del ancho daba hasta 10 y era justo el punto de corte, entonces pensaron que la otra iba para 12. Entonces les dije ¿podemos hacer cajas de altura 12? ¿Las pudieron hacer, en sus tablas hay alguna que tenga 12 de altura? Entonces se dieron cuenta de que no.

Habiendo intentado establecer el recorrido de las funciones a partir de la información de la gráfica cartesiana, la profesora advirtió la dificultad que este ejercicio implica para los estudiantes y además, notó que el paso de la tabla a la gráfica puede ayudar a la comprensión de los alumnos.

No comprendían cómo es que en la gráfica cuando yo tomo los valores en x y me voy aproximando hacia algún valor, puedo leer y llegar a decir a qué tiende el valor de y; entonces para explicarles les decía miremos la tabla. Como ya la tenían me pareció importante

18. Infortunadamente no hay registro alguno de los puntos centrales de tal discusión. Especulando un poco, la discusión habría podido retomar asuntos concernientes a cómo se relacionan ciertos conceptos y procedimientos relativos a las funciones afines en los sistemas de representación simbólica, gráfica y tabular. Por otra parte, los detalles expuestos acerca del desempeño de los estudiantes frente a la tarea, permiten ver indicios de que les hace falta profundizar en su comprensión acerca del tema.
19. La alusión a este hecho fue inducida por una pregunta directa de quien coordinaba la reunión.

que ellos sí hubiesen trabajado la tabla y que hubiéramos sacado para cada columna a qué tiende porque se está viendo. De pronto uno hace como al revés, uno parte de la gráfica y mire aquí, pero allá como que no es evidente. El paso de la tabla a la gráfica es bonito, los muchachos lo comprenden más.

Por último, la profesora reporta haber hecho un sondeo de la opinión de los estudiantes, por escrito, con respecto a lo que les pareció más significativo de esa clase y cuatro de las respuestas que obtuvo fueron las siguientes:

La clase de hoy me pareció muy buena porque entendí que de unas simples cajitas se puede entender mucho las matemáticas, desde aprender a sacar unas áreas y con estas áreas podemos sacar unas tablas y hacer unas gráficas, lo cual nos hace entender mejor las cosas, sacar muchas cosas a esas gráficas como el dominio, el rango y los límites[20]*, y pude entender muy bien las matemáticas con este nuevo método.*

Verdaderamente la clase me pareció muy sencilla puesto que puse cuidado. La enseñanza de hoy, aprendí a hacer las gráficas de comparación, también a determinar dominios, rangos y límites y creo que hice avances en proporción grande.

Me pareció muy interesante porque recordamos cosas anteriores sobre las funciones y gráficas.

La actividad de hoy me pareció excelente porque en las rectas hubieron rectas paralelas y además supimos cuál era el rango y dominio...

La profesora tiene la sensación de haber tomado una decisión correcta al cambiar la metodología sugerida, no sólo motivada en los comentarios de sus alumnos sino también en la propia apreciación de lo que sucedió en la clase, de lo que considera que pudieron ver sus alumnos; y esa experiencia la llena de entusiasmo, entre otras cosas, porque ve realmente que lo que está haciendo es una forma de aproximarse intuitivamente a nociones que se estudian en grado once.

Aprecié que sí lograron conectar todos estos datos que teníamos en la tabla con lo que explicamos en la gráfica; dijeron que sí habían entendido; les impactó muchísimo esa conexión que se hizo entre esta tabla y lo gráfico. (...) no pensé que en ese momento esa decisión que tomé, me fuera a salir bien, porque los había visto como desmotivados, como que ni ellos... ni yo me sentía bien con el trabajo de ellos, entonces hice el cambio y se avanzó bastante.

Comentarios de los profesores

Vuelve a salir el factor tiempo como una condición que constriñe la adecuada implementación del taller, pero en esta ocasión también se hace evidente que a los profesores mismos les toma tiempo considerable responder a dichos talleres y además que parte del tiempo que se requiere es para interactuar con los estudiantes y para permitirles hablar. Al respecto una profesora dice

Nosotros desarrollamos este taller, nos demoramos mucho tiempo, ¿qué será los muchachos? Entonces, claro que el factor tiempo es un problema para los muchachos que no alcanzan a profundizar, todo por encima, de cualquier manera y de verdad que no se le saca

20. Frente a ese comentario, la profesora aclara que les mostró la notación de límites: "(...) después del dominio y el rango les dije que ahí nos vamos acercando a la idea de límite, y a cómo se escribe".

el jugo que debe tener esos talleres. Se necesita mucho diálogo, a ver cada uno qué opina, eso toma tiempo y no contamos con el tiempo suficiente para eso.

A pesar de la presión que el factor tiempo ha impuesto a los profesores al realizar este tipo de actividad, algunos de ellos han podido ver algunos beneficios para los estudiantes y para ellos mismos, y por lo menos en algunas oportunidades alcanzan a sentir que la experiencia es valiosa y merece la pena continuarla. Los comentarios de dos profesoras apoyan lo dicho:

Comparto de todas maneras que lo que a uno lo estresa es el tiempo y las mismas condiciones que tenemos en el colegio, pero hay algo que nos debe animar y es que estamos haciendo algo diferente, de lo cual debemos estar seguras que los muchachos sí han visto cambios y han de pronto comprendido que hay una forma distinta de trabajar las matemáticas. Yo creo que eso es algo bien importante y que a medida que se vayan desarrollando los talleres, con dificultades, también nosotros [nos beneficiamos] en este mismo proceso de aprendizaje —porque nosotros somos los primeros en tener un aprendizaje significativo también de nuestras matemáticas que aprendimos muy sin sentido— (...) Yo, a veces también me siento como desmotivada pero vuelvo y tomo impulso y digo carambas vale la pena seguir pues para el año entrante estoy segura de que nosotros haremos modificaciones, pero que vayamos siempre en ese sentido. El hecho por ejemplo, de que los muchachos perciban que de unas simples cajitas hay todo un engranaje de conocimientos matemáticos pues eso ya es algo bien importante, por lo menos que cosas sencillas que aprendan, realmente sean significativas para ellos y para nosotros, obviamente.

Yo pienso que esta aparente demora nos ha permitido hacer que el estudiante comprenda mejor conceptos de cursos anteriores, que estamos retomando conceptos como el de densidad, volumen, área, y ahora en la guía que nos entregan capacidad, y de pronto, esa angustia que creo que sentimos todos, por lo menos yo la siento, de que como que no avanzamos se justifica con el hecho de que ellos están comprendiendo cosas con mayor profundidad, que le encuentran más sentido a conceptos que hemos podido dar en cursos anteriores, que pasaron ahí en el momento inadvertidos y que ahora los están profundizando, además, la actividad que hizo Jaqueline me motiva también para que nosotros vayamos haciéndoles énfasis en conceptos como el concepto de límite y que ellos se den cuenta de que no estamos tan desfasados del programa y que ellos están entendiendo a través de esta actividad un concepto tan importante como el de límite y tan difícil de comprender, en general, para cualquier estudiante de grado 11; que estamos en décimo, pero que estamos ya empezando a trabajar algunos conceptos, puede ser muy sutilmente pero con un significado de algo real, algo que están observando.

Consideraciones acerca de cuestiones mencionadas en la reunión

1.- La referencia a las dificultades de los estudiantes de considerar valores de medidas intermedias a dos medidas contiguas de una cifra decimal para la longitud del cuadrado que define el tamaño de las cajas (por ejemplo, 8.4 cm. y 8.5 cm.), puede tener diversas justificaciones. Dado lo novedoso de esta dificultad (para algunos de nosotros), se prefiere plantear inicialmente estas justificaciones a modo de preguntas que en cierto sentido revelan una primera aproximación hipotética a la dificultad:

- ¿Las características del instrumento de medición, particularmente su graduación en milímetros, impone restricciones sobre los resultados reales de la medición y las cifras decimales que ésta tenga?
- ¿La manera como los estudiantes conciben los conjuntos numéricos, y particularmente su densidad y continuidad, determina las condiciones sobre la

posible existencia de números para reportar las medidas de las longitudes intermedias?

- ¿La conjunción de las características del instrumento de medición y la manera de concebir los conjuntos numéricos imponen restricciones sobre las medidas posibles para la longitud del cuadrado que se recorta para formar la caja?

En este mismo sentido quizás valga la pena considerar si para cada quien la densidad de los conjuntos numéricos es la misma y está también presente en las magnitudes. En otras palabras, considerar si esa característica que uno percibe en los números —específicamente en su representación decimal— de poder establecer un número entre dos números cualquiera, pueda no ser compartida por las longitudes, mediada su cuantificación por un instrumento de medición y por la posibilidad real de construir (no mentalmente) una caja de altura intermedia a otras dos cualesquiera.

Al respecto, es pertinente pensar en cuáles serían nuestras respuestas a la pregunta sobre la posibilidad de construir una caja de altura intermedia entre las medidas de dos cajas cualesquiera, y de reportar sus medidas, si el instrumento del que se dispone es un metro de modistería (graduado en medios centímetros) o si, por el contrario, es una regla convencional (graduada en milímetros). Igualmente, deberíamos poder pensar en qué tanto el contexto y las posibilidades reales del mismo, se acercan o alejan a las posibilidades que las construcciones y mediciones mentales de las cajas, y de estas últimas a las posibilidades y características de los conjuntos numéricos no contextualizados (no magnitudes).

Finalmente, llama la atención que la existencia de la dificultad en los estudiantes, sea un hecho reportado por varios profesores, y que cada uno de quienes tuvieron que enfrentarlo en sus clases lo hayan encarado con una estrategia particular, por ejemplo, explorando la densidad en otros registros de representación diferente al numérico.

2.- Para la próxima versión del segundo taller, vale la pena considerar unos cambios. En primer lugar, contar con una tabla que recoja valores de la altura de cajas muy bajas, muy altas y otras intermedias (ordenados ascendentemente). Además, explicitar en los enunciados de las preguntas 14 a 17 que se utilice la tabla para responder.

Registro en la quinta reunión

A continuación se presenta el registro elaborado a partir del reporte hecho en la reunión del 1 de septiembre, en torno a la implementación del segundo taller; se incluyen comentarios generales sobre la propuesta curricular.

Aspectos generales

Tres profesoras dicen estar muy próximas a terminar en sus cursos el segundo taller, mientras que otra va a comenzar su desarrollo.

Las profesoras asistentes coinciden en ver que la propuesta curricular de los talleres es novedosa con respecto al tipo de tareas que ellas acostumbran poner a sus estudiantes; lo novedoso no reside en abrir espacios para el trabajo en grupo, principalmente está en el tipo de tareas y actividades que se proponen como medios para construir el conocimiento matemático de los estudiantes.

Reporte de cambios a la propuesta curricular

Una profesora reporta haber hecho cambio —con respecto a lo sugerido en la propuesta— en la forma de poner en común el trabajo de los grupos. No les pidió a los grupos que expusieran el producto de su trabajo porque "en el primer taller, cuando los grupos expusieron nos dimos cuenta de que todos decían lo mismo, entonces eran dos horas como perdidas, se generó mucha indisciplina; los grupos que no habían trabajado alcanzaron a copiar lo que los otros decían, entonces yo no hago la exposición así como tal". Además, hizo el cambio porque "cuando yo revisé los cuadernos de los estudiantes me di cuenta de que las últimas preguntas no las habían entendido, las respuestas no eran lo que se estaba esperando, para hallar en qué valores estaba el largo, el ancho, el área del papel de la caja". Así que, en dos carteleras —una para recoger información de cajas muy bajas y otra para cajas muy altas— hizo una tabla de cinco columnas, cada una correspondiente a una de las cinco magnitudes que se estaban considerando: altura, largo, ancho, área del papel de la caja (versión B) y área del papel desperdiciado (versión A). Cada grupo escribió en la correspondiente cartelera los cuatro datos de una de las cajas que habían considerado; el dato faltante lo calculaban los otros grupos. Además, pidió que escribieran los valores de altura de las cajas en orden ascendente, así que "cada grupo tenía que pensar en cuál había sido el valor escrito por el grupo anterior para tomar uno más grande o uno más pequeño". Después de que pasaron todos los grupos, la profesora preguntó por otras posibilidades diferentes a las ya registradas. En ese momento —diferente a lo que había sucedido en el trabajo en grupo— surgieron valores con más de una cifra decimal que eran o más pequeños o más grandes que los ya registrados en las dos carteleras. De esa manera, "pude hacer que mis estudiantes relacionaran, se fijaran cuál era el máximo [sic] valor y cuál el mínimo [sic] para el largo[21] de la caja y empezamos a hablar de la notación usual para notar esos valores, como intervalos[22]".

Dos profesoras dicen haber hecho otro cambio en la propuesta del segundo taller. Después de haber determinado el rango de las cuatro funciones tratadas, pidieron a los estudiantes hacer una gráfica cartesiana de cada una de ellas.

Aspectos particulares acerca de las respuestas de los estudiantes

En uno de los cursos donde se pidió hacer la gráfica cartesiana de las funciones, aunque en general, los estudiantes pudieron abordar la tarea para el caso de las funciones largo y ancho de la caja, no sucedió lo mismo con las funciones área del papel de la caja y área de papel desperdiciado pues ellos "no sabían qué colocar en X y qué colocar en Y". Después de que la profesora les explicó que cada una de las cuatro funciones relaciona la altura de la caja con cuatro magnitudes diferentes y que la forma de proceder para hacer una gráfica cartesiana en los cuatro casos es similar, los estudiantes pudieron hacerla. Sin embargo, la profesora reporta haber notado dos cuestiones en el desempeño de sus estudiantes al hacer la tarea: por un lado, al hacer las gráficas de las funciones largo y ancho de la caja no tuvieron en cuenta que el dominio no era el conjunto de los números reales y, en consecuencia, la gráfica obtenida fue la de una línea recta; por otro lado, la mayoría de los que alcanzaron a hacer las gráficas de las dos funciones de

21. Aunque la alusión que hace la profesora es sólo a la columna de datos correspondientes al largo de la caja, se podría extender a las otras tres columnas de datos que corresponden al ancho, al área de papel desperdiciado y al área del papel de la caja. En tal caso se podría visualizar que, para cajas muy bajas, el ancho de la caja es un valor muy cercano a 20 (sin llegar a ser 20), el área del papel desperdiciado es un valor muy cercano a 0 (sin ser 0), y el área del papel de la caja es un valor muy cercano a 480 (sin ser 480); también se podría visualizar que para cajas muy altas, el ancho de la caja es un valor muy cercano a 0 (sin llegar a ser 0), el área del papel desperdiciado es un valor muy cercano a 400 (sin ser 400), y el área del papel de la caja es un valor muy cercano a 80 (sin ser 80).

22. Vale la pena examinar desde el punto de vista general del comportamiento de las funciones, qué tan correcto es haber reducido el análisis del comportamiento de los valores de la función a los casos cercanos a los extremos del dominio; dicho de otra manera, ¿qué tan correcto es obtener el recorrido de una función a partir de determinar los valores de la función correspondientes a los valores extremos del dominio? Si la respuesta es que no es tan apropiado, entonces parece ser un poco prematura la introducción de la notación de intervalo.

área, unieron los puntos correspondientes a las parejas consideradas por medio de segmentos de recta y la razón que daban era que "esos dos puntos se podían unir fácilmente porque estaban cerca". Frente a esto último la profesora les pidió que no borraran lo hecho en la gráfica pero que consideraran valores para la altura de otras cajas intermedias y usaran esa información para determinar si las gráficas hechas eran o no correctas.

La misma profesora encontró que dos o tres de sus estudiantes hicieron la gráfica cartesiana del largo de la caja ($y = 24 - 2x$) trazando un segmento de recta que pasaba por (0, 24) y (-2, 0).

Con respecto a la pregunta que pide determinar si es posible construir una caja de altura w, que sea intermedia entre e y q, valores muy próximos entre sí, una profesora reporta que sus estudiantes tuvieron dificultad para entender el sentido de tal situación lo que se evidenció en que su respuesta consistía en reemplazar x por e y por q. Sin embargo, después de hacerles algunas preguntas, los estudiantes

> *ya se dieron cuenta que e y q son dos valores cercanos, son numéricos y que en medio de esos valores hay otro (...) entonces sí se puede construir una caja intermedia entre esos dos valores; ellos dicen que en la realidad no, pero que en la imaginación sí, y también hablaron de los valores, por ejemplo de la altura, que son muy cercanos a cero pero que no pueden ser cero, sin hablar de límite y que son muy cercanos a diez sin tomar diez, sin ser diez y así, entonces ellos fueron aclarando, ya todos captaron esa situación y lo mismo de lo del ancho, lo mismo de lo del largo.*

Una profesora reporta que en la exposición del trabajo, uno de los grupos dijo que no es posible construir una caja de altura menor a un milímetro, dando como razón que no hay un instrumento que lo permita hacer, pero que en la imaginación sí sería posible hacerlo.

Comentarios de los profesores

Con respecto al tipo de trabajo que estos talleres le plantean a los estudiantes

Varios profesores ven que las tareas que les hemos propuesto a los estudiantes a través de los talleres plantean exigencias y oportunidades valiosas para la construcción del conocimiento matemático y además difieren de lo que usualmente se hace en sus clases. Las palabras de una profesora corrobora lo dicho:

> *Uno sí hace trabajos en grupo, pero es que en las guías [los talleres] se ve que los estudiantes tienen que hacer ciertas cosas, que tienen que socializar, que tienen que hacer esfuerzo y aunque no todos lo hacen, en general sí se meten y sí cambian, por lo menos, piensan, hablan, escriben, socializan, son cinco, seis cosas que hacen, que antes hacían muy poquito y que es bueno que incrementen porque (...) es que de pronto nosotros no los hacemos leer más, entonces ellos no están metidos en la lectura, entonces cómo interpretan y cuando lleguen los exámenes del ICFES, esos son todos problemas de lectura, de leer, de analizar de escribir, de contextualizar.*

Con respecto al sentido que pueden tener los talleres inicialmente

La propuesta curricular es muy distinta a lo usual tanto para profesores como para estudiantes. Por ejemplo, es una secuencia encadenada de tareas para desarrollar como un proyecto a lo largo de varias horas de clase; para la presentación del conocimiento matemático que se quiere que aprendan los estudiantes no sigue el esquema tradicional de ejemplos-definiciones-ejercicios de aplicación, esquema que le señala al estudiante lo que es importante que memorice. Esas características que hacen la propuesta tan diferente de lo usual, pueden desconcertar a estudiantes y profesores y llevarlos a pensar que lo que se plantea hacer no es importante pues no es así como se aprende y se enseña. El comentario de una profesora apoya lo dicho:

La actitud de los estudiantes que al principio les parecía muy aburridor lo de la cajita y todo eso, entonces ahora sí, ya por ejemplo algún estudiante me decía, profesora es que la hojita de tal taller se me perdió me la puede conseguir, entonces ya ellos están pensando en que esto es básico para lo que sigue, ya están entendiendo... pues nosotros también, porque al principio vimos esto como una perdedera de tiempo, comentábamos que esto es como muy largo, perder tanto tiempo, yo lo voy a hacer de tal forma, a mi manera, pero entonces no, yo procuré seguir los pasos y se ha descubierto la importancia y los muchachos también, porque todos ya dicen, ¿cómo es lo anterior? y miran, entonces se están dando cuenta de la importancia.

Otra profesora ve que estos talleres le dan ideas de tareas que le permitirían contribuir desde el área de las matemáticas al desarrollo de proyectos interdisciplinarios que pretende plantear la institución.

Como mi colegio es especialista en tecnología y valores, de vez en cuando se realizaban unos talleres para que todos los profesores hiciéramos tecnología. Allá por tecnología no se entiende sólo la calculadora, sino todos los procesos que hacen los muchachos. Teníamos unos talleres en los que por ejemplo tomábamos [como tema] los barcos, y se hacía su estudio desde todas las áreas. A mí siempre me costó cierta dificultad como integrarme desde el punto de vista de las matemáticas a esos talleres. Observando [el trabajo que estamos haciendo con] lo de la caja, me he dado cuenta que ahí está lo que allá se llamaba descripción de objetos desde el punto de vista matemático y como que encontré algún camino.

Con respecto a las razones para hacer modificaciones a la propuesta

La propuesta curricular en torno a aspectos específicos de la función cuadrática se fue construyendo de manera casi paralela con su implementación, razón por la cual los profesores la fueron conociendo y estudiando gradualmente. Aunque el hecho de no conocer la propuesta en su globalidad desde el principio puede ser una de las razones para los cambios introducidos por los profesores al implementarla, otra razón tiene que ver con la fuerza de la tradición; al respecto de los cambios que hizo al primer taller, una profesora señala que:

(...) una de las reflexiones que hice fue que los talleres están planteados de lo numérico a lo simbólico y como de alguna manera teníamos pegado lo gráfico, entonces tomamos decisiones para ponerlo [hacer la gráfica de las funciones consideradas]; pero pienso en el segundo taller dejarlo exacto como es y solamente al final pasar a lo gráfico; esa es una reflexión que he hecho para permitir a los estudiantes que exploren bien lo numérico.

Con respecto a los juicios que hacen acerca de las respuestas de sus estudiantes

Una profesora explicita su asombro frente a la ligereza con la que en algunos casos ha analizado las situaciones desde el punto de vista de los estudiantes.

Con relación a esto [al dominio de las funciones tratadas] yo pensaba en la reunión pasada, cómo hace uno comentarios sin analizar. Nosotros decíamos pero, los estudiantes solamente cogen número decimales como si no hubiera más números; entonces cuando alguien hizo la reflexión de que si sería porque dentro del contexto eso era lo más posible, que una cosa es el número como tal, y otra cosa cuando yo trabajo un problema como estos, entonces yo pensaba, pues de verdad, si tengo una regla lo que yo voy a medir son milímetros, entonces como le voy a pedir a un muchacho, si estoy hablando de una caja en concreto como voy a *esperar que él me de tres o más cifras decimales. [Estas reflexiones] a mí han servido porque como que uno tiende a generalizar, y a sacar conclusiones rápido de lo que los muchachos hacen y muchas veces no se pone a pensar por qué.*

Consideraciones acerca de cuestiones mencionadas en la reunión

1.- Con respecto a las variaciones que han hecho los profesores a la propuesta curricular inicial se puede evidenciar una tendencia fuerte a hacer las cosas tal como las hacen habitualmente. Por ejemplo, lo usual es que ellos manejen la interacción con sus estudiantes en torno del conocimiento matemático, lo usual es que apoyen las explicaciones en la representación simbólica o la gráfica, por tanto, si una propuesta novedosa se aleja de lo habitual, ellos se sienten incómodos implementándola y en el caso de que hayan aceptado hacer algún cambio con respecto a lo usual, de manera impulsiva se inclinan a abandonarlo si les parece que no está teniendo un resultado positivo de manera inmediata. En el caso particular en que la profesora decide cambiar la exposición de grupos que se sugería en la propuesta por un manejo en el tablero, hay varias preguntas que sería interesante responder antes de tomar la decisión de no aceptar el cambio: ¿sabían claramente estudiantes y profesor qué se esperaba de esta forma de interacción?, ¿se establecieron pautas con los estudiantes para el manejo de la nueva estrategia?, ¿ve el profesor el valor que tiene la estrategia en la construcción de conocimiento?, ¿hay variaciones pequeñas que puedan mejorar la eficiencia del resultado de las exposiciones de los grupos que evite el tener que desecharlas como estrategia de construcción del conocimiento de la clase?

2.- Frente a la problemática de cómo continuar con una propuesta similar en enfoque a la que se implementó para abordar algunos aspectos relativos a la función cuadrática, se les planteó a los profesores el asunto del diseño curricular de situaciones como lo central. Frente a la pregunta ¿Qué estrategias pueden ayudar a los profesores en la realización de esa tarea innovativa? Las consideraciones de uno de los coordinadores fueron las siguientes:

¿Qué es lo que uno podría mirar para poder diseñar por ejemplo situaciones relativas a la función exponencial? Creo que lo más importante y, si uno pudiera dar una receta, una estrategia metodológica, sería poderse preguntar cosas. Por ejemplo, frente a la gráfica de las funciones exponenciales, uno podría preguntarse ¿cuáles son las características de esa gráfica? No se le pone un nombre como en otros casos (e.g., hipérbola, parábola), ¿por qué? Por qué no es una de esas cónicas? ¿Cuáles son las características de esa gráfica y de qué dependen tales características? También uno podría preguntarse cómo es la variación de una función exponencial y cómo es esa variación comparada con la variación de la logarítmica y preguntarse enseguida si la respuesta que uno dé, quisiera que los estudiantes la pudieran construir. Por ejemplo, en las funciones exponenciales cuando se cambia el coeficiente de x^n *, n el mayor valor, le pasa algo a la gráfica; ¿sucederá lo mismo con la exponencial? En las funciones cuando uno le suma o resta una cantidad a la variable, la gráfica se corre a la izquierda o a la derecha, ¿sucederá lo mismo con la exponencial? Todas ellas son preguntas que uno podría hacerse de las cuales no siempre tenga respuesta y que podrían plantearle interrogantes a los estudiantes siempre y cuando uno crea que deban ser planteados para los estudiantes. Esas preguntas no siempre están en los libros y plantearlas y tratar de resolverlas podría ser un mecanismo, una estrategia de ingreso para poder diseñar situaciones novedosas. Es decir, a la pregunta ¿dónde buscar para poder generar cuestiones innovativas? Yo diría que buscar dentro de uno: las mismas preguntas y el conocimiento que uno tiene pueden ser fuente para el diseño de situaciones didácticas.*

Reunión en la sexta reunión

A continuación se presenta el registro elaborado a partir del reporte hecho en la reunión del 8 de septiembre, en torno a la implementación del segundo taller.

Aspectos generales

Hallazgos acerca de las formas de trabajo de los estudiantes

En un curso, todos los estudiantes respondieron a ambas versiones del segundo taller. Este cambio con respecto a la propuesta inicial obedeció principalmente a que la profesora olvidó la sugerencia hecha en torno a la forma de dividir el trabajo de los estudiantes; sin embargo, fue una oportunidad para darse cuenta de que la mayoría de sus estudiantes no habían trabajado seriamente en el asunto, que muchos de ellos se habían limitado a copiar de manera mecánica las respuestas del líder del grupo, situación que preocupó bastante a la profesora porque "sentí que estaba en el aire con un buen número de estudiantes". Haciendo referencia a ese hecho dice:

> *(...) me permitió ver, descubrir que había estudiantes que talvez por hacer el trabajo en grupo, en la versión A, no habían sido muy conscientes de sus respuestas, porque cuando empecé individualmente a revisar cuadernos entonces encontraba errores que supuestamente ya en la puesta en común habíamos trabajado y que (...) habían vuelto a cometer al responder la versión B. Entonces eso me hizo hacer un alto ahí, para dar un pequeño tirón de orejas y decirles que teníamos que ser más conscientes y hacerlos revisar nuevamente la forma como habían desarrollado; ahí también percibí que a veces ellos están como acostumbrados a que el líder del grupo, el que siempre está más interesado, el que profundiza más, es el que les da las respuestas entonces les dije que cada uno tenía que anotar su propia versión, cada uno tenía que percibir en su totalidad el trabajo que estaban haciendo, que cada persona tiene que aportar al grupo, y que después sí debían trabajar en grupo.*

En relación con el problema que enfrentó esta profesora, ella conecta el proceder de sus estudiantes con el hecho de que, por falta de tiempo, con frecuencia sólo recoge el cuaderno de un estudiante para revisar lo que han hecho y en consecuencia los demás estudiantes se despreocupan de lo que deberían hacer.[23]

Otras profesoras en distintas ocasiones han reportado que frente a algunas preguntas de los talleres, es un estudiante el que da la respuesta en voz alta, los demás la oyen y la asumen como propia. En tales circunstancias, parece que las profesoras han aceptado sin mayor preocupación ese hecho, considerándolo más apropiado que si hubieran sido ellas las que hubieran suministrado el dato al grupo. Sin embargo, poco reportan en relación con haber hecho esfuerzos por averiguar qué han entendido los estudiantes que están repitiendo la respuesta de otro; da la sensación de que les importa más que los estudiantes lleguen a una respuesta que el proceso mismo para llegar a tal respuesta.

También en varios cursos se ha encontrado dificultad para que los estudiantes expliquen ampliamente sus respuestas por escrito. En casos como esos, es en la exposición o en la puesta en común cuando se hacen esfuerzos para argumentar las respuestas y esto ocurre gracias a las preguntas que formula el profesor.

23. Frente a la situación difícil que experimentó la profesora es posible hacerse varias preguntas: ¿es el trabajar en grupo lo que induce o propicia que algunos estudiantes se recarguen en el estudiante que más profundiza?; en el esquema tradicional de instrucción, ¿presentan los estudiantes comportamientos diferentes en lo que concierne a su autonomía y responsabilidad frente a su aprendizaje?; ¿es la revisión del cuaderno por parte del profesor la única y más eficiente estrategia para seguirle el rastro al proceso de un estudiante?

Reporte de cambios a la propuesta curricular

Una profesora reporta haber hecho cambio a la forma como sugiere la propuesta que los estudiantes expongan los resultados de su trabajo. Ella pidió a cada uno de los grupos que trabajaron en la versión A, que expusieran sus respuestas a dos preguntas del taller, con lo cual fue posible revisar todo el trabajo realizado; algo similar pidió para la versión B; al final de lo cual, fue ella quien presentó unas conclusiones que aludían al trabajo de todos los grupos.

Otro profesor también reporta haber cambiado en ese punto la propuesta. El ni pidió a los estudiantes que hicieran exposición ni tampoco que entre todos respondieran a preguntas del taller mismo. En su caso, para cerrar el trabajo del taller, fue él quien formuló preguntas para que los diferentes grupos fueran respondiendo y complementando qué se puede hacer, por qué algo es cierto o no lo es, si están de acuerdo o no con lo que otros dicen.

También un profesor dice haber introducido la representación gráfica después de terminar el desarrollo de la segunda parte del taller, con la intención de que dicha representación les ayudara a sus estudiantes a visualizar la tendencia del comportamiento de los valores de X, y de la función.

Acerca de algunas respuestas de los estudiantes

Para responder las últimas preguntas del segundo taller —las que piden concretar cuál es el rango de las funciones consideradas— parece que las tablas de valores numéricos elaboradas por los grupos para cajas muy altas y cajas muy bajas pueden ser obstáculo para llegar a la respuesta correcta, en el sentido de que en dichas tablas queda registrado un valor específico que es el menor de los considerados y un valor específico que es el mayor de los considerados, lo que en una observación que excluya los análisis hechos a través de las preguntas del taller, daría pie para decir que el rango es el conjunto de los valores entre el menor y el mayor registrados (incluyendo dichos valores).

Un profesor, después de haber terminado la realización de la segunda parte del taller, pidió a sus estudiantes que hicieran la representación gráfica cartesiana de las funciones consideradas. En la realización de esta tarea, el profesor se percató de que los estudiantes se disponían a dar valores para construir una tabla como paso previo a la realización de la gráfica[24]. Con respecto a este asunto los siguientes son comentarios de dos profesores:

> *De pronto los estudiantes están acostumbrados a ver una tabla de dos columnas encabezadas por X, Y, entonces como aquí [en el formato con el que hemos trabajado] hay muchas columnas, de pronto como que no la ven ahí, que es una tabla de valores X-Y. Porque me decían ¿qué gráfico en el eje horizontal? la altura? el área de la caja? (...) Ellos están acostumbrados a X, Y, y si se les cambia las letras, cambia todo.*
>
> *Por ejemplo cuando dice* $L = 24 - 2x$*, entonces esa L como que los confunde, por lo menos eso les pasó a los míos. Cuando dijeron ¡ah, es que L es Y!, ya lo pudieron hacer, identificar.*

En la plenaria hecha en uno de los cursos donde se pidió hacer la representación gráfica de las cuatro funciones tratadas, varios estudiantes fueron conscientes de que no tenía sentido tomar valores negativos para X y que en consecuencia para la gráfica del largo

24. Una posible hipótesis de por qué los estudiantes se disponen a hacer una tabla de valores cuando tienen una cantidad grande de parejas que podrían aprovechar es que no reconocen en el complejo formato que han trabajado, las tablas de dos columnas a las que están acostumbrados como medio para explicitar las correspondencias entre valores de la variable independiente y la dependiente. Otra hipótesis puede ser que ellos no reconocen que las situaciones que se han tratado son casos de relaciones y más puntualmente, casos de funciones. Y finalmente, otra hipótesis puede ser que para ellos, la representación cartesiana está ligada a unos ciertos nombres de las variables (X, para los valores que se disponen en el eje horizontal, y, Y para los valores que se disponen en el eje vertical).

de la caja, "la parte mayor de 24 [para Y] no servía"; no fue tan evidente para ellos el hecho de que X debía ser menor que 10 (i.e., la profesora tuvo que hacer preguntas al respecto para que tomaran en cuenta esa restricción). Para hacer las gráficas de las funciones largo y ancho, recurrieron a identificar el punto de corte con el eje vertical y otro punto de la recta (a partir del significado de pendiente como razón de cambio), después de lo cual unieron los dos puntos encontrados; no obtuvieron la gráfica a partir de reemplazar directamente en la expresión simbólica de la función. No pudieron hacer la representación gráfica de las cuadráticas porque pretendían utilizar el mismo procedimiento que habían usado para las lineales, pero al no poder identificar la pendiente ya no podían utilizar el procedimiento. En ese curso, hubo unos pocos estudiantes que sí utilizaron la tabla de valores como paso intermedio para hacer la gráfica cartesiana. Al respecto dice la profesora que:

> *(...) los estudiantes no usaron negativos ni mayores de 10 ni de 12, pero igual, a mí no me queda claro si es por el contexto o porque no saben cómo hallar la imagen de un número negativo por ejemplo, o sea yo no pude saber realmente si sí tuvieron en cuenta el contexto en el que estamos trabajando (...) pero, por lo menos, a mí me quedó la sensación de que tenían una razón y que identificaron algo que caracteriza las funciones cuadráticas o sea, trataron de usar el mismo procedimiento y no pudieron porque tenía un* x^2 *, porque no había pendiente. Para mí eso fue significativo. Les dije que usaran la tabla entonces ya como parejas de puntos, la mayoría hizo bien la escala.*

Comentarios de los profesores

Con respecto al tipo de trabajo que estos talleres le plantean a los estudiantes

Las tareas que se proponen en estos talleres abren oportunidades para retomar temas ya vistos, conceptos previos, y de esa manera pueden contribuir a la actividad de recuperación de logros. Concretamente, como los talleres plantean la comparación de algunas funciones cuadráticas con algunas funciones lineales en lo que toca a ciertas características, los profesores y estudiantes han encontrado oportunidades no sólo para darse cuenta de que sigue habiendo puntos flojos en la comprensión de los estudiantes acerca de la función lineal, sino también para reconceptualizar tales puntos. Es así como varios profesores mencionan haber aprovechado la circunstancia para revisar elementos relativos a conceptos tales como área, volumen, capacidad, gráfica de funciones lineales, densidad de racionales, entre otros. Una profesora reporta que:

> *[Los talleres han sido oportunidades para] atrapar conceptos previos, inclusive de años anteriores, concepto de volumen, porque, por ejemplo, cuando hablamos de volumen y capacidad otra vez hay que hacer un repaso antes, porque algunos estudiantes preguntan ¿cómo lo hallamos? entonces recordar eso, por lo menos dejar de tarea recordar eso. Eso es lo importante también de esos talleres, lo que habíamos dicho anteriormente, vuelve uno a retomar conceptos de antes y a meterlos dentro de un contexto más significativo para ellos.*

Con respecto a los juicios que hacen acerca de las respuestas de sus estudiantes

Con respecto a la introducción de la notación de intervalo abierto para expresar el dominio y el recorrido de las funciones tratadas, una profesora explicita haberse dado cuenta de que tal notación puede ser problemática para los estudiantes pues se puede confundir con la notación de pareja ordenada. Al respecto señala que:

> *(...) introduje la notación de intervalo, pero creo que ahí va a haber un problema; ya me di cuenta en unos cuadernos y es que el punto de corte en y (0, 24) se va a confundir con la notación de intervalo. Entonces, yo me cuestionaba porque de verdad que uno a veces in-*

troduce todo como tan fácil, como tan a la ligera y no se da cuenta los dos usos que puede tener ese paréntesis, en ese contexto.

Comentarios de los estudiantes acerca de la metodología

Una profesora que ha indagado con sus estudiantes qué opinión tienen acerca de la metodología empleada por ella al implementar estos talleres, reporta lo siguiente:

El sábado les pedí a mis estudiantes que escribieran un reporte de la metodología que habíamos trabajado hasta el momento, que escribieran cómo les parecía la metodología, qué cambios le harían si fuéramos a volverla a aplicar el año entrante a sus compañeros que llegan a décimo. La mayoría dice que están muy contentos, solamente hay dos personas que dijeron que era muy difícil porque tocaba pensar mucho y tener mucha lógica para resolver. La mayoría dice que les gusta porque no tienen que estarle preguntando al profesor sino que ellos mismos van haciendo las cosas. A mí me parece algo motivante que ellos valoren eso, de que son ellos los que están aprendiendo; una niña mencionaba «ya no tengo que llamar cada rato a la profesora y decirle sino que yo sola voy haciendo las cosas, ya no me da tanto miedo» y la mayoría dice eso, que les ha gustado mucho, la mayoría dice que no harían ningún cambio; de pronto una niña dice que en algunas preguntas se tendrían que aclarar porque son muy confusas pero pues no menciona especialmente cuáles.

Consideraciones acerca de cuestiones mencionadas en la reunión

Cada vez nos resulta más claro que en la propuesta curricular que hemos realizado hace falta discutir con alguna profundidad acerca del trabajo individual, del trabajo en grupo y de la articulación de ambos. Puesto que ninguna de las dos formas de trabajo son usuales en la clase de matemáticas —lo usual es que sea el profesor quien diga al estudiante o al grupo de estudiantes lo que deben hacer, lo que es correcto o incorrecto, etc.— no es difícil entender que los estudiantes (e incluso el profesor mismo) no tengan claridad de lo que se espera que sea su trabajo en esas formas diferentes de interactuar con los compañeros y con el conocimiento matemático.

Registro de la séptima reunión

A continuación se presenta el registro elaborado a partir del reporte hecho en la reunión del 15 de septiembre, en torno a la implementación del tercer taller y a la innovación que han vivido en las clases y en la institución.

Aspectos particulares de respuestas y comentarios de los estudiantes

Una profesora reporta que en su curso, varios de sus estudiantes en el trabajo individual de la tercera parte del taller hicieron la generalización para el área de la base de la caja, pero que cometieron error al hacer el producto de las dos expresiones lineales; específicamente obtuvieron $480 + 4x^2$ como expresión equivalente de $(24 - 2x)\ (20 - 2x)$.

En el curso de otra profesora, al emplear la calculadora para generar tablas de las funciones largo, ancho y área del papel desperdiciado —tablas que se diferenciaban entre sí por el incremento, cada vez más pequeño, para los valores de la altura— los estudiantes quedaron muy sorprendidos al ver la gran cantidad de valores que es posible tomar. Previamente en sus cuadernos ellos ya habían hecho tablas relativas a esas funciones, así que pudieron compararlas con las hechas en la calculadora y decían «profesora, con la calculadora sí nos da todo lo que nosotros queramos». La profesora reporta como algo importante que ese trabajo fue una oportunidad para que los estudiantes tuvieran que manejar números decimales y establecer la relación entre la notación como fracción y como decimal.

Yo les decía tomemos incrementos de una centésima. Entonces [preguntaban] ¿una centésima? y ¿cómo escribo? ¿1 dividido en 100? entonces yo les decía no... escribámoslo en decimal. Y, ¿cómo se escribe una centésima? Entonces hubo muchos cuestionamientos sobre cómo se escribe... tomemos [números] más chiquititos, una milésima, entonces veían que hay un momento en que la calculadora da los mismos valores[25], yo ni siquiera me lo había detallado. No sé cuánto dimos, como que fue diezmilésima y ya quedó fue fijo, porque no toma... recorta los decimales y daba como si fuera una constante entonces yo dije debe ser que está tan pequeñito el incremento que..., eso por ejemplo, me pasó ahí en la clase, entonces yo les dije que ya debe ser tan pequeñito que la calculadora está tomando... está cortando los decimales y está asumiendo como si fuera el mismo valor.

Aspectos particulares acerca de la actuación del profesor

Con respecto al error $(24 - 2x)(20 - 2x) = 480 + 4x^2$, la profesora lo atribuye a que a los estudiantes "se les olvidó cómo se hace esa multiplicación (...) porque antes el conocimiento se daba muy mecánico". La profesora dice haberlos dejado solos para que entre ellos llegaran a la expresión correcta y efectivamente así ocurrió pues dos alumnos de un grupo dijeron a los demás el procedimiento. Pero, cuando se le pregunta a la profesora cómo manejó ella tal situación de error, se ve entonces que aunque no les mencionó paso a paso el procedimiento y los estudiantes probablemente sí tuvieron que interactuar entre ellos hasta llegar a la respuesta correcta, fue ella quien hizo caer en cuenta a los estudiantes que había error y les hizo referencia a la propiedad que debían recordar para obtener la expresión correcta[26]. Al respecto ella afirma que

[Los estudiantes se dieron cuenta de que el procedimiento que habían hecho era erróneo] porque les dije «acuérdense que eso es propiedad distributiva, es una multiplicación, entonces no vamos a multiplicar, digamos, pareja por pareja sino distribuyendo».

En relación con la forma de abordar ese error, otra profesora sugiere la importancia de plantear situaciones, preguntas que le permitan a los estudiantes darse cuenta de que efectivamente su respuesta es incorrecta. Al respecto menciona lo siguiente:

[Con respecto a la pregunta de si los alumnos se habrían dado cuenta del error cuando escribieron $480 + 4x^2$] yo pensaba que cabría preguntarles si sabiendo que el área del papel de la caja es $480 - 4x^2$, ¿sería posible que el área de la base fuera $480 + 4x^2$? Esa sería una pregunta como para llevarlos a cuestionarse el error. ¿Es lógico que pueda dar eso? Pienso que es bien importante analizar la respuesta que ellos están dando, cuestionarla dando preguntas de qué sentido tiene esa respuesta dentro del contexto para ayudar a ese análisis, no tanto quedarse en la operación en sí, que no nos conduciría de pronto a clarificar muchas cosas.

En el curso donde se dio la experiencia antes mencionada con la calculadora, la profesora afirma que el trabajo con este recurso le permitió avanzar mucho en el desarrollo de los

25. La profesora está aludiendo a los valores que aparecen en las columnas de la tabla, donde se presentan los números con cuatro cifras decimales; probablemente no se ha dado cuenta de que en la parte inferior de la pantalla aparecen los números con muchas más cifras decimales.
26. En relación con esa situación surgen preguntas que vale la pena considerar: ¿por qué era necesario que los estudiantes teniendo de manera natural expresada el área de la base de la caja como un producto, la expresaran como un polinomio?, ¿qué es lo que tiene la expresión polinómica, resultado del producto, que no tenga el producto?, ¿qué es lo que hace que uno quiera que aparezca en esa forma y no quede conforme con el producto indicado?, ¿qué es lo que tiene la una que no tiene la otra?

puntos que quería tratar en la clase; destaca además que el tiempo que los alumnos habían tomado para hacer muchos menos cálculos de los que hace la calculadora se pudo utilizar más eficientemente para analizar e interpretar los datos de la tabla en términos de nociones que son claves dentro del estudio de las funciones.

Me di cuenta que avancé bastante con la ayuda de la calculadora, se avanzó mucho más que cuando hay que hacer las operaciones. [Al no tener que hacer los cálculos a mano] lo otro que yo hice fue muchos ejercicios como busquemos entonces cuánto papel desperdiciado tenemos cuando la altura vale tanto ¿si? y que ellos fueran... para enseñarlos que vayan analizando los valores de la tabla. ¿En qué momento la función es decreciente? bueno... ¿esto tiene sentido?, ¿hay alturas cuando la función es decreciente? entonces, yo les hacía muchas preguntas acerca del análisis de la gráfica, apoyados también en el análisis tabular, o sea, todo el tiempo, yo en ese momento me olvidé inclusive de las hojas [del taller], sinceramente, me concentré de pronto en las preguntas que les iba haciendo, que se me iban viniendo a la cabeza para apoyar el... como el trabajo que yo quería resaltar, que era pues analizar, cuál es el área del papel desperdiciado. (...) Se gana en análisis, se gana mucho más y eso lo comentaron los muchachos: se centra uno mucho más en el análisis dijeron los muchachos porque ahí están los medios para hacer análisis.

Comentarios de los profesores

Pregunta relativa a la implementación de los talleres

En las varias reuniones en las que se han puesto en común los detalles de la implementación de los talleres en los diferentes cursos, ha habido evidencia de que los profesores han hecho cambios al diseño inicial de los talleres; estos cambios no sólo se han hecho sobre la metodología sino también sobre la intencionalidad misma, e incluso sobre el contenido matemático implicado. En relación con el asunto de las adaptaciones posibles a los talleres, una profesora plantea si teniendo como recurso la calculadora graficadora, será pertinente trabajar primero con la gráfica y luego con la tabla o si será mejor utilizar la gráfica para apoyar lo numérico (la tabla). La respuesta de uno de los coordinadores fue la siguiente:

Recuerdo (...) una variación que reportó [una profesora] en el taller donde se miraban las tendencias hacia los extremos, el comportamiento hacia los extremos. Cómo ella utilizó la gráfica como una manera de explicar, de hacer que los estudiantes entendieran, de mostrar de otra forma el comportamiento en lo tabular. Es decir, cómo lo gráfico podría apoyar. Pero también está lo otro: cómo lo gráfico se constituye en un obstáculo para entender el concepto en lo tabular. Para nosotros es difícil entender que la variación no es lineal, que es cuadrática si la vemos en la tabla. Está en el taller cinco, ese elemento, estuvo presente alguna vez cuando planteamos la pregunta ¿cómo reconocemos si es cuadrática o no esta variación cuando estábamos mirando lo de lo lineal, la variación en lo lineal, y no es tan difícil o por lo menos se pone en juego otro tipo de conocimiento cuando es en lo gráfico. Creo que la respuesta estará entonces mediada por la intención que uno tenga, si nos interesa que reconozcan ese elemento en este sistema de representación, pues el otro se puede constituir en un facilitador, en un obstaculizador de esa identificación; habría que mirar la intención en el contexto, seguramente, para tomar la decisión de en qué medida permito o no permito que ingrese ese otro sistema de representación.

Respuestas a la pregunta ¿qué ha sido innovador en la práctica del profesor por razón de su participación en el proyecto ICEP?

Hablando de la experiencia que se ha vivido en su colegio, una profesora menciona que ha habido innovación en dos grandes elementos: la metodología y el contenido matemático. En la metodología incluye el trabajo en grupo entre los alumnos, lo que no era usual en las clases de matemáticas; el trabajo del estudiante con base en guías; la realización de plenarias para poner en común el trabajo de los estudiantes; y el empleo del software Derive como recurso para hacer gráficas de funciones. En cuanto al contenido matemático, la profesora afirma que

> *(...) no hicimos énfasis en la representación tabular como forma única para realizar la gráfica, eso se dejó como a un lado; se hizo énfasis en el paso de la representación gráfica a la simbólica; se le dio un uso y un significado a los números de acuerdo a los contextos de los problemas... que ya los muchachos están aprendiendo si usan negativos, si usan fraccionarios y a que identificaran las variables en un problema.*

Un profesor del mismo colegio afirma que el logro del trabajo en este proyecto reside en la motivación de los alumnos por razón del cambio en la forma de hacer la clase, pues ésta ya no se reduce a "explicar un tema, dar unos ejemplos y luego asignar unos ejercicios". También destaca como un elemento innovador, el mayor nivel de profundidad en el tratamiento de los temas en las clases que se concreta por ejemplo "al buscar las conexiones entre los diferentes aspectos de los temas". Además, destaca los beneficios que ve en la metodología utilizada en los talleres implementados para la función cuadrática, para construir la comprensión de las características de un objeto por comparación con las características de objetos de otros tipos. Al respecto afirma que

> *De todas formas es útil para los muchachos, y para cualquier persona, para identificar cualquier cosa, compararla con otra y en ese sentido pienso yo que ha sido la utilidad de estos talleres, porque precisamente una forma que le puede ayudar a uno a identificar la cosa es compararla con otra y si nosotros queremos empezar a identificar la función cuadrática, pues qué bueno empezar a compararla con algo que ya se ha venido trabajando que es la función lineal.*

Cuando se les pide pensar si han encontrado algo innovador relativo al aprendizaje o a la comprensión de sus estudiantes, la profesora menciona que

> *En una plenaria que se está haciendo ahora para la cuadrática, en la que por ejemplo, les puse a hacer las cuatro gráficas de las funciones, ya uno se da cuenta de la cantidad de características que pueden sacarle los muchachos a una función. Al contar cuántas características salían encontré como cuarenta características de las funciones de cada una, cosa que antes en la evaluación de lineal, que se les pedía dar cuatro afirmaciones de una gráfica, salían muy pocas cosas. El trabajo con la cuadrática reforzó también la parte lineal, porque había funciones lineales entonces, ya dicen muchísimas cosas, ya hablan con propiedad de dominio, de recorrido, hablan con propiedad de que la pendiente es negativa, entre ellos mismos se corrigen, por ejemplo en la plenaria, una niña escribió de la función $4x^2$ que la pendiente era 4 y todos los que estaban adelante dijeron ¡no! ella sí se equivocó ¿cómo va a tener pendiente? Entonces yo les dije primero que escribieran todo, que después íbamos a ver por qué habían escrito eso. Entonces por ejemplo, decían no es una función lineal, o no es una función afín, al preguntarles la razón ya me decían porque su gráfica no da una línea recta, porque aparte de eso no tiene pendiente, porque el exponente de x es 2 y no es 1 como en las lineales. Entonces uno se da cuenta que realmente ellos ya dominan ciertas cosas que antes no tenían claras. Al preguntarles acerca de la afirmación de que la pendiente es 4, pues la mayoría dijo no, no hay pendiente. Les pregunté ¿por qué no hay pendiente? Si es una curva, ¿cómo voy a hablar de pendiente? A mí me parece que los conceptos están quedando como más claros, sin embargo, me parece que los talleres con función cuadrática son los que han reforzado más la parte de lineales, porque se están trabajando las dos al*

tiempo y se están caracterizando, se están encontrando cosas que las hacen diferentes. Entonces me parece que esa parte ha reforzado mucho.

Una profesora de otro colegio destaca que en el caso de ella y de sus colegas es innovador la enseñanza enfatizando las conexiones entre las diferentes representaciones de una función y que las evaluaciones hechas son coherentes con ese énfasis, es decir, "[a los alumnos] se les daban problemas de contexto, donde ellos tenían que analizar la forma gramatical y llevarla pues a establecer la tabla y llevarlos luego a las distintas representaciones". Refiriéndose a la tarea de diseño de situaciones de aprendizaje que tiene el maestro, la profesora afirma ver la necesidad de continuar en el camino que han emprendido de hacer las clases de manera diferente a lo tradicional. En sus palabras:

> *En cuanto a uno como maestro ahora cuando quedemos sin estos talleres o que los terminemos tenemos que sentarnos a elaborar para no volver a lo tradicional, para no dejar que los estudiantes otra vez esperen que uno les haga todo. Entonces, sí hay innovación y en el aprendizaje también, porque ellos lo hacen más conscientes, lo hacen ellos mismos. Cuando uno está en una clase tradicional uno está haciendo el 80 o el 90%. Sí, uno hace todo.*

Al hacer referencia a los posibles efectos de la innovación en el aula, una profesora de otro colegio afirma que ella y sus dos colegas ven que ahora

> *hay en los estudiantes un conocimiento más reflexivo, [frente a un problema o un ejercicio] ya no es el resultado porque sí, porque hay que machetearlo para que salga, sino que ellos tratan de analizar de dónde sale. De pronto no hemos logrado tanto en la operatividad, pero sí en profundizar digamos más sobre análisis. Vemos que relacionan más, tratan de establecer conexiones entre las tablas, las gráficas, como que se está gestando ese proceso, que es lento pero que de alguna manera se visualiza; pues se ven más inquietos, de pronto vemos que como que lo que uno llama disciplina, cuando uno da su clase magistral y que todos están allá quieticos copiando, definitivamente eso no funciona. Vemos que cuando hay inquietos o se ven inquietos hay más aprendizaje; que para uno es más difícil adaptarse a eso, porque uno sale más cansado pero también más satisfecho. ¡Ah! hay otro punto: vemos que han desarrollado más la capacidad de escritura, de escribir procedimientos, porque de alguna manera el trabajo con las guías hace énfasis en eso y también en la última experiencia como que se van acostumbrando a que hay que llevar registro, entonces el hecho mismo de escribir, de llevar las tablas pues como que también va formando algunos hábitos, en ese sentido ¿no? llevar registros, escribir que poco o casi nada tenían en ese sentido.*

Reforzando la importancia que da al hecho de que sus estudiantes ahora lleven registros escritos de sus ideas, del trabajo que hacen en la clase, otra profesora del mismo colegio señala que ella ve que tal práctica ayuda a

> *desarrollar en los estudiantes la confianza en sí mismos, [les muestra] que lo que ellos dicen, lo que ellos piensan es válido. He notado que continuamente tengo que decirles, especialmente a algunos estudiantes que piensan las cosas, las dicen, pero ellos no las escriben porque piensan que eso no es importante. Entonces (...) así puedo subirles un poquito la autoestima en el sentido de que les digo: crean que lo que ustedes están pensando es muy válido, y la forma como lo están tratando escríbanlo eso es importante, no desconfíen de lo que ustedes están pensando.*

Hablando de que la innovación en el curso décimo ha generado cambios en el currículo de otros de sus cursos, una profesora reporta haber hecho algunas adaptaciones al diseño de los talleres relativos a las cajas para poder utilizarlos en grado once con el propósito de

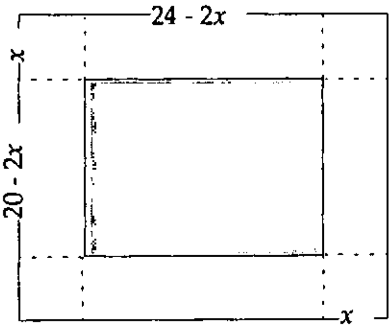
(...) acercarnos con más sentido a la noción de límite y también para reforzar todo lo que son dominios, rangos (...) a los estudiantes les encantó cantidades ese trabajo. (...) Yo me siento mucho mejor, los estudiantes me han dicho que cuándo vamos a ver las propiedades de los límites y eso me tenía... entonces les dije, miren vamos hacer una actividad en donde ustedes verán ahí que van a aprender de límites y ustedes me van a contar si realmente eso tiene sentido, porque de pronto yo vengo y les digo las propiedades de los límites y hacen una cantidad de ejercicios y después los pongo en una situación... que es lo que nos ha pasado, se pone una situación ya práctica y es como si nunca se hubiera visto, porque es difícil esa transferencia de tener un conocimiento y ponerlo en un contexto.

Consideraciones acerca de cuestiones mencionadas en la reunión

1.- Los siguientes comentarios nos surgen al considerar con detenimiento el episodio en torno al error $(24-2x)\ (20-2x)\ =\ 480+4x^2$ que fue reportado en la reunión. Frente a una simple tarea del tipo ejercicio —es decir, una tarea para cuya realización los estudiantes conocen un procedimiento— son varias las decisiones que ha de tomar el profesor acerca de cómo quiere abordar la situación si sus estudiantes se equivocan al realizarla.

En primer lugar, está el reconocimiento de la existencia del error y frente a eso, puede ser el profesor quien lo señale explícitamente, o algún estudiante como respuesta a que el profesor pide examinar si la solución y la respuesta son correctas, o esperar a que algún estudiante se dé cuenta del error y lo manifieste, o, una cuarta posibilidad es que el profesor plantee preguntas indirectas que permitan a los estudiantes darse cuenta por sí mismos de que hay error. En este último caso, la sugerencia dada por la profesora del grupo es una alternativa: comparar la respuesta incorrecta ($480+4x^2$) con otra expresión —que tiene una forma similar, un significado en el contexto en que se está trabajando ($480-4x^2$)— y utilizar precisamente los significados asociados a las dos expresiones para que el estudiante pueda ver el resultado ilógico que se derivaría si se aceptara su respuesta (i.e., el área de la base está dada por una expresión que para cada valor específico de la altura, produce valores mayores que los correspondientes valores que produce la expresión que representa el área del papel de la caja). Una variación de este argumento sería desarrollarlo en la representación gráfica utilizando un modelo de la caja desarmada.

En segundo lugar, una cosa es darse cuenta de que hay error y otra cosa es identificar cuál es el error, en dónde está, por qué es error. Frente al asunto de identificar cuál es el error, por lo menos en el caso particular que nos genera la reflexión, vemos que sería posible centrar la atención en diferentes puntos, lo que quizás estaría asociado con diferentes argumentos para justificar por qué hay error. Uno de tales argumentos sería, el error está en la aplicación incorrecta de una regla de las matemáticas para manipular operaciones con números y expresiones algebraicas, en cuyo caso, el mensaje que se daría a los estudiantes es tal regla es arbitraria, no tiene explicación lógica, es así y hay que memorizarla para poder aplicarla adecuadamente cuando se necesite. Se podría armar otro argumento utilizando el modelo de la caja desarmada para establecer por lo menos dos expresiones que permitan calcular el área de la base de la caja en términos del valor de la altura; la idea sería enfatizar que son expresiones equivalentes al producto expresado y que elegimos una de ellas cuya forma se pueda recordar fácilmente.



Expresiones para el área de la base:

$(24-2x)\,(20-2x)$

$24\cdot 20-4x^2-2x\,(24-2x)\;-2x\,(20-2x)$

$24\cdot 20-2\,(24\cdot x)\;-2x\,(20-2x)$

$24\cdot 20-24\,(2\cdot x)\;-20\,(2\cdot x)\;+4x^2$

Tal argumento va más allá de explicar en dónde está el error o en qué consiste al proponer una manera de obtener el resultado de la aplicación de la propiedad distributiva sin tener que recurrir a la memoria.

4.- Consideramos importante el reconocimiento que los profesores están haciendo de los cambios que hay en las maneras de actuar; no sólo de los estudiantes sino también de ellos mismos, a pesar de que no hayan mencionado de manera explícita ni descrito ampliamente lo que tiene que ver con el cambio de actuación de ellos. En relación con el cambio de los profesores vale la pena destacar que vemos cambios en conceptos, en acciones ligadas a esos cambios, en las actitudes y en los papeles que desempeña cada quien.

Por ejemplo, hubo por lo menos dos menciones al registro escrito y a los cuadernos. Nos gustaría que pudieran pensar en cómo son los cuadernos de sus estudiantes, ahora, y cómo eran hace un año. Y cómo se podría evaluar un buen cuaderno, es decir, qué sería un buen cuaderno en la perspectiva actual y en la perspectiva de hace un año. Esto adquiere importancia porque este cambio puede tener implicaciones y en particular críticas de los padres de familia e incluso de profesores y directivos que no entiendan las razones de tales cambios. Así, pues, se trata de un elemento importante a considerar en la valoración y la significación de lo que implica innovar, de lo que implica cambiar y de lo implicado por el cambio.

Otro elemento que se señaló en la reunión tiene que ver con la disciplina, y por supuesto ligado al actuar de cada quien. Ahora, ¿qué es eso de la disciplina del profesor y qué es eso de la disciplina de los estudiantes o como es qué se manifiesta la disciplina en el profesor y en los estudiantes? Seguramente que en muchas de las clases de los profesores que participan en este proyecto, la disciplina no tiene que ver con el hecho de estar sentados de una cierta manera, copiando del tablero, sino que tiene que ver más o puede llegar a ver más con la disciplina en el trabajo, con hacer las cosas que hay que hacer en el momento en que hay que hacerlas; seguramente, con intentar hacerlas lo mejor posible en el tiempo y con los recursos que se tienen, y eso puede generar situaciones de mucha indisciplina en la clase en donde haya mucha gente gritando y confrontando. Pueden llegar a ser dos miradas diferentes de la disciplina.

Un tercer elemento que si bien no se señaló, consideramos que es importante que se reconozca quizás por lo que no se ha señalado, es el papel de la evaluación en las clases de los profesores. Tradicionalmente para hacer la evaluación se realizan con cierta periodicidad previas, quices, preguntas escritas en las clases. Con respecto a la implementación de los talleres y a las clases del trabajo con lo lineal, es importante que los profesores examinen cómo significaron y cómo ejecutaron esa evaluación. Por ejemplo, ¿cuántas previas han hecho durante estos talleres? y ¿eso les ha permitido o no alejarse o acercarse de lo que hacen sus estudiantes? Talvez, la actividad de los estudiantes en las clases tradicionales como las describían al principio, sólo se limita a escuchar o a escribir y la actividad fuerte es en las previas, la actividad fuerte de producción misma, porque en las casas seguramente las tareas eso implica algún tipo de actividad que no siempre se reconoce. Es posible que con estos talleres la actividad fuerte sea en y durante los talleres y entonces si el profesor está viendo esa actividad pues no tiene que generar un condición particular para observar cosas, de manera muy explicita, sino que la misma actividad le permite ese ambiente de observación.

Registro en la octava reunión

A continuación se presenta el registro elaborado a partir del reporte hecho en la reunión del 22 de septiembre, en torno a la implementación del tercer taller.

Aspectos generales

En un colegio ha habido problemas para la entrega de las calculadoras pues los trámites con la aseguradora han sido difíciles por razón de que el colegio está ubicado en una zona roja.

Reporte de cambios a la propuesta curricular

Una profesora que aún no ha comenzado en su curso la implementación del tercer taller reportó haber introducido cambios al diseño propuesto en el enunciado de los talleres. Después de revisar las tablas relativas al área del papel de la caja que habían elaborado los alumnos, la profesora les pidió utilizar la calculadora graficadora para hacer la representación gráfica de $480-4x^2$ de manera que se pudiera "visualizar la parábola en la pantalla" y no les dio indicaciones al respecto. Después de que dos grupos llegaron por ensayo y error a lo pedido, es decir, a mostrar un representante en el que era posible ver los dos puntos de corte con X y el vértice, habiendo notado que los estudiantes no eran conscientes de cómo habían llegado a esa gráfica en la calculadora, entonces pasó a hacer una explicación en el tablero con miras a retomar algunos hechos de los que había informado a sus estudiantes días antes a haber iniciado el trabajo con las cajas. En esa explicación parece que la profesora aludió a las familias de parábolas y a la relación que se puede establecer entre la variación de un parámetro y la variación de las correspondientes gráficas cartesianas. Además, se dieron explicaciones acerca de cómo hallar los puntos de corte de la parábola con el eje X. Las siguientes son palabras textuales de la profesora:

> *(...) entonces ya pasé a un análisis en el tablero a que hiciéramos como una identificación de ese objeto ¿si? a analizar un poco lo que yo en alguna clase anterior les había dicho sobre los parámetros; inicialmente, antes de empezar el trabajo de las cajas nosotros habíamos hecho una pequeña identificación de las familias de funciones de parábolas haciendo alusión al oficio de los parámetros, entonces ahí les decía: ¿el parámetro a cuál es?, bueno... ¿hacia dónde va la parábola?, ¿una expresión $a\ x^2+c$, qué tipo de parábolas nos pueden generar? y ellos [los alumnos] recordaron algunas cosas, algunos se fueron a mirar los apuntes (...) sobre las características de esas familias, entonces ya pues llegamos a una explicación de cómo hallar los puntos de corte con el eje X y que eso nos permitía visualizar toda la parábola para determinar los intervalos, el máximo, el mínimo, la escala, todo eso... y, ahí quedé, llegamos (...) al procedimiento para sacar los puntos de corte.*

Un profesor en cuyo curso sólo hasta ahora están terminando el desarrollo del primer taller, reporta que antes de comenzar el segundo taller va a "hablarles a sus estudiantes" de la "forma gráfica de la parábola".

Aspectos particulares de respuestas y comentarios de los estudiantes

Una profesora reportó[27] que en su curso los estudiantes "no recordaban lo que era capacidad y volumen", razón por la cual "hubo como un poquito de indisciplina, preguntándose unos a otros; (...) como algunos tenían el concepto claro le explicaban a los demás".

En el mismo curso, algunos de los estudiantes tuvieron dificultad para hallar el área de la base de la caja y recurrieron a hacer un dibujo de la caja desarmada para visualizar "que se les estaba pidiendo". Una vez que reconocían lo que se les pedía hacer, la mayoría de estudiantes escribió como fórmula para el área de la base "largo x ancho" en vez de escribir la expresión en términos de la altura de la caja[28]. Además, reporta que varios estudiantes, también incurrieron en el error $(24-2x)\ (20-2x)\ =\ 480+4x^2$. Para abordar esa situación la profesora dice que "hicimos la diferenciación entre algunos errores que ellos cometían y por qué no era posible eso. Cuando volvieron a tomar la calculadora entonces verificando los datos ya se dieron cuenta del error[29]".

Papel del profesor

Para salir del impasse generado por el hecho de que varios de los estudiantes no sabían lo que era la capacidad de la caja, una profesora dice haber tenido que hacer un recorderis[30] en el tablero haciendo preguntas para que los estudiantes respondieran.

La profesora de otro curso reporta también que sus estudiantes escribieron como fórmula para el área de la base "largo x ancho" y para la capacidad "largo x ancho x altura". En la siguiente cita concreta la forma como trató la situación:

> *Me di cuenta que la mayoría tenía esas fórmulas, entonces les dije que se acordaran cómo habíamos llegado a las fórmulas de largo, ancho y se las escribí, entonces les dije acuérdense que nosotros escribíamos todos los procedimientos y que nos dimos cuenta que éstas eran fórmulas para cualquier caja. Entonces si ustedes me dicen el área de la base es largo x ancho entonces estamos hablando de cualquier caja, no de la caja que nosotros tenemos, que tiene unas medidas específicas, que está construida en un papel de 20 x 24, entonces tenemos que pensar en fórmulas en las que relacionemos esas medidas, así como lo hicimos con el largo, con el ancho y las áreas (...)*

Papel de la calculadora graficadora

En los cursos se pudo disponer de la calculadora graficadora en un momento en que ya los alumnos habían hecho a mano varias tablas correspondientes a las funciones largo, ancho, área del papel de la caja, área del papel desperdiciado y área de la base de la caja.

27. La profesora no reportó nada acerca del tipo de explicación que quienes, en su opinión tenían el concepto claro, daban a sus compañeros; ni tampoco nada acerca de los elementos que ella tuvo en cuenta para afirmar que algunos sí tenían el concepto claro.

28. Ese comportamiento de los estudiantes nos induce a pensar que ellos no están viendo el fenómeno de dependencia que hay entre la altura de la caja y variables como el área de la base de la caja y la capacidad de la misma. Pero, además la elaboración de la tabla que se les pedía hacer en el trabajo individual tampoco fue un trabajo que les ayudara a reconocer esa dependencia.

29. ¿Será más preciso decir que "se dieron cuenta de que había error", en cambio de decir que "se dieron cuenta del error"?

30. Nos preguntamos si ese "recorderis" es una actividad suficiente para que quienes no tenían claro un concepto, que se supone debían tener, lo clarifiquen. ¿Qué tipo de actividad diferente a recordar o a pedirles que consulten en un libro podría ser provechosa para que los estudiantes mejoren su noción acerca del volumen y la capacidad?

Una de las profesoras reporta que en su curso, estando ya en el tercer taller, usaron la calculadora para validar la información obtenida en los talleres anteriores. También cuenta que

[los estudiantes] estuvieron muy entusiasmados, (...) llegamos fue a comprobar datos y (...) afianzar hasta dónde los valores que tomaba el área del papel de la caja, del papel desperdiciado, el largo, el ancho y se hizo la gráfica del largo y el ancho y vieron nuevamente el repaso de lo de ¿por qué eran paralelas, por qué daban rectas paralelas, de dónde a dónde iba el largo de la caja, pues el rango, los valores que tomaban, entonces una vez más se dieron cuenta que el trabajo que habían hecho manual pues estaba... me faltó fue trabajar con varios decimales, pues con tres o cuatro decimales, pero de todas maneras, ellos sí se sintieron muy... viendo que sus datos sí coincidían, pues las conclusiones que habían sacado entonces que... eso los animó muchísimo.

Comentarios de los profesores

Acerca de las diversas actividades que interrumpen las clases de matemáticas

Un comentario que ha estado presente a lo largo de todas las reuniones —expuesto por todos los profesores participantes— tiene que ver con la gran cantidad de actividades del colegio que impiden que se realicen las clases de matemáticas. En esta ocasión fue muy notorio ese hecho pues de los seis profesores presentes en dicha reunión, todos menos uno se refirió a esa situación como razón para explicar por qué no han avanzado más en el desarrollo de los talleres. Las siguientes son citas de cuatro profesores que hablan de lo dicho:

(...) en la clase que tuve por cierto muchas interrupciones debido a algunas dificultades que se presentaron con algunos estudiantes que tienen muchos desempeños pendientes y fueron llamados a llenar unos formatos, entonces, fue una clase con muchos tropiezos, porque estaban entrando y saliendo los alumnos, hicimos la clase en la biblioteca con apoyo de las calculadoras.

Esta semana no pude trabajar con ellos [los estudiantes] porque preciso hubo una salida, una salida el día martes y coincidió con la entrega de boletines.

Yo también he tenido muchos problemas, yo hace prácticamente cuatro clases que no me veía con los estudiantes, entonces, pues ha sido como un desubique tanto para ellos como para mí. Sí, porque yo tengo clase los martes y jueves y justo en esas fechas se ha programado entrega de boletines, que como hemos perdido tantos viernes entonces cambiamos un día por viernes, entonces no los había vuelto a ver.

Voy en lo mismo que la semana antepasada. Ya terminamos los dos talleres, falta lo que es hacer la puesta en común, en eso quedamos.

Acerca del trabajo de los colegios para reconstruir la experiencia de innovación

En general, los profesores han tenido que recurrir a revisar los cuadernos de sus estudiantes pues no tenían un registro propio y completo de los materiales que se han trabajado en sus clases. Los cuadernos de los estudiantes contienen un buen registro de lo que se hizo en clase excepto para los casos de trabajo en grupo pues es usual que la hoja en que se elaboró el trabajo de grupo esté refundida o perdida. Para el caso de los talleres acerca de función cuadrática, una profesora dice que

(...) en el cuaderno aparecen registros que solamente los entiende el alumno (...) Hay algunos estudiantes que tratan inclusive de decir «guía tal», hay otros que no colocan guía... sino que hacen las tablas, o sea llevan cosas desorganizadas para mí, pero de pronto organizadas para el estudiante, pues él entiende su cuento. Como a cada uno se le da su guía, entonces ellos tienen sus guías escritas por detrás las cosas que uno explica, pero no hay un registro concreto que diga: ¡mire! esta es la secuencia.

Acerca de su preocupación de cómo seguir el cambio que han iniciado en el contenido y organización del mismos dentro del currículo institucional

Varios profesores coinciden en una preocupación acerca de cómo van a responder a los colegas no sólo de matemáticas sino también de física por los cambios hechos que de alguna manera descomponen lo que se venía haciendo tradicionalmente en los cursos de décimo y undécimo y que a todos los parece que es lo que debe hacerse.

Hay algo que nos preocupa (...) y es el año entrante... la continuación de este cambio curricular. Los profesores, por ejemplo, de física allá en el colegio, han cuestionado el cambio curricular y en cierta forma pues, tienen razón porque nosotros hicimos un cambio que nos conllevó a una modificación total de contenidos, de lo que se venían dando tradicionalmente en décimo y no tuvimos en cuenta por ejemplo física, entonces los profesores de física dicen: nosotros estamos trabajando todo lo de movimiento uniforme, etc. necesitamos vectores, que tengan nociones de trigonometría y entonces ¿cómo así que ustedes hasta ahora están viendo función lineal, función cuadrática y el año entrante...? Eso por ejemplo no se contempló desde un comienzo y entonces eso implicaría que dentro de la física hubiera también una reestructuración en cuanto a esa secuencia de contenido.

Consideraciones acerca de cuestiones mencionadas en la reunión

Atendiendo a los reportes de los profesores cabe preguntarse por la lógica que ha habido en la presentación de los contenidos matemáticos en los casos en que los profesores han introducido cambios al diseño curricular propuesto para hacer una primera aproximación a elementos de una función cuya fórmula se expresa con un polinomio de segundo grado. Por ejemplo, antes de tener una noción —que no se apoye exclusivamente en la representación simbólica y en la gráfica (ambos dados como hechos)— en uno de los cursos se trabajó con parámetros y con el efecto que ellos tienen sobre la gráfica de una función básica. Esto nos induce a pensar en qué tipo de comprensión se promueve y que comprensión efectivamente logran los estudiantes al respecto.

Registro en la novena reunión

A continuación se presenta el registro elaborado a partir del reporte hecho en la reunión del 29 de septiembre, en torno a la implementación del tercer taller y de dificultades con las que se han encontrado durante su proceso de innovación.

Aspectos generales

En todos los cursos están comenzando a trabajar el tercer taller. Sin embargo, no se explicitó en todos los casos en qué punto van.

Para la realización de este taller, en varios cursos los estudiantes dispusieron de una calculadora graficadora para su trabajo. En un curso donde sólo la profesora tenía calculadora, ella pasó por cada grupo mostrando para el caso de las funciones tratadas en los talleres 1 y 2, las gráficas correspondientes, con el fin de que los estudiantes vieran el manejo de la calculadora y que pudieran validar los resultados que ya habían obtenido. Posteriormente (en la siguiente sesión) volvió a pasar por los grupos, esta vez para dejarles ver la gráfica de la función capacidad de la caja, como forma de validar una conjetura que habían hecho.

Aspectos particulares acerca de las respuestas[31] de los estudiantes

Por lo menos dos profesores aludieron a la dificultad de sus estudiantes para llegar a plantear la expresión del área de la base y de la capacidad de la caja en términos de la variable independiente x (altura de la caja); los estudiantes planteaban las fórmulas generales largo x ancho, o, largo x ancho x alto, pero no las expresaban en términos de la altura de la caja[32]. Una profesora nos cuenta cómo abordó la dificultad:

> *(...) ya no pasé por cada grupo sino que les pedí que prestaran atención y les dije que la respuesta que habían dado para el área de la base, largo por ancho, estaba bien; pero que pensaran que nuestra caja era una caja especial, que no era cualquier caja, que entonces recordaran cómo habíamos llegado a la fórmula del largo y del ancho y que la usáramos ahí. Entonces alguien dijo, el largo es 24 - 2x, entonces, se escribió eso y que el ancho era 20 - 2x; entonces alguno dijo, ¡ah!, con eso ya se puede multiplicar. Entonces comenzaron a multiplicar, (...) y pues todos llegaron ya a las dos fórmulas.*

Los estudiantes de un profesor tuvieron dificultad para saber a qué se refería la expresión "base de una caja"; y los de una profesora no sabían el significado de la palabra "conjetura". La forma de abordar dichos problemas se evidencian en las siguientes citas:

> *Les dije si estamos en el salón y esta es la caja grande, vamos a suponer que esta es la caja del salón ¿cuál es la base? ¿usted dónde está parado? Pues en el piso; eso es la base y lo que vamos a hallar es el área de la base. Así les di un ejemplo y algunos ya sabían que era largo por ancho y así ya llegaron.*

> *(...) no entendían qué era la palabra "conjetura". Yo les decía que ellos dijeran entre qué valores podía estar el área de la base y el volumen y que con la calculadora íbamos a verificar si eso que ellos pensaban estaba bien.*

Con respecto a la tarea de conjeturar cuál es el recorrido de las funciones área de la base de la caja y capacidad de la misma, la profesora del curso donde los estudiantes trabajaron sin calculadora reporta que ellos en ambos casos, utilizaron la misma estrategia: tomar dos valores del dominio de las funciones: uno, un valor muy pequeño y otro, un valor muy grande, y para ambos valores, calcularon el correspondiente valor de la función, y con base en dichos valores determinaron los extremos del intervalo que representa el recorrido. Así, obtuvieron una conjetura aceptable para el caso de la función área de la base, sin embargo, el mismo procedimiento para el caso de la otra función los condujo a algo que les extrañó y después de haber utilizado la calculadora como medio de validación, se dieron cuenta de que su conjetura no era correcta. La siguiente cita apoya lo dicho:

> *(...) Cuando hicieron el volumen [sic], hicieron lo mismo, entonces el mismo 0.1, el mismo 0.9, entonces les daba casi 0 el volumen. Cuando me llamaron yo les pregunté... es decir, me escribieron los dos valores que les había dado para 0.1 y 0.9, entonces, les dije qué cómo habían llegado a esos resultados, pues porque la caja más pequeña es de 0.000algo entonces cogimos un valor y la mayor es de 9.999 entonces cogimos un valor y reemplazamos y pues entre esos dos valores está. Entonces, les dije miren su tabla, lo hicieron y dijeron «pero tan raro, porque miren que da casi 0 aquí, casi 0 allá y en la tabla hay valores que son grandes,*

31. De los cuatro profesores que hablaron en esta ocasión acerca de lo sucedido durante el desarrollo del taller, especialmente una profesora dio detalles de las respuestas de los estudiantes; los demás, hicieron alusión en forma general a las respuestas de los estudiantes.
32. Probablemente sea conveniente revisar el enunciado de la correspondiente pregunta del taller.

entonces no pueden ser esos dos». Entonces les pregunté si habían tenido en cuenta solamente esos dos valores, sin mirar la tabla; me dijeron que solamente habían tomado los valores extremos de las cajas, entonces les pregunté si eso servía para hacer la conjetura. La mayoría dijo que no, algunos decían pero entonces qué es lo que pasa. Les recogí los cuadernos y la mayoría por ejemplo escribió que el volumen es variable para hablar del recorrido porque no podían como expresar eso que habían visto. En cuatro grupos alcancé a pasar con la calculadora y entonces ellos verificaron y cuando lo hicieron, yo la iba pasando despacio [la ventana con la gráfica] para que ellos miraran, entonces se dieron cuenta de que en 3.6 alcanzaba un valor máximo y que ahí se empezaba a devolver; esos cuatro grupos hicieron corrección de lo que tenían; escribieron que de acuerdo a la gráfica, que con esos datos que ellos habían tomado lo que pensaban no eran correcto.

Acerca de la evaluación sobre lo tratado en los talleres

Para contar con tiempo suficiente para analizar el trabajo de los estudiantes en la evaluación acerca de lo tratado en los talleres, les pedimos a los profesores que entregaran a sus estudiantes el tema de la evaluación al comienzo de la semana del 25 de septiembre, sin importar que no hubieran realizado todos los talleres, y la idea era que según hasta dónde hubieran llegado, el profesor les pidiera responder unas ciertas preguntas del tema.

Varios profesores no entregaron a sus alumnos el tema durante esa semana y no fue clara la razón de ello. Otros pretendían que los estudiantes hicieran ese trabajo de evaluación en clase y en parte, la razón es que consideran que sus estudiantes no tienen la responsabilidad necesaria. Quienes sí dieron el tema a sus estudiantes en esa semana, les pidieron entregar la solución al cabo de un poco más de una semana, pero ninguno excluyó ninguna pregunta. La mayoría de los profesores consideró que sus estudiantes estaban en capacidad de responder todas las preguntas del taller; es decir, no vieron como factor del que dependiera el éxito de sus estudiantes para responder las preguntas 4, 5 y 6, el hecho de que no hubieran trabajado previamente en los talleres 4, 5 y 6. Así lo evidencian las palabras de un profesor:

En las seis preguntas [de la evaluación] no se hace nada diferente a lo que se ha hecho en todos los talleres. Se plantea hallar una función a partir de unos valores, (...) en las últimas preguntas [4, 5 y 6] si yo hago una tabla de datos a partir de las funciones, eso se puede sacar de la tabla de datos y ellos lo pueden hacer sin necesidad de contestar los otros talleres. Yo pienso que sí, que sí lo pueden hacer.

Una profesora dijo haber dado una sugerencia a sus alumnos con respecto a la forma de comenzar a proceder para responder a la evaluación:

Les aconsejé que hicieran una tabla de valores grande, que recordaran que en todos los talleres antes de empezar a resolver cualquier pregunta lo que hacíamos era elaborar una tabla que nos permitiera visualizar mejor las cosas.

Comentarios de los profesores

Acerca de dificultades o tropiezos en el proceso de innovación

Varios profesores coinciden en que hay una diversidad de circunstancias externas a ellos, que hacen parte de la vida escolar en las instituciones, que determinan en gran medida lo que sucede efectivamente en la clase de matemáticas, obstaculizando en algunos casos las intenciones y planes de los profesores y del área.

Una de tales circunstancias es la serie de actividades extraclase a las que, con mucha frecuencia y de manera sorpresiva, tienen que atender los estudiantes durante la jornada de estudio, con lo cual se pierden horas de clase de matemáticas. Esto, junto con el hecho de que hay destinadas en la semana pocas horas de clase para el caso de las matemáticas, genera con frecuencia una interrupción en el flujo de los procesos correspondientes de enseñanza y aprendizaje. Esto en muchos casos ocasiona la necesidad de estar retomando asuntos tratados en la clase anterior puesto que entre ella y la siguiente media un lapso tan considerable que los estudiantes olvidan qué están tratando. Por otro lado, también dificulta la posibilidad de que el profesor haga una planeación detallada del desarrollo de su clase y también le quita sentido a hacer dicha planeación.

Otra circunstancia es el débil liderazgo del rector y del coordinador académico con respecto a asuntos de carácter académico en lo que toca al área de matemáticas. Esto impide que una innovación como la que han iniciado los profesores de ICEP se vea como un fenómeno institucional y propicie, más bien, que se tome como un trabajo de unos profesores interesados en el asunto de cuya voluntad y presencia en el colegio depende que lo que se haya avanzado se mantenga y continúe. Ligado con esto está la problemática que hay detrás del involucramiento de los profesores en procesos de cambio, sobre todo cuando no han estado desde el inicio o cuando no necesariamente comparten las iniciativas e ideas de cambio. Las siguientes citas de dos profesores aluden a esto:

> *[Refiriéndose a la necesidad de buscar estrategias para que la innovación que han vivido sirva de base y trace caminos para la enseñanza de las matemáticas en el colegio] Sólo el grupo no es suficiente; tiene que ser institucional, o sea que tiene que estar metido el rector, el coordinador académico y el jefe de área. Por ejemplo, cuando llegó el profesor nuevo, ellos debieron citarlo a una reunión y exponerle la necesidad de que se involucrara en el proyecto y de seguir las indicaciones. (...) En un colegio privado, no hay problema porque el rector dicta las políticas y si el maestro no las sigue, pues no lo aceptan, pero en la enseñanza oficial quién le dice al rector que es el quien tiene la autoridad o el Consejo Académico o el delegado (...)*

> *[Se requiere el apoyo del rector para echar a andar una innovación en el colegio] porque es que trabajar con profesores del Distrito no es nada fácil porque hay el concepto de que yo en el Distrito hago lo que quiero y que sigo mi metodología. Nosotros entendemos muchas cosas porque ya estamos en un proceso de cambio, entonces entendemos fácilmente todo lo que puede suceder, pero una persona que nunca ha asistido a un curso de estos, que no conoce la educación matemática, pues toda la vida ha dictado lo mismo y entonces va a querer siempre hacer lo mismo, y luchar con eso es bien complicado.*

Preocupaciones relativas a implicaciones del proceso de innovación

En la medida en que la innovación se aleje significativamente de lo que es usual, y, sobre todo, durante el proceso de su gestación y desarrollo surgen en las personas comprometidas en ella, inquietudes, dudas, que las pueden confrontar seriamente. Una de tales preocupaciones se concreta así: dentro de esta innovación se ha dejado de lado el estudio de varios de los temas que son típicos del programa de décimo (e.g., funciones trigonométricas, cónicas), ¿cómo afecta ese hecho a un alumno que haya cursado décimo bajo la perspectiva de la innovación, si se cambia de colegio para cursar grado undécimo? ¿Es justo el que esté en posible desventaja con sus nuevos compañeros? ¿Qué van a pensar los profesores colegas con respecto al profesor que no hizo enseñó en décimo lo que se supone que debe enseñar?

Consideraciones acerca de cuestiones mencionadas en la reunión

1.- Un profesor comentó que la forma de proceder de sus estudiantes frente a la tarea de encontrar una expresión que representara la función *área de la cara determinada por el largo de la caja*, no consideraba el hecho de que dicha expresión debe representar todas las cajas posibles y en consecuencia debería escribirse en términos de la variable x. Después de que los estudiantes expresaron lo apropiado, no sabían que hacer con la expresión formulada. Frente a tal comentario, nos surge el siguiente comentario:

Nosotros hemos intentado caracterizar, para diferenciar, lo que son las ecuaciones y las funciones. En esa aproximación hemos podido darnos cuenta de que algunas funciones se establecen como el conjunto solución de una ecuación. Pero, con lo que tú dices ahora me haces pensar que las ecuaciones son preguntas a contestar, mientras que las funciones no son preguntas. En esa idea de caracterizar las cosas, es posible que las ecuaciones necesiten respuestas dado que son preguntas; entonces si uno encuentra una ecuación $y = 4x^3 - 88x^2 + 480x$, *se encuentra una pregunta y ahora tengo que solucionarla, porque además en la escolaridad habitual lo que precede a una ecuación es la frase "solucione tal cosa", "encuentre el valor de x"; esas formas de enunciado son preguntas, hacen que eso sea una pregunta. No sé si así lo piensan los niños: encuentro una ecuación, la soluciono y eso ¿me responde qué pregunta? ¿le doy valor a x y a y, cómo hago? Creo que tiene mucho sentido esa actitud de los muchachos: Y, ¿ahora qué? Puede estar muy ligada a la idea de ecuación que se maneja escolarmente, lo que he señalado de cómo es que se expresa esa ecuación.*

2.- Es sorpresiva la decisión que los profesores tomaron acerca de proponerles a sus estudiantes las seis preguntas de la evaluación sin que ellos hubieran trabajado todos los correspondientes talleres. Al tratar de imaginar cuál pudo ser la razón se encuentran por lo menos dos posibilidades:

- ▲ No analizaron a la luz de la propuesta de los talleres, la complejidad que hay implicada en el proceso para llegar a una respuesta justificada de cada una de las seis tareas que se plantean, y quizás, en cambio, están pensando en la respuesta escueta que podría dar una persona que comprenda y tenga un conocimiento al respecto mucho más sólido de lo que se puede esperar de un estudiante que está comenzando a comprender el asunto matemático implicado.
- ▲ Sí vislumbraron la complejidad implicada en las preguntas y a pesar de que sus estudiantes no hayan trabajado previamente en el correspondiente taller, ven esta evaluación como una tarea en la que sus estudiantes no sólo van a poder mostrar lo que han comprendido de lo hecho, sino que también van a poder aprender.

Puesto que la segunda posibilidad entra en conflicto con otras actitudes y decisiones que han sido usuales en los profesores durante su participación en ICEP (e.g., se inclinan a pensar que los estudiantes no pueden hacer cosas sin la guía y explicación de parte del profesor), vemos que la segunda posibilidad no tiene mucho fundamento, así que nos inclinamos a pensar que la razón para la decisión es la primera, claro, entendiendo que podemos habernos quedado cortos en el número de posibilidades que consideramos.

Registro en la décima reunión

A continuación se presenta el registro elaborado a partir del reporte hecho en la reunión del 13 de octubre, en torno a la implementación del taller de evaluación.

Aspectos generales de la implementación del taller

En esta reunión no fue explícito si todos los profesores habían implementado el taller de evaluación y en cambio, sí fue explícito que sólo una profesora había revisado ya y calificado las respuestas de sus estudiantes.

A pesar de que la propuesta curricular planteaba que el taller sexto (el de evaluación) se resolviera en grupos de dos alumnos como un trabajo extraclase para el cual tenían una semana, varios profesores tuvieron que dedicar un bloque de clase para que los estudiantes trabajaran en el desarrollo del mencionado taller. En algunos casos, fue necesaria esa decisión porque los estudiantes no cumplieron con la tarea que se les propuso. En otros casos, anticipando el posible comportamiento de sus estudiantes, los profesores hicieron variaciones a la estrategia sugerida de trabajo extraclase y en grupos. En particular, una profesora les propuso como tarea individual para la siguiente clase leer y comenzar a elaborar las preguntas formuladas; en la siguiente clase solicitó que quienes habían hecho la tarea, trabajaran en parejas de acuerdo con el tema que les había correspondido[33] para revisar y mejorar sus respuestas individuales, y quienes no lo habían hecho se reunieran también en parejas y respondieran la evaluación.

En esta circunstancia, algunos profesores hicieron referencia a los inconvenientes que tiene no sólo el dejarles tarea para la casa a los estudiantes sino el pedirles que trabajen en grupo pues se abren oportunidades para comportamientos no deseables (e.g., mentir, copiarse, drogarse). Así lo señalan los comentarios de tres profesoras:

> *(...) ellos se van a otra cosa, se drogan o se van a otras... entonces uno de todas manera tiene que darles tiempo en la clase (...)*

> *(...) en nuestros colegios los alumnos tienen por un lado dificultad para reunirse y cuando se reúnen cogen como pretexto el trabajo que tienen que hacer, y mentiras se van a hacer otras cosas y después llegan los padres a hacer reclamos (...)*

> *(...) cuando ya recogimos los materiales, nosotros nos dimos cuenta de que hubo grupos que trabajaron muy bien, responsablemente, pero otros llegaron a copiarse, entonces nos parece que habría sido mejor aplicarla [la evaluación] en grupos pero en un bloque de dos horas, en donde nosotros mismos viéramos.*

Aspectos acerca de respuestas de los estudiantes

Dos profesoras reportaron que aunque las respuestas de sus alumnos tienen errores, les es posible evidenciar en ellas progresos en el conocimiento y comprensión. El siguiente comentario alude a ese hecho:

> *(...) a pesar de que los estudiantes mezclan las características de la parte simbólica con lo de la gráfica, hay más conocimiento, es como más sólido porque ellos pueden decir muchísimas cosas que antes no decían.*

Una profesora señala que la sexta pregunta fue malinterpretada por muchos de sus estudiantes[34], pues entendieron que se les preguntaba "si había dos cajas que tuvieran la misma área", a lo cual respondían afirmativamente "porque como la función es creciente y decreciente entonces, por ejemplo, en 5.9 y 5.7 tienen el mismo valor".

Acerca de la evaluación misma

Todas las profesoras que estuvieron presentes en la reunión coincidieron en afirmar que el tipo de evaluación hecha les presenta dificultades[35] a la hora de corregir y de valorar

33. El sexto taller tiene dos versiones.
34. En una de las versiones la pregunta es la que sigue: Si al comparar varias parejas de cajas se encuentra que las alturas difieren en la misma cantidad, ¿será cierto que sus respectivas áreas de una de las caras determinada por el largo de la caja, también difieren en una misma cantidad?
35. Las profesoras no entraron en explicaciones acerca de la dificultad mencionada ni tampoco trataron de buscar razones a ella.

el trabajo de los estudiantes. Ese proceso promovió en las profesoras inquietudes con respecto a los criterios e indicadores necesarios para valorar el trabajo de los estudiantes pues ven que las respuestas dadas contienen aciertos pero también desaciertos y afirmaciones que aparentemente nada tienen que ver con lo desarrollado y escrito antes, y sin embargo, saben por lo que ha pasado antes en sus clases, por la interacción cercana que han tenido con sus alumnos, algo acerca del estado de comprensión de ellos que no concuerda con lo que ahora están viendo del desempeño en la evaluación. Frente a las respuestas de sus estudiantes varios profesores vieron la necesidad de indagar más allá de lo escrito por sus estudiantes en el papel, pusieron en tela de juicio la validez de sus apreciaciones con respecto a la comprensión de los alumnos.

Quiero compartir esta evaluación que no sabía, aún no sé si fui injusta al colocar la nota. Es decir, coloqué un "No superado+" como para identificarla porque son dos niñas que trabajaron, hicieron su tabla, su gráfica y ésta está muy bien y llegan aquí incluso a marcar que para 10 (a ellas les tocó el área lateral sobre el largo) y marcan aquí 40 y todo eso. Pero al ir a mirar la parte operativa no tiene nada que ver... por ejemplo, empiezan a tratar de calcular el vértice de la parábola. (Una aclaración al margen: como antes de que iniciáramos los talleres yo les había hecho un trabajo sobre cómo graficar las parábolas, cómo hallar el vértice, cómo hallar los puntos de corte, yo les dije utilicen todo eso, todo lo que saben porque esos procesos matemáticos no hay que olvidarlos; el hecho de que veamos la gráfica, que la calculadora nos permita ver la gráfica no quiere decir que nosotros nos olvidemos de los procesos matemáticos para hallar los elementos claves de la parábola.) Entonces como tenían la expresión $24 - 2x^2$*, entonces dijeron 24 es* a*, y, -2 es* b*, entonces como la fórmula en el cuaderno estaba* $-\frac{b}{2a}$ *entonces ahí está todo el error. Aparte de eso dicen* $-\frac{2}{48} = 24$*, y llegan a calcular ahí, no terminan, luego hallan las raíces, y dicen* $\frac{2}{48} = 24$ *y uno mira y dice ¿cómo elaboraron la gráfica? Bueno, con la tabla, pero no están conectando esos procesos operativos para hallar los elementos de la parábola, no los están implementando ahí y dice los valores de la tabla ya cuando hacen algún análisis sobre... dicen van variando y algunos son iguales para que pueda ser una parábola y luego dice análisis de la gráfica: en esta parábola lo realmente significativo es lo rojo, la zona roja porque es la que realmente le da valor a la gráfica. Ya después cuando dice «cuando la medida del cuadrado recortado se aproxima a 10 entonces la medida del área de la cara determinada por el largo tiende a su más alto valor, en este caso tiende a 72 y dice límite cuando x tiende a 10, entonces da 72. Yo digo, ¿cómo así? No tiene nada que ver lo que está explicando con lo que está marcando en la gráfica. Es difícil; uno dice y ¿ahí cómo realmente...? Yo veo que hay cosas que están bien, hay cosas que son incoherentes con las explicaciones, ¿cómo valorar?*

Consideraciones acerca de cuestiones mencionadas en la reunión

Pensando hipotéticamente al respecto de la dificultad que encontraron las profesoras en el tipo de evaluación que se aplicó, vemos que tal dificultad puede tener que ver con varios puntos, a saber: el hecho de no contar con procedimientos específicos contra los cuales comparar las respuestas de los estudiantes; el hecho de que responder las preguntas de la evaluación exige utilizar y conducir un discurso (no seguir el discurso del profesor), decidir cuáles son las ideas que es pertinente expresar; el hecho de que no hicieron suficiente énfasis durante la implementación de los talleres en la importancia y necesidad de que los estudiantes explicitaran las ideas que estaban guiando sus procesos de solución de los problemas y como los estudiantes no tienen costumbre de hacerlo, la evaluación contiene poca información para seguirle el rastro a los procesos realizados por los estudiantes.

Al comparar las correspondientes situaciones propiciadas por una evaluación tradicional y por una evaluación como la que se aplicó en esta propuesta, vemos que en la primera, los alumnos pueden mostrar cosas correctas sin necesidad de estar entendiendo y el profesor puede no darse cuenta de la situación real; en el segundo caso, lo que los estudiantes tienen que hacer para responder la evaluación le muestra al profesor lo que ellos no entienden. Por otra parte, en el primer tipo de evaluación el profesor puede poner de manera más bien precisa "bien" o "mal" porque en cierta forma la complejidad de la tarea lo permite; pero en el caso de una tarea cuya resolución exige hacer conexiones, usar varias representaciones, interpretar los resultados parciales que se van obteniendo, sustentar los resultados obtenidos y los hechos usados, etc., todo eso a discreción del estudiante en la medida que vea la necesidad y pertinencia, no le permite al profesor hacer juicios duales a la ligera. Además, el segundo tipo de evaluación impone que se mire más al proceso que vive el estudiante en el desarrollo de su comprensión que a logros pequeños en relación con la obtención de respuestas determinadas; adquiere mucha importancia enfocar la atención en la coherencia del trabajo y la evolución de la comprensión del estudiante.

I

C

E

P

GUÍAS

TALLERES

MATERIALES DE TRABAJO

COLEGIO DISTRITAL "LA AMISTAD"
JORNADA TARDE

PROYECTO DE INNOVACIÓN CURRICULAR EN PRE-CÁLCULO EN EDUCACIÓN MEDIA

Grados 10.1; 10.2;10.3;10.4;10.5

GUÍAS, TALLERES Y MATERIALES DE TRABAJO

PROFESORAS:

MAGDALENA OLIVEROS

HNA. CARLOTA PORRAS

ROSA ALICIA ROJAS DE COBO

PROYECTO DE PRECÁLCULO
UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
UNA EMPRESA DOCENTE

PRESENTADO A: CRISTINA CARULLA

PRESENTADO POR: MAGDALENA OLIVEROS
CARLOTA PORRAS
ROSA ALICIA ROJAS DE COBO
Colegio La Amistad J.T

REPORTE FINAL DEL PROYECTO DE PRECÁLCULO:

FUNCIÓN LINEAL

Temas que serán tratados en esta parte:

- Función de proporcionalidad directa, magnitudes directamente proporcionales, variable independiente y variable dependiente.
- Sistemas de representación: Expresión simbólica, representación numérica o tabular, representación gráfica y verbal.
- Pendiente y constante de proporcionalidad.
- Parejas ordenadas y puntos en un plano.
- Distancia entre dos puntos: perímetro y área de cuadriláteros, comprobar que una figura geométrica es un triángulo equilátero , paralelogramos.
- Punto medio: Corte de diagonales de cuadriláteros, corte de las medianas de los triángulos.
- Tangente como ángulo de inclinación de la recta. Rectas paralelas y perpendiculares.
- Función: Concepto, dominio e imagen, escalas, función creciente y decreciente. Máximos mínimos
- Estudio del significado de ($y = mx$). Pendiente: a) $m>0$ $m=0$ $m<0$, b) ángulo de inclinación de la recta.
- Ecuación de la recta que pasa por (0,0) dado otro punto.
- La función de gráfica lineal o afín ($y = mx+b$) de la lineal ($y = mx$) por traslación. Pendiente (delta y/ delta x). Puntos de intersección con los ejes.
- La ecuación de la recta: Que pasa por dos puntos; Dado un punto y la pendiente; Dados los intersectos.
- Sistemas de funciones lineales:
  Problemas de aplicación. Métodos de solución. Sistemas compatibles y sistemas incompatibles.

OBJETIVOS DE LA FUNCIÖN LINEAL:

NIVEL UNO

- Reconocer la función lineal en sus diferentes representaciones.
- Identificar el oficio de los parámetros m y b en las gráficas de las funciones lineal y afines (familias).
- Identificar la linealidad (aditividad y homogeneidad) como propiedad de las funciones de gráfica lineal.
- Reconocer que en las funciones lineales, el cociente entre los valores de las variables es contante.

NIVEL DOS

- Establecer conexiones entre las diferentes representaciones.

NIVEL TRES

- Modelar situaciones de la vida cotidiana, utilizando las funciones lineales y afines.
- Formular y resolver situaciones problemáticas aplicando la función de gráfica lineal.

LA FUNCIÖN CUADRÄTICA:

Temas que serán tratados en esta parte:

- Dependencia entre variables: variable independiente e independiente.
- Representación simbólica
- Dominio y rango de las funciones características de los conjuntos. Diferencias entre la función lineal y la función cuadrática.
- Representación gráfica: elaboración, interpretación en contexto específico. Representación tabular.
- Polinomios de segundo grado con tres coeficientes reales diferentes de cero.
- Función cuadrática decreciente con coeficiente principal positivo.
- Diferencias entre la función de grado uno, grado dos y grado tres.
- Diferencias entre variación lineal, variación cuadrática y polinómica. Máximos y mínimos.

OBJETIVOS DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

NIVEL UNO
RECONOCIMIENTO DE ELEMENTOS CONCEPTUALES Y PROCEDIMENTALES

- Identificar una función cuadrática a través de la expresión simbólica, es decir, reconocer que una función descrita por un polinomio de segundo grado en una variable (o expresiones algebraicas equivalentes a este) es una función cuadrática.
- Identificar una función cuadrática a través de la gráfica cartesiana, es decir, reconocer que una parábola de eje vertical representa una función cuadrática.
- Identificar una función cuadrática a través de la tabla de datos, es decir, reconocer que los datos de una tabla se relacionan de manera cuadrática.
- Identificar y describir la manera como se establecen las variaciones de las imágenes respecto de las variaciones de las pre-imágenes, en los distintos sistemas de representación (simbólico, gráfico, tabular). Particularmente reconocer la existencia de un punto o valor numérico (máximo o mínimo) en el cual se altera un comportamiento creciente (de la variable dependiente) en uno decreciente, así como, reconocer que las variaciones no son proporcionales.
- Identificar el conjunto de los reales como dominio de toda función cuadrática, así como identificar el conjunto $[-\infty, k]$ ó $[k, \infty]$ como rango de cualquier función cuadrática.
- Identificar que la función cuadrática puede tener a lo sumo dos ceros (o raíces). Además, conectado con esto, reconocer (en las diferentes representaciones) las características que determinan el número de ceros.
- Reconocer que la función cuadrática no satisface las dos condiciones que definen la linealidad (aditividad y homogeneidad).
- Reconocimiento de la simetría como característica de algunas funciones cuadráticas. Igualmente, determinar las características que definen la existencia o no de la simetría de una función cuadrática.

NIVEL DOS
INTERPRETACION Y USO DE ELEMENTOS CONCEPTUALES Y PROCEDIMENTALES

- Transformar los polinomios de segundo grado en expresiones algebraicas equivalentes en las cuales se visualicen algunas características de la función cuadrática (v.g. la existencia del mínimo o máximo (vértice), ó, la existencia de ceros (cortes con ejes de las abscisas o coeficientes independientes de los factores lineales)).
- Transformar la expresión simbólica de una función cuadrática en una gráfica, pasando y sin pasar por una representación tabular.
- Identificar el papel que cumplen algunas características de la gráfica de una función cuadrática en las expresiones simbólicas de la misma.
- Establecer las variaciones que sufre una gráfica de una función cuadrática al hacer variaciones en los coeficientes del polinomio que la describe o en los coeficientes de los polinomios cuyo producto describe la función.

- Estimar el valor (punto o números) en el cual la función cuadrática puede tener un máximo o un mínimo.
- Predecir (extrapolar o interpolar), con relativa aproximación, los valores numéricos o puntos aplicados en una función cuadrática.

NIVEL TRES
PRODUCCION Y GENERALIZACION

- Identificar la función cuadrática como modelo de variación de algunos fenómenos físicos (v.g. la relación entre espacio y tiempo en los movimientos de caída libre).
- Establecer las operaciones entre funciones cuadráticas que producen nuevas funciones cuadráticas, atendiendo a las restricciones posibles para las mismas.

ENFOQUE METODOLÓGICO

La forma de trabajo durante el proceso de realización del proyecto por parte de los alumnos, fue en grupos de trabajo donde socializaron y sacaron conclusiones, escribieron el porqué de lo que hicieron, al igual que logros y dificultades, al finalizar cada clase.

Fue una enseñanza - aprendizaje en espiral, donde cada tema es retomado de una manera más amplia y más analítica y establece conexiones tanto con los conocimientos adquiridos anteriormente como con los diferentes sistemas de representación, de esta manera, los alumnos fueron mejorando la comunicación escrita y oral.

Se trabajaron guías elaboradas colectivamente, donde se leyó y analizó sobre la función lineal con los maestros de la misma institución; en la función cuadrática, se trabajaron talleres proporcionados por los investigadores de una empresa docente, y todo fue discutido con los profesores de las tres instituciones.

El trabajo respecto al profesor, fue en equipo y buscando en todo momento un cambio en la actitud y en la manera de realizar sus clases; hubo preparación de temas, consulta de programas y libros, se conocieron las condiciones iniciales del colegio, el "PEI, Búsqueda de hombres nuevos a través de la formación en valores y la educación en tecnología", la programación general del área, se realizaron encuestas a los estudiantes para conocer entre otras cosas que querían hacer cuando salieran del bachillerato en las cuales descubrimos que la mayoría deseaba entrar a estudiar a la universidad.

Se elaboraron mapas conceptuales de la función lineal y de la función cuadrática, se hicieron reuniones con la rectora y con los profesores del área para dar a conocer el proyecto. Nos remitimos a libros para seleccionar los talleres y modificarlos, elaborar las guías de trabajo, cuestionarios, evaluaciones, actividades de recuperación, etc.

El papel del maestro fue sobre todo de hacer reflexionar a los alumnos que deben trabajar y producir ellos mismos, ser autónomos en la búsqueda del conocimiento, dejándolos que se desempeñen solos, sin dejar de lado la orientación por parte del maestro.

REPORTE DEL PROYECTO

En la primera parte del proyecto se hizo un estudio del contexto y condiciones iniciales del Colegio Distrital La Amistad, para llegar a un acuerdo de las necesidades existentes y realizar el diseño de actividades para aplicarlas a grado décimo de educación media en las instituciones Brasilia, Miguel Antonio Caro y La Amistad. Cabe anotar, que este proyecto es asesorado por los investigadores de una empresa docente de la Universidad de los Andes, en donde todos formamos un equipo de trabajo y actuamos como tal.

El proyecto busca establecer un nuevo proceso de renovación curricular, cuyo producto aporta a la calidad del aprendizaje de las matemáticas en la educación media, utilizando como herramientas mapas conceptuales, sistemas de representación y análisis didáctico, apoyados en la tecnología.

En la segunda parte del proyecto se diseñaron, aplicaron, evaluaron y corrigieron los talleres de la función lineal o de proporcionalidad directa y de gráfica lineal; durante todo el proceso se fueron evaluando logros y dificultades de los estudiantes por medio de las explicaciones escritas de los procesos que realizaban.

En la tercera etapa, se aplicaron los talleres de la función cuadrática elaborados por los asesores del proyecto y analizados por los profesores de las tres instituciones, haciendo registro diario del desarrollo de cada taller, con comentarios en cada sesión y reportados a los investigadores, donde se comentan los diseños e implementaciones. Se evaluó el proceso y también se aplicó una evaluación unificada para los alumnos de las tres instituciones, que fue realizada por parejas y fuera del tiempo de clase, donde se hace un informe de los resultados.

En la cuarta parte del proyecto se hace un reporte escrito de todo su desarrollo, unificado para cada institución. En el cual se recopilan todas las guías, trabajos, talleres, reportes y reflexiones de los profesores.

FUNCION LINEAL

Se inició esta unidad con un taller llamado "Hacia la función de proporcionalidad directa".

La intención fue representar la función de proporcionalidad directa en forma numérica por medio de las tablas de datos, hallando valores desconocidos, estableciendo el patrón de variación de cada una de las variables y calculando la constante de proporcionalidad por medio de cocientes entre la variable dependiente y la variable independiente. Los alumnos observaron que cuando la variable independiente cambia de 1 a 2, es decir, se duplica, la variable dependiente también se duplica.

Esta función se gráfica utilizando los datos de la tabla y su representación en el plano cartesiano, destacando la constante de proporcionalidad por medio del descenso o ascenso y el avance horizontal, realizando el cociente de ($y / x = k$) y relacionando la variable x con la variable y anotando ($y = k.x$) para calcular cualquier valor e identificando la variable dependiente e independiente.

Después de realizado el taller por los alumnos se hace una puesta en común donde explican cada punto, mostrando la pendiente en la gráfica realizada, en la cual el maestro debe guiarlos por medio de preguntas, ya que solos no pueden determinarla. Se dificultó la construcción de la ecuación de la recta a partir de la gráfica, se hicieron varios intentos de solución por parte de los estudiantes y se les preguntaba si estaban de acuerdo con el alumno que estaba contestando a lo que ellos contestaban que no.

Igualmente, se les dificultó ubicar los puntos de la gráfica y llevarlos a la forma tabular, es decir, reconocer las abscisas como valor de la variable independiente y de la ordenada como valor de la variable dependiente, las confundían. Escribir la generalización, ecuación o fórmula deduciéndola de una tabla de valores y de una gráfica. También se les dificultó establecer que siendo las magnitudes directamente proporcionales, la gráfica parte del origen. Se trabajó la pendiente con más profundidad aplicando la fórmula de la pendiente (elevación / avance = delta y / delta x).

En esta Unidad correspondiente a función lineal, la innovación consiste en conectar los distintos elementos en la proporcionalidad, pasar de una representación a otra, de la verbal a la numérica, a la gráfica y a la simbólica trabajando en problemas de contexto, propuestos primero en los talleres y segundo construidos por los mismos alumnos, donde era necesario que leyeran nuevamente redactándolos mejor. Concluimos entonces, que a partir de un ejercicio muy sencillo construido por los alumnos, sobre temas como un tanto por ciento de rebaja, es posible graficar una función y distinguir la función afín de la lineal; o la realización de ejercicios como el de hallar el lado y la altura de un triángulo y la relación de proporcionalidad que se establece. En general, los procedimientos algebraicos de localización de puntos en el plano, distancia entre dos puntos, punto medio de un segmento, tangente entre dos puntos.

Las guías de "calentando motores" donde se trabaja la proporcionalidad por medio de ejemplos prácticos, se identifica la función, su dominio como el conjunto de valores que toma la variable independiente y su rango como los valores que toma la variable dependiente, teniéndolos como objeto de estudio en sus diferentes representaciones.

LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

La función cuadrática no se estudió, como es tradicional a partir de su forma simbólica $y = x^2$, se hizo en el contexto de construcción de cajas, cortando cuadrados de lado x en las esquinas de una hoja de papel de 24 cm. de largo por 20cm. de ancho; se construyeron sucesivamente por medio de talleres las funciones largo de la caja y ancho de la caja, que son funciones afines y la función área del papel desperdiciado, área del papel de la caja, área de la base de la caja, el área determinada por el largo y ancho de la caja, que son funciones cuadráticas, la capacidad de la caja que es función polinómica de grado tres.

Se analizaron primero las tablas numéricas, cómo están ordenadas en forma ascendente, descendente, la variación de cada función f(x) cuando varía x, determina los intervalos de variación los extremos superiores o inferiores y límites, la densidad de los reales positivos, las operaciones y jerarquización de las operaciones, este análisis es más cercano al estudiante, de él se deducen las expresiones a partir del trabajo de operaciones de valores que toma el dominio y el rango, para construir las funciones teniendo en cuenta que todo elemento de dominio tiene su imagen y esta es única y escribe la función simbólica $y = f(x)$ así:

Largo de la caja $f_1= -2x^2+24$ función afín
Ancho de la caja $f_2=-2x^2+20$ función afín
Area del papel desperdiciado $f_3=4x^2$ función cuadrática
Area del papel de la caja $f_4= 480-4x^2$ función cuadrática
Area de la caja determinada por el largo $f_5= 24x-2x^2$ función cuadrática
Area de la caja determinada por el ancho $f_6= 20x-2x^2$ función cuadrática
Area de la base $f_7=480-88x+4x^2$ función cuadrática
Capacidad de la caja $f_8= 4x^3 -88x^2 +480x$ función polinómica de grado tres.

Los alumnos identifican que la estructura simbólica es diferente la lineal a la afín y a la de grado tres y hace un análisis de la expresión simbólica de cada uno de sus términos para comprender qué hace que una función sea cuadrática.

Se representan gráficamente por medio de calculadoras gráficas dando una visión global de la función en el contexto específico de las cajas y en los reales; después se hace formalmente en papel milimetrado, analizando las características: el dominio como objeto de estudio, en una de sus representaciones como el segmento en el eje x, con extremos no incluidos; el rango como objeto de estudio en una de sus representaciones como un segmento del eje y sin tomar los extremos, es decir, el intervalo abierto; el intervalo de crecimiento y decrecimiento, punto máximo o punto mínimo.

El objeto matemático es la función cuadrática aunque tenga diferentes representaciones y se establezcan diferentes conexiones entre las representaciones.

Durante el proceso nos permitimos elaborar un cuestionario para cada uno de los alumnos teniendo en cuenta el primero y segundo taller de la función cuadrática porque no lograbamos interpretar lo que los alumnos estaban pensando sobre el trabajo que realizaban. Lo contestaron individualmente.

Por ejemplo, acerca de cualquier caja en donde se preguntaba si se podría construir una caja que tuviera altura w entre e y q. El estimativo teniendo en cuenta esta situación es: un grupo dijo que no porque no se concebía que pudieran construir otras cajas intermedias; otro de los grupos dijo que solamente se obtendrían otras cajas intermedias recortando o cortando el papel de la caja. Dada esta situación y según sus respuestas a este cuestionario se pudo trabajar con más eficiencia, llevándolos a aclarar sus dudas e interpretaciones. Tres grupos mostraban de manera notable su comprensión y habilidad para sacar de estos talleres el mayor provecho posible, dando respuestas un tanto acertadas y haciendo exposiciones congruentes, sabiendo para donde iban, ilustrando su exposición con tablas y gráficos.

En este momento los estudiantes hablan con propiedad y destreza frente a las diferentes situaciones, usando expresiones apropiadas. Como:

- La conjetura que yo hago a esta situación es la siguiente: Construye una tabla o un gráfico y explica lo que esta representa...
- Hablan de variación: A medida que aumenta el dominio de la función aumenta el rango.
- La función llega a un máximo, es decir crece y a partir de este decrece.
- La función es simétrica respecto a...
- La función tiene un máximo y un mínimo
- Toma valores en forma ascendente...
- La gráfica es una parábola de eje vertical

Hay avance en la terminología y vocabulario para comunicarse el estudiante en sus exposiciones y comentarios. La calculadora gráfica ha contribuido como instrumento de innovación, se puede trabajar con ellas tres sistemas de representación del objeto matemático, el gráfico, el simbólico y tabular. Son un medio de trabajo que ofrece un espacio para la experimentación y verificación del trabajo matemático, la tecnología es un catalizador del proceso didáctico pero del éxito de utilización depende del papel que juega el maestro como agente decisor y negociador y el alumno reflexionando y escribiendo lo que hace sin olvidar la conceptualización, luego la tecnología debe ser utilizada como un recurso racional para el aprendizaje de las matemáticas sin olvidar la estructura de estas.

El aprendizaje se construye socialmente en el salón de clase, el proceso entonces se vuelve más importante que los resultados, los problemas interesantes son aquellos en los que hay que experimentar, conjeturar, intentar y descubrir.

PROYECTO DE PRECÁLCULO
UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
UNA EMPRESA DOCENTE

PRESENTADO A: **CRISTINA CARULLA**

PRESENTADO POR: **MAGDALENA OLIVEROS**
CARLOTA PORRAS
ROSA ALICIA ROJAS DE COBO
Colegio La Amistad J.T

Octubre 20 del 2000

REPORTE FINAL DEL PROYECTO DE PRECÁLCULO:

FUNCIÓN LINEAL

Temas tratados en esta parte:

- Función de proporcionalidad directa, magnitudes directamente proporcionales, variable independiente y variable dependiente.
- Sistemas de representación: Expresión simbólica, representación numérica o tabular, representación gráfica y verbal.
- Pendiente y constante de proporcionalidad.
- Parejas ordenadas y puntos en un plano.
- Distancia entre dos puntos: perímetro y área de cuadriláteros, comprobar que una figura geométrica es un triángulo equilátero , paralelógramos.
- Punto medio: Corte de diagonales de cuadriláteros, corte de las medianas de los triángulos.
- Tangente como ángulo de inclinación de la recta. Rectas paralelas y perpendiculares.
- Función: Concepto, dominio e imagen, escalas, función creciente y decreciente. Máximos mínimos
- Estudio del significado de ($y = mx$). Pendiente: a) $m>0$ $m=0$ $m<0$, b) ángulo de inclinación de la recta.
- Ecuación de la recta que pasa por (0,0) dado otro punto.
- La función de gráfica lineal o afín ($y = mx+b$) de la lineal ($y = mx$) por traslación. Pendiente (delta y/ delta x). Puntos de intersección con los ejes.
- La ecuación de la recta: Que pasa por dos puntos; Dado un punto y la pendiente; Dados los intersectos.
- Sistemas de funciones lineales:
  Problemas de aplicación. Métodos de solución. Sistemas compatibles y sistemas incompatibles.

OBJETIVOS DE LA FUNCIÖN LINEAL:

NIVEL UNO

- Reconocer la función lineal en sus diferentes representaciones.
- Identificar el oficio de los parámetros m y b en las gráficas de las funciones lineal y afines (familias).
- Identificar la linealidad (aditividad y homogeneidad) como propiedad de las funciones de gráfica lineal.
- Reconocer que en las funciones lineales, el cociente entre los valores de las variables es contante.

NIVEL DOS

- Establecer conexiones entre las diferentes representaciones.

NIVEL TRES

- Modelar situaciones de la vida cotidiana, utilizando las funciones lineales y afines.
- Formular y resolver situaciones problemáticas aplicando la función de gráfica lineal.

LA FUNCIÖN CUADRÄTICA:

Temas tratados en esta parte:

- Dependencia entre variables: variable independiente e independiente.
- Representación simbólica
- Dominio y rango de las funciones características de los conjuntos. Diferencias entre la función lineal y la función cuadrática.
- Representación gráfica: elaboración, interpretación en contexto específico. Representación tabular.
- Polinomios de segundo grado con tres coeficientes reales diferentes de cero.
- Función cuadrática decreciente con coeficiente principal positivo.
- Diferencias entre la función de grado uno, grado dos y grado tres.
- Diferencias entre variación lineal, variación cuadrática y polinómica. Máximos y mínimos.

OBJETIVOS DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

NIVEL UNO
RECONOCIMIENTO DE ELEMENTOS CONCEPTUALES Y PROCEDIMENTALES

- Identificar una función cuadrática a través de la expresión simbólica, es decir, reconocer que una función descrita por un polinomio de segundo grado en una variable (o expresiones algebraicas equivalentes a este) es una función cuadrática.
- Identificar una función cuadrática a través de la gráfica cartesiana, es decir, reconocer que una parábola de eje vertical representa una función cuadrática.
- Identificar una función cuadrática a través de la tabla de datos, es decir, reconocer que los datos de una tabla se relacionan de manera cuadrática.
- Identificar y describir la manera como se establecen las variaciones de las imágenes respecto de las variaciones de las pre-imágenes, en los distintos sistemas de representación (simbólico, gráfico, tabular). Particularmente reconocer la existencia de un punto o valor numérico (máximo o mínimo) en el cual se altera un comportamiento creciente (de la variable dependiente) en uno decreciente, así como, reconocer que las variaciones no son proporcionales.
- Identificar el conjunto de los reales como dominio de toda función cuadrática, así como identificar el conjunto $[-\infty, k]$ ó $[k, \infty]$ como rango de cualquier función cuadrática.
- Identificar que la función cuadrática puede tener a lo sumo dos ceros (o raíces). Además, conectado con esto, reconocer (en las diferentes representaciones) las características que determinan el número de ceros.
- Reconocer que la función cuadrática no satisface las dos condiciones que definen la linealidad (aditividad y homogeneidad).
- Reconocimiento de la simetría como característica de algunas funciones cuadráticas. Igualmente, determinar las características que definen la existencia o no de la simetría de una función cuadrática.

NIVEL DOS
INTERPRETACION Y USO DE ELEMENTOS CONCEPTUALES Y PROCEDIMENTALES

- Transformar los polinomios de segundo grado en expresiones algebraicas equivalentes en las cuales se visualicen algunas características de la función cuadrática (v.g. la existencia del mínimo o máximo (vértice), ó, la existencia de ceros (cortes con ejes de las abscisas o coeficientes independientes de los factores lineales)).

- Transformar la expresión simbólica de una función cuadrática en una gráfica, pasando y sin pasar por una representación tabular.
- Identificar el papel que cumplen algunas características de la gráfica de una función cuadrática en las expresiones simbólicas de la misma.
- Establecer las variaciones que sufre una gráfica de una función cuadrática al hacer variaciones en los coeficientes del polinomio que la describe o en los coeficientes de los polinomios cuyo producto describe la función.
- Estimar el valor (punto o números) en el cual la función cuadrática puede tener un máximo o un mínimo.
- Predecir (extrapolar o interpolar), con relativa aproximación, los valores numéricos o puntos aplicados en una función cuadrática.

NIVEL TRES
PRODUCCION Y GENERALIZACION

- Identificar la función cuadrática como modelo de variación de algunos fenómenos físicos (v.g. la relación entre espacio y tiempo en los movimientos de caída libre).
- Establecer las operaciones entre funciones cuadráticas que producen nuevas funciones cuadráticas, atendiendo a las restricciones posibles para las mismas.

ENFOQUE METODOLÓGICO

La forma de trabajo durante el proceso de realización del proyecto por parte de los alumnos, fue en grupos de trabajo donde socializaron y sacaron conclusiones, escribieron el porqué de lo que hicieron, al igual que logros y dificultades, al finalizar cada clase.

Fue una enseñanza - aprendizaje en espiral, donde cada tema es retomado de una manera más amplia y más analítica y establece conexiones tanto con los conocimientos adquiridos anteriormente como con los diferentes sistemas de representación, de esta manera, los alumnos fueron mejorando la comunicación escrita y oral.

Se trabajaron guías elaboradas colectivamente, donde se leyó y analizó sobre la función lineal con los maestros de la misma institución; en la función cuadrática, se trabajaron talleres proporcionados por los investigadores de una empresa docente, y todo fue discutido con los profesores de las tres instituciones.

El trabajo respecto al profesor, fue en equipo y buscando en todo momento un cambio en la actitud y en la manera de realizar sus clases; hubo preparación de temas, consulta de programas y libros, se conocieron las condiciones iniciales del colegio, el "PEI, Búsqueda de hombres nuevos a través de la formación en valores y la educación en tecnología", la programación general del área, se realizaron encuestas a los estudiantes para conocer entre otras cosas que querían hacer cuando salieran del bachillerato en las cuales descubrimos que la mayoría deseaba entrar a estudiar a la universidad.

Se elaboraron mapas conceptuales de la función lineal y de la función cuadrática, se hicieron reuniones con la rectora y con los profesores del área para dar a conocer el proyecto. Nos remitimos a libros para seleccionar los talleres y modificarlos, elaborar las guías de trabajo, cuestionarios, evaluaciones, actividades de recuperación, etc.
El papel del maestro fue sobre todo de hacer reflexionar a los alumnos que deben trabajar y producir ellos mismos, ser autónomos en la búsqueda del conocimiento, dejándolos que se desempeñen solos, sin dejar de lado la orientación por parte del maestro.

REPORTE DEL PROYECTO

En la primera parte del proyecto se hizo un estudio del contexto y condiciones iniciales del Colegio Distrital La Amistad, para llegar a un acuerdo de las necesidades existentes y realizar el diseño de actividades para aplicarlas a grado décimo de educación media en las instituciones Brasilia, Miguel Antonio Caro y La Amistad. Cabe anotar, que este proyecto es asesorado por los investigadores de una empresa docente de la Universidad de los Andes, en donde todos formamos un equipo de trabajo y actuamos como tal.

El proyecto busca establecer un nuevo proceso de renovación curricular, cuyo producto aporta a la calidad del aprendizaje de las matemáticas en la educación media, utilizando como herramientas mapas conceptuales, sistemas de representación y análisis didáctico, apoyados en la tecnología.

En la segunda parte del proyecto se diseñaron, aplicaron, evaluaron y corrigieron los talleres de la función lineal o de proporcionalidad directa y de gráfica lineal; durante todo el proceso se fueron evaluando logros y dificultades de los estudiantes por medio de las explicaciones escritas de los procesos que realizaban.

En la tercera etapa, se aplicaron los talleres de la función cuadrática elaborados por los asesores del proyecto y analizados por los profesores de las tres instituciones, haciendo registro diario del desarrollo de cada taller, con comentarios en cada sesión y reportados a los investigadores, donde se comentan los diseños e implementaciones. Se evaluó el proceso y también se aplicó una evaluación unificada para los alumnos de las tres instituciones, que fue realizada por parejas y fuera del tiempo de clase, donde se hace un informe de los resultados.

En la cuarta parte del proyecto se hace un reporte escrito de todo su desarrollo, unificado para cada institución. En el cual se recopilan todas las guías, trabajos, talleres, reportes y reflexiones de los profesores.

FUNCION LINEAL

Se inició esta unidad con un taller llamado "Hacia la función de proporcionalidad directa".

La intención fue representar la función de proporcionalidad directa en forma numérica por medio de las tablas de datos, hallando valores desconocidos, estableciendo el patrón de variación de cada una de las variables y calculando la constante de proporcionalidad por medio de cocientes entre la variable dependiente y la variable independiente. Los alumnos observaron que cuando la variable independiente cambia de 1 a 2, es decir, se duplica, la variable dependiente también se duplica.

Esta función se gráfica utilizando los datos de la tabla y su representación en el plano cartesiano, destacando la constante de proporcionalidad por medio del descenso o ascenso y el avance horizontal, realizando el cociente de (y / x = k) y relacionando la variable x con la variable y anotando (y = k.x) para calcular cualquier valor e identificando la variable dependiente e independiente.

Después de realizado el taller por los alumnos se hace una puesta en común donde explican cada punto, mostrando la pendiente en la gráfica realizada, en la cual el maestro debe guiarlos por medio de preguntas, ya que solos no pueden determinarla. Se dificultó la construcción de la ecuación de la recta a partir de la gráfica, se hicieron varios intentos de solución por parte de los estudiantes y se les preguntaba si estaban de acuerdo con el alumno que estaba contestando a lo que ellos contestaban que no.

Igualmente, se les dificultó ubicar los puntos de la gráfica y llevarlos a la forma tabular, es decir, reconocer las abscisas como valor de la variable independiente y de la ordenada como valor de la variable dependiente, las confundían. Escribir la generalización, ecuación o fórmula deduciéndola de una tabla de valores y de una gráfica. También se les dificultó establecer que siendo las magnitudes directamente proporcionales, la gráfica parte del origen. Se trabajó la pendiente con más profundidad aplicando la fórmula de la pendiente (elevación / avance = delta y / delta x).

En esta Unidad correspondiente a función lineal, la innovación consiste en conectar los distintos elementos en la proporcionalidad, pasar de una representación a otra, de la verbal a la numérica, a la gráfica y a la simbólica trabajando en problemas de contexto, propuestos primero en los talleres y segundo construidos por los mismos alumnos, donde era necesario que leyeran nuevamente redactándolos mejor. Concluimos entonces, que a partir de un ejercicio muy sencillo construido por los alumnos, sobre temas como un tanto por ciento de rebaja, es posible graficar una función y distinguir la función afín de la lineal; o la realización de ejercicios como el de hallar el lado y la altura de un triángulo y la relación de proporcionalidad que se establece. En general, los procedimientos algebraicos de localización de puntos en el plano, distancia entre dos puntos, punto medio de un segmento, tangente entre dos puntos.

Las guías de "calentando motores" donde se trabaja la proporcionalidad por medio de ejemplos prácticos, se identifica la función, su dominio como el conjunto de valores que toma la variable independiente y su rango como los valores que toma la variable dependiente, teniéndolos como objeto de estudio en sus diferentes representaciones.

LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

La función cuadrática no se estudió, como es tradicional a partir de su forma simbólica $y = x^2$, se hizo en el contexto de construcción de cajas, cortando cuadrados de lado x en las esquinas de una hoja de papel de 24 cm. de largo por 20cm. de ancho; se construyeron sucesivamente por medio de talleres las funciones largo de la caja y ancho de la caja, que son funciones afines y la función área del papel desperdiciado, área del papel de la caja, área de la base de la caja, el área determinada por el largo y ancho de la caja, que son funciones cuadráticas, la capacidad de la caja que es función polinómica de grado tres.

Se analizaron primero las tablas numéricas, cómo están ordenadas en forma ascendente, descendente, la variación de cada función f(x) cuando varía x, determina los intervalos de variación los extremos superiores o inferiores y límites, la densidad de los reales positivos, las operaciones y jerarquización de las operaciones, este análisis es más cercano al estudiante, de él se deducen las expresiones a partir del trabajo de operaciones de valores que toma el dominio y el rango, para construir las funciones teniendo en cuenta que todo elemento de dominio tiene su imagen y esta es única y escribe la función simbólica $y = f(x)$ así:

Largo de la caja $f_1= -2x+24$ función afín
Ancho de la caja $f_2=-2x+20$ función afín
Area del papel desperdiciado $f_3=4x^2$ función cuadrática
Area del papel de la caja $f_4= 480-4x^2$ función cuadrática
Area de la cara determinada por el largo $f_5= 24x-2x^2$ función cuadrática
Area de la cara determinada por el ancho $f_6= 20x-2x^2$ función cuadrática
Area de la base $f_7=480-88x+4x^2$ función cuadrática
Capacidad de la caja $f_8= 4x^3 -88x^2 +480x$ función polinómica de grado tres.

Los alumnos identifican que la estructura simbólica de la función cuadrática es diferente a la lineal, a la afín y a la de grado tres y hace un análisis de la expresión simbólica de cada uno de sus términos para comprender qué hace que una función sea cuadrática.

Se representan gráficamente por medio de calculadoras gráficas dando una visión global de la función en el contexto específico de las cajas y en los reales; después se hace formalmente en papel milimetrado, analizando las características: el dominio como objeto de estudio, en una de sus representaciones como el segmento en el eje x, con extremos no incluidos; el rango como objeto de estudio en una de sus representaciones como un segmento del eje y sin tomar los extremos, es decir, el intervalo abierto intervalo cerrado ; el intervalo de crecimiento y decrecimiento, punto máximo o punto mínimo.

El objeto matemático es la función cuadrática aunque tenga diferentes representaciones y se establezcan diferentes conexiones entre las representaciones.

Durante el proceso nos permitimos elaborar un cuestionario para cada uno de los alumnos teniendo en cuenta el primero y segundo taller de la función cuadrática porque no lograbamos interpretar lo que los alumnos estaban pensando sobre el trabajo que realizaban. Lo contestaron individualmente.

Por ejemplo, acerca de cualquier caja en donde se preguntaba si se podría construir una caja que tuviera altura w entre e y q. El estimativo teniendo en cuenta esta situación es: un grupo dijo que no porque no se concebía que pudieran construir otras cajas intermedias; otro de los grupos dijo que solamente se obtendrían otras cajas intermedias recortando o cortando el papel de la caja. Dada esta situación y según sus respuestas a este cuestionario se pudo trabajar con más eficiencia, llevándolos a aclarar sus dudas e interpretaciones. Tres grupos mostraban de manera notable su comprensión y habilidad para sacar de estos talleres el mayor provecho posible, dando respuestas un tanto acertadas y haciendo exposiciones congruentes, sabiendo para donde iban, ilustrando su exposición con tablas y gráficos.

En este momento los estudiantes hablan con propiedad y destreza frente a las diferentes situaciones, usando expresiones apropiadas. Como:

- La conjetura que yo hago a esta situación es la siguiente: Construye una tabla o un gráfico y explica lo que esta representa...
- Hablan de variación: A medida que aumenta el dominio de la función aumenta el rango.
- La función llega a un máximo, es decir crece y a partir de este decrece.
- La función es simétrica respecto a...
- La función tiene un máximo y un mínimo
- Toma valores en forma ascendente...
- La gráfica es una parábola de eje vertical

Hay avance en la terminología y vocabulario para comunicarse el estudiante en sus exposiciones y comentarios. La calculadora gráfica ha contribuido como instrumento de innovación, se puede trabajar con ellas tres sistemas de representación del objeto matemático, el gráfico, el simbólico y tabular. Son un medio de trabajo que ofrece un espacio para la experimentación y verificación del trabajo matemático, la tecnología es un catalizador del proceso didáctico pero del éxito de utilización depende del papel que juega el maestro como agente decisor y negociador y el alumno reflexionando y escribiendo lo que hace sin olvidar la conceptualización, luego la tecnología debe ser utilizada como un recurso racional para el aprendizaje de las matemáticas sin olvidar la estructura de estas.

El aprendizaje se construye socialmente en el salón de clase, el proceso entonces se vuelve más importante que los resultados, los problemas interesantes son aquellos en los que hay que experimentar, conjeturar, intentar y descubrir.

ANÁLISIS INSTITUCIONAL DE LOS RESULTADOS DE LAS EVALUACIONES

LA FUNCIÓN LINEAL:

Alumnos matriculados en décimo 200, examinados 170 alumnos.

- En la primera pregunta un 60% de los alumnos afirmaban que es función lineal, hallaron la constante de proporcionalidad, por medio de la gráfica sustentaron y hallaron la ecuación un 40% decian que pasa por el punto (0,0) pero no demostraban lógicamente utilizando la constante o la pendiente o la gráfica.
- En la segunda pregunta el 50% de los alumnos acertaron , construyeron la ecuación con la pendiente punto o utilizaron la pendiente, verificando si la pendiente es la misma que daban en el problema.
- En la tercera pregunta el 60% hallaron los datos por cálculos utilizando procedimientos numéricos, mental, representación gráfica y simbólica.
- En la pregunta cuatro a la gráfica dada un 35% hicieron afirmaciones verdaderas, explicaban que era función afín porque cortaba el eje x en (2,0) y el eje y en (0,1) y también que la recta no pasa por (0,0), otros no explican el porqué de las afirmaciones.
- En la quinta pregunta, un 25% graficaron desempleo eje y versus tiempo eje x como una recta que pasa por el origen aclararon que es directamente proporcional.
- En la sexta pregunta acertaron el 16% en las explicaciones teóricas para cada trazo, decian: está consumiendo combustible, el carro está apagado,, el tanque del carro se está llenando, daban correctamente el signo de la pendiente para cada trozo de recta.

LA FUNCIÖN CUADRÄTICA:

Alumnos examinados 150.

- En la primera pregunta un 80% escribieron la expresión simbólica.
- En la segunda pregunta un 90% elaboraron tablas unos de 1 en 1, otros de 0.5 en 0.5 y otros las hicieron salteadas, muestran comprensión solo hicieron lo que pedía el punto, otros dieron simbólicamente el intervalo {y R / 0<y< 72} no dieron explicaciones.
- En la tercera pregunta el 90% escribieron la expresión pero afirman que es base por altura no escribieron de donde salió la fórmula y el 50% escribieron algunas características, el término cuadrático, no hablan de los coeficientes etc.
- En la cuarta pregunta, un 70% cogieron los valores de la función y afirman que cuando x crece de 0 a 6 la función crece de 0 a 72 para el área que corresponde a la cara que indica el largo, o de 0 a 50 el ancho ,señalan el

punto máximo, cuando x crece de 6 a 10 las funciones decrecen. no consideraron los extremos, la simetría, falta buena redacción para comunicar lo que desean manifestar.

- En la quinta pregunta el 75% realiza la gráfica cartesiana bien el 25 % la realiza mal , El 60% escribe las características, que cuando x crece de 0 a 6 la función crece de 0 a 72 y cuando x crece de 6 a 10 la función decrece de 72 a 0.
- Para la sexta pregunta el 80% hicieron las tablas de valores para x de 1 en 1, otros de 0.5 en 0.5. Restaron las alturas consecutivas y restaron sus respectivas áreas y un 25% afirmaron que las diferencias de las áreas no son iguales a las diferencias de las alturas. Un 75% no dieron explicaciones. Otros afirmaron que hay dos áreas iguales para dos alturas distintas y dieron ejemplos para sustentar la afirmación.

En la evaluación de la función lineal se hizo en forma individual, con tiempo limitado, la pregunta da para que haya libertad en el análisis.
En la evaluación de la función cuadrática, se hizo por parejas, con un tiempo amplio, donde pueden utilizar recursos de consulta, hay libertad para contestar de diferente forma.

CONCLUSIONES:

Los alumnos al comienzo se les dificultaba escribir el proceso que realizaban o el porqué de las afirmaciones,, ya se les facilita explicar lo que hacen en cada una de las actividades sin necesidad que el maestro les diga que lo hagan.
El trabajo fue realizándose en espiral primero globalmente y luego profundizando, haciendo conexiones con las diferentes representaciones de las funciones y con los conocimientos que tienen y que van adquiriendo.
En general la innovación es el trabajo reflexionado, el estudiante se está retroalimentando, el trabajo en equipo facilita la labor del profesor, hay más conocimiento del alumno, el conocimiento es más significativo dedican párrafos a hacer argumentaciones.
Una dificultad es la cultura tienen intereses distintos , fallan en las tareas, en los trabajos , algunos esperan que los otros los realicen primero para luego copiarlos.
Sin embargo hay alumnos que afirman que haciendo y descubriendo es como aprenden.

ANALISIS DE LOS RESULTADOS DE LA EVALUACION DE LA FUNCION LINEAL

EL CURSO 10.1 CUENTA CON 40 ALUMNOS MATRICULADOS, DE LOS CUALES 30 ASISTIERON A LA PRUEBA Y 10 NO LA PRESENTARON.

1. ANALISIS DE SOLUCION DE PREGUNTAS

- PRIMERA PREGUNTA: El 73% de los alumnos contestó bien una o más representaciones de la función lineal; el 20% contestó mal y el 6.6% no contestó.
- SEGUNDA PREGUNTA: El 33.3% de los alumnos contestó bien; el 63.3% contestó mal y el 3.3% no contestó.
- TERCERA PREGUNTA: El 33.3% de los alumnos contestó bien; el 63.3% alumnos contestó mal y el 3.3% no contestó.
- CUARTA PREGUNTA: El 33.3% de los alumnos contestó bien; el 60% contestó mal y el 6.6% no contestó.
- QUINTA PREGUNTA: El 56% de los alumnos contestó bien; el 36% contestó mal y el 6.6% no contestó.
- SEXTA PREGUNTA: El 23% de los alumnos contestó bien; el 36% contestó mal y el 40% no contestó.

2. ANALISIS DE LOS RESULTADOS DEL CURSO

- El 10% de los alumnos contestó bien todas las preguntas, obteniendo la calificación excelente.
- El 20% de los alumnos contestó cuatro preguntas acertadamente, obteniendo la calificación bueno.
- El 20% de los alumnos contestó tres preguntas acertadamente, obteniendo la calificación regular.
- El 40% de los alumnos contestó una o dos preguntas acertadamente, obteniendo la calificación insificiente.
- El 6.6% de los alumnos no acertó ninguna respuesta, obteniendo la calificación insuficiente.

3. ANALISIS DE RESULTADOS Y LOGROS ALCANZADOS

Comparando el resultado de ésta evaluación con el obtenido en el primer período por los alumnos, encontramos lo siguiente:

- Los alumnos que alcanzaron los logros en el primer período fueron los que obtuvieron las valoraciones regular, bueno y excelente.
- Uno de los alumnos que no acertó ninguna respuesta tampoco alcanzó los logros del primer período, mientras que el otro, sí consiguió obtener todos los logros del primer período.
- Del 40% de alumnos que tuvieron una o dos respuestas acertadas, 9 alcanzaron todos los logros del primer período, 1 alumno alcanzó un logro y los otros 2 no obtuvieron ninguno.

4. POSIBLES CAUSAS DE LOS RESULTADOS

- Dos alumnos consideran que la explicación debe ser más clara.
- Algunos alumnos opinan que los ejercicios parecidos confunden lo aprendido.
- Seis alumnos llegan tarde a clase, ya que están realizando por convenio un curso en el SENA sobre tecnología.
- Algunos alumnos no realizan consultas y ejercicios de tarea por falta de libros, ya que la política de la Secretaría de Educación, prohíbe que los lleven a sus casas.
- La lectura adicional de libros de matemáticas, es casi inexistente.

5. ESTRATEGIAS

- Diseñar actividades donde el alumno pueda participar activamente y resolver sus dudas.
- Realizar trabajos de recuperación.
- Hacer una nueva evaluación escrita.
- Permitir que los alumnos propongan un problema sobre proporcionalidad, le den solución, lo sustenten, luego que el maestro lo corrija si es del caso y que sea archivado en carpetas por el estudiante.

ANALISIS DE LOS RESULTADOS DE LA EVALUACION DE LA FUNCION LINEAL

EN CURSO 10.2 ASISTIERON A LA PRUEBA 33 ESTUDIANTES, A LOS CUALES SE LES ENTREGO LA EVALUACION INDIVIDUALMENTE Y SU DESARROLLO FUE SUPERVISDO POR DOS PROFESORES LUEGO DE DARLES LAS INDICACIONES PERTINENTES.

SE PERSIVIA QUE LOS ALUMNOS ESTABAN TRANQUILOS. AL PASAR POR CADA UNO DE LOS PUESTOS, OBSERVE QUE DOS DE LOS ESTUDIANTES NO SABIAN COMO EMPEZAR. EL TIEMPO FUE CORTO PARA PODER TERMINAR LA EVALUACION YA QUE EL PROFESOR QUE SE HABIA COMPROMETIDO LLEGO TARDE, POR LO CUAL SE LES QUEDARON UNO O DOS PUNTOS POR RESOLVER, CON LA CONSECUENTE INSATISFACCION DE LA MAYORIA DE LOS ALUMNOS.

- 11 ESTUDIANTES CONTESTARON LAS SEIS PREGUNTAS.
- 16 ESTUDIANTES CONTESTARON CINCO PREGUNTAS.
- 6 ESTUDIANTES CONTESTARON CUATRO Y TRES PREGUNTAS, DE LOS CUALES ALGUNOS NO ENTENDIERON VARIAS PREGUNTAS.

ANALISIS:

LOS PRIMEROS ONCE ESTUDIANTES MOSTRARON HABILIDAD EN SUS RESPUESTAS Y FUERON CAPACES DE EXPRESAR SUS CONOCIMIENTOS CON EFICIENCIA. A PESAR DE LAS LIMITACIONES EN SU COMPRENSION, EN LOS PUNTOS 1,2 Y 3 LA SOLUCION FUE SATISFACTORIA. MIENTRAS QUE EN LOS PUNTOS 4 Y 5 NO.

SE OBSERVO BASTANTE DEFICIENCIA EN LOS 6 ALUMNOS RESTANTES, DEMOSTRANDOSE QUE SABIAN POCO DEL TEMA, AUNQUE ARGUMENTARO QUE FUE FALTA DE TIEMPO.

CONSIDERO QUE SI HUBO AVANCE EN LA COMPRENSION DE LOS TEMAS TENIENDO EN CUENTA QUE PARA ELLOS FUE UN POCO DURO EL CAMBIO DE METODOLOGIA. TENIENDO QUE PENSAR CON PROFUNDIDAD, ANALIZAR, DESCUBRIR Y CONSULTAR EL SIGNIFICADO DE LO QUE NO ENTENDIAN. PRODUCIR, NO SOLO ERAN ALGORITMOS.

POCO A POCO ELLOS FUERON ENTENDIENDO QUE HACIENDO Y DESCUBRIENDO, ERA MAS FACIL APRENDER. AL PRINCIPIO SE PRESENTO CONTROVERSIA, LOS MUCHACHOS PEDIAN QUE SE EXPLICARA TODO EN EL TABLERO PORQUE NO ENTENDIAN NADA. DE ESTA MANERA DESCUBRIERON QUE ERA NECESARIO PENSAR.

Descripción del Contexto y Condiciones Iniciales.

INNOVACIÓN CURRICULAR EN PRECÁLCULO Y TECNOLOGIA

ELABORADO POR: HERMANA CARLOTA PORRAS
ROSA ALICIA ROJAS DE COBO
MAGDALENA OLIVEROS

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
UNA EMPRESA DOCENTE
SANTAFÉ DE BOGOTÁ , 27 DE OCTUBRE DE 1999.

DESCRIPCIÓN DEL CONTEXTO Y CONDICIONES INICIALES

INTRODUCCIÓN:

Este trabajo contiene el contexto y las condiciones iniciales del colegio Distrital La Amistad Jornada Tarde. Su propósito es darlo a conocer a las Instituciones Brasilia y Miguel Antonio Caro para llegar a un acuerdo de las necesidades existentes y realizar en conjunto 9 diseños de actividades para Precálculo (Algebra y Trigonometría) y aplicarlas en grado décimo de educación media en nuestros respectivos colegios. Como parte del proyecto para establecer un nuevo proceso de renovación curricular cuyo producto pueda aportar a la calidad de la enseñanza aprendizaje de las matemáticas en la educación media, utilizando como herramientas mapas conceptuales, sistemas de representación y análisis didáctico.

EL CONTEXTO:

El colegio Distrital La Amistad esta situado en la Kra 75B N 35-21 Sur, en el barrio Kennedy, localidad 8, al suroccidente de Bogotá. Se encuentra rodeado de entidades bancarias(Davivienda, Conavi, BCH, Uconal etc), y comerciales (LEY, Cafam, etc.) , Supermercados, Comercio informal, y un HOSPITAL de primer nivel .

LA LOCALIDAD 8

Se encuentra ubicada al suroccidente y abarca un área de 3.785 hectáreas. Limita al oriente con la avenida 68, por el norte con los ríos Bogotá y Fucha, por el sur con la autopista sur y el río Tunjuelito y por el occidente con Bosa.

Según el DAPD, la estratificación porcentual de la población queda así:
Estrato 1 0.8%
Estrato 2 47.1%
Estrato 3 40%
Estrato 4 12.1%

El uso principal del suelo es residencial, con densidad media y alta vivienda. La localidad cuenta con más de 250 barrios divididos en comités sectoriales, lo cual permite localizar y sectorizar programas de desarrollo. Allí se configuran 8 sectores:

1.Centro kennedy
2. Gran Britalia
3. Patio Bonito
4. Américas
5. Timiza
6. Nueva Delicias
7. Perpetuo Socorro
8. Patio Bonito II

En cuanto a la actividad económica, Kennedy se puede catalogar como una zona comercial ya que del total de establecimientos ubicados en la localidad, el 67% corresponde a comercio, mientras la industria tiene una participación del 12%.Devido al acelerado proceso de urbanización, la ronda del río Bogotá se ha visto invadida por asentamientos subnormales convirtiéndola e una zona de alto riesgo ya que su ocupación impide el proceso de drenaje constituyéndose en área fácilmente inundable.

En la localidad también existen chucuas o pantanos que le imprimen un carácter especial a la zona, además de representar un recurso ambiental valioso. Sobre éstos cuerpos existen presiones de los urbanizadores piratas, que han venido rellenando y contaminando estas áreas con residuos líquidos y sólidos. Dentro de las chucuas más importantes de la localidad se encuentran las del Burro y la Vaca, esta última ocupada por el asentamiento urbano denominado El Amparo.
En la actualidad, la localidad cuenta con 62 urbanizaciones de hecho o barrios subnormales que carecen de servicios públicos básicos, de equipamiento comunitario y de áreas verdes.
En cuanto a población la proyección para el año 2000 es de 649.816 habitantes. (1)

LA INSTITUCION.

El colegio Distrital La Amistad es una institución oficial. Con tres jornadas, capacidad para 1.300 alumnos(as) en cada jornada. Niveles de Educación Básica, Secundaria y media. Es una institución que siempre está en vía de cambios profundos y transformaciones.

LA HISTORIA.

Durante la alcaldía de Carlos Albán Holguín, en 1971 nace el Colegio Distrital la Amistad en la sección nocturna. El decreto 1511 de 1972 certificó su creación y abrió la creación de las jornadas de la mañana y la tarde, que contaban con el mismo rector fundador Francisco Jiménez Ramirez, cada jornada tenía un vice-rector y coordinador de disciplina. En 1976, de conformidad con la evaluación presentada por los inspectores del Ministerio de Educación Nacional se aprueban los cursos 6 a 9, posteriormente grados 10 y 11, declarándose el colegio La Amistad como un plantel oficial, mixto y de propiedad del Distrito Especial de Bogotá.

En 1983, el colegio quedó con tres jornadas su respectivo rector: Víctor González, jornada de la mañana, Yolanda Orozco, jornada de la tarde y Francisco Jiménez Ramírez de la jornada nocturna. Desde 1983 dirige la sección de la tarde la licenciada Francia Elena Castrillón Cordovés quién aumentó el número de cursos de 20 a 32, con los cuales cuenta en la actualidad, 1300 estudiantes, dos coordinadores, 65 profesores de tiempo completo, tres orientadoras, personal de vigilancia, personal administrativo de servicios generales y asociación de padres de familia.

LA VISION

La visión del colegio al año 2.006 y teniendo en cuenta la filosofía sobre la que se construye se establece tomando como referencia el siguiente lema: Ofrecer a la comunidad sin menoscabo de la autonomía, una institución donde se abren, sin temor ni prejuicios, los espacios para la innovación por parte de todos sus miembros".

Será una institución donde:

- Se marche acorde con las exigencias del cambio y que se ven reflejados en el progreso social.
- Se haga del currículo el más valioso recurso para la formación de competencias en la más amplia gama del saber, es decir, generar innovaciones educativas y pedagógicas que permitan establecer un currículo pertinente para la institución, con proyección local y nacional. Educar a niños y niñas en la vida y para la vida, es decir, educarlos y educarlas en el manejo de principios y valores inherentes a la ciencia y la tecnología y la formación en valores como preparación para el mundo del trabajo.
- Hacer de la participación democrática una necesidad y un fin, manifestada en los procesos flexibles y abiertos a la innovación.

LA MISION

Fortalecer la educación en Tecnología en el nivel básico a través de la incorporación del componente tecnológico en todos y cada uno de los programas curriculares que conforman el plan de estudios.

Plantear, diseñar y cualificar una propuesta curricular dinámica y flexible para la educación media técnica en la cual no se propenda por una formación puntual para el oficio sino que éste nivel educativo sea un espacio para incorporar como objetos de estudios los problemas de la tecnología.

PRINCIPIOS INSTITUCIONALES.

- Hay que sembrar para cosechar. En el colegio no vendemos frutos únicamente vendemos semillas.
- La Amistad manifestada en la alegría, la solidaridad, la ilusión, la sabiduría y la proyección de vida.
- La afectividad y la ternura en la vida personal y en las relaciones humanas, base y fundamento para la convivencia social exitosa.
- El actuar comunicativamente, que no solo pretende comprensibilidad y verdad sino veracidad y rectitud.

- La estructura epistemológica del aprendizaje centrada en la comunidad, que puede organizar las condiciones para aprender y generar procesos de reflexión acción voluntario que encierre las experiencias personales y el conocimiento escolar.
- La concepción moderna, objetiva y universal de la ciencia y la tecnología como medios pacíficos al servicio de la humanidad. (Albert Einstein).

PROYECTO EDUCATIVO INSTITUCIONAL

Toda la comunidad trabaja sistemáticamente para el beneficio del estudiante como centro. Se hace énfasis en la formación integral. Se forma a los estudiantes en la vida y para la vida incrementando fuertemente el aspecto de valores y principios fundamentales, la Ciencia, la Tecnología como preparación al cambio.

Lema: Búsqueda de hombres nuevos a través de la formación en valores y la Educación en Tecnología.

El proceso Educativo desarrollado en el colegio debe salirse del transmisionismo repetitivo. El proceso Educativo debe centrarse en el estudio de los problemas objeto de indagación y reflexión, hacia la comprensión y explicación de artefactos, procedimientos y sistemas Tecnológicos

LA ORGANIZACIÓN

El consejo directivo común.
El consejo directivo de la tarde.
El consejo Académico.
Jefes de área y jefes de grado.
Comisión de Evaluación
Comisión de promoción
El consejo Estudiantil
Las asambleas de maestros.
La asociación de padres de familia.
Dinamizador de Tecnología
Crem.
La Rectora: Francia Elena Castrillón Cordovés, quien tiene total confianza en sus docentes.
Los docentes quienes tienen total autonomía en el aula de clase. De tal manera que pueden innovar, crear, según su área.
El personero, quién promueve el ejercicio de los derechos y deberes de los estudiantes. Trabaja según la Constitución política del 91, la Ley general de Educación y decretos reglamentarios del 94, la ley 30 del 86, el Código del menor del 89, la Ley 200 del 95, El estatuto Docente, El manual de Convivencia, El manual de funciones y procedimientos.

La institución tiene convenio con seis escuelas de Básica Primaria, con La Universidad Distrital Francisco José de Caldas, La Universidad Monserrate, La Universidad de los Andes (Una Empresa Docente).

LOS PROFESORES

Los profesores son nombrados, por concurso, por la Secretaría de Educación del Distrito. Cuando un profesor ingresa por primera vez al colegio se presenta al rector, luego al coordinador académico quién asigna el horario respectivo. Si el profesor es por ejemplo de Matemáticas, el jefe de área lo presenta a los colegas y a los alumnos y comienza a dictar clase. Anteriormente los programas oficiales del ministerio contenían todos los contenidos, metodología, recursos posibles, intensidad horaria. El Ministerio de Educación proporcionaba este material, las editoriales lo obsequiaban a los profesores, junto con textos escolares. Se supone entonces que el profesor es un profesional que conoce su labor y no se le hace entonces mayores recomendaciones metodológicas. Existen evaluaciones institucionales anuales que permiten la permanencia o no del docente en el establecimiento.

Naturalmente a solicitud de necesidades personales y posibilidad de cupo puede trasladarse a otro establecimiento.
Hay un grupo de docentes, el 25 % que trabajan en las dos jornadas.

El colegio ha ido capacitando docentes sobre Tecnología y su meta es capacitar a todos los docentes de la Institución para alcanzar la comprensión, uso y aplicación de la tecnología para satisfacción de las necesidades individuales y sociales.
Vemos la educación en tecnología como un elemento que nos permite plantear nuevas formas de trabajo, en las cuales se ve como la acción unida al conocimiento da buenos resultados en el aprendizaje.
La filosofía en la educación en tecnología, permite comprender la interdisciplinariedad en el desarrollo curricular.
Fortalece el trabajo en equipo motivando a los grupos a buscar formas alternas para facilitar el aprendizaje y hacerlo más agradable.

LOS ESTUDIANTES.

Son jóvenes que están entre los 10 y 11años hasta los 16 y 17 años. Son buenos, responsables, detallistas, unidos, a todos le importa el grupo al que pertenecen y quieren quedar bien con él . Son alegres les gusta la música de moda, y tratan de imitar al cantante de turno. En ocasiones su lenguaje es fuerte para tratarse entre ellos, o referirse a los profesores.
El sistema de evaluación por logros no lo han interiorizado suficientemente y aveces caen en el facilismo porque piensan que luego pueden recuperar los logros pendientes y no se esfuerzan.

Son solidarios con sus profesores y con las personas que tienen dificultades.
Ingresan al colegio por convenio. El colegio tiene convenio con seis escuelas de Básica Primaria: Patio Bonito, Las Palmeras, Isabel II, ... Presentan examen de admisión y entrevista, seleccionándose los de mejor rendimiento académico y asistencia de los padres a la entrevista.

Otros cupos se llenan con el visto bueno del rector y llenar estos requisitos.
La pertenencia del estudiante al colegio depende del sistema sociocultural específico en el que se desempeña. El comportamiento del individuo no es fruto de la incidencia que sobre él tengan determinados estímulos, sino de la asimilación e integración de unos modelos normativos, lingüísticos y valorativos propios de un sistema socio cultural concreto. La ocupación del tiempo libre por parte del estudiante influye sobre su afectividad, rendimiento académico y convivencia en el colegio.

LOS CONOCIMIENTOS:

Se ubican en la dimensión cultural y conceptual.

La epistemología, la historia de las matemáticas, las propias ramas de las matemáticas como campos diversificados de conocimientos permiten conocer las cuestiones de fundamentación, metodología, estructura interna, evolución histórica y estado actual del conocimiento en las diferentes materias matemáticas.

El conocimiento de las regularidades del desarrollo evolutivo, las leyes que rigen el aprendizaje y los procesos cognoscitivos en los seres humanos lo establece la Psicología y es una fuente de informacion imprescindible en la fundamentación del currículo.

La pedagogía recoge la fundamentación teórica sobre educación y la organización de la experiencia acumulada en la práctica docente. Finalmente, la sociología de la educación, explica e interpreta las demandas sociales y culturales acerca del sistema educativo, los conocimientos, procedimientos, normas y valores que contribuyen al proceso de socialización de los escolares, la asimilación de los valores sociales y del patrimonio cultural de la sociedad.

En la institución en el área de matemáticas, los conocimientos se imparten de forma procedimental, la forma creativa no es generalizada, en un 25 % de ocasiones se da sentido a su entorno en los temas de variación de proporcionalidad, uso racional de los servicios públicos, la educación matemática debe ser democrática para todos con igualdad de oportunidades tanto para niños y niñas.

Se trabaja formulación y solución de problemas sencillos; pocas veces en forma compleja que signifique reto, dado más a lo que el maestro pretende que le contesten, a que el alumno caiga en desequilibrio de su saber.

Los alumnos reconocen el valor de la matemática para ellos: ayuda a descifrar códigos, las variables que entran en una operación, influyen en el modo de pensar y en las experiencias vitales, son un instrumento fundamental para el análisis y comprensión de las demás ramas del saber; no deben ser teóricas sino con ejercicios y problemas para ir desarrollando todos los conocimientos para que a todos los estudiantes les guste estudiar matemáticas.

Dice otro alumno: "yo creo que nosotros podemos aprender de muchas maneras, la más indispensable por medio del colegio, ya que en esta institución se ven unos profesores muy tiernos con nosotros, otros en cambio no, me gusta el Algebra por eso sueño en ser un gran matemático o un arquitecto".

También afirman: "A los estudiantes se les dificulta el Algebra porque hay que hacer mucho proceso y se ponen a hablar o que ya lo saben y no hacen nada, pero en realidad si le pusieran atención a la clase entenderían".

LOS LOGROS

Los profesores de cada área se reúnen por grados, analizan y formulan competencias y logros fundamentales del año, por consenso se seleccionan unos logros y son éstos los que se buscan alcanzar en el período, a cada logro se le sus n indicadores, esto lo conoce el estudiante con anticipación.

EL CONTENIDO

Los contenidos se ubican en la dimensión cultural y conceptual en el currículo.
En el colegio los contenidos se organizan anualmente por grados, teniendo en cuenta aquellos fundamentales y que por algún motivo no se trataron.
Para este año de todos los grados se elaboró un mapa conceptual que dejan ver la estructura y complejidad de los contenidos.

LA METODOLOGIA

Se ubica en la dimensión ética y formativa del currículo.
Para enseñar un tema se hace un sondeo para indagar lo que el alumno sabe sobre él. Se les da unas preguntas para que consulten. Se revisa el trabajo, más del 50% no hacen este trabajo previo.

Se procede a explicar el tema magistralmente haciendo realizar a los estudiantes unos ejercicios modelo y otros de discusión.
Se procura que los estudiantes que entiendan mejor se relacionen con los que tienen dificultades. El maestro da explicaciones individuales y en grupo.
Para la siguiente clase se les lleva una guía de ejercicios y se resuelven explicando en el tablero. Si es posible se les pide a los estudiantes que construyan un ejercicio como los vistos en clase.
En el proceso se evalúan algunos estudiantes, su participación, respuestas acertadas, orden y disciplina, pero para todos se hace una evaluación escrita, con 1 a 5 ejercicios, donde pocas veces se les pide que construyan un ejercicio.
De acuerdo con el rendimiento y participación se modifica el trabajo con los alumnos.
En ocasiones se hacen puestas en común para intercambiar explicaciones.

LA EVALUACION

Cuando la evaluación es numérica se tenía en cuenta la cantidad de conocimiento – información – que reportaba el alumno. Es decir, el saber era el foco lumínico alrededor desde el cual giraba el proceso educativo, el cual daba resultado en una sociedad honesta .

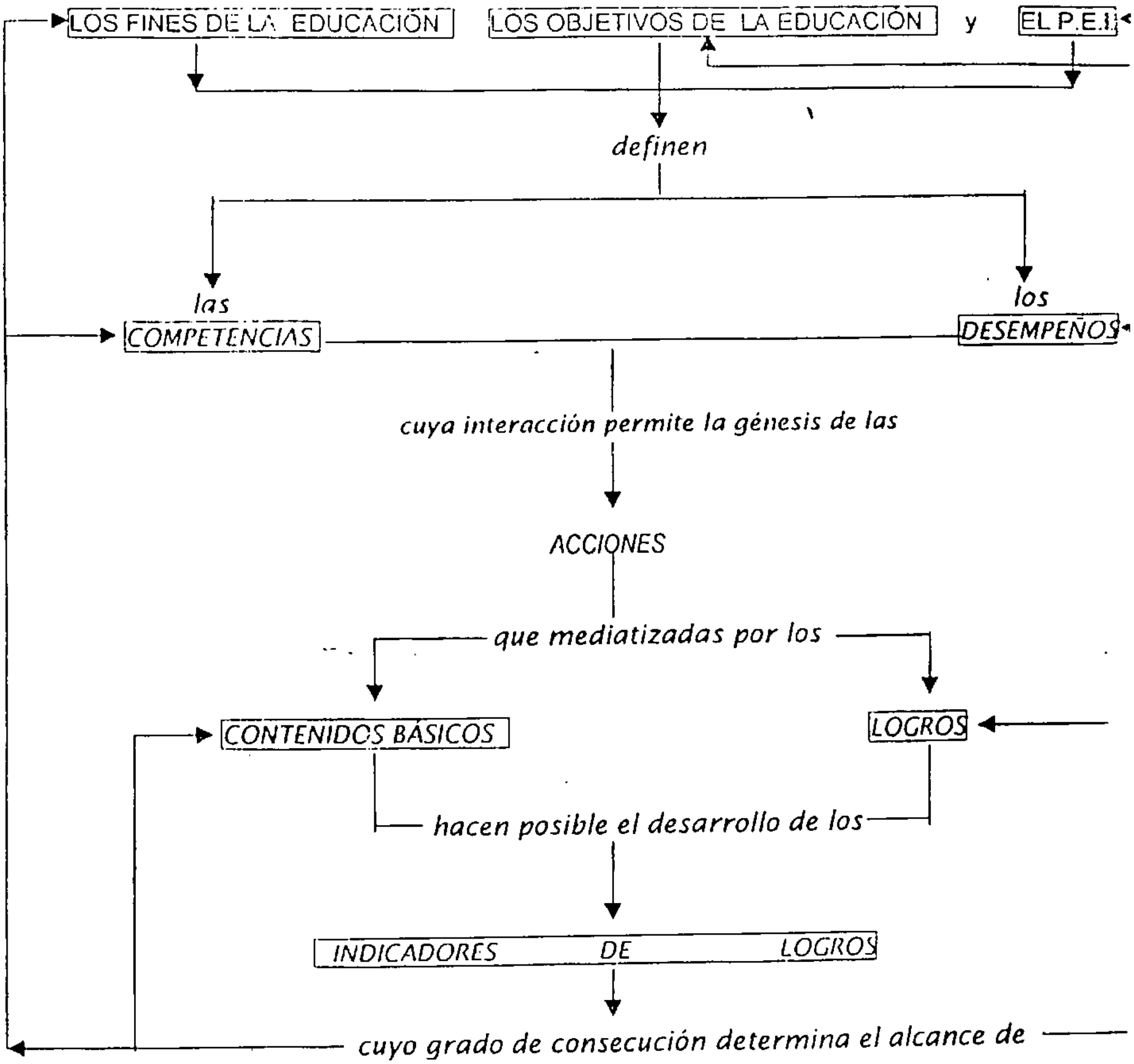
La crisis del dinero fácil, movió los cimientos de una sociedad, cuyas consecuencias llegaron a la educación, en donde después de observar organizaciones educativas extranjeras, se empezó a gestar un profundo cambio, empezando por la ley. En el estudio hecho se descubrió que la tendencia educativa era tomar al individuo como un foco de educación, para lo cual se plantearon cambios de raíz que luego se concretaron en la ley general de Educación. Uno de los aspectos que más se discutió fue el cambio que se daría a la evaluación educativa. Se proponía el énfasis en los contenidos y abandonar una educación cuya evaluación solo apuntaba a una pequeñísima parte del ser humano: su intelecto. La crisis había mostrado que teníamos excelentes profesores pero malas personas en todos los ámbitos de la vida nacional.
El cambio pretendía hacer mejores personas e intelectuales competentes a través de un cambio muy severo en el sistema educativo. Entonces se plantea un cambio `por el ritmo de aprendizaje, el valorar los avances individuales, el respeto por las diferentes formas de aprendizaje, el valorar los avances individuales, las diferencias entre adquisición y aprendizaje y otros aspectos que apuntan a la individualidad del estudiante.
Con este precedente, la desaparición de los números en la calificación parecía lógica pues era muy difícil y subjetivo contemplar ciertos procesos con cifras.
La llegada de los logros como escaños a pasos de un proceso, fue una ayuda a esa nueva visión. La problemática surge cuando lo internacionaliza el alumno y el profesor. El cambio resulta abrupto para los integrantes del proceso educativo. Cada uno lo toma con unos ojos diferentes. Mientras el maestro se aproxima a toda la teoría que justifica la aparición de los logros, el alumno recibe con complacencia aunque no entendiendo completamente el nuevo sistema de evaluación.

La evaluación se realiza durante el proceso del aprendizaje, al finalizar el periodo con actividades especiales de recuperación y profundización, luego al finalizar el año escolar para dar el juicio valorativo de la asignatura.

En matemáticas se evalúa por procesos cuando valora el conjunto de operaciones hechas por el alumno al resolver un problema y no únicamente el resultado. Este tipo de evaluación se implementa en un 50% en el colegio.

COLEGIO DISTRITAL "LA AMISTAD". J. TARDE.

HACIA UN MODELO DE PROCESOS ESCOLARES.



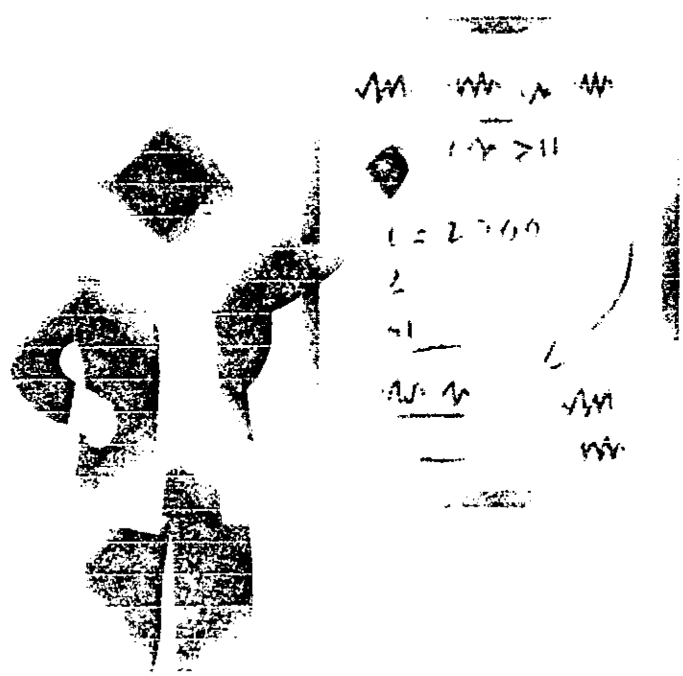
Elaboró: Gregorio D. Díaz V. Coordinador Académico J. tarde Feb. 1999.

Función Lineal y Afín.

INDICE

FUNCIONES LINEALES AFINES

FUNCIÓN LINEAL Y AFÍN



Objetivos Función Lineal

Nivel 1

- Reconocer la función lineal en sus diferentes representaciones.
- Identificar el oficio de los parámetros m y b en las gráficas de las funciones lineal y fin. (familias).
- Identificar la linealidad (aditividad y homogeneidad) como propiedad de las funciones de gráfica lineal.
- Reconocer que en las funciones lineales el cociente entre los valores de las variables es constante.

Nivel 2

- Establecer conexiones entre las diferentes representaciones.

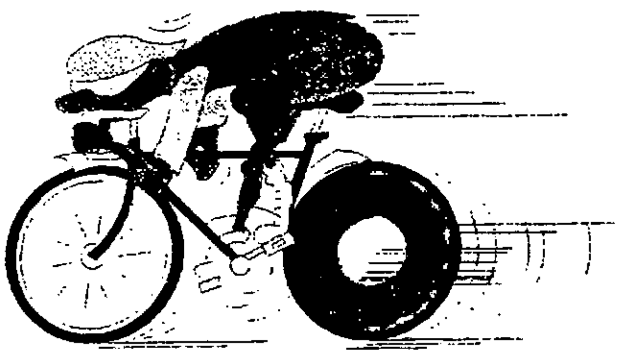
Nivel 3

- Modelar situaciones de la vida cotidiana utilizando las funciones lineales y afín.
- Formular y resolver situaciones problémicas aplicando la función de gráfica lineal.

HACIA LA FUNCION DE PROPORCIONALIDAD DIRECTA

1. Un entrenador tan sólo registró los siguientes datos durante un entrenamiento de ciclismo de uno de sus pupilos, quien mantuvo el mismo ritmo de carrera.

Nº de Vueltas	Tiempo minutos.
3	12
	20
7	
	36
35	



a. Ayúdele a completar la tabla. Explique cómo lo hace.

2. Los registros tomados por el entrenador para otro pupilo quien también mantuvo el mismo ritmo de carrera son :

Nº de Vueltas	Tiempo minutos
2	3
4	6
6	9
10	15

a. ¿Cuántos minutos gasta para dar cinco vueltas ?. Explique su respuesta.

b. ¿ En doce minutos cuántas vueltas ha dado ?. Explique su respuesta.

c: Con sólo los datos de la tabla calcule: ¿Cuánto tiempo gastaría en recorrer veinticuatro vueltas ?. Explique su respuesta.

3. De la tabla, establezca una expresión que permita calcular un valor cualquiera de la segunda columna a partir de su correspondiente valor, en la primera

N° de Fotocopias	Costo $
3	75
6	150
9	225
12	300

4. Dos empresas de telefonía celular "Celullama" y "Celurápida" ofrecen al cliente el precio de las llamadas (hasta tres minutos) según las siguientes tablas:

"Celullama"

N° de llamadas	Precio $
0	6000
5	9000
10	12000
15	15000
25	21000

"Celurápida"

N° de llamadas	Precio $
1	800
5	4000
10	8000
15	12000
25	20000

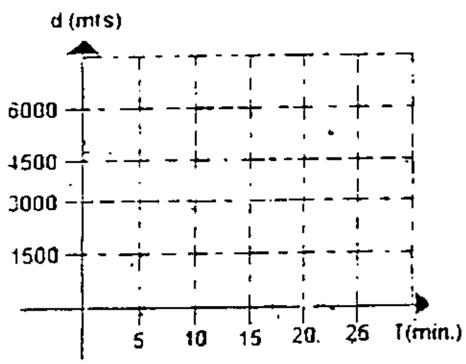
a. Establezca una expresión que permita calcular en cada una de las tablas, el precio en pesos para cualquier número de llamadas.

b. Si el número de llamadas que hace un usuario al mes es de 150, ¿cuál de las dos empresas le traería más beneficio ?.

1. La tabla muestra el tiempo que gasta y la correspondiente distancia recorrida por un atleta que conserva siempre el mismo ritmo de carrera.

Tiempo minutos	Distancia metros
5	1500
10	3000
15	4500
20	6000

a. En el diagrama cartesiano marque un punto para cada tiempo y su distancia correspondiente según la información dada por la tabla.



b. ¿ Cómo están ubicados los puntos ?

c. ¿Qué representa la gráfica?

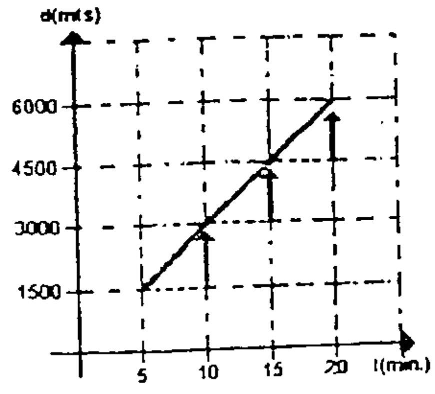
d. Utilizando solamente la gráfica calcule, aproximadamente, la distancia recorrida por el atleta a los 12 minutos.

e. ¿Cuánto tiempo ha gastado si ha recorrido 5000 mts ?

f. ¿ Cuántos metros recorre en 40 minutos ? Explique su respuesta.

4

2. En la gráfica :



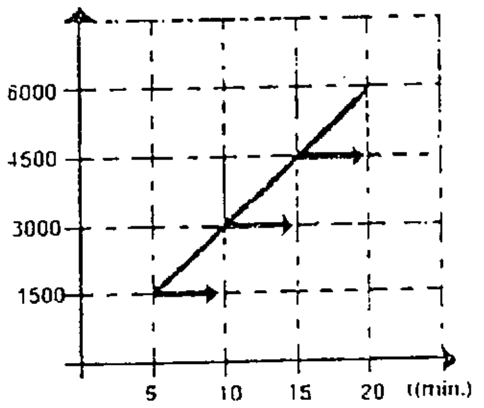
a. Cuando el tiempo aumenta de cinco a diez minutos, ¿cuánto aumenta la distancia ?

b. Cuando el tiempo aumenta de diez a quince minutos,¿ cuánto aumenta la distancia ?

c. Si el tiempo aumenta de treinta a treinta y cinco minutos,¿ el aumento de la distancia será el mismo que el de a y b ?. ¿Por qué ?.

d. En esta gráfica cuando el tiempo aumenta cantidades iguales, ¿ qué le sucede a la distancia ?.

3.



a. Si la distancia aumenta cantidades iguales ¿Qué le sucede al tiempo ? ¿Su aumento es constante ?

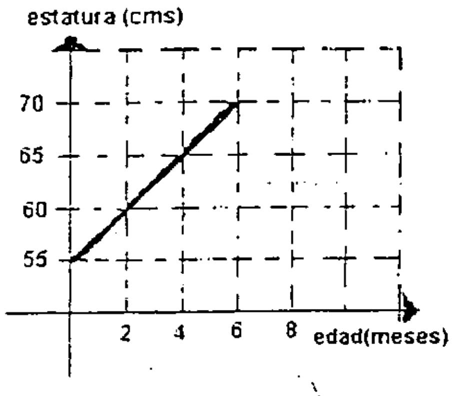
b. Calcule el cociente (razón) entre el aumento de la distancia y el aumento del tiempo.

c. Calcule la razón entre cada par de valores correspondientes.

d..Prolongue la gráfica: ¿qué información adicional se obtiene ?

e. Teniendo en cuenta tanto la tabla de la pregunta 1 (página 1) como la gráfica de la pregunta 3 (página 2) escriba una expresión que permita calcular la distancia recorrida

4. La siguiente gráfica representa la relación entre la estatura y la edad de un niño.



a. ¿Cuándo el tiempo aumenta cantidades iguales qué le sucede a la estatura ?

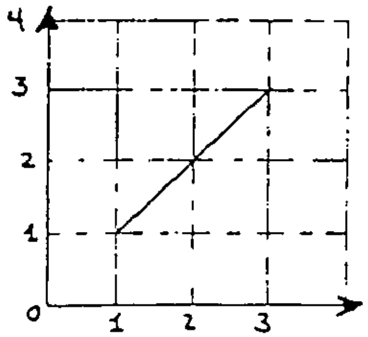
b. Calcule la razón entre el aumento de estatura y el aumento del tiempo.

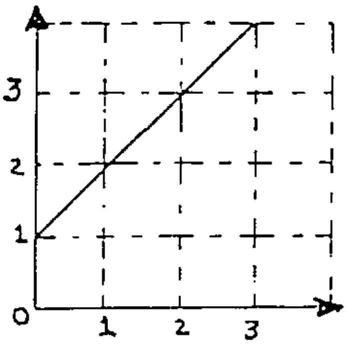
c. Calcule la razón entre cada estatura y su correspondiente edad.

d. A partir de la gráfica elabore la tabla.

e. Teniendo en cuenta tanto la tabla como la gráfica escriba una expresión que permita calcular la estatura para cualquier edad.

5. En las siguientes gráficas :

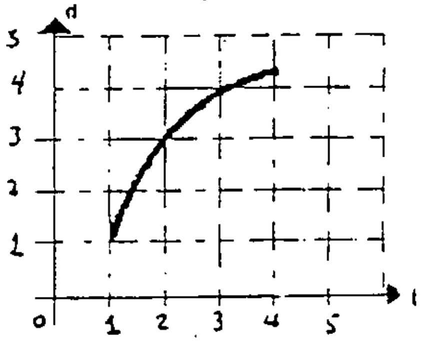


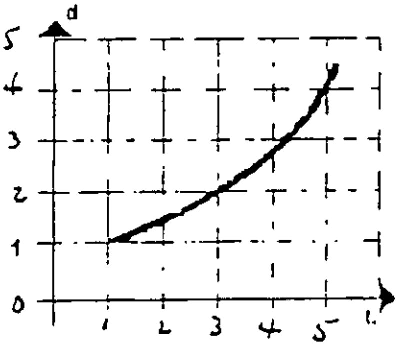


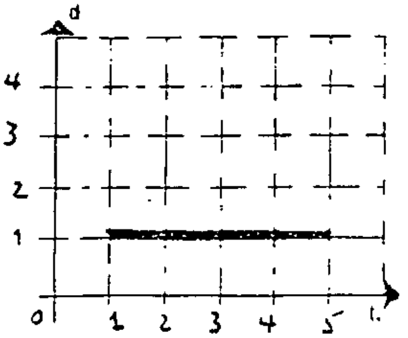
a. Establezca diferencias y similitudes.

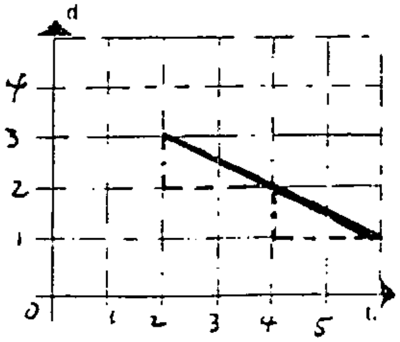
b. Para cada gráfica inventa una situación que pueda ser representada por ella.

6. Identifique en cuáles de las siguientes gráficas se cumple que cuando el tiempo aumenta cantidades iguales la distancia también varia en cantidades iguales. Explique las razones para hacer su identificación









Colegio Distrital LA Amistad J.T. Guía Nº 1º

Precálculo - Funcional Lineal

Guía de trabajo Nº 1: Función proporcional

Nombre Alumno(a): ______________ Curso: ______________ Fecha

Logros:
1. Representa la función proporcional en la forma numérica, gráfica y simbólica, pasando de una representación a otra.
2. Halla la constante de proporcionalidad o la pendiente de la recta q[ue] pasa por cero.

Indicadores de Logro

- Completa la tabla de Valores para una situación
- Toma la variable dependiente y la divide por la variable independie[nte] y halla la constante de proporcionalidad.
- Calcula el valor de la variable independiente dividiendo la dependient[e] y la constante de proporcionalidad.
- Generaliza y escribe la forma simbólica de la función proporcional
- Establece la relación entre variables $y = f(x)$ - $d = f(t)$

Taller:
A- Solución del taller
B. Puesta en Común
C. Conclusiones
Evaluación:

1. Un entrenador tan solo registró los siguientes datos durante un entrenamiento de ciclismo de uno de sus pupilos, quien mantuvo el mismo ritmo de correras,

Numero de Vueltas	Tiempo en minutos
3	12
	20
7	
	36
35	

a. Completar la tabla
b. Explique cómo lo hace
c. ¿Cuántos minutos gasta para dar 10 V.?
d. ¿En 64 minutos cuántas Vueltas ha dado?
e. Con solo los datos de la tabla calcule:
¿Cuánto tiempo gastaría en recorrer 24 V?
f. De la tabla establezca un expresión que permita calcular un valor cualquiera de la segunda Columna a partir de su corres pondiente valor en la primera.
g. Complete la siguiente tabla:

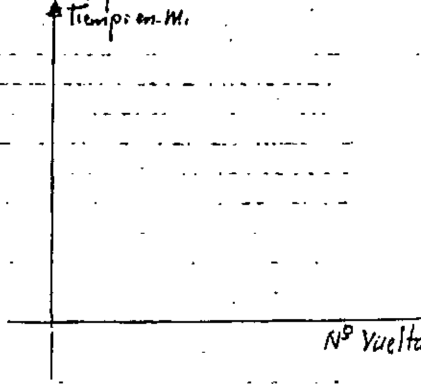
Nº de V.	Tiempo	Cociente = T/N
3	12	
	20	
7		
	36	
35		

h. ¿Cuál es el resultado de esos cocien[tes]
i. Escriba algunas proporciones con las [ra]zones que encuentra en la tab[la]
j. Cree Ud. que la tabla Nº de V. [T] es una tabla proporcional.

$T(5)+T(3)= \quad + \quad =$

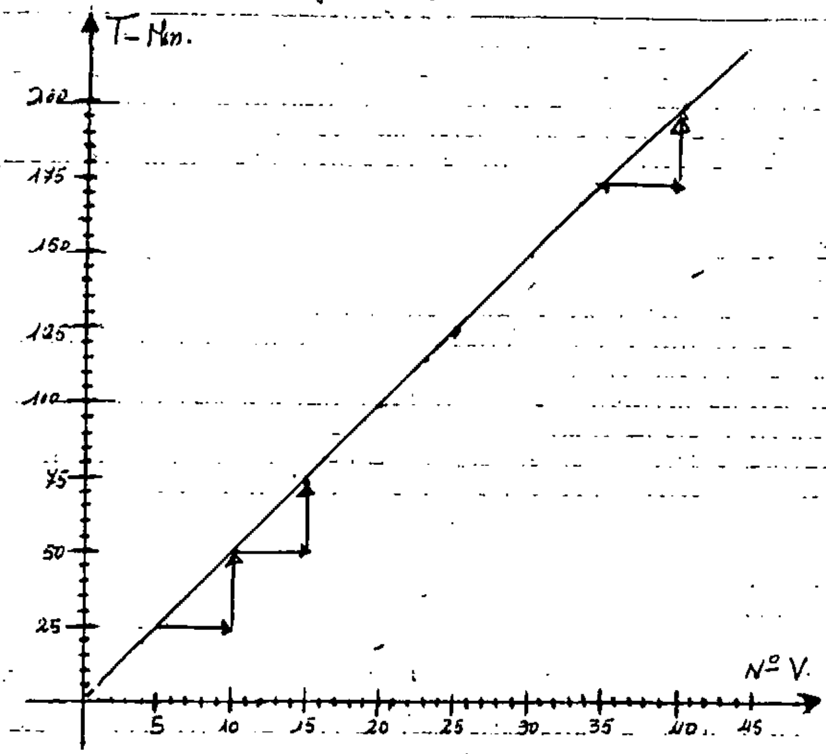
$T(5)+T(7)= \quad + \quad =$

2. En el diagrama Cartesiano marque un punto por cada V[uel]ta y el número de minutos [co]rrespondiente.



b. ¿Que representa la grafica?
c. Utilizando solo la gráfica calcule, aproximadamente, el tiempo que gasta el atleta para dar 23 vueltas.

3. Observe la siguiente gráfica:



a. Observe la gráfica anterior
b. Cuando el número de vueltas aumenta de 5 a 10, ¿Cuánto aumentan los minutos?
c. Cuando aumenta el número de vueltas de 10 a 15 ¿Cuánto aumentan los minutos?

d. Cuando el número de vueltas aumenta de 30 a 35, ¿Cuánto aumentan los minutos? El aumento del tiempo será el mismo que el de a y el de b?

e. En esta gráfica cuando el número de vueltas aumenta en cantidades iguales ¿Qué le sucede al tiempo?

4. De la tabla, establezca una expresión que permita calcular un valor cualquiera de la segunda columna a partir de su correspondiente valor en la primera.

Nº de Fotocopias	Costo $
3	75
6	150
9	225
12	300
15	375

a) 18 fotocopias cuál es su costo?

b) Con $ 525 ¿Cuántas fotocopias recibe?
c) Cuál es el cociente (razón)?

Relaciones entre magnitudes

Para entender la relación existente entre algunas magnitudes físicas es necesario recordar en qué consiste la **proporcionalidad**. El presente taller se elaboró para el propósito.

A. Magnitudes directamente proporcionales

¿Cuándo las magnitudes son directamente proporcionales?

Para tal efecto, estudiaremos la relación entre la fuerza que se ejerce sobre un resorte y el alargamiento que éste sufre.

En la siguiente secuencia de dibujos aparece el resorte, al cual le hemos colocado ninguno, uno, dos, tres y cuatro cuerpos, todos del mismo peso; observa en las representaciones el alargamiento que el resorte sufre según el número de cuerpos suspendidos.

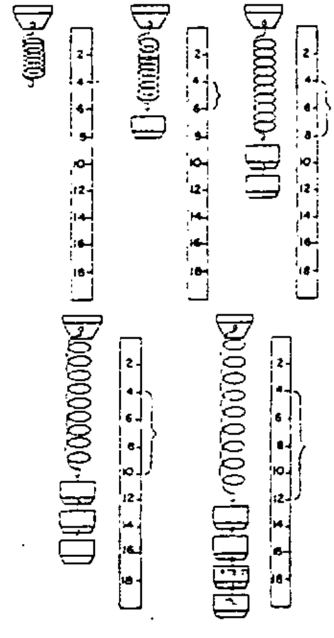


Fig. 2.16

1. **Tabla de datos.**
Observa en cada uno de los dibujos, el alargamiento que sufre el resorte, según el número de cuerpos que de él se suspendan. Haz y completa una tabla de datos, semejante a la que aparece a continuación:

Número de cuerpos	0	1	2	3	4
Alargamiento			4 cm		

2. **Gráfica.**
Después de tener la tabla de datos, debemos representar gráficamente las dos magnitudes, ya que esto nos permite visualizar fácilmente, la relación que existe entre éstas.

Realiza la gráfica de la siguiente forma: en una hoja de papel cuadriculado, traza dos rectas perpendiculares entre sí; estas dos líneas se denominan eje vertical y eje horizontal.

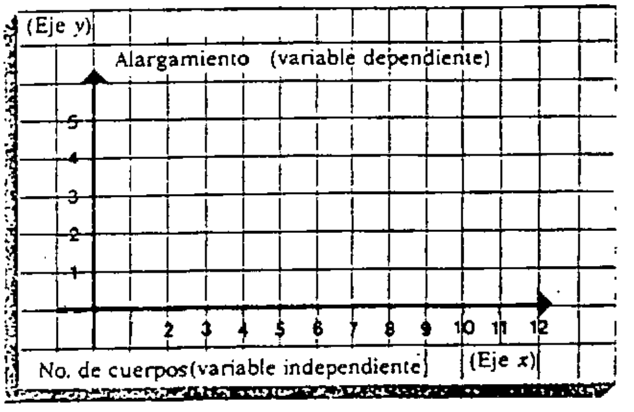


Fig. 2.17

De acuerdo a como se obtienen los datos, la variable que se manipula es el número de cuerpos y se denomina **variable independiente**. El alargamiento del resorte **depende** del número de cuerpos que se coloquen; a esta variable se le llama **variable dependiente.**

Los valores que toma la variable independiente se localizan en el eje horizontal (Eje x) y los de la variable dependiente se localizan en el eje vertical (Eje y).

Ten en cuenta los valores máximos que tiene cada magnitud, para dividir los ejes en segmentos iguales, de tal forma que se puedan representar todos los datos y la gráfica ocupe la mayor cantidad de espacio.

Luego representa con una marca fuerte cada pareja ordenada de valores (No. de cuerpos, y alargamiento) y une estos puntos con una línea continua.

3. **Análisis de la gráfica.**
¿Qué tipo de gráfica obtuviste? ¿Pasa la línea por el origen?

La gráfica que se obtiene en esta actividad es una línea recta y además pasa por el origen; de esto podemos concluir que el alargamiento que experimenta el resorte es directamente oporcional al número de cuerpos del mismo peso que de él se suspenden.

la representación gráfica de dos magnitudes responde a una línea recta que pasa por el gen, podemos asegurar que las dos magnitus son directamente proporcionales.

Si simbolizamos el alargamiento por la letra x, el número de cuerpos que de él se suspenden por la letra N y la proporcionalidad directa por el signo "α", escribimos entonces $X \alpha N$ que se lee:

X es directamente proporcional a N.

Dicho de otra forma, la variable dependiente x es directamente proporcional a la variable independiente N.

Como puedes observar en la gráfica o en la tabla, mientras una de estas cantidades aumenta (No. de cuerpos), la otra también aumenta (alargamiento); o si una de ellas disminuye, la otra también disminuye en la misma proporción, lo cual nos garantiza la proporcionalidad directa ya analizada en la gráfica.

Ecuación que liga las variables.

El haber determinado gráficamente que las dos magnitudes son directamente proporcionales, es un paso importante en el estudio de un fenómeno físico, pero debemos encontrar la ecuación que relaciona a las dos variables consideradas.

• Efectúa la división de cada alargamiento, por su correspondiente número de cuerpos. ¿Qué valor obtienes en cada división?

• ¿Qué puedes concluir respecto al cociente de dos magnitudes que son directamente proporcionales?

Como pudiste comprobar, siempre se obtiene el mismo cociente; por lo tanto podemos asegurar que:

dos magnitudes son directamente proporcionales, entonces están ligadas por un cociente nstante.

n nuestro caso: $X \alpha N$, entonces $\frac{X}{N} = C$ ó $X = CN$

nde C es la constante de proporcionalidad.

La expresión $\frac{X}{N} = C$ ó $X = CN$ es la ecuación que liga las dos variables consideradas.

Cálculo de la constante de proporcionalidad.

Hemos dicho que al hallar el cociente entre X y N, se calcula el valor de C.

$$\frac{X}{N} = \frac{2\ \text{cm}}{1\ \text{cuerpo}} = \frac{4\ \text{cm}}{2\ \text{cuerpos}} = \frac{6\ \text{cm}}{3\ \text{cuerpos}} = \frac{8\ \text{cm}}{4\ \text{cuerpos}} = 2\ \text{cm/cuerpo}$$

$C = 2$ cm/cuerpo, es el valor de la constante de proporcionalidad. De esta forma la ecuación será: $X = \frac{2\ \text{cm}}{\text{cuerpo}}\ N$.

6. **Predicción de nuevas situaciones.**

Cuando ya hemos encontrado la ecuación que liga las dos variables y además hemos calculado la constante de proporcionalidad se puede hallar el alargamiento que sufre el resorte cuando de él se suspende cualquier número de cuerpos. Por ejemplo siete de ellos:

$X = C.N$

$X = (2\ \text{cm/cuerpo})\ (7\ \text{cuerpos}) = 14\ \text{cm}$

El alargamiento del resorte es de 14 cm.

• Calcula el alargamiento del resorte cuando de él se suspenden 11 cuerpos.

B. **Resuelve los siguientes ejercicios:**

1. En una experiencia de laboratorio, a una masa determinada se le aplicó varias fuerzas horizontales y se midió los cambios de velocidad que experimentaba la masa. Los resultados de experimento se muestran en la siguiente tabla.

Fuerza (N)	Cambios de velocidad (m/s²)
5	4.9
10	9.8
15	15.2
20	20.1
25	25.0
30	29.9

a. ¿Cuál es la variable independiente y cuál la dependiente?

b. Realiza un gráfico de cambios de velocidad contra fuerza.

c. De acuerdo con la gráfica obtenida, ¿qué tipo de proporcionalidad existe entre estas variables?

d. Escribe la ecuación que liga las dos variables.

NOTA: Representa por F: fuerza y por C: cambios de velocidad.

e. Encuentra la constante de proporcionalidad.

f. Utilizando la ecuación obtenida, encuentra las variaciones de velocidad para fuerzas 8 N y 42 N.

2. Para cada una de las siguientes tablas de datos

x(m)	t(s)
20	4
40	8
60	12
80	16

V(m/s)	t(s)
5	2
10	4
15	6
20	8
25	10

a. Realiza una gráfica de las variables teniendo en cuenta que la variable que aparece en la primera columna de cada tabla es la dependiente.
b. ¿Qué tipo de proporcionalidad existe entre las variables?
c. Escribe la ecuación que liga las variables.
d. Encuentra la constante de proporcionalidad.
e. Con la ecuación que liga las variables x y t, encuentra los valores de x para $t = 5$ s y para $t = 36$ s; y con la ecuación que liga a V y a t encuentra los valores de V para $t = 2.5$ s y $t = 32$ s.

C. Proporcionalidad lineal.

En el taller anterior el alargamiento del resorte representaba la variable dependiente. Ahora se considera la longitud del resorte como la variable dependiente y el número de cuerpos seguirá siendo la variable independiente. De acuerdo con los dibujos mostrados en la figura 2.16, se obtiene la siguiente tabla de datos:

Número de cuerpos	Longitud
0	4 cm
1	6 cm
2	8 cm
3	10 cm
4	12 cm

1. Realiza la gráfica de las variables L (longitud) y N (número de cuerpos). Ten en cuenta que la variable independiente se representa en el eje horizontal.
2. ¿Qué tipo de gráfica se obtiene?
3. ¿Son las magnitudes directamente proporcionales? ¿Por qué? Al realizar la gráfica de L contra N se obtiene una línea recta que no pasa por el origen, lo cual indica que las magnitudes no son directamente proporcionales sino de tipo lineal. Se dice que L varía directamente con N al trasladar el eje horizontal (N) una distancia L_0, de tal forma que la recta pase por el origen de este nuevo sistema de coordenadas. Se tiene: $L - L_0 \propto N$.

Como $L - L_0$ y N al ser directamente proporcionales están ligados por un cociente constante. $\frac{L - L_0}{N} = C$ ó $L - L_0 = CN$

Donde C es la constante de proporcionalidad. Para este caso el valor de C será:

$$C = \frac{L - L_0}{N} = \frac{12\text{ cm} - 4\text{ cm}}{3\text{ cuerpos}} = 2\text{ cm/cuerpo}$$

Como se observa, el valor de la constante de proporcionalidad C se puede obtener escogiendo dos puntos de la recta de la forma (N, L) por ejemplo (4 cuerpos, 12 cm) y (2 cuerpos, 8 cm) de tal forma que:

$$C = \frac{\Delta L}{\Delta N} = \frac{L_2 - L_1}{N_2 - N_1} = \frac{8\text{ cm} - 12\text{ cm}}{2\text{ cuerpo} - 4\text{ cuerpo}} = \frac{2\text{ cm}}{\text{cuerpo}}$$

De esta manera la ecuación que liga las variables L y N será: $L - L_0 = \frac{2\text{ cm}}{\text{cuerpo}} \cdot N$

Como $L_0 = 4$ cm y representa el punto de corte de la recta con el eje vertical, entonces:

$$L = \frac{2\text{ cm}}{\text{cuerpo}} \cdot N + 4\text{ cm}$$

En general, se puede concluir que:

Una variable y varía linealmente con una variable x si al realizar la gráfica de y contra x resulta una línea recta que intersecta al eje y en el punto b y tiene una constante de proporcionalidad:

$C = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ donde (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son dos puntos de la recta. La relación entre y y x es de la forma $y = cx + b$.

D. Resuelve el siguiente ejercicio:

Para cada una de las siguientes tablas:

TABLA 1

ym/s	x(5)
3	0
5/2	1
2	2
3/2	3

TABLA 2

y(m)	x(s)
2	0
5	1
8	2
11	3
14	4

a. Realiza una gráfica de y contra x.
b. ¿Qué tipo de relación hay entre las variables?
c. ¿Cuál es el valor del punto de corte de la recta con el eje y?
d. Determina la constante de proporcionalidad.
e. Encuentra la ecuación que liga las variables y y x.

x(m)	t(s)
20	4
40	8
60	12
80	16

V(m/s)	t(s)
5	2
10	4
15	6
20	8
25	10

a. Realiza una gráfica de las variables teniendo en cuenta que la variable que aparece en la primera columna de cada tabla es la dependiente.
b. ¿Qué tipo de proporcionalidad existe entre las variables?
c. Escribe la ecuación que liga las variables.
d. Encuentra la constante de proporcionalidad.
e. Con la ecuación que liga las variables x y t, encuentra los valores de x para $t = 5$ s y para $t = 36$ s; y con la ecuación que liga a V y a t encuentra los valores de V para $t = 2.5$ s y $t = 32$ s.

C. Proporcionalidad lineal.

En el taller anterior el **alargamiento** del resorte representaba la variable dependiente. Ahora se considera la **longitud** del resorte como la variable dependiente y el número de cuerpos seguirá siendo la variable independiente. De acuerdo con los dibujos mostrados en la figura 2.16, se obtiene la siguiente tabla de datos:

Número de cuerpos	Longitud
0	4 cm
1	6 cm
2	8 cm
3	10 cm
4	12 cm

1. Realiza la gráfica de las variables L (longitud) y N (número de cuerpos). Ten en cuenta que la variable independiente se representa en el eje horizontal.
2. ¿Qué tipo de gráfica se obtiene?
3. ¿Son las magnitudes directamente proporcionales? ¿Por qué? Al realizar la gráfica de L contra N se obtiene una línea recta que no pasa por el origen, lo cual indica que las magnitudes no son directamente proporcionales sino de tipo lineal. Se dice que L varía directamente con N al trasladar el eje horizontal (N) una distancia L_0, de tal forma que la recta pase por el origen de este nuevo sistema de coordenadas. Se tiene: $L - L_0 \propto N$.

Como $L - L_0$ y N al ser directamente proporcionales están ligados por un cociente constante. $\frac{L - L_0}{N} = C$ ó $L - L_0 = CN$

Donde C es la constante de proporcionalidad. Para este caso el valor de C será:

$$C = \frac{L - L_0}{N} = \frac{12\text{ cm} - 4\text{ cm}}{3\text{ cuerpos}} = 2\text{ cm/cuerpo}$$

Como se observa, el valor de la constante de proporcionalidad C se puede obtener escogiendo dos puntos de la recta de la forma (N, L) por ejemplo (4 cuerpos, 12 cm) y (2 cuerpos, 8 cm) de tal forma que:

$$C = \frac{\Delta L}{\Delta N} = \frac{L_2 - L_1}{N_2 - N_1} = \frac{8\text{ cm} - 12\text{ cm}}{2\text{ cuerpo} - 4\text{ cuerpo}} = \frac{2\text{ cm}}{\text{cuerpo}}$$

De esta manera la ecuación que liga las variables L y N será: $L - L_0 = \frac{2\text{ cm}}{\text{cuerpo}} \cdot N$

Como $L_0 = 4$ cm y representa el punto de corte de la recta con el eje vertical, entonces:

$$L = \frac{2\text{ cm}}{\text{cuerpo}} \cdot N + 4\text{ cm}$$

En general, se puede concluir que:

Una variable y varía **linealmente** con una variable x si al realizar la gráfica de y contra x resulta una línea recta que intersecta al eje y en el punto b y tiene una constante de proporcionalidad:

$C = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ donde (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son dos puntos de la recta. La relación entre y y x es de la forma $y = cx + b$.

D. Resuelve el siguiente ejercicio:

Para cada una de las siguientes tablas:

TABLA 1

ym/s	x(5)
3	0
5/2	1
2	2
3/2	3

TABLA 2

y(m)	x(s)
2	0
5	1
8	2
11	3
14	4

a. Realiza una gráfica de y contra x.
b. ¿Qué tipo de relación hay entre las variables?
c. ¿Cuál es el valor del punto de corte de la recta con el eje y?
d. Determina la constante de proporcionalidad.
e. Encuentra la ecuación que liga las variables y y x.

Magnitudes inversamente proporcionales

A. Analizaremos en el siguiente taller la relación "inversamente proporcional a" entre dos magnitudes físicas.

Consideremos el movimiento de un automóvil que tiene que recorrer una distancia de 120 kilómetros que separa a dos ciudades a lo largo de un camino recto. En la figura 2.18 se ilustran los valores de la velocidad promedio que debe llevar el automóvil, para que sus respectivos tiempos de salida y llegada sean los que se indican en los relojes.

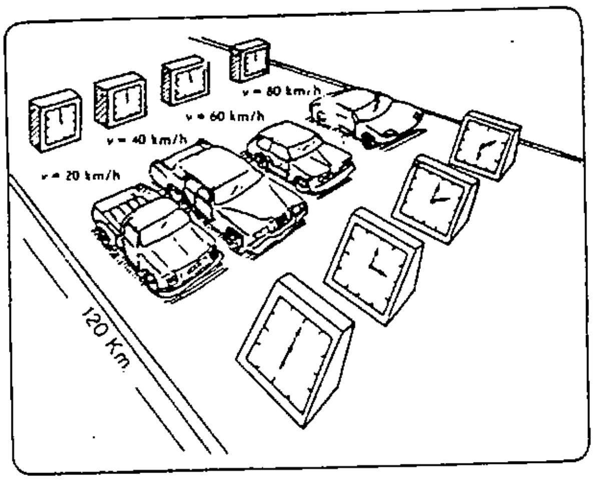


Fig. 2.18

1. Realiza una tabla de datos: coloca en ella la rapidez con que se mueve el auto y los correspondientes tiempos gastados en hacer el recorrido.

v Rapidez en (km/h)	20				
t Tiempo (h)	6				

2. Teniendo en cuenta que el tiempo gastado por el automóvil en hacer el recorrido depende de la rapidez con que se mueva, identifica las variables dependiente e independiente y realiza la gráfica correspondiente.

3. La gráfica que obtuviste, ¿es una línea recta que pasa por el origen?

4. ¿Puedes afirmar que las dos magnitudes v y t son directamente proporcionales?

La gráfica que se obtiene es una curva, que recibe el nombre de hipérbola. En ella puedes observar que para valores pequeños de rapidez el tiempo es grande, y a medida que la rapidez crece, el tiempo disminuye.
Como puedes verificar en la tabla de datos o en la gráfica, si se duplica la rapidez, el tiempo gastado se reduce a la mitad; si se triplica la rapidez, el tiempo de viaje se hace tres veces menor.

Dos magnitudes son inversamente proporcionales, si al aumentar una, la otra disminuye en la misma proporción.

La anterior definición nos permite garantizar que t es inversamente proporcional a v, lo cual simbolizamos: $t \alpha \frac{1}{v}$, es decir t es directamente proporcional al inverso de v.

5. Calcula y escribe en una tabla de datos los valores de $\frac{1}{v}$, y realiza una gráfica de t contra $\frac{1}{v}$

6. La gráfica que obtuviste, ¿es una línea recta que pasa por el origen?

7. ¿Puedes afirmar que t es directamente proporcional a $\frac{1}{v}$?

Dos magnitudes son inversamente proporcionales, si al graficar la variable dependiente contra el inverso de la variable independiente, se obtiene una línea recta que pasa por el origen.
Si tenemos en cuenta que dos magnitudes directamente proporcionales están ligadas por un cociente constante, podemos ahora encontrar la ecuación que liga dos magnitudes inversamente proporcionales.

$t \alpha \frac{1}{v}$, luego $\frac{t}{\frac{1}{v}} = C$ (constante), por lo tanto

$t.v = C.$

Luego:

Dos magnitudes inversamente proporcionales están ligadas por un producto constante.

8. Calcula el valor de la constante de proporcionalidad (C), realizando el producto de t por v, en cada pareja de valores que hay en la tabla de datos.

que experimenta el resorte es directamente proporcional al número de cuerpos del mismo peso que de él se suspenden.

i la representación gráfica de dos magnitudes orresponde a una línea recta que pasa por el rigen, podemos asegurar que las dos magnitu-les son directamente proporcionales.

Si simbolizamos el alargamiento por la letra x, el número de cuerpos que de él se suspenden por la letra N y la proporcionalidad directa por el signo "α", escribimos entonces X α N que se lee:

X es directamente proporcional a N.

Dicho de otra forma, la variable dependiente x es directamente proporcional a la variable independiente N.

Como puedes observar en la gráfica o en la tabla, mientras una de estas cantidades aumenta (No. de cuerpos), la otra también aumenta (alargamiento); o si una de ellas disminuye, la otra también disminuye en la misma proporción, lo cual nos garantiza la proporcionalidad directa ya analizada en la gráfica.

4. Ecuación que liga las variables.

El haber determinado gráficamente que las dos magnitudes son directamente proporcionales, es un paso importante en el estudio de un fenómeno físico, pero debemos encontrar la ecuación que relaciona a las dos variables consideradas.

• Efectúa la división de cada alargamiento, por su correspondiente número de cuerpos. ¿Qué valor obtienes en cada división?

• ¿Qué puedes concluir respecto al cociente de dos magnitudes que son directamente proporcionales?

Como pudiste comprobar, siempre se obtiene el mismo cociente; por lo tanto podemos asegurar que:

Si dos magnitudes son directamente proporcionales, entonces están ligadas por un cociente constante.

En nuestro caso: X α N, entonces $\frac{X}{N}$ = C ó X = CN

donde C es la constante de proporcionalidad.

La expresión $\frac{X}{N} = C$ ó $X = CN$ es la ecuación que liga las dos variables consideradas.

5. Cálculo de la constante de proporcionalidad.

Hemos dicho que al hallar el cociente entre X y N, se calcula el valor de C.

$$\frac{X}{N} = \frac{2\text{ cm}}{1\text{ cuerpo}} = \frac{4\text{ cm}}{2\text{ cuerpos}} = \frac{6\text{ cm}}{3\text{ cuerpos}}$$

$$= \frac{8\text{ cm}}{4\text{ cuerpos}} = 2\text{ cm/cuerpo}$$

C = 2 cm/cuerpo, es el valor de la constante de proporcionalidad. De esta forma la ecuación será: $\mathbf{X = \frac{2\text{ cm}}{\text{cuerpo}} N}$.

6. Predicción de nuevas situaciones.

Cuando ya hemos encontrado la ecuación que liga las dos variables y además hemos calculado la constante de proporcionalidad se puede hallar el alargamiento que sufre el resorte cuando de él se suspende cualquier número de cuerpos. Por ejemplo siete de ellos:

X = C.N

X = (2 cm/cuerpo) (7 cuerpos) = 14 cm

El alargamiento del resorte es de 14 cm.

• Calcula el alargamiento del resorte cuando de él se suspenden 11 cuerpos.

B. Resuelve los siguientes ejercicios:

1. En una experiencia de laboratorio, a una masa determinada se le aplicó varias fuerzas horizontales y se midió los cambios de velocidad que experimentaba la masa. Los resultados del experimento se muestran en la siguiente tabla

Fuerza (N)	Cambios de velocidad (m/s^2)
5	4.9
10	9.8
15	15.2
20	20.1
25	25.0
30	29.9

a. ¿Cuál es la variable independiente y cuál la dependiente?

b. Realiza un gráfico de cambios de velocidad contra fuerza.

c. De acuerdo con la gráfica obtenida, ¿qué tipo de proporcionalidad existe entre estas variables?

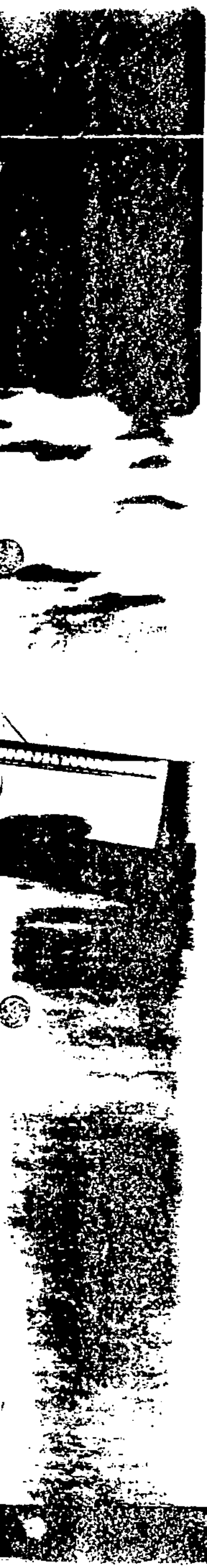
d. Escribe la ecuación que liga las dos variables.

NOTA: Representa por F: fuerza y por C: cambios de velocidad.

e. Encuentra la constante de proporcionalidad.

f. Utilizando la ecuación obtenida, encuentra las variaciones de velocidad para fuerzas 8 N y 42 N.

2. Para cada una de las siguientes tablas de datos



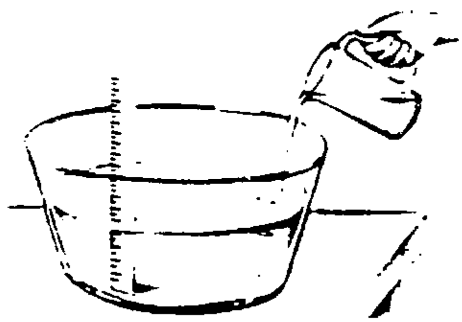
Calentando motores...

Altura del nivel en función del volumen

1. Llenamos de agua el recipiente de la figura, vaso a vaso, vertiendo cada vez 0,5 litros y midiendo después la altura que va alcanzando el nivel. Obtenemos la siguiente tabla:

volumen (l)	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5
altura (cm)	3,5	4,8	5,7	6,5	7,2

volumen (l)	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
altura (cm)	7,8	8,3	8,8	9,3	9,7



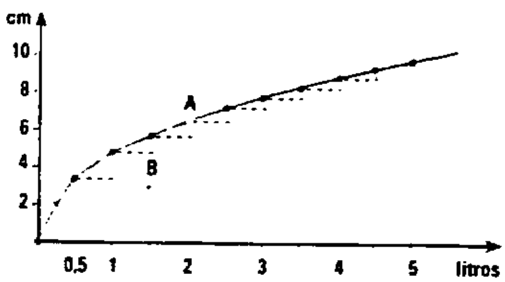
Indica:

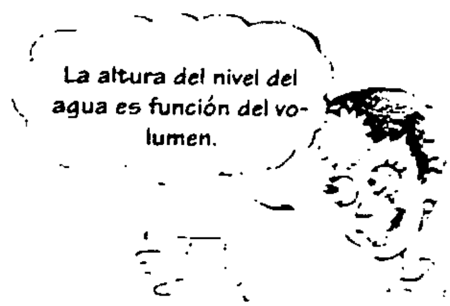
a) Las magnitudes (variables) que se relacionan en la tabla.

b) Los centímetros que asciende el nivel con el contenido del primer vaso y con el del último. (Observa el recipiente y explica por qué los resultados son distintos.)

De la tabla a la gráfica

2. Al representar los pares volumen-altura, (0.5 , 3.5), (1 , 4.8), etc., y tras unir los puntos, obtenemos la gráfica:





Puntos. Crecimiento

a) El punto A está en la gráfica pero el B no. ¿Qué significa esto?

b) ¿Cuál es la altura del nivel cuando llevamos vertidos 0,25; 2,5 y 4,2 litros?

c) La altura del nivel es 8 cm. ¿Cuánta agua hemos vertido?

d) El punto (0 , 0) está en la gráfica, ¿por qué?

e) La curva es ascendente, pues al aumentar el volumen (abscisas) aumenta la altura. Pero el ascenso es menos acusado en la parte derecha de la gráfica. ¿A qué se debe?

Dominio y escala

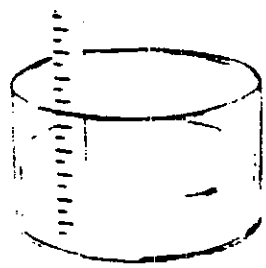
f) La curva se ha trazado justo hasta hacer rebosar el recipiente. Indica aproximadamente su capacidad total y su altura.

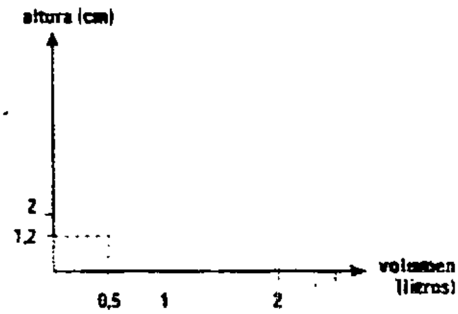
g) Las escalas usadas en cada eje no son iguales. ¿Deberían acaso serlo? Justifica la respuesta.

Una curva muy recta

3. En el ejemplo anterior, la forma de la gráfica tuvo mucho que ver con la del recipiente. Ahora, el recipiente es cilíndriico y, tras vaciar la primera jarra (0,5 l), la regla marca 1,2 cm.

volumen (l)	0,5	1,0	1,5	…
altura (cm)	1,2			…

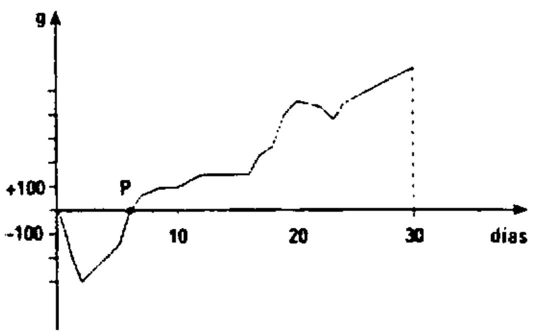




Completa la tabla y representa la nueva función (saca la regla del recipiente, ya no la necesitas).

Variación del peso de un recién nacido en el primer mes de vida

4. Observa esta gráfica correspondiente a un bebé que al nacer pesó 3,300 kg:



a) ¿Qué ocurre en los primeros días de vida? Interpreta el punto P.

b) ¿Qué días pesó el niño 150 g menos que al nacer?

c) En algún momento de la segunda quincena la madre cambió el pecho por el biberón. ¿Le gustó el cambio al niño?

d) Indica el aumento de peso durante la primera, segunda y tercera decena.

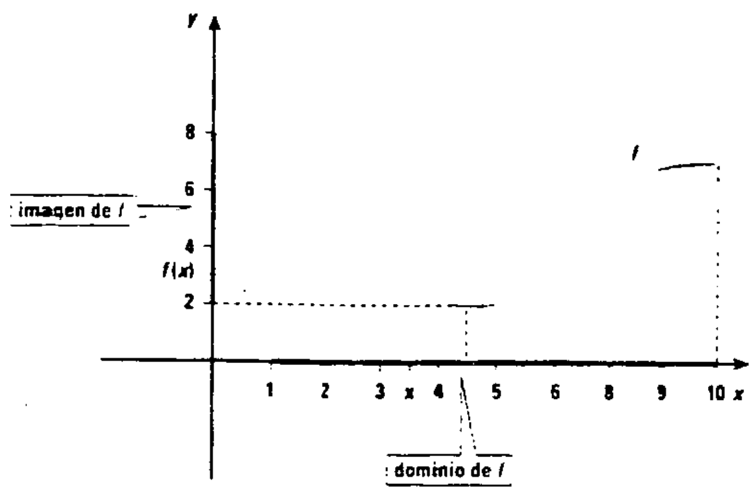
e) Indica el máximo y mínimo peso que dio el niño durante el mes y en qué días.

En marcha

1 Función

En una función se relacionan dos magnitudes o variables.

Esta relación puede venir dada por una tabla, con algunos pares de valores, o por una gráfica en la que, al menos teóricamente, se pueden leer todos los pares, o también mediante una fórmula.



x	f(x)
1	8
1,5	7
2	6
2,5	5
...	...

Variable independiente: es la representada en el eje X o de *abscisas*.

Variable dependiente: es la representada en el eje Y o de *ordenadas*.

1. Concepto y símbolos

Una función puede entenderse como una regla que asocia a cada valor posible de la variable independiente un valor ¡y uno sólo! de la variable dependiente.

Si designamos esta regla por *f* (cualquier otra letra valdría), escribimos:

$f(1) = 8 \qquad f(2,5) = 5 \qquad f(3) = 4 \ldots$ y, en general:

$$\boxed{f(x) = y}$$

nombre de la función

valor de la variable dependiente

valor de la variable independiente.

2. Dominio e imagen

Dominio de f: es el conjunto de valores que puede tomar la var able i pendiente.

Imagen de f: es el conjunto de valores que toma la variable dependiente.

En la gráfica de la página anterior no cabe preguntar por el valor de f(− o f(11). No existen. El dominio es el intervalo [1 , 10].

Tampoco tiene sentido buscar el valor de *x* que se transforma en 0, o e 10, pues ambos caen fuera de la imagen, que es [2 , 8].

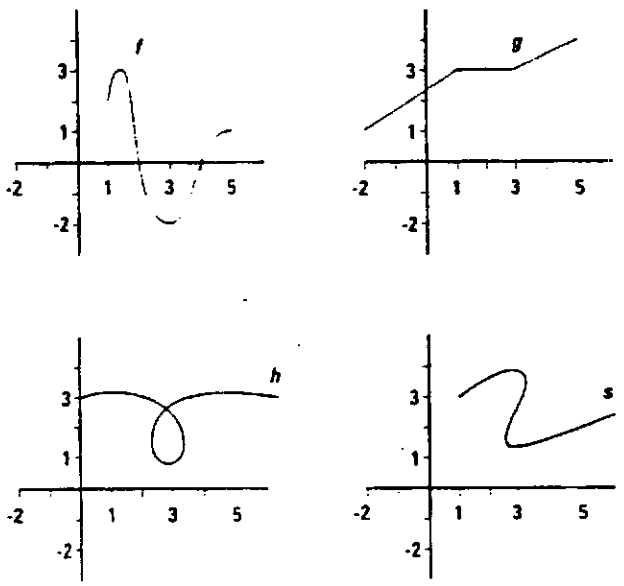
Magnitud es cualquier característica de los cuerpos que pueda medirse: velocidad, longitud, peso, etc.

3. Escalas

No es necesario que las escalas de los ejes sean iguales, pues los variabl suelen representar *magnitudes* diferentes. La elección de las escalas deb realizarse atendiendo únicamente a la mejor legibilidad de la gráfica.

¡ACCIÓN!

1 Observa las gráficas:



a) Las gráficas de f y de g representan funciones pero no la de h, ni la de s. Explícalo.

b) Para las funciones f y g calcula:

$f(3)$, $f(5)$, $g(1.5)$ y $g(-0.5)$

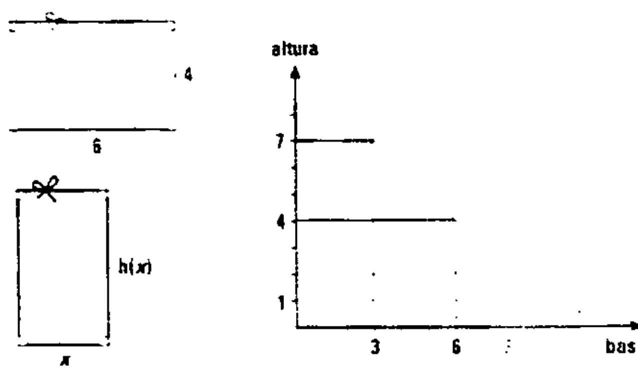
c) Calcula x de modo que $f(x) = 0$.

Calcula x de modo que $g(x) = 3$.

d) Determina el dominio e imagen de f y de g.

2 Con un hilo de 20 cm podemos formar una in nidad de rectángulos: para cada valor pos de base aparece una altura.

base x	1	1.5	2	2.5	3	3
altura $h(x)$						



a) Completa y representa la tabla.

b) Determina $h(4)$ y $h(0.5)$.

c) Determina x de modo que $h(x) = 4.5$.

d) Indica el dominio y la imagen de h.

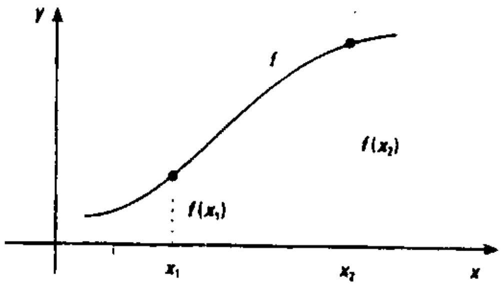
e) La bisectriz del ángulo que forman los ejes cor a la gráfica en un punto. ¿Qué rectángulo senta ese punto?

12 Crecimiento y decrecimiento

1. Función creciente. Función decreciente

Creciente: una función es creciente si su gráfica, leída de izquierda a derecha, es ascendente.

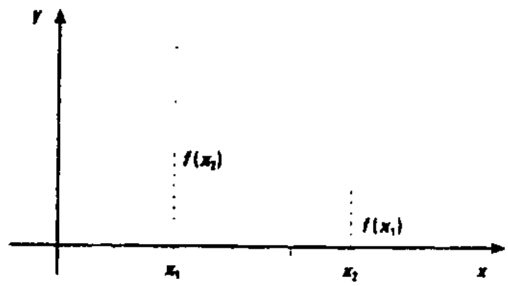
Esto significa que al aumentar la variable x también aumenta la variable y.



***f* creciente:** si $x_1 < x_2$ entonces $f(x_1) < f(x_2)$

Decreciente: una función es decreciente si su gráfica es descendente.

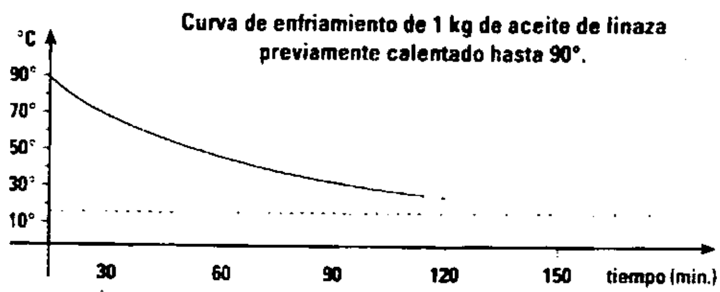
Esto significa que al aumentar la variable x, la variable y disminuye.



***f* decreciente:** si $x_1 < x_2$ entonces $f(x_1) > f(x_2)$

EJEMPLO

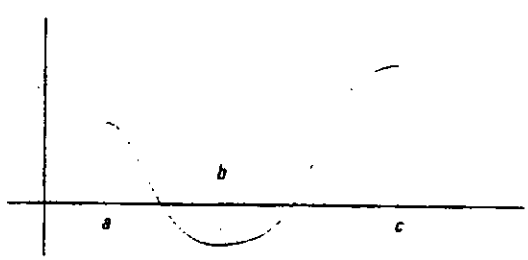
Unas funciones decrecientes famosas: las gráficas de enfriamiento.



La temperatura del aceite decrece lentamente y va aproximándose a la temperatura ambiente del laboratorio donde se realiza el experimento.

2. Intervalos de crecimiento

Frecuentemente, las funciones poseen tramos donde crecen y tramos donde decrecen. Así, para la función de la figura,



f es decreciente en $[a , b]$

f es creciente en $[b , c]$

Máximo ·cal

En x se alcanza un máximo local si su ordenada es mayor que la de los puntos próximos, tanto a la derecha como a la izquierda de x.

Máximo absoluto

En x se alcanza el máximo absoluto si su ordenada es la mayor de las ordenadas de todos los puntos del dominio.

Mínimo local

En x se alcanza un mínimo local si su ordenada es menor que la de los puntos próximos, tanto a la derecha como a la izquierda de x.

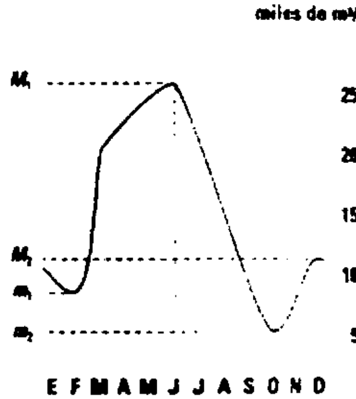
Mínimo absoluto

En x se alcanza el mínimo absoluto si su ordenada es la menor de las ordenadas de todos los puntos del dominio.

3 Máximos y mínimos

La gráfica muestra la evolución del caudal del río Amazonas, medido ce ca de la desembocadura, en el transcurso de un año.

Máximos



En junio, así como en diciem caudal se hace mayor que en fech ediatamente próximos. Los valores M_2 son máximos locales. Decimos también que en junio y en diciembre se alcanzan dos *máximos locales* o *relativos*.

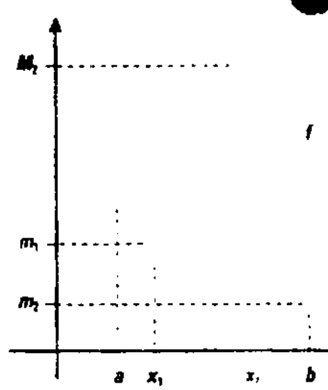
Pero M_1 es el mayor caudal en todo el año (algo más de 250000 m³/s). M_1 es el *máximo absoluto* de la función.

Mínimos

Los valores m_1 y m_2 son dos *mínimos locales*. Decimos también que en fe brero y octubre se alcanzan dos *mínimos locales* o *relativos*.

Observa que m_2 es el mínimo caudal en todo el año (algo más d 50.000 m³/s): se trata del *mínimo absoluto* de la función.

EJEMPLO

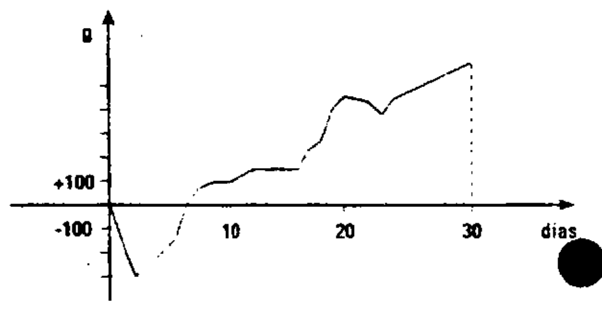


- Máximo relativo en x_2: la función pasa de ser creciente a decreciente.
- Mínimo relativo en x_1: la función pasa de ser decreciente a creciente.
- Máximo absoluto: se alcanza en x_2 y es M_2.
- Mínimo absoluto: se alcanza en b y es m_2.

¡ACCIÓN!

1 Se va a construir un puente sobre el Amazonas, precisamente donde se midió el caudal que ha dado lugar a la gráfica. ¿En qué época crees que los ingenieros comenzarán a poner los pilares?

2 La gráfica de la derecha refleja la variación del peso de un recién nacido en el primer mes de vida.



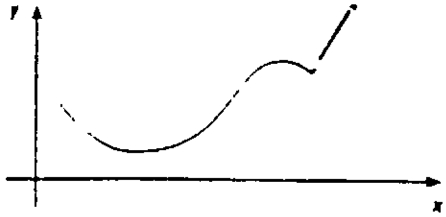
a) Identifica los máximos y mínimos locales.

b) Localiza el máximo y mínimo absolutos.

14 Continuidad

Función continua

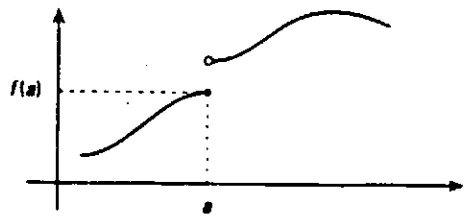
La gráfica en un intervalo puede trazarse sin levantar el lápiz del papel.



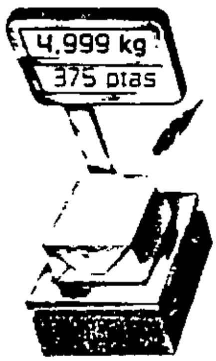
Continuidad significa que a pequeñas variaciones de la x corresponden pequeñas variaciones de la y.

Función discontinua

La gráfica salta y presenta una rotura en a.



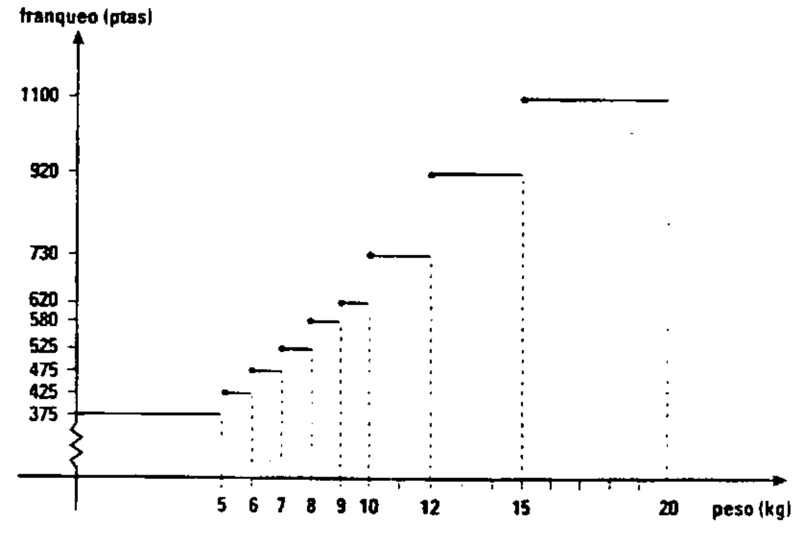
Decimos que "f es discontinua en a" o que a es un punto de discontinuidad de f. Una ínfima variación a la derecha de a provoca un salto.



EJEMPLO

Una función discontinua. En el envío de un paquete postal, el precio de los sellos depende del peso, según la tabla:

peso (kg)	menos de 5	de 5 a 6	de 6 a 7	de 7 a 8	de 8 a 9	de 9 a 10	de 10 a 12	de 12 a 15	de 15 a 20
franqueo (ptas)	375	425	475	525	580	620	730	920	1100



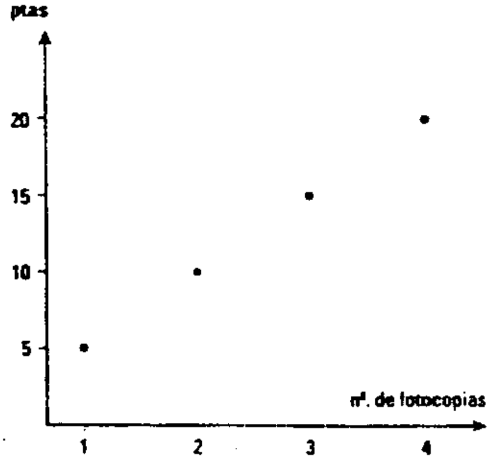
Para pesos inferiores a 5 kg, el franqueo es constante (cuesta lo mismo mandar 1,5 kg que 3 kg). Justo cuando el peso alcanza 5 kg, el precio salta produciendo una fractura en la gráfica.

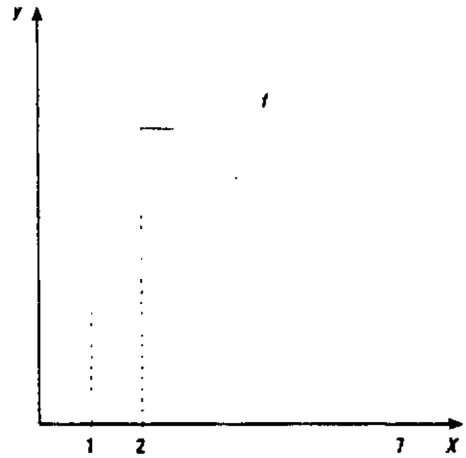
Observa que $f(5) = 425$, $f(6) = 475$. etc.

La función es discontinua en $x = 5$, $x = 6$, $x = 7$... y $x = 15$.

Observaciones

La función de la izquierda no es discontinua. Ocurre que la variable independiente sólo puede tomar valores aislados (variable discreta) y de ahí que necesariamente los puntos de la gráfica se vean separados.



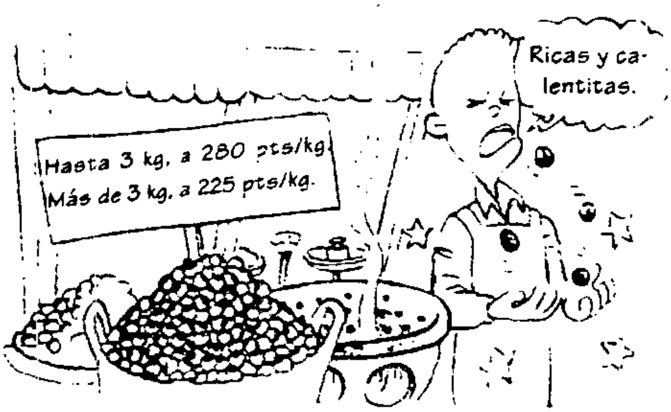


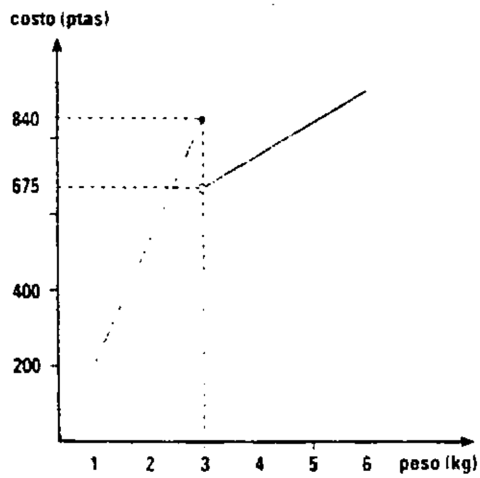
La función f no existe dentro del intervalo $(1, 2)$. En dicho intervalo no es ni continua ni discontinua, simplemente no es.

Ni siquiera es discontinua en $x = 1$ o $x = 2$, como tampoco decimos que sea discontinua en $x = 0$ o $x = 7$. Todo lo contrario, la función es continua en todo su dominio; ocurre, simplemente, que éste está partido.

¡ACCION!

1 Un castañero amigo de lo discontinuo.





La gráfica peso-costo (a la derecha) muestra la discontinuidad de los precios, ya que se rompe para $x = 3$, lo que da lugar a situaciones algo curiosas (no sabemos si todos los castañeros las conocen).

a) Un cliente necesita 2.700 kg cada vez que hace un pastel de castañas. Pero siempre compra un poquito mas de 3 kg y, tras pagar, devuelve 300 g al castañero. ¿Está en sus cabales?

b) ¿Qué cuesta más, 3 kg de castañas o tres kilos y medio?

c) ¿Hasta qué cantidad superior a 3 kg pagamos menos que por 3 kg exactos?

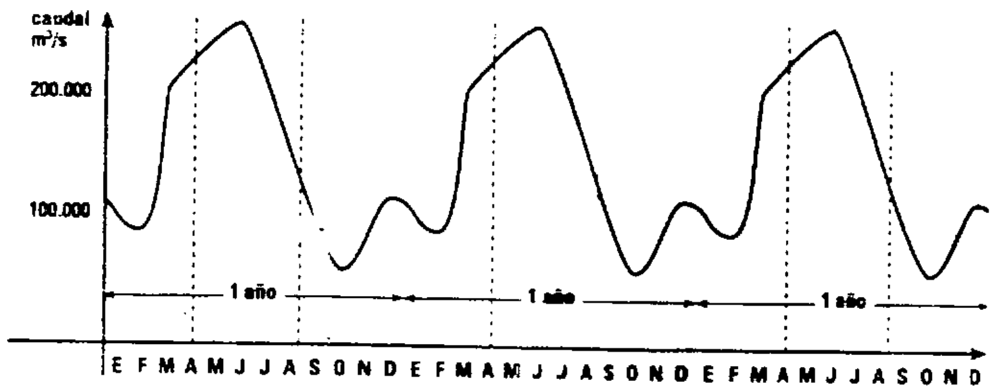
5 Funciones periódicas

En una función periódica, la forma de la gráfica se reproduce cada cierto intervalo. La longitud del intervalo se llama **período**:

La gráfica refleja la variación periódica del voltaje de la corriente que el corazón se envía a sí mismo para producir las contracciones.

Paisaje de los Andes.

EJEMPLO 1

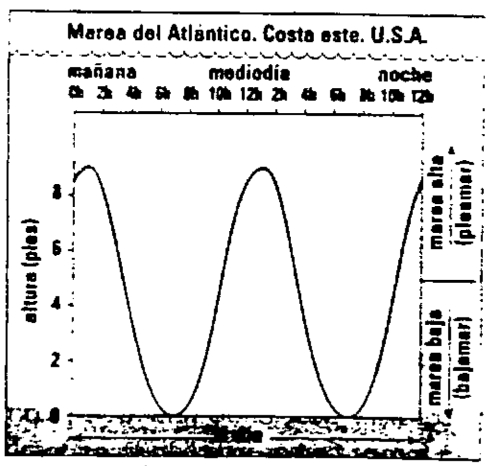


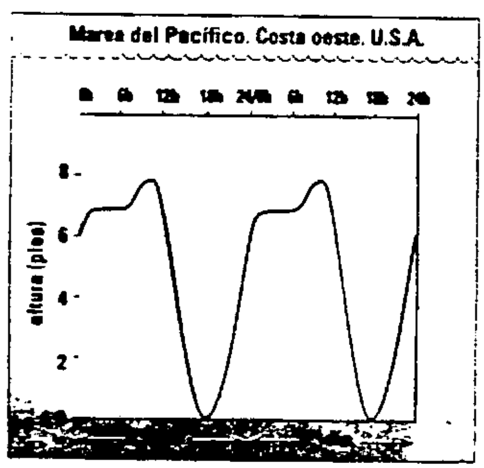
Si el deshielo de la cordillera de los Andes y el régimen de lluvias en la cuenca del Amazonas no varían sensiblemente de año a año, la gráfica tiempo-caudal es periódica. El período es un año.

EJEMPLO 2

Las mareas de los océanos son fenómenos periódicos:

Las mareas pueden tener características muy diferentes dependiendo de la localización geográfica.

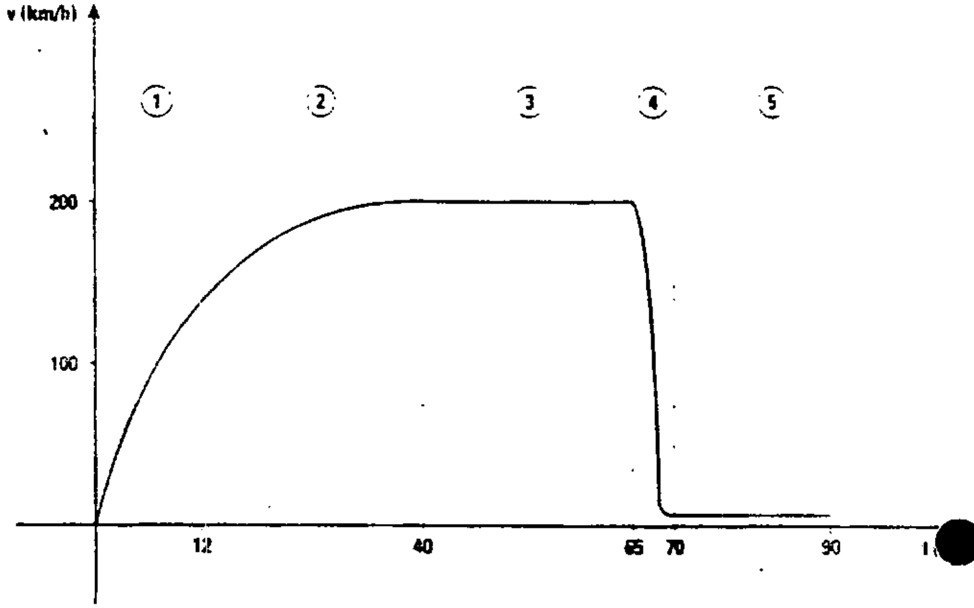




16 Informe sobre una gráfica

Una función relaciona los valores de dos características (las dos variables), de un determinado fenómeno. La gráfica proporciona una visión panorámica del fenómeno, pudiendo "leerse" éste en las ondulaciones de la curva. Esta lectura da siempre lugar a un informe. Aquí tienes un ejemplo:

Fases de un salto en paracaídas:



La gráfica describe la velocidad de descenso de un paracaidista en salto libre. En la abscisa se mide el tiempo; en la ordenada, la velocidad.

1. Salto sin apertura del paracaídas:

   (0, 0) pertenece a la gráfica: en el instante $t = 0$, cuando se inicia el salto, la velocidad es nula.

   La gráfica es ascendente e indica el progresivo aumento de velocidad al transcurrir el tiempo.

2. La gráfica es de nuevo ascendente: la velocidad sigue en aumento.

   El crecimiento menos acusado en este tramo se explica por la resistencia –mayor, a mayor velocidad– que opone el aire al paracaidista.

3. La gráfica es horizontal: la resistencia del aire llega a ser tal, que la velocidad de caída permanece constante. (200 km/h)

4. El brusco descenso de la gráfica indica un brusco descenso de velocidad: se ha abierto el paracaídas.

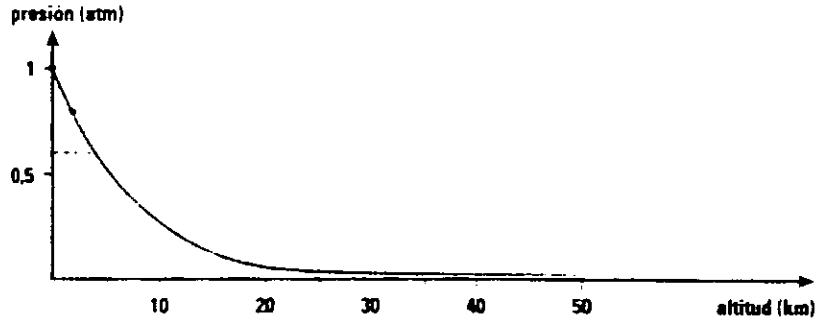
5. El paracaidista desciende finalmente con velocidad constante y pequeña hasta tomar tierra, invirtiendo en total 90 segundos.

La Revista

I. El funcionamiento de un altímetro

Los aviones y los alpinistas llevan un altímetro que indica la altitud. Naturalmente, el altímetro no puede medir directamente la altura. ¿Qué hace entonces?

Ocurre que la altitud y la presión están relacionadas: a mayor altura, la densidad del aire se hace menor y disminuye la presión. La gráfica, salvo ligeras variaciones debidas a cambios atmosféricos, es:

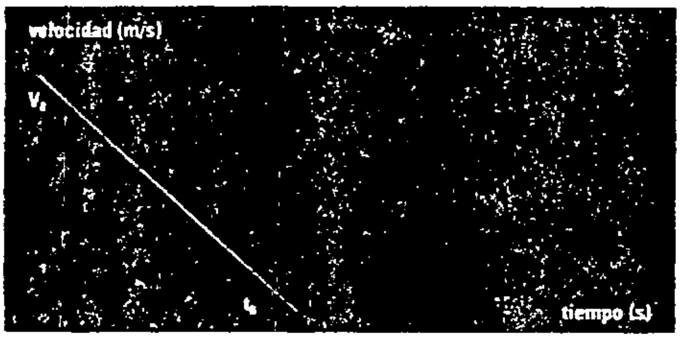


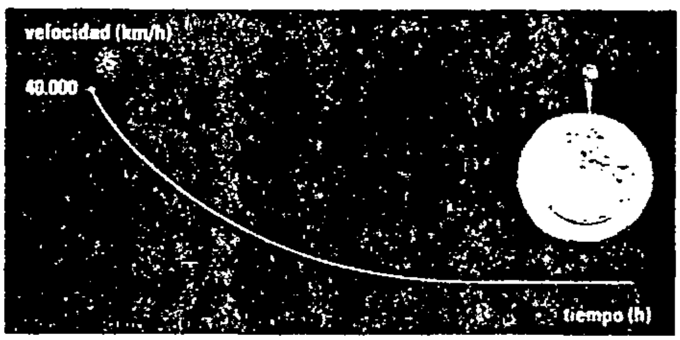
Altímetro

Lo que el altímetro mide realmente son presiones pero hace automáticamente una lectura (inversa) de la gráfica y muestra la altitud correspondiente. Así, cuando detecta 0,6 atmósferas indica 4 000 m de altitud.

II. Velocidad de escape

La gráfica de la izquierda representa la variación de la velocidad de un objeto cuando es lanzado verticalmente con una velocidad inicial V_0.





El corte de la gráfica con el eje X nos indica que en el instante $t = t_0$, la velocidad es 0 m/s, es decir, el objeto se ha detenido por efecto de la gravedad para iniciar el descenso.

Curiosamente, si el objeto se lanza a gran velocidad, más de 40 000 km/h, la gráfica ya no es una recta sino que tiene un aspecto parecido al de la gráfica de la derecha.

Veamos ahora: ¿cuándo se anula la velocidad para iniciar el descenso? ¡Nunca!

Ocurre que ese objeto no regresará jamás a la Tierra. ¡Buen viaje!

Para entrenarse

1 Vamos a contarte un cuento:

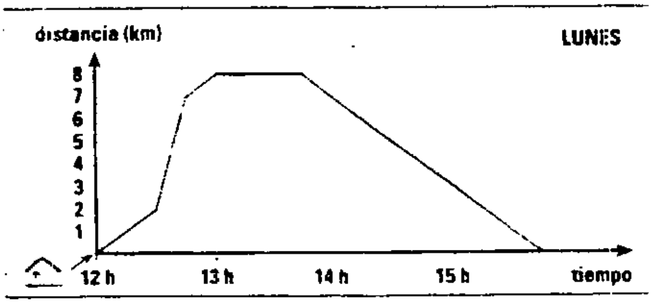
"Blancanieves vive en lo más espeso del bosque con los siete enanitos.

Cada día les lleva el almuerzo siguiendo el camino que conduce hasta la mina donde ellos trabajan.

Ella marcha a 4 km/h pero a veces Bambi, el cervatillo, saltándose de cuento, entra en éste y la transporta un trecho a 20 km/h."

Blancanieves ha trazado las gráficas de sus trayectos de la última semana.

En el eje vertical ha puesto, en cada instante, la distancia que la separaba de su casa.



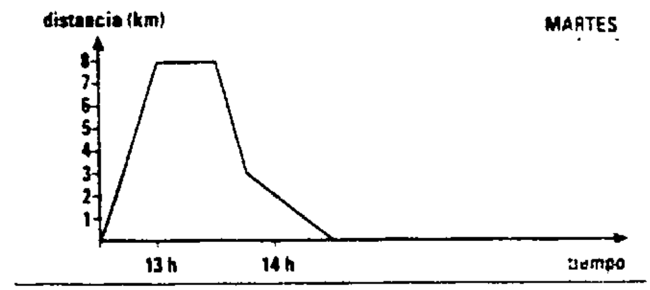
a) ¿Cuánto trecho camina hasta encontrar a Bambi? ¿A qué hora le encuentra?

b) ¿Cuánto tiempo va a lomos de Bambi? ¿A qué distancia de la mina la deja?

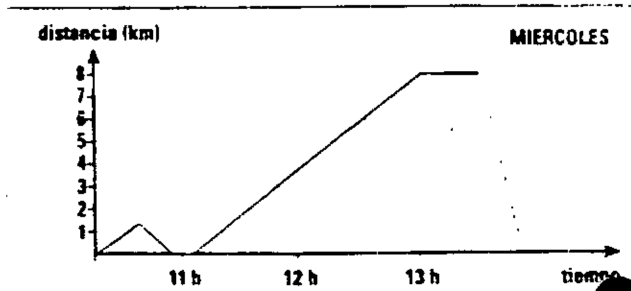
c) Indica a qué hora llega a la mina, a qué distancia está de la casa y cuanto tiempo se queda con los enanitos.

d) Indica como vuelve a casa y a qué hora regresa.

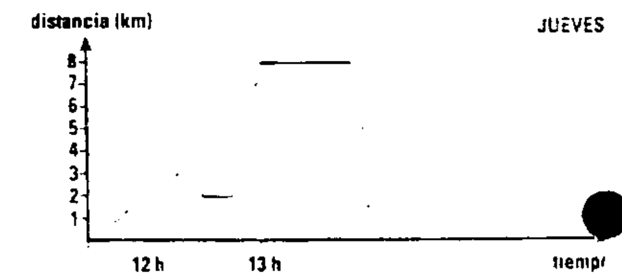
e) Cuenta ahora la historia de acuerdo con este grafico:



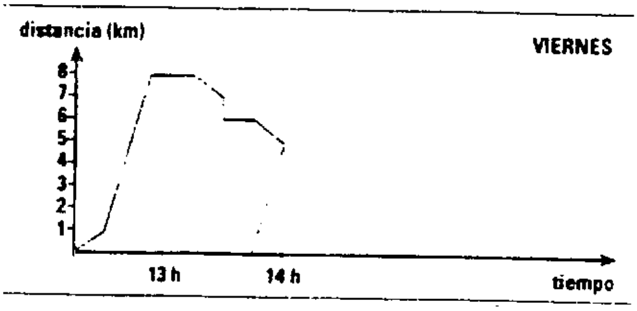
f) Esta vez, Blancanieves había olvidado "La Cazera" (sin ella los enanitos no comen). Interpreta el gráfico:



g) Blancanieves divisa a lo lejos, en el camino, a una vieja encorvada, nariz quebrada y mirada torva con un cesto de manzanas. Explica la gráfica:

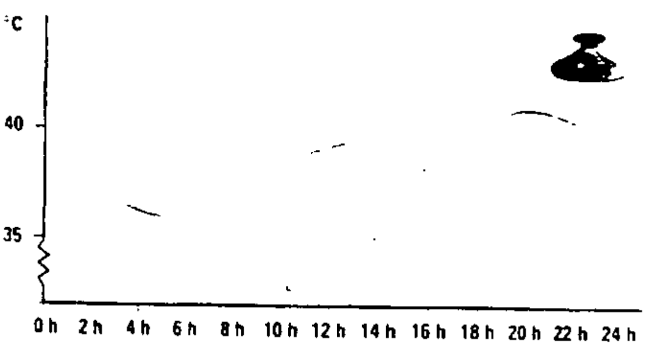


h) Es fin de semana. Blancanieves se ha citado con el príncipe y, con los nervios, se equivoca en la gráfica dos veces. ¿Sabrías decir dónde?



2 Las rápidas y sucesivas generaciones de ordenadores hacen que la vigencia de un modelo sea corta en el tiempo y que su precio decaiga. La depreciación de un modelo que en 1996 costaba 250 000 ptas es, aproximadamente, de un 20% anual. Calcula los precios hasta el año 2000 y traza la gráfica.

3 En una U.C.I. hay un aparato que registra la temperatura de un enfermo aquejado de fiebre intermitente. La gráfica corresponde a un período de 24 horas:

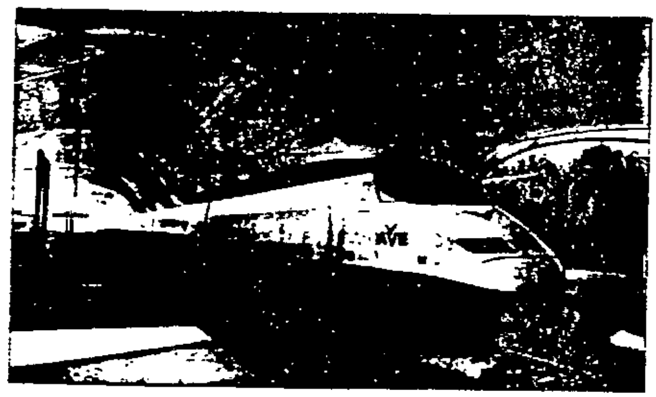


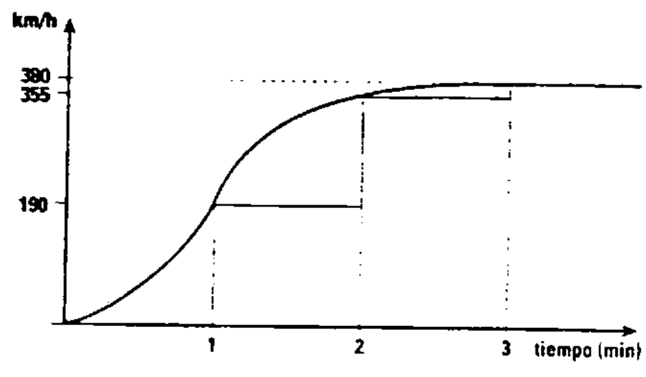
a) ¿Hubo algún descenso de temperatura durante la madrugada? ¿A qué hora fue de 37 °C?

b) En algún momento, el paciente sufrió un brusco descenso de temperatura. ¿A qué hora se inició? ¿Cuándo comenzó a recuperarse?

c) ¿Tuvo el enfermo algún otro momento de peligro?

4 Para probar el rendimiento de un tren de alta velocidad, se le hace arrancar y, con toda su potencia, se le acelera sobre una vía horizontal y sin curvas. Se anota en cada instante la velocidad que marca el velocímetro:





a) La curva tiene una primera parte ascendente. ¿Qué significa?

b) Al final, la gráfica es horizontal. ¿Qué significa?

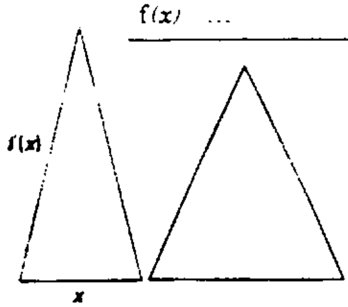
c) Indica la máxima velocidad posible y en qué momento, aproximadamente, se alcanza.

d) Calcula el aumento de velocidad desde el instante 0 al minuto 1; desde el minuto 1 al 2; y desde el 2 al 3. ¿En que período, de los tres señalados, la aceleración es mayor?

e) Imagina ahora que el tren frena hasta detenerse. Traza a grandes rasgos una gráfica de frenado.

5 Con un hilo de 10 cm podemos formar una infinidad de triángulos isósceles. Si variamos la longitud de la base (lado desigual), varía con ella la longitud de cada uno de los otros dos lados iguales:

x	...	1	2	3	...
$f(x)$	...				...



a) Completa la tabla –añade puntos si es necesario– y represéntala.

b) ¿Pueden unirse los puntos de la gráfica? ¿Es continua la función? ¿Es creciente?

c) Indica el dominio y la imagen. Interpreta el resultado.

d) Tanto el máximo como el mínimo absolutos representan triángulos un tanto raros. Explica lo que ocurre.

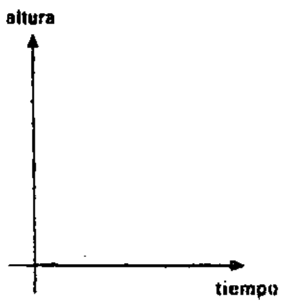
6 *Sin siquiera conocer la función.* El dominio de una cierta función es [–6, 8]. La imagen es [3, 6] y la función es creciente.

a) Calcula f(–6) y f(8).

b) Halla las coordenadas del máximo y mínimo absolutos.

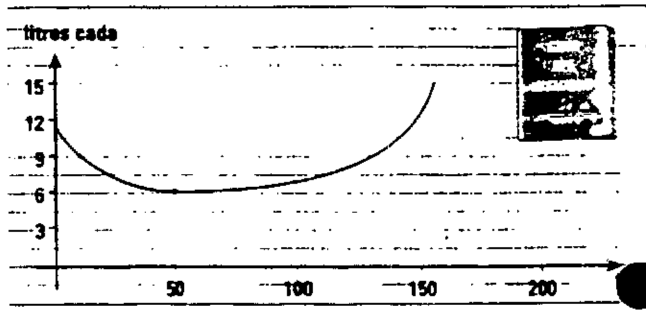
c) ¿Puede tener la función algún máximo local? ¿Y algún mínimo local?

7 *Construye a mano alzada.* La gráfica muestra la variación de la altura del nivel cuando el recipiente se llena con un caudal constante:



Esboza la forma de las gráficas para los siguientes recipientes:

8 En la guía de usuario de un modelo de automóvil automático (sin cambio manual de marchas) se indica el consumo de gasolina en función de la velocidad con la siguiente gráfica (los ingenieros la llaman "curva de la bañera"):

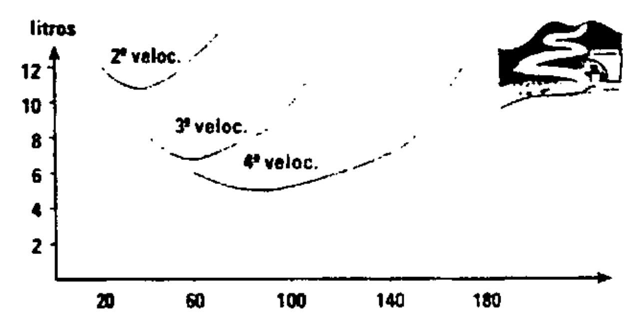


a) ¿Es más rentable conducir a 20 kilómetros por hora que a 100 kilómetros por hora?

b) ¿A qué velocidad debe conducir el ahorrador nato?

c) ¿A qué velocidad se consume menos de siete litros?

9 En un coche con cambio de marchas el consumo depende no sólo de la velocidad sino de la marcha que se lleve puesta. Observa las tres gráficas e indica:



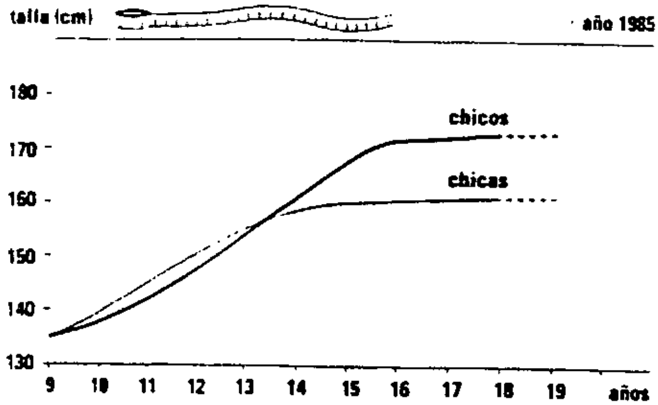
a) El consumo a 50 y a 70 km/h.

b) La velocidad máxima alcanzada consumiendo 8 litros.

c) La marcha mas económica a 50 y a 80 km/h.

d) El dominio e imagen de cada gráfica y su significado.

10 *Gráficas de crecimiento para chicos y chicas:*

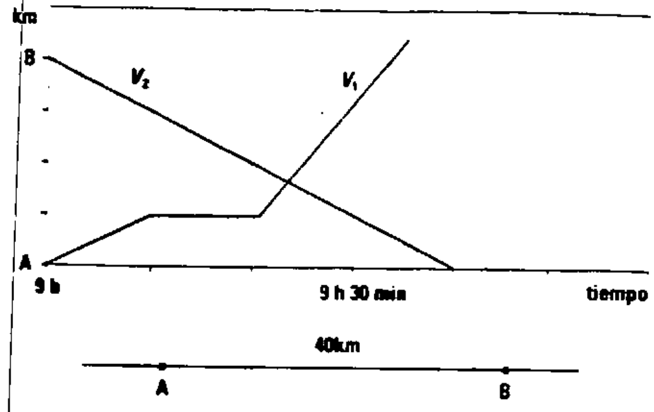


a) ¿Entre qué edades son ellas más altas que ellos?

b) ¿Tienen chicos y chicas, alguna vez, la misma altura a la misma edad?

c) Traza una gráfica aproximada que describa la diferencia de talla entre chicos y chicas, en función de la edad.

11 Dos vehículos v_1 y v_2, circulan por una carretera que une A con B. En el eje Y se mide la distancia de cada vehículo al punto A:



a) ¿De dónde parte cada uno y qué dirección llevan?

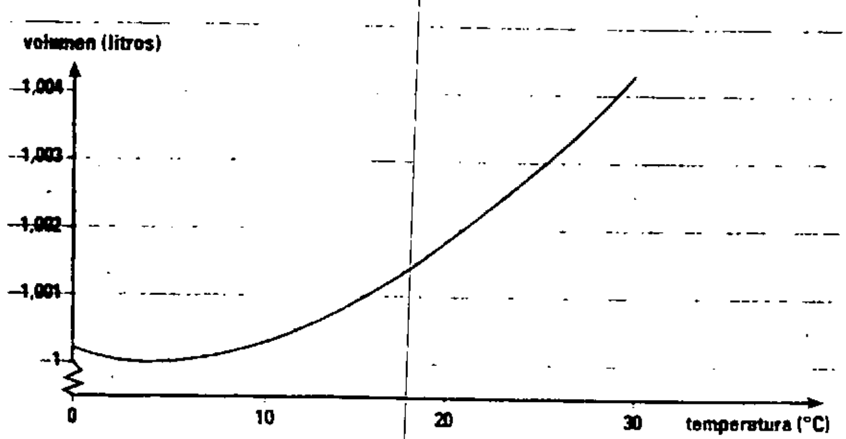
b) ¿Cuál para a echar gasolina?

c) Interpreta el punto de corte.

d) ¿Cuál marchó con mayor velocidad media?

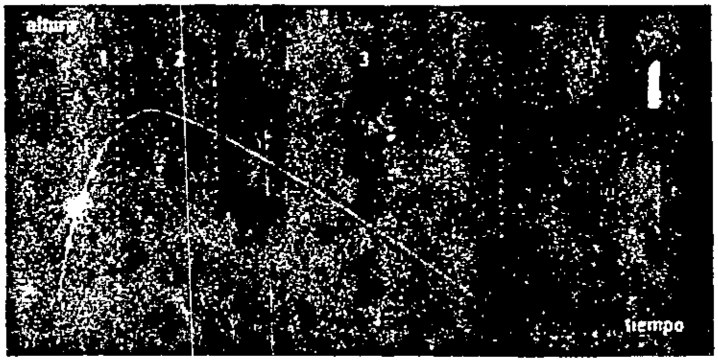
Para profundizar

1 Como es sabido, los cuerpos se dilatan con el calor, es decir, aumentan de tamaño. El agua también se dilata pero lo hace de forma algo atípica. En la gráfica puedes observar la curva de dilatación de 1 kg de agua:



En los libros elementales puede leerse: "1 litro de agua pesa 1 kg". ¿Qué añadirías para que la frase fuese totalmente correcta?

2 Disparamos una bala verticalmente. La grafica mide la distancia de la bala al suelo. Haz un comentario escrito sobre la gráfica:

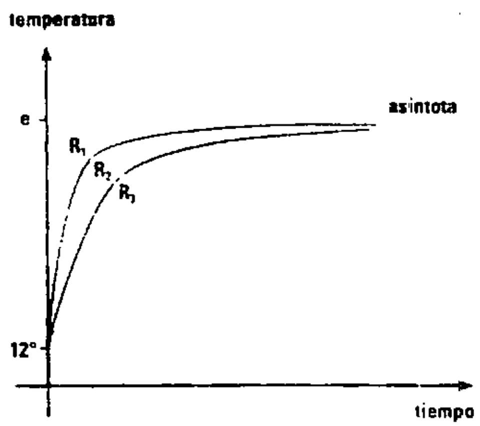


3 ***Asíntotas.*** Se llenan de agua tres recipientes R_1, R_2 y R_3 de distintos volúmenes y se calientan con un mismo mechero. Vamos midiendo las temperaturas y obtenemos la gráfica 1:

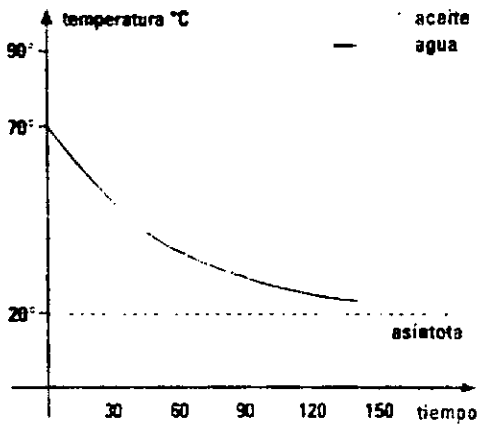
a) ¿A qué temperatura sale el agua del grifo?

b) ¿Cuál es el mayor de los recipientes?

c) Los gráficos tienden a confundirse con una recta (llamada asíntota). Interpreta el fenomeno e indica el valor de e.



gráfica 1



gráfica 2

4 Calentamos dos recipientes que contienen agua y aceite. Una vez retirados del fuego vamos midiendo su temperatura con un termómetro introducido en cada uno de los líquidos. Obtenemos experimentalmente las dos gráficas de enfriamiento (gráfica 2):

a) Indica las temperaturas del agua y del aceite al retirarlas del fuego

b) ¿Cuándo la temperatura del agua es mayor que la del aceite? Interpreta el punto de corte.

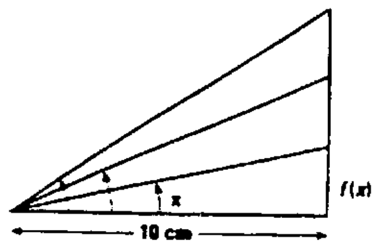
c) Cerca de $t = 0$, el descenso de las curvas es mas pronunciado. Intenta dar una explicación de tipo físico.

d) La curva del agua decrece más deprisa que la del aceite. Da una interpretación física de este hecho. (La palabra clave es "evaporación".)

e) ¿Cuál es la temperatura del laboratorio donde se hace el experimento?

5 Con ayuda de un transportador ve aumentando el ángulo x, completa la tabla... ¡hasta donde puedas! y represéntala.

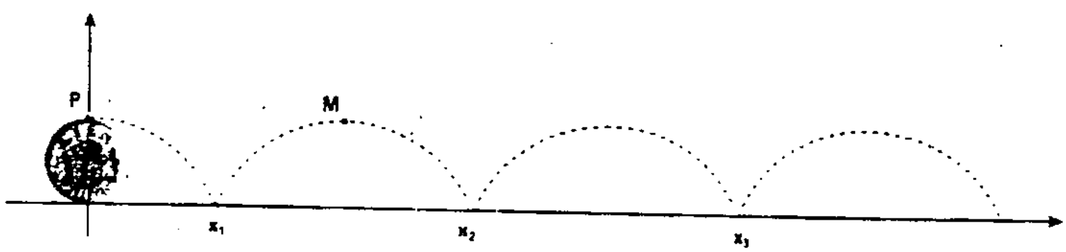
x (grados)	5°	10°	20°	30°	40°	50°	...
f(x) (cm)							



a) No hay papel tan grande que soporte la gráfica. Descríbela allá donde no se vea.

b) Determina el dominio y la imagen. ¿Tiene máximo? ¿Y mínimo?

6 ***La cicloide.*** Sobre el borde de una moneda de 2 cm de diámetro se marca un punto P. Al hacer rodar la moneda, el punto P describe una curva llamada *cicloide*:

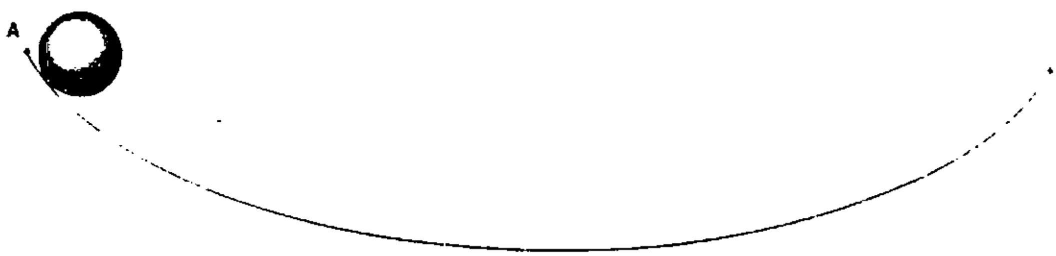


a) ¿Qué variables intervienen?

b) Calcula el valor del período.

c) Calcula las coordenadas de x_1, x_2 y M.

7 ***Una gráfica de oscilación amortiguada.*** Desde A dejamos libre una bola que comienza a oscilar en la rampa hasta detenerse. Traza la forma aproximada de la gráfica tiempo-distancia a A.



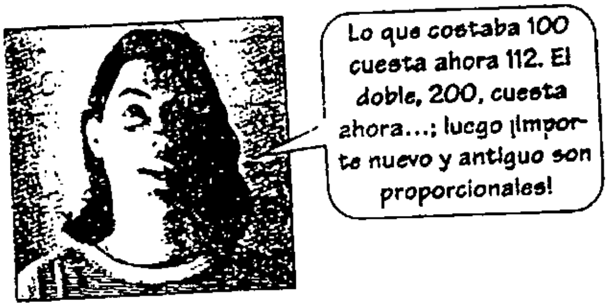
Alicia Rojás

Calentando motores...

De nuevo la proporcionalidad

1. El precio de la tarifa de los taxis ha subido un 12 %. Como el taxímetro no ha sido aún actualizado, el taxista debe subir, cada vez, el importe en un 12 %.

a) Completa la tabla usando reglas de tres:



taxímetro	nuevo importe
725 ptas	
550 ptas	
720 ptas	
...	

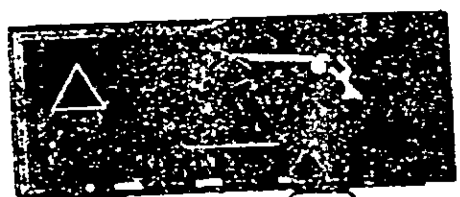
b) El taxista se cansa de tanta regla de tres, y como algo sabe de funciones, llama x a la cantidad que marca el taxímetro y calcula:

taxímetro	nuevo importe
100 ptas	112 ptas
x	y

$$y = \frac{112x}{100} \qquad y = 1{,}12x$$

Con la fórmula hallada, comprueba los resultados de la tabla del principio.

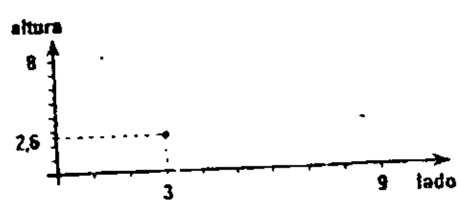
Investigamos la proporcionalidad



2. A simple vista parece que al duplicar el lado de un triángulo equilátero se duplica la altura, lo que sería una situación de proporcionalidad. Comprobémoslo experimentalmente:

a) Dibuja varios triángulos equiláteros, completa la tabla y la gráfica (utiliza un compás).

lado: x	3	6	8	9	...
altura: y	2,6				...
y/x	0,86				



b) ¿Son aproximadamente constantes los cocientes y/x? ¿Es la gráfica una recta que pasa por el origen? ¿Hay proporcionalidad entre base y altura?

c) Despeja y en $y/x = m$, donde m es la constante que has hallado, para obtener la fórmula aproximada de la función base → altura.

3 2

En marcha

1 La función lineal o de proporcionalidad

Observa en la tabla el precio de la harina y el azúcar:

peso: x	1 kg	2 kg	3 kg	4 kg	4,5 kg	...
precio harina: y_1	90	180	270	360	405	...
precio azúcar: y_2	250	500	750	1 000	1 125	...

Para cada producto, las magnitudes *peso* y *precio* son proporcionales. Al duplicarse, triplicarse, etc. la variable peso, se duplica, triplica, etc. la variable precio.

Los cocientes precio/peso son constantes.

En este caso, la constante, llamada de proporcionalidad, es el precio de un kilogramo.

$$\frac{y_1}{x} = \frac{90}{1} = \frac{180}{2} = \ldots = 90 \longrightarrow \quad \frac{y_1}{x} = 90 \quad \text{equivale a } y_1 = 90x$$

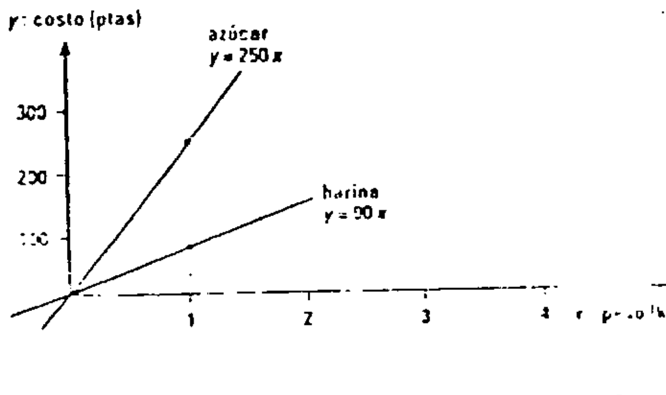
$$\frac{y_2}{x} = \frac{250}{1} = \frac{500}{2} = \ldots = 250 \longrightarrow \quad \frac{y_2}{x} = 250 \quad \text{equivale a } y_2 = 250x$$

harina: $y_1 = 90x$ azúcar: $y_2 = 250x$

- Las funciones que relacionan magnitudes proporcionales se llaman **lineales**. Su expresión es $y = mx$, donde m es la **constante de proporcionalidad**.

- *Gráficas*

La gráfica de una función lineal es una recta que pasa por el origen, y, recíprocamente, si la gráfica de una función es una recta que pasa por el origen, entonces la función es lineal.

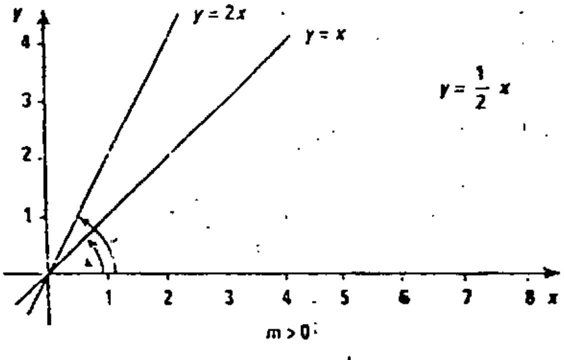


Tres formas de reconocer una función lineal:

- "Test del doble": A doble, triple, mitad... de x, corresponde doble, tri-ple, mitad... de y.
- Los cocientes y/x son constantes (constante de proporcionalidad).
- La gráfica de $x \longrightarrow y$ es una recta que pasa por el origen.

2 Estudio de $y = mx$. Pendiente

Veamos cómo varían las gráficas de $y = mx$ según los valores y signo de m

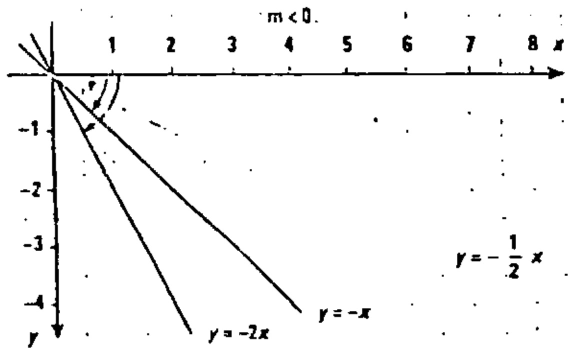


En las tres funciones, $m > 0$

Al aumentar m, aumenta el ángulo formado por las rect y el semieje positivo OX.

Las rectas son ascendentes, y crecen más rápidamente medida que aumenta m.

El coeficiente m es el responsable de la inclinación. eso se le llama también pendiente.



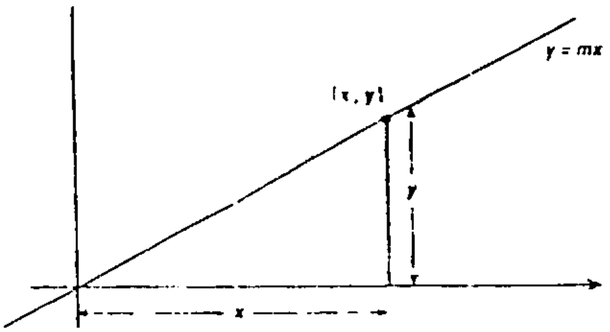
En las tres funciones, $m < 0$

Si m es negativa, las rectas son descendentes, y decrec más rápidamente a medida que aumenta la pendiente valor absoluto.

Por último, si $m = 0$, la gráfica de $y = 0$ está formada todos aquellos puntos que tienen segunda coordenada la, y coincide con el eje X.

- *Significado de la pendiente*

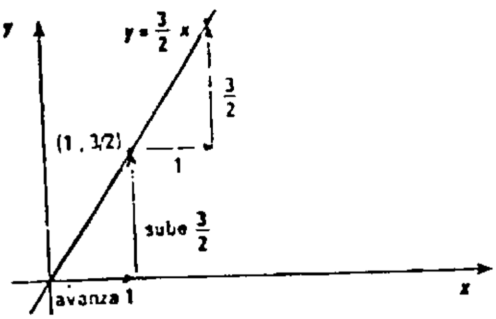
En $y = mx$, la pendiente es el coeficiente de proporcion dad y, por ello, igual al cociente y/x para cualquier p $(x\ ,\ y)$ de la gráfica distinto del origen de coordenadas

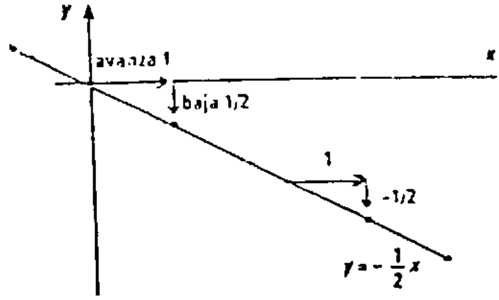


$(x\ ,\ y)$ pertenece a la gráfica:

$$\text{pendiente} = \frac{y}{x}$$

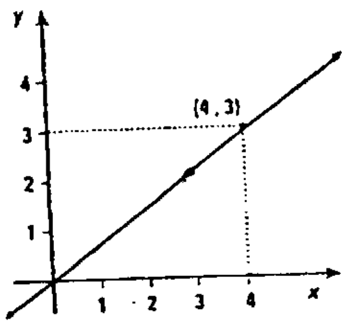
La pendiente es también la variación de la y cuando x aumenta una unidad





Ecuación de la función lineal conociendo un punto

Determinemos la función lineal cuya gráfica pasa por (4 , 3).



(4 , 3) verifica $y = mx$

$$3 = m \cdot 4$$

$$m = 3/4.$$

Así, la función lineal que pasa por el punto (4 , 3) es $y = \frac{3}{4}\ x$.

RESUMEN

- La función lineal $y = mx$ se determina con un punto.
- La pendiente m es la constante de proporcionalidad y/x.
- Su gráfica es una recta.
- Pasa por el origen de coordenadas.
- m mide la inclinación.
  - si $m > 0$, la recta es ascendente.
  - si $m < 0$, la recta es descendente.
  - si $m = 0$, la recta coincide con el eje X.

1 Para pintar 7 m² de superficie son necesarios 2,5 kilogramos de pintura. Cada kg de pintura cuesta 600 ptas. Estudia cada una de las siguientes funciones de proporcionalidad.

En cada caso, halla la ecuación, traza la gráfica e indica el significado de la constante de proporcionalidad (pendiente)

a) kg de pintura → superficie pintada

b) superficie pintada → kg de pintura

c) kg ... coste

2 Con un solo punto:

a) Traza las gráficas de:

$$y = 0{,}2x \quad y = \frac{4}{3}x \quad y = -0{,}6x \quad y = -\frac{5}{3}x$$

b) Halla las ecuaciones de las funciones lineales cuyas gráficas pasan por los puntos (6, 2) y (5, ... respectivamente.

3 Traza la gráfica de las siguientes funciones ...ales sabiendo que:

a) La pendiente es 3,2 b) ... x = 4 c) ...

3 La función afín. Ejemplos

Una **función afín** está definida por una expresión del tipo $y = mx + b$, don-
de m y b son números.

Observa la factura del teléfono; en ella intervienen dos funciones afines:

Ejemplos de funciones afines:

$y = 2x + 3$ $\quad y = x + 7$
$y = -x - 5$ $\quad y = 3$

Detalle de conceptos				
1 Cuota de abono del	25-08-96 al 25-10-96			2.500 ptas
	nº de pasos		*precio/paso*	
2 Servicio automático	480	×	6 ptas	2.880 ptas
Importe:				**5.380 ptas**
Total a pagar: (IVA 16% incluido)				**6.241 ptas**

La **función importe** de la factura del teléfono es función del número de pa-
sos. Es igual a una cuota fija de abono, de 2 500 ptas, más 6 ptas por el
número de pasos registrado:

La función importe es un ejemplo de función afín.

$$\underbrace{I(x)}_{\text{importe}} = \underbrace{6x}_{\text{n.º de pasos}} + \underbrace{2\,500}_{\text{cuota de abono}}$$

Así, para $x = 480$ pasos resulta: $I(480) = 6 \times 480 + 2\,500 = 5\,380$ ptas
que es el importe señalado en la factura.

La **función total a pagar** se obtiene incrementando el importe en un 16 %.

Subir un 16% a una cantidad c es multiplicarla por 1,16 ya que

$$c + \frac{16}{100}\,c = 1{,}16c$$

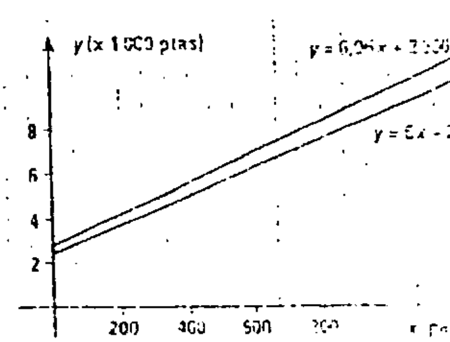
La cantidad es aquí el importe $6x + 2\,500$; luego:

Total a pagar.

$T(x) = 1{,}16\,(6x + 2\,500)$ $\qquad T(x) = 6{,}96x + 2\,900$

Gráficas

pasos: x	$I(x) = 6x + 2\,500$	$T(x) = 6{,}96\,x + 2\,900$
200	3 700	4 292
400	4 900	5 684
600	6 100	7 076
800	7 300	8 468



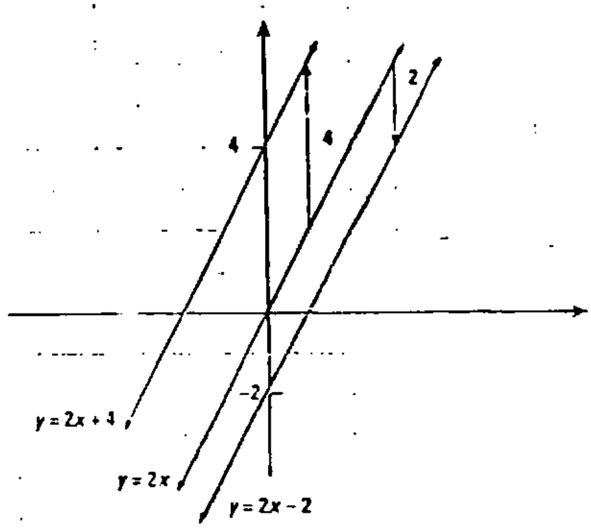
4 Estudio de la función afín

Las pistas de este aeropuerto podrían ser la representación gráfica de funciones.

A partir de una tabla de valores hemos dibujado la gráfica de tres funciones afines.

Veamos qué propiedades podemos deducir de su observación:

x	−2	−1	0	1	2	3
$y = 2x$	−4	−2	0	2	4	6
$y = 2x + 4$	0	2	4	6	8	10
$y = 2x - 2$	−6	−4	−2	0	2	4



– A partir de la gráfica de $y = 2x$, que es lineal, pueden trazarse las de funciones afines

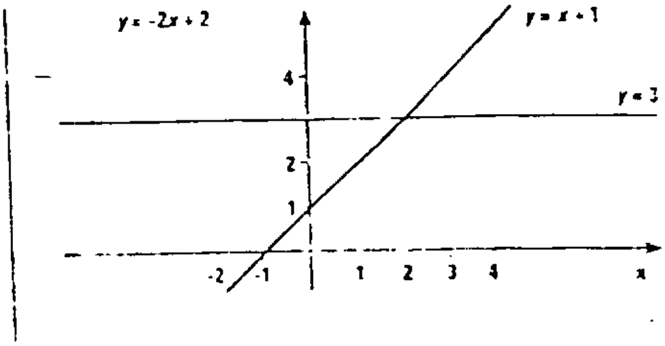
$$y = 2x + 4$$
$$y = 2x - 2$$

simplemente trasladando verticalmente la primera cuatro unidades ha arriba y la segunda dos hacia abajo. Así, la gráfica de una función a es una **recta**.

– Al tratarse de una recta, la gráfica de una función afín puede traza calculando únicamente dos de sus puntos.

– Las tres rectas son paralelas, con la misma inclinación, de lo que es ponsable el coeficiente de la x, el cual seguimos llamando pendiente.

– Por último, las tres funciones afines cortan el eje Y en los puntos de or nadas 4, 0 y −2 respectivamente. Por eso llamamos al término b orde da en el origen.

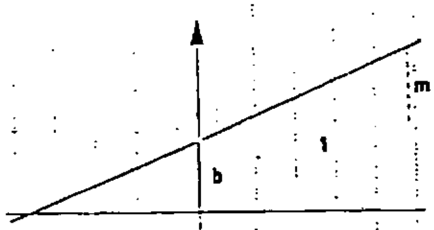


$m > 0$: creciente

$m < 0$: decreciente

$m = 0$: horizontal

- Función afín: $y = mx + b$.
  - m es la pendiente, variación de la y cuando x aumenta una unidad.
  - b es la ordenada en el origen.
- Dos rectas son paralelas si coinciden sus pendientes.
- Para representar una función afín bastan dos puntos.

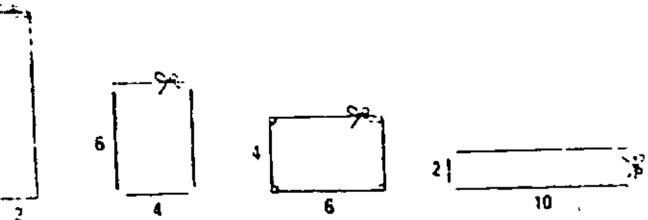


Traza sobre unos mismos ejes las tres rectas que indican:

$= -\frac{1}{2} \cdot x + 3$ $\quad y = x + 3 \quad$ $y = 3$

$= \frac{2}{3} x - 4$ $\quad y = -1 + \frac{2}{3} x \quad$ $y = 4 + \frac{2}{3} x$

Con un cordel de 24 cm podemos formar una infinidad de rectángulos.



Para cada valor x de la base se obtiene un valor y de altura

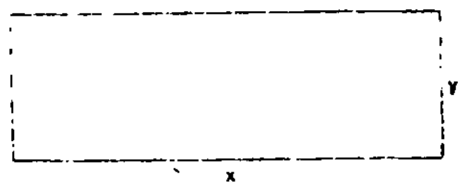
base: x	1	3	5	7	...
altura: y	11	9	7	5	

Completa la tabla y represéntala

¿Son proporcionales base y altura?

¿Se trata de una función afín?

d) Justifica la expresión $2x + 2y = 24$. Despeja y.



e) Representa la función anterior. Sobre la gráfica, calcula aproximadamente la base de un rectángulo de altura 8,2 cm.

f) ¿Cuál es el dominio útil de la función?

23 *Funciones en el supermercado.* Calcula las ecuaciones de las tres funciones siguientes y represéntalas en unos mismos ejes:

a) Calcular el 15 % de un precio: $x \to 15\%$ de x

b) Aumentar el precio en un 15 %: $x \to x + 15\%$ de x

c) Disminuir el precio en un 15 %: $x \to x - 15\%$ de x

24 Hay gente que piensa que un aumento del 10% seguido de una rebaja del 10% dejaría el precio invariable:

a) Compruébalo para un precio inicial de 300 ptas.

b) Calcúlalo para un precio x y obtén la ecuación de la función:

precio inicial → precio final.

5 Cálculos alrededor de las funciones afines

1. Puntos de intersección con los ejes

Calculemos los puntos de corte de $y = -\frac{1}{2}x - 2$ con los ejes X e Y.

- Corte con el eje Y:

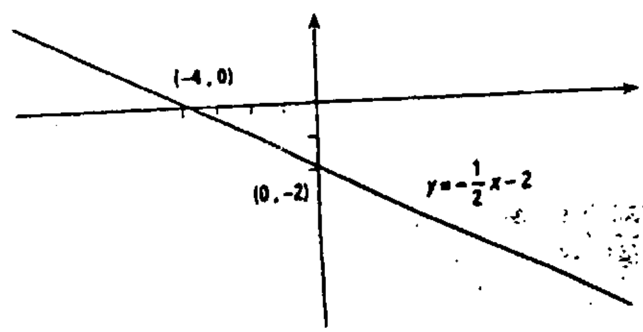
Si $x = 0$, $y = -2$; luego corta el eje Y en $(0, -2)$.

- Corte con X:

Como en ese punto la ordenada y ha de ser cero, resolvemos

$0 = -\frac{1}{2}x - 2$. Resulta $x = -4$.

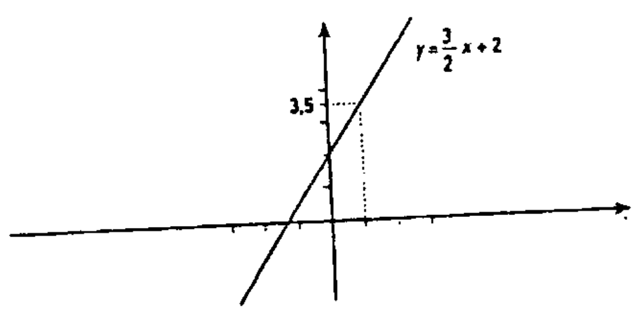
Corta el eje X en $(-4, 0)$.



2. Imagen inversa

Consideremos la función afín de ecuación $y = \frac{3}{2}x + 2$. ¿Para qué va
de x es y igual a 3,5?

Sustituyendo en la ecuación el valor $y = 3{,}5$ podemos despejar el cor
pondiente de x:



$$3{,}5 = \frac{3}{2}x + 2 \qquad 1{,}5 = \frac{3}{2}x$$

luego: $x = 1$

3. Ecuación de la recta que pasa por dos puntos

¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por $A(2\ ,\ 1)$ y $B(4\ ,\ 3)$?

Hemos de determinar m y b en $y = mx + b$. Primero hallaremos la pendiente y después la ordenada en el origen.

– Valor de la pendiente:

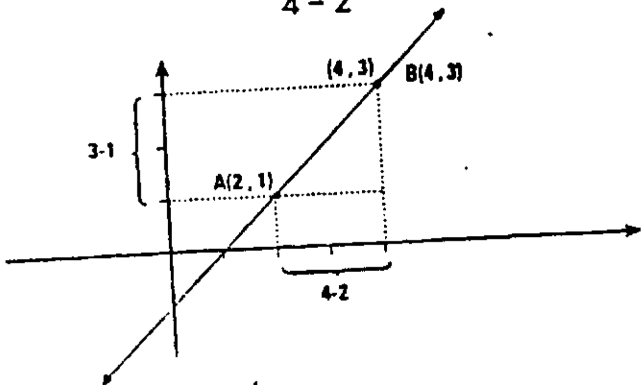
Los puntos de la recta son: $A = (2\ ,\ 1)$ y $B = (4\ ,\ 3)$

variación de la y: $3 - 1$

variación de la x: $4 - 2$

La variación de la y cuando x aumenta una unidad es:

$$m = \frac{3-1}{4-2} = 1$$



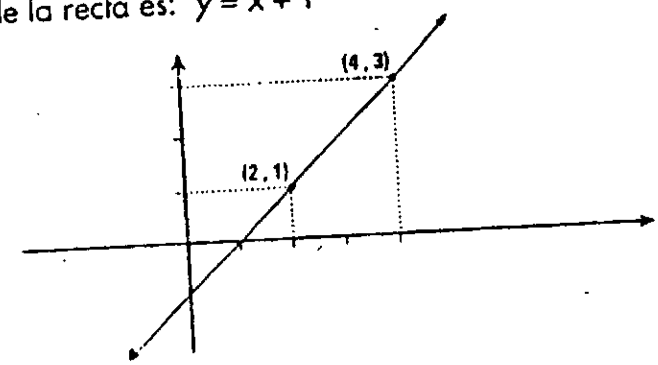
La ecuación de la recta $y = x + b$

– Valor de la ordenada en el origen:

El punto $A = (2\ ,\ 1)$ es de la recta, luego:

$$1 = 2 + b \rightarrow b = -1$$

La ecuación de la recta es: $y = x + 1$



4. Rectas paralelas

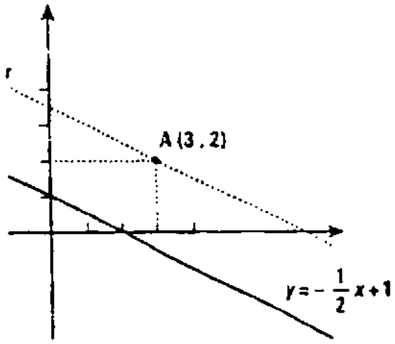
Por el punto $A(3\ ,\ 2)$ sólo puede trazarse una paralela, r, a $y = -\frac{1}{2}x +$

Determinemos su ecuación.

Dos rectas paralelas tienen igual pendiente; luego $y = -\frac{1}{2}x + b$. F

calcular b.

Imponiendo que $A\,(3\,,\,2)$ está en r, y por lo tanto verifica su ecuación, ob tenemos dicha constante:

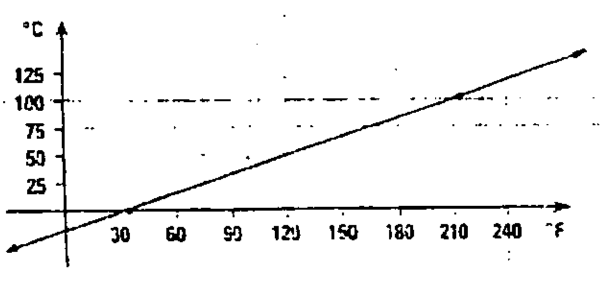


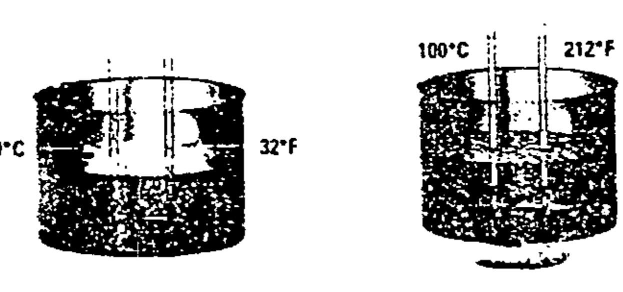
$$2 = -\frac{1}{2}\cdot 3 + b \rightarrow b = \frac{7}{2}$$

Según lo visto, la ecuación buscada es:

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}.$$

4 La escala centígrada de temperaturas (escala Celsius) está graduada de 0 a 100. La escala Fahrenheit –usada en los países anglosajones– está graduada desde 32 a 212. En ambas escalas, el extremo inferior corresponde al punto de congelación del agua, y el superior al punto de ebullición.





a) *Dos puntos definen la recta*. Los puntos (32 , 0) y (212 , 100) permiten conocer la fórmula que pasa grados Fahrenheit a centígrados. Calcúlala.

(Deberás llegar a $y = \frac{5}{9}x - \frac{160}{9}$).

b) *Intervienen los negativos*. Pasa de Fahrenheit centígrados:

−45°F → ☐°C 0°F → ☐°C

18°F → ☐°C 451°F → ☐°C

Comprueba que tus resultados son acordes con l gráfica.

c) ¿Se inquietaría un médico inglés al observar e un paciente una temperatura de 100°F?

d) *Imagen inversa*. Expresa en grados Fahrenheit:

−15°C → ☐°F

0°C → ☐°F

90°C → ☐°F

Usa la fórmula y, después, compruebа en la gráfica.

e) ¿Qué temperatura se expresa con el mismo n mero en °C y en °F?

Indicación: ¿Cómo tienen que ser x e y en la fó mula $y = \frac{5}{9}x - \frac{160}{9}$?

6 Velocidad constante. Espacio recorrido y posición

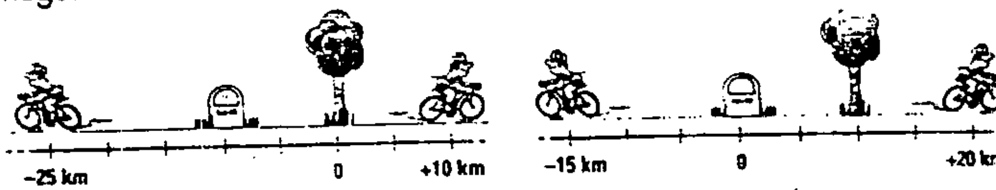
Espacio. Cuando la velocidad es constante (movimiento uniforme), el espa-
cio recorrido es proporcional al tiempo:

espacio = velocidad · tiempo

Así, si un ciclista avanza por una carretera a 20 km/h, tenemos $e = 20t$. E
espacio indica los kilómetros recorridos por el ciclista pero no nos dic
dónde está.

Posición. La posición, en un momento determinado, es el lugar donde s
encuentra el ciclista. Ésta debe indicarse sobre una recta graduada, cuy
origen es el lugar desde el que medimos. La posición puede ser positiva
negativa.

La posición depende de
dónde situamos el origen.



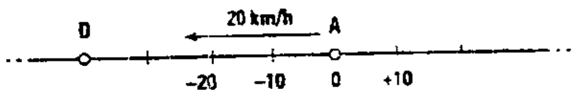
origen: el árbol

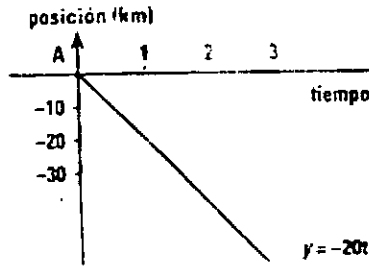
origen: el mojón

EJEMPLO

El ciclista parte en el instante cero del punto A y se desplaza hacia D c
una velocidad de 20 km/h. Llamamos t al tiempo e y a la posición:

Si el móvil parte del origen, cuando $t = 0$, la función es lineal.





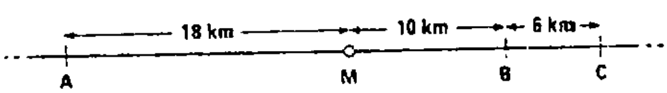
Las posiciones son negativas. Como cada hora avanza −20 km, tenem
$y = -20t$.

Así, al cabo de 5 horas, $y = -20 \cdot 5 = -100$ km. El signo negativo indica c
el ciclista se encuentra a la izquierda de A.

Distingue:
Espacio recorrido: 100 km
Posición: kilómetro −100

1 Indica la posición de M según dónde situemos el origen:

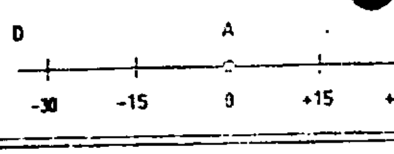
En A, en B, o en C.



2 Un móvil parte de A, a 30 km/h. Traza en c
caso la gráfica tiempo → posición y determin
ecuación si:

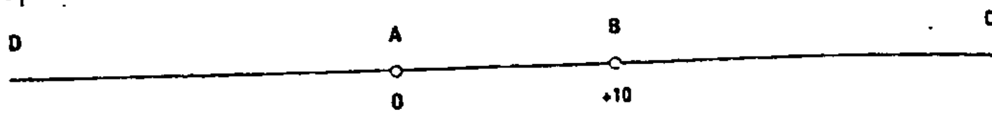
a) Se dirige a C.

b) Se dirige a D.



7 Movimiento y función afín

Fijamos el punto *A* como origen. A nuestro ciclista, que corre a 20 km/h, le vamos a dar más libertad: podrá partir del origen *A* o no, podrá avanzar o retroceder, podrá salir a tiempo o retrasarse..., tanto da. Siempre aparecerá una amable función afín que describa su posición.



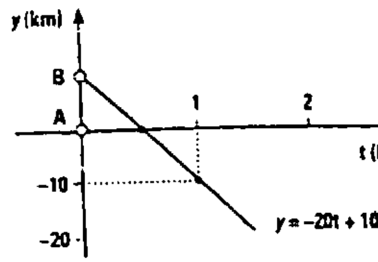
Procede con orden:

- **Se inicia el movimiento: punto de arranque de la gráfica.**
- **El móvil, ¿avanza o retrocede?**
- **Ecuación.**

EJEMPLO 1

El ciclista parte de *B* y se dirige a *D*. En el instante $t = 0$ ocupa la posición $y = 10$. A esta posición hay que restarle 20 km cada hora, luego:

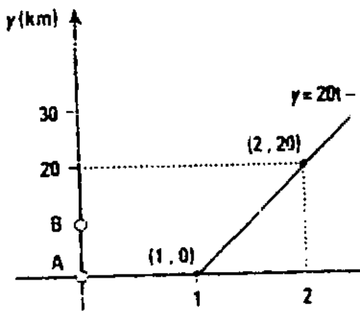
$$y = 10 - 20t \quad \text{o bien} \quad y = -20t + 10$$



Observa que el punto de corte con el eje X corresponde al instante en que el ciclista está pasando por A: $0 = -20t + 10$; $t = 0{,}5$ h.

EJEMPLO 2

El tiempo comienza a contarse desde una "hora cero" (pongamos que a las 10 h). El ciclista sale de *A*, hacia *C*, pero se retrasa una hora en la salida (parte a las once). Determinemos la posición.



En el instante $t = 1$, el ciclista está en *A*: punto (1 , 0).

Pasada una hora, $t = 2$, ha recorrido 20 km: punto (2 , 20).

Dos puntos determinan la ecuación.

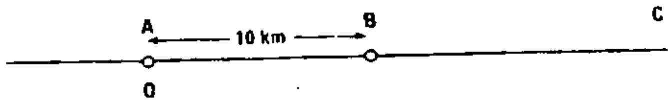
A partir de esos dos puntos, (1 , 0) y (2 , 20), calculamos la ecuación como ya sabemos. Resulta: $y = 20t - 20$ (para $t \geq 1$)

¡ACCIÓN!

1 Traza la gráfica y calcula la función posición en las siguientes situaciones:

Origen de posiciones: A

Velocidad: 20 km/h.



a) Parte de *B*, en el instante $t = 0$, y se dirige a *C*

b) El tiempo comienza a contarse desde las 1 (hora cero), pero el ciclista parte dos horas an desde *A*, y se dirige a *C*.

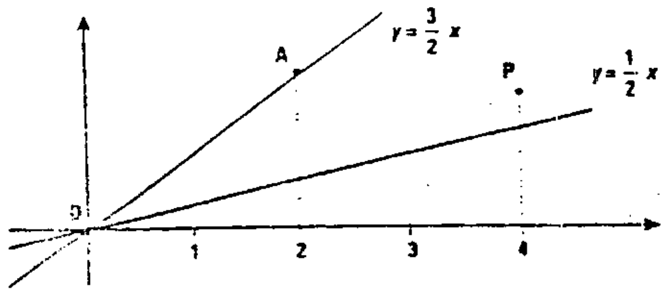
c) El ciclista sale de *B*, hacia *C*, con dos horas de retraso.

d) Calcula, en cada uno de los casos anteriores, qué instante pasa por el kilómetro 65.

Para entrenarse

¿Verdadero o falso?

1 Observa las gráficas:



a) La ordenada de A es 3.

b) El punto (10 , 30) está en la recta OA.

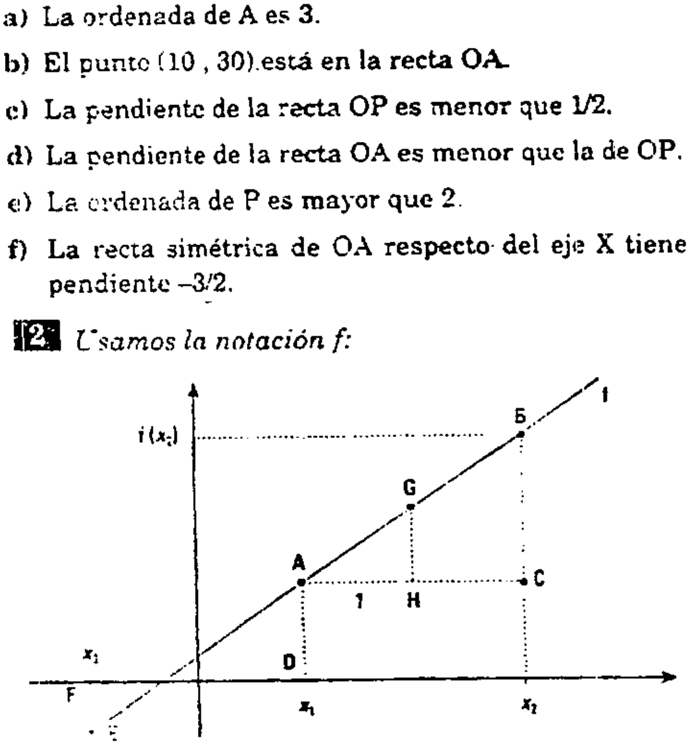
c) La pendiente de la recta OP es menor que 1/2.

d) La pendiente de la recta OA es menor que la de OP.

e) La ordenada de P es mayor que 2.

f) La recta simétrica de OA respecto del eje X tiene pendiente –3/2.

2 *Usamos la notación f:*



a) $f(x_1)$ es la longitud $\overline{AD}$.

b) $f(x_3)$ es la longitud $\overline{EF}$.

c) $f(x_2) - f(x_1)$ es la longitud $\overline{AB}$.

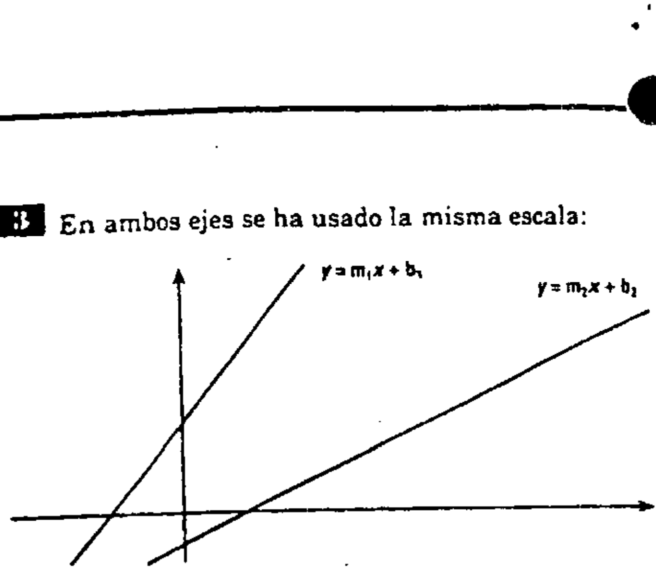
d) La pendiente es la longitud $\overline{GH}$.

e) La pendiente es $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$.

f) La pendiente es $f(x_2)/x_2$.

g) La pendiente es $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

3 En ambos ejes se ha usado la misma escala:



a) Tanto m_1 como m_2 son mayores que uno.

b) $b_2 > 0$

c) $b_1 > b_2$

d) $m_1 < m_2$

Gráficas

4 Representa:

a) $y = 3x$ b) $y = 0{,}2x$ c) $y = (-1/2)x$ d) $y = -0{,}75x$

5 Elige dos puntos y representa:

a) $y = 2x - 3$ b) $y = 0{,}2x + 1$

c) $y = -x + 4$ d) $y = (-3/2)x + 5/6$

6 *Función constante.* Representa estas funciones:

a) $y = 6$ b) $y = -6$ c) $y = 0$

7 Escribe en la forma $y = mx + n$ y representa.

a) $y = 2 + 3(x - 1)$

b) $y = -2(3 - x)$

c) $2x + 3y = 6$

d) $\dfrac{x}{y+2} =$ [illegible]

e) $\dfrac{2}{x+3} = \dfrac{1}{y+4}$

8 A veces, la representación no ayuda. Averigua si los puntos (51 , – 25,2), (– 13 , 6,7) ó (0,3 , 3/2) pertenecen a la recta $y = -0{,}5x + 0{,}3$.

9 *Cortes con los ejes.* Determina los puntos de intersección de las siguientes rectas con los ejes:

a) $y = 3x - 5$ b) $y = (2/5)x - 1$

c) $y = -0{,}2x + 1$ d) $y = 3x$

10 *Imagen inversa.* En las siguientes funciones calcula x de modo que y valga 3.

a) $y = 5x$ b) $y = -10x + 1$

c) $y = 3x - 3$ d) $y = -(1/6)x + 1/2$

11 *Construimos funciones*. Llama y al resultado y exprésalo en función de x:

a) Dado x, hallamos su doble.

b) Dado x, lo dividimos entre 3 y el resultado lo multiplicamos después por 12.

c) Le sumamos a un número su mitad.

d) Incrementamos un número x en un 10%.

e) Rebajamos una cantidad x en un 8%.

12 En los siguientes casos se relacionan magnitudes proporcionales. La pendiente de las funciones lineales a que dan lugar tiene un claro significado que debes averiguar.

Indica la función que expresa:

a) El precio de x kg de un determinado producto.

Precio de 3 kg: 210 ptas.

b) El paso de x centímetros a kilómetros.

c) Los kilómetros reales correspondientes a x cm medidos sobre un plano de escala 1:10 000.

d) El valor en dólares de x pesetas.

Un dólar = 118 ptas.

e) El espacio recorrido en t segundos.

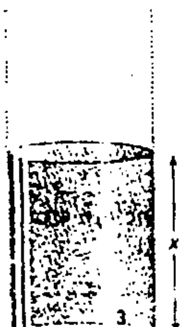
f) El peso de un cuerpo de x cm^3 de volumen.

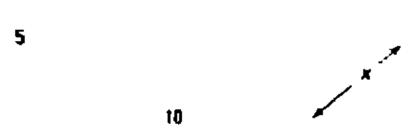
Densidad: 1,3 g/cm^3.

13 Cuenta las pulsaciones que tienes en 15 segundos. Con ese dato calcula las pulsaciones que tienes en un minuto, una hora y un año.

Halla la ecuación de la función tiempo (s) ⟶ número de pulsaciones.

14 Halla el volumen en función de x:

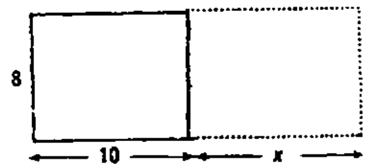




15 *Visita a domicilio*. El servicio técnico de una ma ca de televisores cobra 1 500 ptas por cada hora qu trabaja pero añade un suplemento de 1200 ptas si ac de al domicilio del cliente.

Hay dos funciones horas ⟶ costo, dependiendo de qu el técnico vaya, o no, al domicilio. Calcula sus ecuaci nes y represéntalas.

16 *Perímetro y área*. Ampliamos el rectángulo como indica la figura:



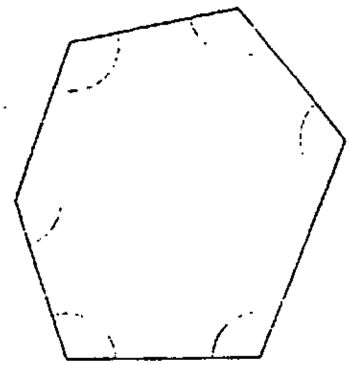
a) Calcula el perímetro en función de x.

b) Representa la función perímetro.

c) Calcula el área en función de x.

d) Representa la función área.

17 Calcula la suma de los ángulos interiores de polígono en función del número de lados:



Indicación: Elige un vértice cualquiera y traza to las diagonales que parten de él.

18 El contrato de alquiler de un vehículo consiste pagar 10 000 ptas fijas más 50 ptas por cada kilóme recorrido a partir de los 100 primeros kilómetos (si recorren 100 km, o menos, sólo cobran las 10 000 pta

a) Traza la gráfica y halla la ecuación de la función lómetros ⟶ importe (¡cuidado, en dos trozos!).

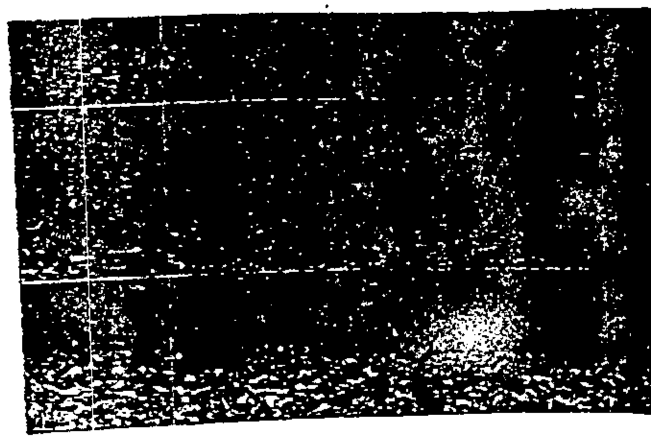
b) ¿Cuál es la máxima distancia que puede recorre con 17 250 ptas?

19 *Dilatación.* La longitud de una barra de hierro aumenta con la temperatura. Los físicos saben que la longitud de una barra de 25 m, a una temperetura de t °C es $L(t) = 25\,(1 + 1{,}2 \cdot 10^{-5}\,t)$.

a) ¿Se trata de una función afín? ¿Cuál es su pendiente en forma decimal?

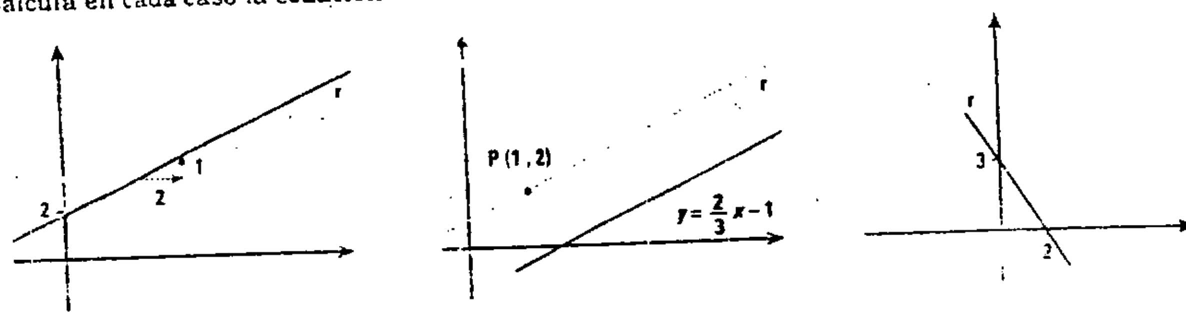
b) Calcula la longitud de un rail de tren de 25 m a una temperatura invernal extrema de −20°C y a otra veraniega de 40°C. Calcula la diferencia.

c) ¿Por qué, al construir la vía, se deja siempre una pequeña separación entre dos raíles?



Para profundizar

Calcula en cada caso la ecuación de r:



Determinación de una recta. En cada caso, halla la ecuación de la recta y represéntala:

a) La recta es una función lineal cuya pendiente es 2,5.

b) x e y son proporcionales y la constante de proporcionalidad y/x, es 3.

c) x e y son proporcionales y cuando $x = 1{,}5$, $y = 4{,}5$.

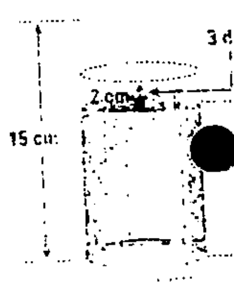
d) La recta pasa por (2 , 3) y por (4 , 5).

e) La recta pasa por (3 , 2) y por (−9 , −6).

f) La recta pasa por (3 , 4) y por (6 , 4).

g) La recta pasa por (−1 , 2) y es paralela a $y = \dfrac{3}{2}x + 5$.

La altura inicial de un líquido es 15 cm. Es muy volátil y al evaporarse baja el nivel 2 cm cada 3 días.

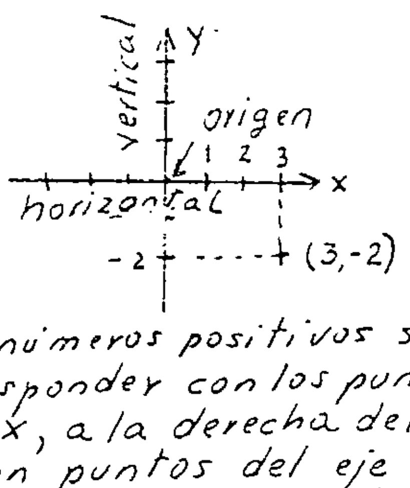


a) Traza unos ejes. Llama x al número de días e y a la altura del nivel. Marca los puntos correspondientes al tercero, sexto y noveno días. ¿Se trata de una función afín?

COLEGIO DISTRITAL "LA AMISTAD J.T.
GUIA DE MATEMATICAS Nº 1 grado 10

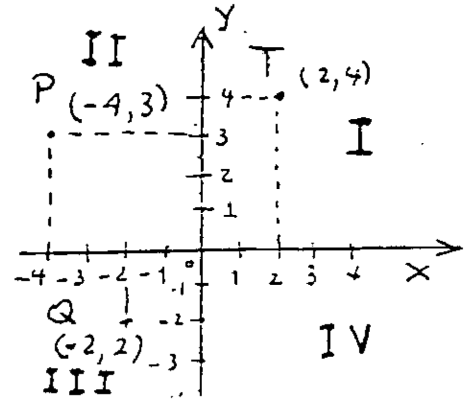
Parejas ordenadas y puntos en un plano.

Para representar parejas en el plano cartesiano. Se escoge una recta horizontal, llamada eje horizontal (eje X) y una recta vertical, el eje vertical (eje Y). Su punto de intersección es el origen. En seguida se escoge una **escala** para convertir cada eje en una recta numérica cuyo punto cero es el origen y se indica la escala en cada eje. Para localizar la gráfica de la pareja (3, -2) se traza una recta vertical que pase por 3 en el eje X y una horizontal que pase por -2, en el eje Y. El punto intersección de estas rectas es la gráfica de (3, -2)



Los números positivos se hacen corresponder con los puntos del eje X, a la derecha del origen y con puntos del eje Y, arriba del origen. Los números negativos se asocian con los puntos a la izquierda del origen, en el eje X y puntos abajo del origen, en el eje Y.
La superficie en la cual están los ejes es un conjunto de puntos llamado **Plano**.

A cada punto del plano, se asocia una pareja de números en particular.



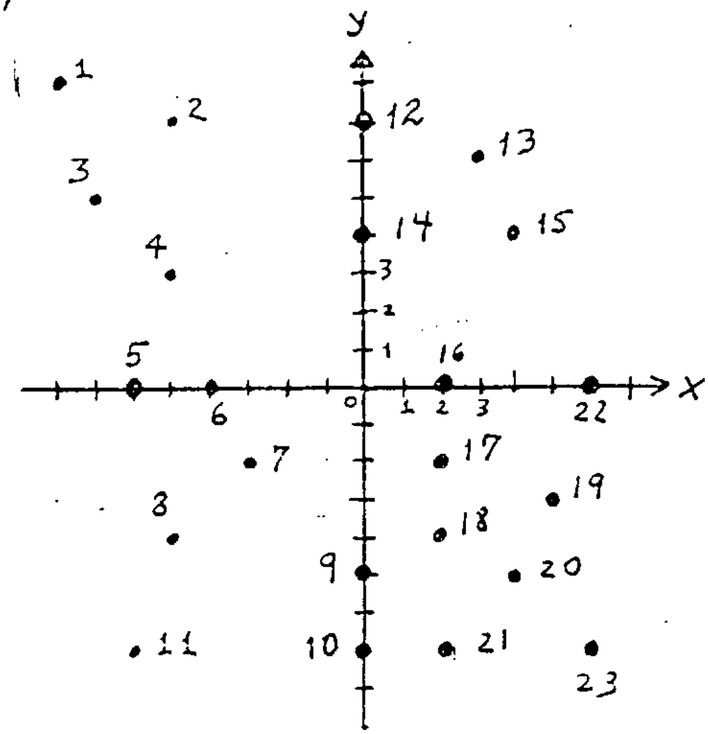
Desde P se traza una recta vertical hasta el eje X; la coordenada del punto P donde la vertical encuentra al eje x es la **abcisa de P, -4**.
Dibujar una recta horizontal desde P hasta el eje Y; la coordenada del punto, donde se encuentran, es la **ordenada de P, 3**.
Las coordenadas de P se escriben siempre poniendo la abcisa primero (-4, 3)

La correspondencia uno a uno entre puntos y parejas de números se llama: Sistema coordenado plano o plano coordenado.
Gracias a esta correspondencia, se puede pensar en un punto como una pareja ordenada de números y se puede representar una pareja ordenada como un punto.
Los ejes del sistema coordenado dividen al plano en 4 regiones llamadas Cuadrantes: I; II; III, IV

Colegio Distrital "la Amistad J.T"
GUÍA DE MATEMÁTICAS Nº2 grado 10

EJERCICIOS.

1. Dar las coordenadas de cada punto numerado.



2. Trazar la gráfica de los siguientes puntos:

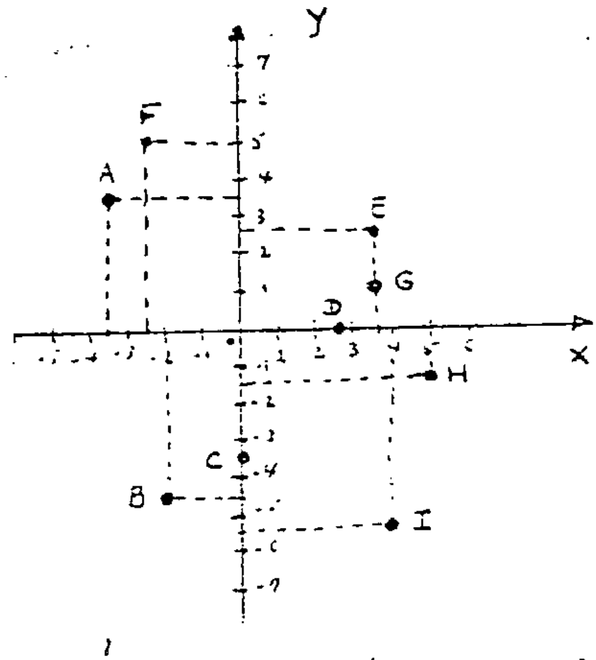
1. $(3,4)$	5. $(-4,4)$	9. $(-6,10)$
2. $(0,9)$	6. $(9,2)$	10. $(-11,8)$
3. $(-8,9)$	7. $(12,-7)$	11. $(8,0)$
4. $(-7,6)$	8. $(7,-10)$	12 $(-8,0)$

3. En los ejercicios siguientes se dan 3 vértices de un rectángulo. Hallar el cuarto vértice.

1. $(0,0)$; $(0,-4)$; $(6,0)$
2. $(0,0)$; $(-2,0)$; $(0,3)$.
3. $(2,2)$; $(-3,-1)$; $(2,-1)$
4. $(3,4)$; $(-1,1)$; $(3;1)$
5. $(-8,5)$; $(-2,-3)$; $(-2;5)$
6. $(-3,3)$; $(-7,5)$; $(-7,3)$

4- Trazar la gráfica de tres puntos en dos cuadrantes por lo menos, cuyas coordenadas sean enteros que satisfagan las condiciones dadas:

1. la abcisa es el doble de la ordenada
2. la abcisa es dos veces menor que la ordenada
3. La ordenada es tres veces mayor que la mitad de la abcisa.
4. La ordenada es el duplo del valor absoluto de la abcisa.
5. Dar las coordenadas de cada letra.



6. Localice en el mismo sistema de coordenadas, los siguientes pares ordenados de números:

$A(3\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2})$; $B(-4\frac{1}{2}, 3)$
$C(-2\frac{3}{4}; -3\frac{3}{4})$ $E(4\frac{1}{4}, -3$
$F(3, -2\frac{1}{2})$ $G(1\frac{1}{4}; -3\frac{3}{4}$
$H(1, 3\frac{1}{2})$ $I(-3\frac{1}{4}; 0)$.

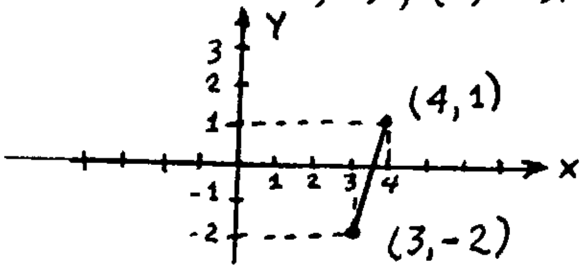
Colegio Distrital "La Amistad J.T"

GUíA de MATEMÁTICAS grado 10

Nº 3

TEMA: DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS DEL PLANO.

1. Halle la distancia entre los pares de puntos cuyas coordenadas son: $(4, 1)$; $(3, -2)$.



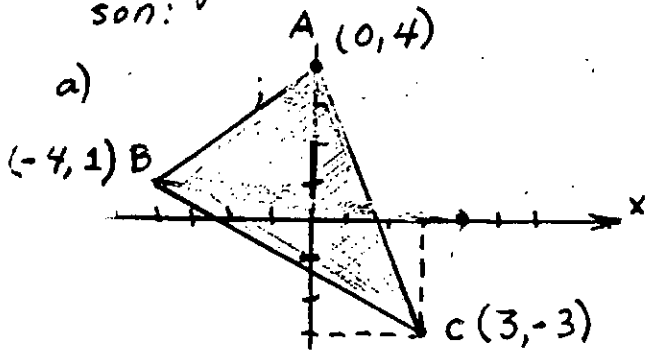
$d = \sqrt{(4-3)^2 + (1-(-2)^2}$

$d = \sqrt{1^2 + 3^2}$

$d = \sqrt{1+9} = \sqrt{10} = 3{,}16$

2. Hallar el perímetro de los Triángulos cuyos vértices son:

a)



Perímetro: $d(AB) + d(BC) + d(CA)$

$d(AB) = \sqrt{(0-(-4))^2 + (4-1)^2}$

$d(AB) = \sqrt{4^2 + 3^2}$

$d(AB) = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

$d(BC) = \sqrt{((-4)-3)^2 + (1-(-3)^2}$

$d(BC) = \sqrt{(-7)^2 + 4^2}$

$d(BC) = \sqrt{49+16} = \sqrt{65} = 8{,}06$

$d(CA) = \sqrt{(3-0)^2 + ((-3)-4)^2} =$

$d(CA) = \sqrt{3^2 + (-7)^2} =$

$d(CA) = \sqrt{9 + 49}$

$d(CA) = \sqrt{58} = 7{,}48$

Perímetro: $5 + 8{,}06 + 7{,}48 = 20{,}54$

b) $(2,-5)$; $(-3, 4)$; $(0,-3)$

c) $(-1,2)$; $(4, 2)$; $(-3,5)$

3. Demostrar que los triángulos dados por las coordenadas de sus vértices son isósceles (Dos lados iguales).

a) $(2,-2)$; $(-3, 1)$; $(1, 6)$

b) $(2, 4)$; $(5, 1)$; $(6, 5)$

c) $(-2, 2)$; $(6, 6)$; $(2, -2)$

d) $(6, 7)$; $(-8,-1)$; $(-2,-7)$

4. Demostrar que los triángulos dados por las coordenadas de sus vértices son rectángulos (tienen un ángulo recto y dos agudos; y cumplen el teorema de Pitágoras) Hallar sus áreas.

a) $(0, 9)$; $(-4, -1)$; $(3, 2)$

b) $(10, 5)$; $(3; 2)$, $(6, -5)$

c) $(3, -2)$; $(-2, 3)$; $(0, 4)$

d) $(-2, 8)$; $(-6, 1)$; $(0, 4)$.

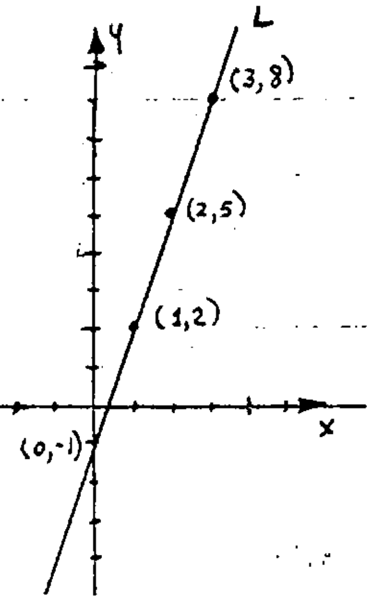
5. Demostrar que los puntos $(0, 1)$; $(3, 5)$; $(7, 2)$; $(4, -2)$ son los vértices de un cuadrado.

6. Hallar el perímetro del cuadrilátero cuyos vértices son: $(-3,-1)$; $(0, 3)$; $(3, 4)$, $(4, -1)$.

olegio Distrital "La Amistad J. T"
UIA DE MATEMATICAS Nº 4 grado 10

ECTAS - pendiente de una recta

endiente
ea L una recta en el plano que no es
aralela al eje y. Sean $P_1(0,-1)$
$P_2(1,2)$; $P_3(2,5)$; $P_4(3,8)$ pun-
os cualesquiera en L



Definimos la pendiente de L como la elevación por unidad de avance.

Sean $P_1(0,-1)$ y $P_2(1,2)$ dos puntos cualesquiera de L
Llamamos.
$\Delta Y = Y_2 - Y_1$ el alza o elevación desde
hasta P_2 y $\Delta X = X_2 - X_1$ el
vance desde P_1 hasta P_2.

ndiente $= m = \dfrac{\text{elevación}}{\text{avance}} = \dfrac{\Delta Y}{\Delta X} = \dfrac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}$

$= \dfrac{\Delta Y}{\Delta X} = \dfrac{2-(-1)}{1-0} = \dfrac{2+1}{1} = 3$

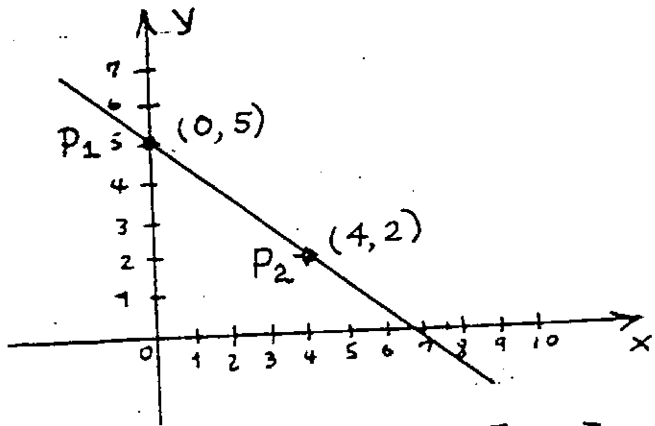
na pendiente $m = 3$ significa que
crece 3 unidades cada vez que
crece 1 unidad. En otras pala-
ras que el cambio en y es 3
eces el cambio en x.
Supongamos que en lugar de se
eccionar los puntos P_1, P_2, se-
eccionamos un par distinto.
$P_3(2,5)$; $P(3,8)$. y calculamos
m'

$m' = \dfrac{\Delta Y}{\Delta X} = \dfrac{Y_4 - Y_3}{X_4 - X_3} = \dfrac{8-5}{3-2} = \dfrac{3}{1} = 3.$

entonces $m = m'$.

$$\boxed{\text{Pendiente} = m = \frac{\text{elevación}}{\text{avance}} = \frac{\Delta Y}{\Delta X}}$$

Ejemplo: Calcule la pendiente de la recta que pasa por los puntos $P_1(0,5)$ y $P_2(4,2)$ de la figura.



$m = \dfrac{\Delta Y}{\Delta X} = \dfrac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} = \dfrac{2-5}{4-0} = \dfrac{-3}{4} = -\dfrac{3}{4}$

Una pendiente de $m = -\frac{3}{4}$ significa que y decrece 3 unidades cada vez que x crece 4 unidades.

Las rectas que suben al crecer x, tienen pendiente positiva. Las que bajan al crecer x tienen pendiente negativa. La pendiente de una recta horizontal es cero ni sube ni baja.

PRÁCTICA.

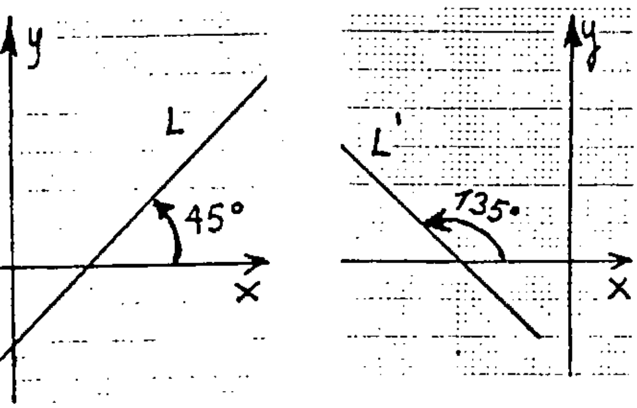
Situé los puntos en un plano cartesiano, y halle la pendiente (si existe) de la recta determinada por ellos.

1. $A(1,-2)$ $B(2,1)$
2. $A(-1,2)$ $B(-2,-1)$
3. $A(-2,-1)$ $B(1,-2)$
4. $A(2,-1)$ $B(-2,1)$
5. $A(1,0)$ $B(0,1)$
6. $A(-1;0)$ $B(1,0)$
7. $A(2,3)$ $B(-1,3)$
8. $A(0,3)$ $B(2,-3)$

Colegio Distrital "La Amistad J. T"
GUIA DE MATEMATICAS Nº5 GRADO 10

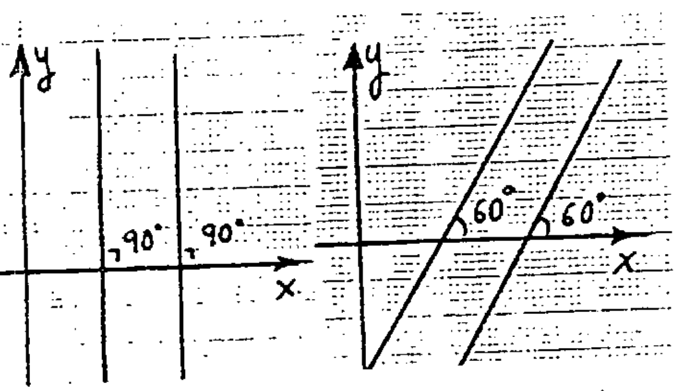
PENDIENTE DE UNA RECTA.

l ángulo de inclinación de una recta es l ángulo formado por el semieje positivo de las x y la recta.



l ángulo de inclinación de la recta L es 45°. y el ángulo de inclinación de la recta L' es 135°

Si el ángulo de inclinación de una recta s agudo la pendiente es positiva.
Si el ángulo de inclinación de una recta es obtuso la pendiente es negativa.
¿Qué sucede si el ángulo de inclinación de una recta mide 90°?



Se acostumbra definir la pendiente m de una recta como la tangente de su ángulo de inclinación, así $m = \tan\alpha$, donde α es el ángulo de inclinación de la recta. Como la tangente de 90° no está definida, las rectas que son perpendiculares al eje x no tienen definida su pendiente.
Cuando una recta es paralela al eje x, o coincide con el eje x, su pendiente m es cero.

> La pendiente de una recta es la tangente del ángulo α de inclinación de la recta (siempre que $\alpha \neq 90°$)
>
> $$m = \tan\alpha$$

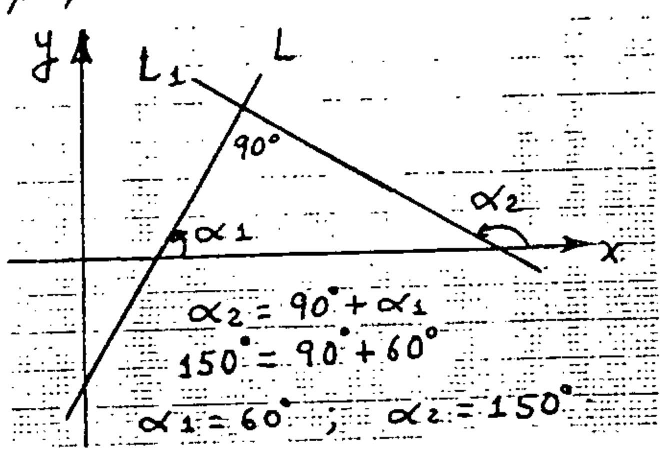
RECTAS PARALELAS

Las rectas paralelas tienen ángulo de inclinación iguales por tanto no son verticales, presentan la misma pendiente. Recíprocamente, dos rectas con pendientes iguales: $m_1 = \tan\alpha_1$; $m_2 = \tan\alpha_2$ tienen también el mismo ángulo de inclinación y son, por tanto paralelas

$$\boxed{m_1 = m_2}$$

RECTAS PERPENDICULARES

Los ángulos de inclinación de rectas perpendiculares, difieren en 90°.



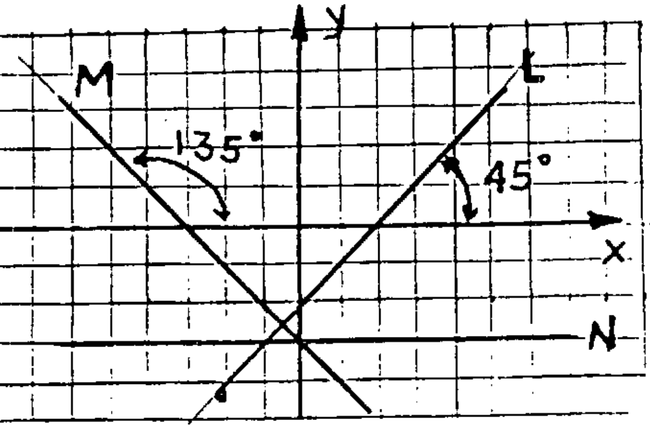
Las pendientes de rectas perpendiculares satisfacen la ecuación

$$\boxed{m_2 = -\frac{1}{m_1}}$$

El número $-\frac{1}{m_1}$ se llama recíproco negativo de m_2.

PRACTICA (GUÍA Nº 6)

Dadas las rectas L, M, N de la gráfica, encuentra la pendiente m de cada una de ellas, de dos maneras diferentes.



Dada la recta S que pasa por los puntos $A(3,-5)$ y $B(3,6)$. ¿Existe la pendiente m de S? En caso afirmativo, ¿Cuál es la pendiente? Si la respuesta es negativa, da una justificación?

3. Encuentra la pendiente de la recta que pasa por: $P_1(2,3)$ y $P_2(5,6)$.

4. Halla el valor de la pendiente de una recta que tiene un ángulo de inclinación de 30° y de otra cuyo ángulo de inclinación es 120°

5. Halla la pendiente y el ángulo de inclinación de una recta que pasa por los puntos $A(-4,3)$ y $B(5,6)$.

6. Los vértices de un triángulo son los puntos $A(-2,1)$, $B(2,5)$, $C(3,-1)$. Halla las pendientes de las rectas que contienen a cada uno de los lados del triángulo.

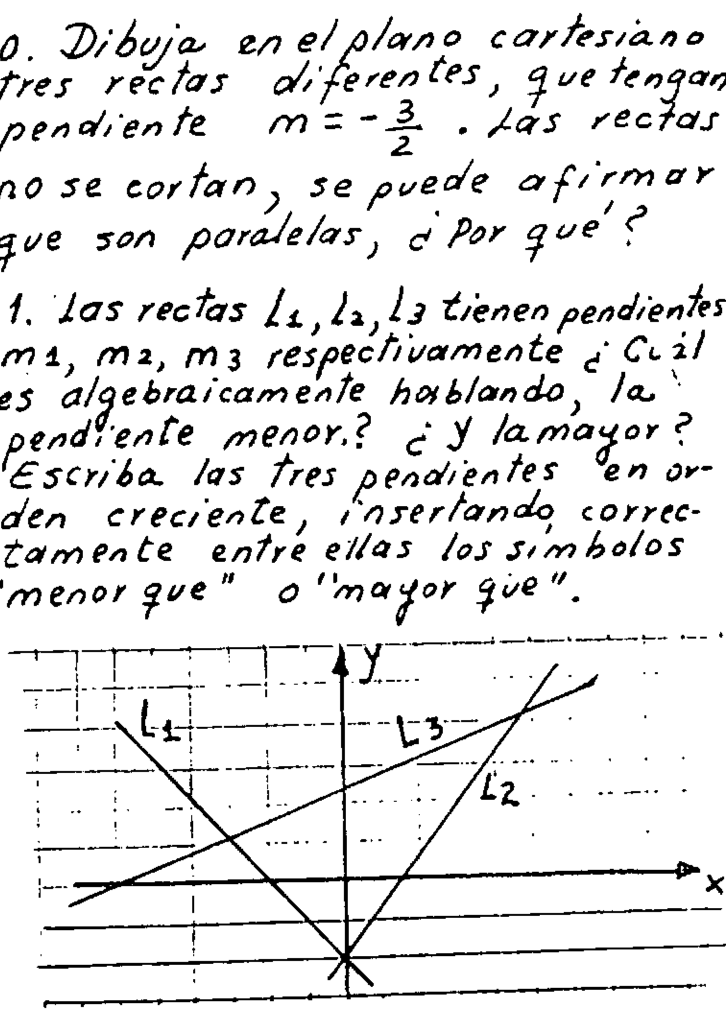
7. Una recta de pendiente $m=3$ pasa por los puntos $A(3,5)$ y $B(x,8)$. ¿Cuál es el valor de x?

8. Una recta de pendiente $m=-2$ pasa por el punto $A(2,2)$ y por los puntos $B(4,y)$ y $C(x,-4)$, averigua el valor de x y y.

9. Una recta pasa por los puntos $A(6,0)$ y $B(4,2)$. Si el punto $C(2,y)$ pertenece a la recta. ¿Cuál es el valor de y?

10. Dibuja en el plano cartesiano tres rectas diferentes, que tengan pendiente $m=-\frac{3}{2}$. Las rectas no se cortan, se puede afirmar que son paralelas, ¿Por qué?

11. Las rectas L_1, L_2, L_3 tienen pendientes m_1, m_2, m_3 respectivamente ¿Cuál es algebraicamente hablando, la pendiente menor? ¿Y la mayor? Escriba las tres pendientes en orden creciente, insertando correctamente entre ellas los símbolos "menor que" o "mayor que".



12. Sitúa los puntos A, B, C, D. A continuación, determina si ABCD es o no un paralelogramo

a) $A(0,1)$ $B(1,2)$ $C(2,1)$ $D(1,0)$

b) $A(-3,-2)$ $B(2,-1)$ $C(4,5)$ $D(-1,4)$

Pueden demostrar que ambos pares de lados opuestos son paralelos.
Pueden demostrar que tiene 2 lados opuestos paralelos y congruentes.
Pueden demostrar que sus lados opuestos son congruentes.

Ejercicios 6.10º

1. Halle la distancia entre los puntos $P_1 = 5$ y $P_2 = -7$; $B_1 = -6$ y $B_2 = 4$.
2. Ubique cada pareja de puntos en el plano, y utilizando el teorema de Pitá-goras, encuentre la distancia de los puntos:
   a. $P_1 = (5, 1)$ y $P_2 = (4, -3)$
   b. $P_1 = (6, 1/2)$ y $P_2 = (-6, -\frac{1}{2})$
   c. $(0, \sqrt{2}) = P_1$ y $(2, 1) = P_2$
3. Localicen en el plano cartesiano los puntos $P_1 = (-6, 4)$, $P_2 = (2, 4)$, $P_3 = (2, -4)$ y $P_4 = (-6, -4)$ y únanlos en el orden dado por medio de segmentos.
   a. ¿Qué figura obtuvo?
   b. Halle la magnitud de sus lados.
4. Verifique que los puntos $A = (2, -2)$, $B = (6, -2)$, y $C = (4, 4)$ son los vértices de un triángulo Isósceles. Calcule el área.
5. Halle las coordenadas del punto medio que divide al segmento con extremos $P_1 = (6, 2)$ y $P_2 = (-8, -3)$.
6. Los vértices de un triángulo son los puntos $A(2, 5)$, $B(5, 5)$ y $C(0, 8)$. Determine las longitudes de las medianas del triángulo.
7. Hallar las coordenadas de los vértices de un triángulo sabiendo que las coordenadas de los puntos medios de sus lados son $(-2, 1)$, $(5, 2)$ y $(2, -3)$
8. Mostrar que las diagonales del paralelogramo cuyos vértices son $A(-2, -3)$ $B(5, -4)$, $C(4, 1)$ y $D(-3, 2)$ se cortan en un punto medio.
9. Halle la pendiente de:
   a. $45°$ b. $30°$ c. $60°$
10. Hallar la ecuación de la recta $\perp$ a la recta $4x + y - 1 = 0$ que pase por el punto de intersección de $2x - 5y + 3 = 0$ y $x - 3y - 7 = 0$
11. Los vértices de un triángulo son los puntos $A(-5, 6)$, $B(-1, -4)$ y $C(3, 2)$, hallar:
    a) Las ecuaciones de sus medianas.
    b) Las coordenadas del baricentro del triángulo.
    c) Las ecuaciones de sus mediatrices
    d) Las coordenadas del circuncentro del triángulo.
12. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas $3x - 5y + 9 = 0$ y $4x + 7y - 28 = 0$ y cumple la condición siguiente:
    a) Es paralela a la recta $2x + 3y - 5 = 0$
    b) Es $\perp$ a la recta $4x + 5y - 20 = 0$.

legio Distrital "La Amistad J.T"
ÍA DE MATEMÁTICAS Nº 7 grado 10

MA: Variación directa - proporcio-
ılidad.

algunos estados de Estados Unidos
cobra un depósito sobre los envases
aluminio. En Nueva York, el de-
sito es de 5 centavos de dólar
r envase.

Mire los números en esta tabla y
ponda las preguntas:

Número de envases retornados	Cantidad de dinero devuelta
1	5
2	10
3	15
4	20
5	25
6	

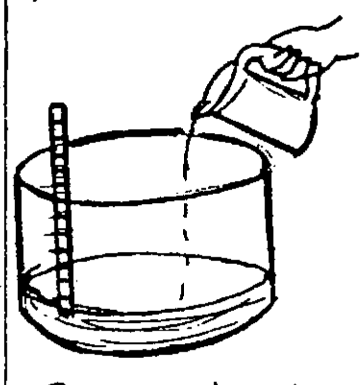
¿Cuánto dinero se devolvería por
retornar 6, 10, y 12 envases?

Describa cómo puede el dueño
del almacén calcular la cantidad
de dinero que debe devolver por
cualquier cantidad de envases re-
tornados.

Si Y representa la cantidad de
nero devuelta y X el número de
vases retornados, escriba una
uación para la cantidad de dinero
evuelta.

Puede usar su ecuación para
contrar cuántos envases deberán
tornarse para que el depósito de-
elto sea de 3 (dólares). ¿Cuál
ría el depósito recibido por 100
vases?

. llenamos de agua el recipiente
de la figura, vaso a vaso,
vertiendo cada vez 0,5 litros y mid
do después la altura que va alcanz
do el nivel.. obtenemos la siguiente
tabla.



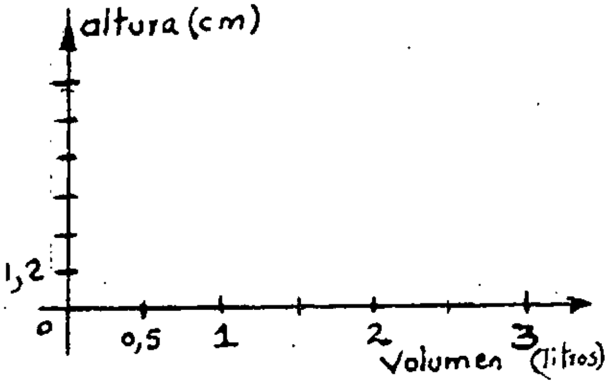
Volumen (litros)	altura (cm)
0,5	1,2
1,0	2,4
1,5	3,6
2,0	4,8
2,5	6,0

Responda las preguntas:

1. ¿Cuáles son las magnitudes (Variables) que se relacionan en la tabla?

2. Cuántos centímetros asciende el nivel con el contenido del primer vaso, del segundo, del quinto.?
– el recipiente tiene forma cilíndric

3. Elabora la gráfica con los datos de la tabla.



4. Si la curva se ha trazado justo hasta hacer rebosar el recipiente. Indica su capacidad total y su altura.

5. Las escalas usadas en cada eje no son iguales. ¿Deberían acaso serlo?. Justifica la respuesta.

Colegio Distrital "La Amistad J. T"
GUIA DE MATEMATICAS Nº 8 grado 10

TEMA: Variación directa/proporcionalidad

C- Los resultados de un experimento que midio 2 cantidades x y Y, fueron:

X	Y
3	9
5	15
9	27
21	63

1. Cuando x es 5, ¿Cuál es el valor de y?
2. Cuando x es 21, ¿Cuál es el valor de y?
3. ¿Qué esperaría que fuera el valor de Y cuando el de x fuera 30?
4. Cuál sería el valor de x cuando el de y fuera 99
5. Describa en palabras cómo puede encontrar el valor de Y, si sabe cuál es el valor de x.
6. Use algebra para escribir una regla que conecte X con Y.

D- El precio de la tarifa de los taxis ha subido un 12%. Como el taximetro no ha sido aún actualizado el taxista debe subir, cada vez, el importe en un 12%

Nota: Lo que costaba $100 cuesta ahora 112.

1. Completa la tabla usando regla de 3

100	112
1.800	?

$$? = \frac{112 \cdot 1800}{100} = 2.016.$$

Taximetro	Nuevo precio
$ 1.800	
$ 3.500	
$ 4.800	
$ 6.000	

2. El taxista se cansa de tanta regla de 3, y como algo sabe de funciones, llamamos X a la cantidad que marca el taximetro y calcula:

taxímetro	Nuevo precio
100	112
x	y.

$$y = \frac{112 \cdot x}{100} \qquad Y = 1,12X$$

Con la fórmula hallada, compruebe los resultados de la tabla de arriba.

E. En un almacen de ropa los artículos se encuentran en promoción, con rebajas del 40%. Encuentra la función Lineal que determina el costo de un artículo después de aplicar la respectiva rebaja

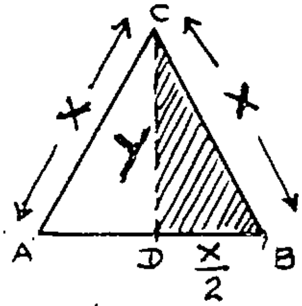
F. Una fabrica de zapatos vende saldos de segunda con un descuento del 25%. Encuentra la función Lineal que determina la aplicación del descuento por pago en efectivo.

Colegio Distrital "La Amistad I. I.
GUIA DE MATEMATICAS N° 9 GRADO 10

TEMA: INVESTIGAMOS-LA PROPORCIONALIDAD.

El triángulo es un polígono convexo con el menor número posible de lados. Si los tres lados de un triángulo son congruentes, el **Triángulo** se llama **equilátero**. En un triángulo cualquiera se llama **altura** a una recta que pasa por un vértice y es **perpendicular** a la recta que contiene el lado opuesto. El punto de corte de las alturas se llama **ortocentro**

> En todo triángulo equilátero la altura mide $\frac{\sqrt{3}}{2}$ de lo que mide el lado.



Demostración:
El triángulo ABC es equilátero, Y es la altura. Esta altura determina dos triángulos rectángulos: ACD y DCB.
Si llamamos X a la longitud del lado $\overline{AD} = \overline{DB} = \frac{X}{2}$

Si aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo CDB tenemos:

$$cateto^2 + cateto^2 = hipotenusa^2$$

$$\left(\frac{X}{2}\right)^2 + Y^2 = X^2$$

$$\frac{X^2}{4} + Y^2 = X^2$$

$$Y^2 = X^2 - \frac{X^2}{4}$$

Si realizamos mínimo común denominador tenemos

$$Y^2 = \frac{4}{4}X^2 - \frac{X^2}{4}$$

$$Y^2 = \frac{3}{4}X^2$$

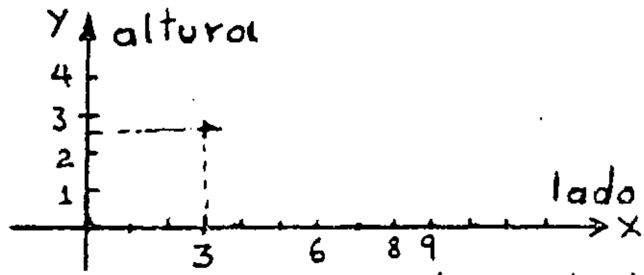
si extraemos raíz cuadrada:

$$Y = \frac{\sqrt{3}}{2}X$$

A simple vista parece que al duplicar el lado de un triángulo equilátero se duplica la altura, lo que sería una situación de proporcionalidad. Comprobémoslo experimentalmente:

a) Dibuja varios triángulos equiláteros (con compás). Completa la tabla y grafica.

lado x	3	6	8	9	...	
altura y	2,6					
$\frac{y}{x}$	0,86					



b) ¿Son aproximadamente constantes los cocientes y/x? Es la gráfica una recta que pasa por el origen? ¿Hay proporcionalidad entre la base y la altura?

c) Despeja y en $\frac{y}{x} = m$, donde m es la constante que has hallado para obtener la fórmula de la función base → altura.

olegio Distrital "La Amistad J.T."
guia DE MATEMATICAS Nº 10 grado 10

EMA: LA FUNCIÓN LINEAL O DE PROPORCIONALIDAD

Observa en la tabla el precio de la harina y el azucar:

Peso X	1kg	2kg	3kg	...
Precio harina Y_1	90	180	270	...
precio azucar Y_2	250	500	750	...

Para cada producto las magnitudes peso y precio son proporcionales. Al duplicarse, triplicarse, etc. la variable peso se duplica, Triplica. etc. la variable precio.

Los cocientes precio/peso son constantes.

$$\frac{Y_1}{X} = \frac{90}{1} = \frac{180}{2} = \frac{270}{3} \rightarrow \frac{Y_1}{X} = 90$$

$$\frac{Y_2}{X} = \frac{250}{1} = \frac{500}{2} = \frac{750}{3} \rightarrow \frac{Y_2}{X} = 250$$

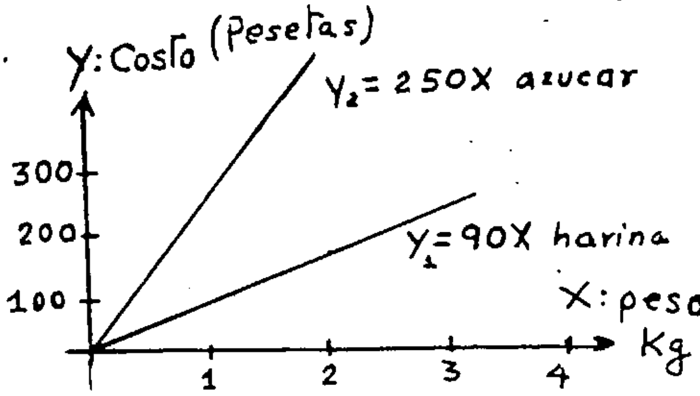
equivalen a:

harina: $Y_1 = 90.X$ azucar: $Y_2 = 250X$

Las funciones que relacionan magnitudes proporcionales se llaman **lineales**. Su expresion es: $Y = mX$, donde **m** es la constante de **proporcionalidad**.

GRÁFICAS.

La gráfica de una función Lineal es una recta que pasa por el origen, y, recíprocamente, si la gráfica de una recta que pasa por el origen, entonces la función es lineal.



Tres formas de reconocer una función Lineal:

A doble, triple, mitad ... de X corresponde doble, triple, mitad ... de Y.

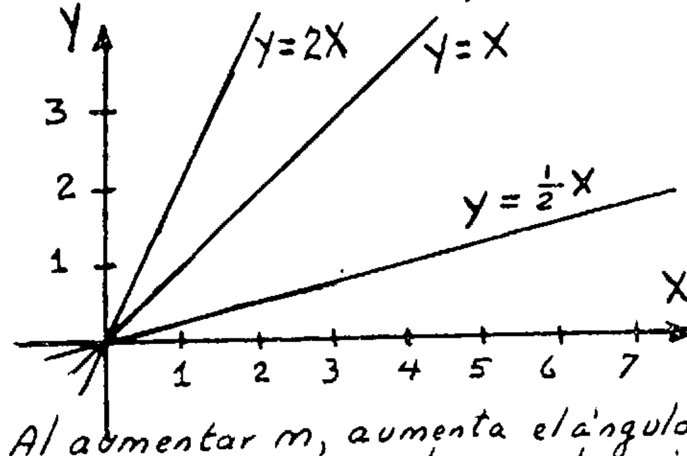
Los cocientes $\frac{Y}{X}$ son constantes (constante de proporcionalidad)

La gráfica $X \rightarrow Y$ es una recta que pasa por el origen.

ESTUDIO DE $Y = mX$. Pendiente

Veamos cómo varían las gráficas de $y = mx$ según los valores y signo de m.

En las 3 funciones, $m > 0$



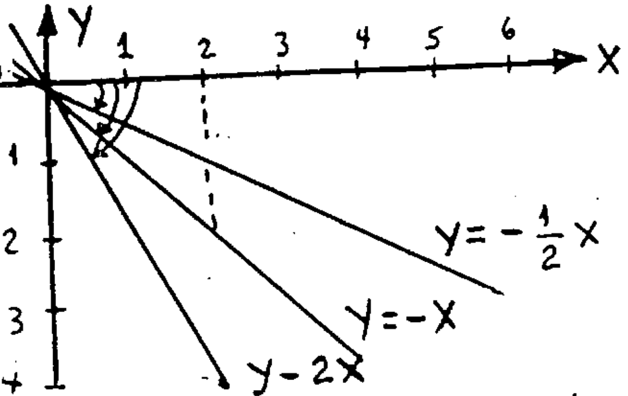
Al aumentar m, aumenta el ángulo formado por las rectas y el semieje positivo OX.

Las rectas son ascendentes y crecen más rapidamente a medida que aumenta m

El coeficiente m es el responsable de la inclinación. Por eso se le llama **pendiente**

UÍA Nº 11 grado 10

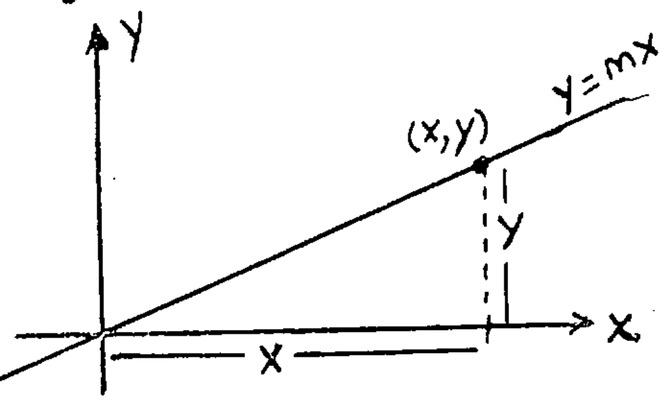
las Tres funciones, **m < 0**



Si m es negativa, las rectas son descendentes, y decrecen más rápidamente a medida que aumenta la pendiente en valor absoluto.

Por último, si **m = 0**, la gráfica de $y = 0$, está formada por todos aquellos puntos que tienen segunda coordenada nula, y coincide con el eje X

Significado de la pendiente



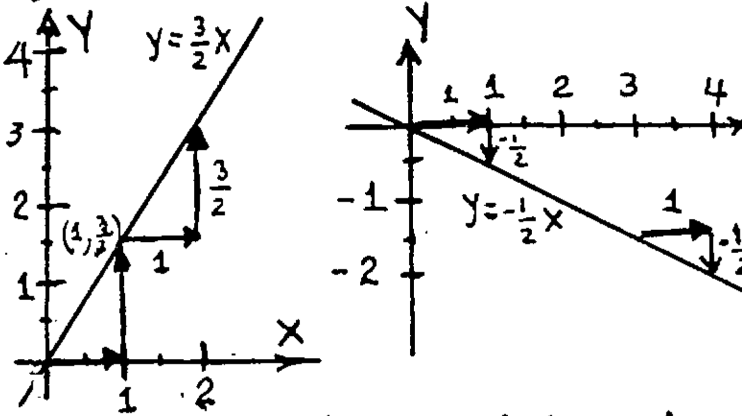
En $y = mx$, la pendiente es el coeficiente de proporcionalidad y, por ello, igual al cociente y/x para cualquier punto (x, y) de la gráfica distinto del origen de coordenadas.

(x, y) pertenece a la gráfica

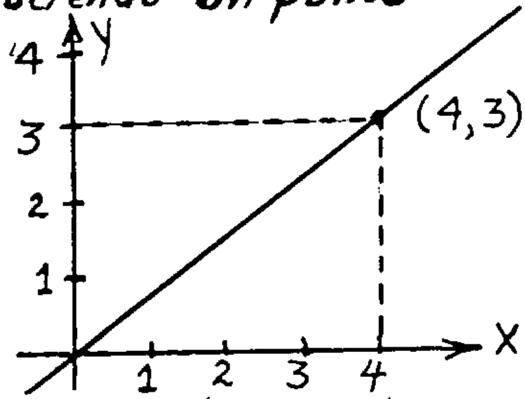
$$\text{pendiente} = \frac{y}{x}$$

$$m = \frac{y}{x}$$

La pendiente es también la variación de y cuando x aumenta una unidad.



Ecuación de la función Lineal conociendo un punto



Determinemos la función Lineal cuya gráfica pasa por $(4, 3)$

$(4, 3)$ verifica $y = mx$

$$3 = m \cdot 4$$

Así, la función Lineal que pasa por el punto $(4,3)$ es $y = \frac{3}{4}x$

- La función Lineal $y = mx$ se determina con un punto.
- La pendiente m es la constante de proporcionalidad. $\frac{y}{x}$.
- su gráfica es una recta.
- Pasa por el origen de coordenadas
- m mide la inclinación
  - si $m > 0$, la recta es ascendente
  - si $m < 0$, la recta es descendente
  - si $m = 0$, la recta coincide con el eje X.

GUIA DE MATEMÁTICAS Nº 12.
GRADO 10

- Esemplos de funciones afines.

3- Hace seis años se compró una casa por $ 59'000.000. Este año fue evaluada por $ 95 000 000. Suponiendo que el valor de la casa está relacionado linealmente con el tiempo. Encontrar un fórmula que especifique el valor de la casa para cualquier tiempo, después de la fecha de compra? ¿Cuando valía la casa $ 73 000.000.

4. Se permite a quien paga impuestos depreciar la propiedad en renta sobre un periodo de 15 años. Entonces si y denota el valor de la propiedad después de x años y si tiene un valor inicial de $ 60'000.000. Los puntos (0, 60'000.000) y (15, 0) están en la gráfica de $y = f(x)$. Un método común es la depreciación Lineal. en la que se ajusta una recta a que pase por estos dos puntos. (A éste método se le llama depreciación en linea recta.

a) Expresar a y como función de x.

b) ¿Cuál es la depreciación anual?

5. Una parte de maquinaria agrícola cuyo valor inicial era de U.$ 40.000 dólares. Se deprecia sobre su tiempo de vida útil de 10 años. Al final de los 10 años el equipo tiene un valor en dólares de U.$ 2000

a) Usando la depreciación Lineal expresar el valor de y (en dólares) como función de la edad x (en años).

(b) ¿Cuál es la depreciación anual?

6- Las ballenas azules recién nacidas miden aproximadamente 24 pies y pesan 3 toneladas. Estas ballenas jóvenes son amamantadas durante 7. meses y cuando se destetan miden la impresionante cantidad de 53 pies y pesan 23 toneladas.

(a) Si x denota la edad de la ballena en meses y y su longitud en pies. Expresar a y como una función Lineal de x. De acuerdo a éste modelo Lineal. ¿Cuánto aumenta la la Longitud cada día.

gio Distrital "La Amistad J. T"
DE MATEMATICAS Nº13 grado 10

mplos DE FUNCIÓN AFÍN.

función afín es de la forma:
$= mx + b$.

Mire los números en esta tabla y responda las preguntas.

1	2	3	4	5	6	7	8 ...
5	6	7	8	9		11	

Cuando X es 2, ¿Cuál es el valor de y?

Cuando X es 8, ¿Cuál es el valor de Y?

Cuando X es 800, ¿Cuál es el valor de Y.

demos hallar la pendiente así:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{9-6}{5-2} = \frac{3}{3} = 1.$$

$m = 1$

i $x = 1$. entonces $m.x = 1.1 = 1$

i $x = 2$ entonces $m.x = 1.2 = 2$.

i $x = 3$ entonces $m.x = 1.3 = 3$.

entonces $b = 4$ porque.

Si $x = 1$ entonces $y = 5 = 1 + 4$

Si $x = 2$ entonces $y = 6 = 2 + 4$

⋮

Si $x = 800$ entonces $y = 800 + 4$
$y = 804$.

) Describa con palabras cómo puede hallar el valor de Y, si sabe cuál es el valor de X.

e) Use álgebra para escribir una regla que conecte X con Y.

2 - Los resultados de un experiment que midió dos cantidades L y Q, fueron:

L	3	5	9	21
Q	10	16	28	64

a) ¿Qué esperaría que fuera el valor de Q cuando el de L fuera 30?

b) ¿Cuál sería el valor de L cuando el de Q fuera 99?

c) Describa en palabras cómo podría encontrar el valor de Q, si se conoce el valor de L

d) Use álgebra para escribir un regla que conecte L y Q.

3 - Mire los números de esta tab y responda las preguntas.

X	0	1	2	3	4	5	6
y	2	5	8	11	14	17	

a) Cuando X es 6. ¿Cuál es el valor de y?

b) Cuando X es 10, ¿Cuál es el valo de y?

c) Cuando X es 100. ¿Cuál es el val de Y?

d) Describa en palabras cómo po dría encontrar el valor de Y, si s sabe qué es X.

e) Use álgebra para escribir una regla que conecte X con Y.

olegio Distrital "La Amistad J.T.
uia de Matemáticas Nº 14 grado 10

EMA: LA FUNCIÓN AFÍN. EJEMPLOS

na función afín está definida por una expresión del tipo: $y = mx + b$, donde m y b son números.

bserva la factura del teléfono; n ella intervienen dos funciones fines:

Detalle de conceptos	25-04-2000 al 25-05-2000
. Cargo fijo de abono	\$ 4.500,oo
. servicio automático:	
número de marcaciones: 230	
precio / marcación \$60	\$13.800,oo
Importe	\$18.300,oo
otal a pagar (IVA 15% incluido)	\$ 21.045,oo

a función **Importe** de la factura de teléfono es función del número de marcaciones. Es igual al car- o fijo de abono, de \$ 4.500,oo, más 60 pesos por el número de marcaciones registradas

mporte	nº de marcaciones	cargo fijo de abono
$I(x) =$	$60 \cdot X$	$+ 4500$

sí, para $x = 230$ marcaciones esulta: $I(230) = (60 \times 230) + 4500$
$= 13.800 + 4500$
$= 18.300$

que es el importe señalado en la factura.

La función importe es un ejemplo de función afín.

marcaciones X	$I(x) = 60X + 4.500$
200	16.500
400	28.500
600	40.500
800	52.500

Aquí podemos hallar la pendiente $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

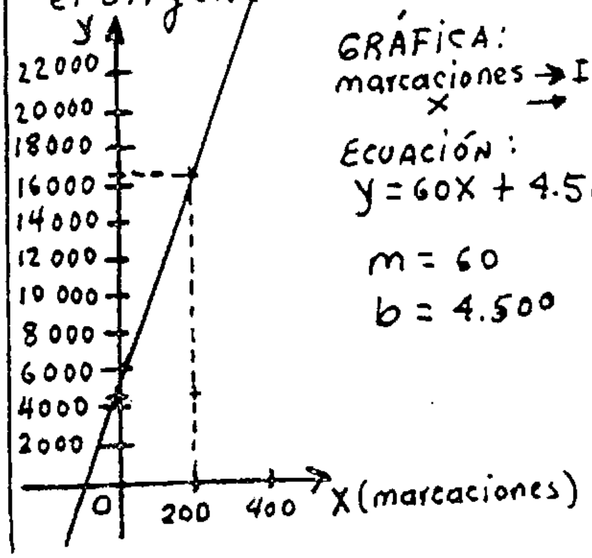
$$\frac{28.500 - 16.500}{400 - 200} = \frac{12000}{200} = 60$$

$$\frac{40.500 - 28500}{600 - 400} = \frac{12000}{200} = 60$$

$$\frac{52.500 - 40.500}{800 - 600} = \frac{12000}{200} = 60$$

60 es la variación del importe cuando se hace 1 marcación

4.500 es la ordenada en el origen



GRÁFICA:
marcaciones → Importe
x → y

ECUACIÓN:
$y = 60X + 4.500$

$m = 60$
$b = 4.500$

olegio Distrital la Amistad J.T.
UIA DE Algebra Nº15 curso 10

EMA: REPRESENTACION GRÁFICA
E UNA FUNCIÓN LINEAL

jemplo: Ricardo paga por una fotocopia $50. ¿Cuánto pagará por 2 fotocopias, por 3 fotocopias, por x fotocopias. Escribamos la función Lineal y representémosla en el plano cartesiano.

abemos que la cantidad de dinero que paga Ricardo depende de la cantidad de fotocopias que mande tomar; por tanto la variable independiente es el número de fotocopias que mande tomar; y la variable dependiente (y) es la cantidad de dinero pagado. así:

:	Número de fotocopias	1	2
:	valor a pagar	50	100

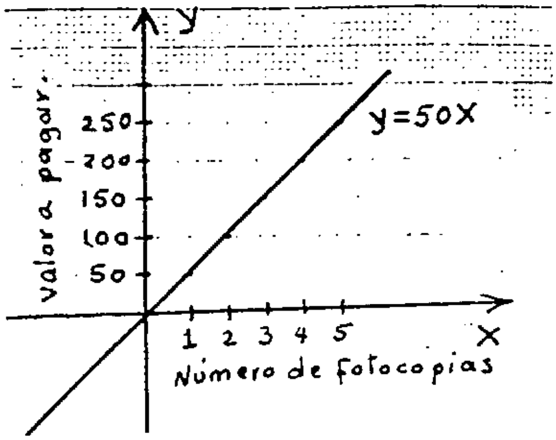
3	4	5 ...	x
50	200	250 ...	50X

a función Lineal es $f(x)=50X$

Para hacer la gráfica nos valemos de la tabla anterior y ubicamos los valores de la variable independiente (x) sobre el eje X y los valores de la variable dependiente y sobre el eje Y.

Observa que en este caso la gráfica de la función es una recta que pasa por el origen. del sistema de coordenadas cartesianas.

Como dos puntos determinan una recta, para elaborar la gráfica de una función Lineal basta hallar dos puntos, ubicarlos en el plano y Unirlos en una recta.



Representemos en el plano la función $y = 2x+3$

Damos valores a x y encontramos los correspondientes de y.

si $x=0$, entonces $y = 2.0+3 = 3$

si $x=-1$, entonces $y = 2(-1)+3 =$
$= -2+3 = 1$

si $x=-2$, entonces $y = 2(-2)+3$
$= -4+3 = -$

si $x = \frac{1}{2}$, entonces $y = 2.\left(\frac{1}{2}\right)+3$
$y = 1+3 = 4$

si $x = -\frac{1}{2}$, entonces $y = 2\left(-\frac{1}{2}\right)+3$
$= -1+3 = 2$

Construímos una tabla de valores así

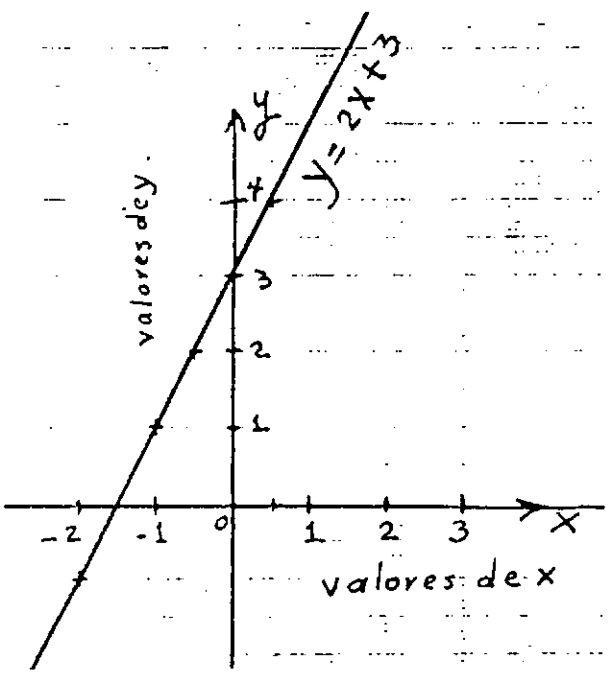
X	0	-1	-2	1/2	-1/2
y	3	1	-1	4	2

Cada valor de x y su correspondiente de de y forman una pareja ordenada de números reales.

legio Distrital "La Amistad S.T"
uíA de Algebra Nº 16 grado 10.
ontinuación de gráficas Lineales.

, 3) (-1, 1) (-2, -1) (1/2, 4) (-1/2, 2)

ada uno de éstos puntos los podemos representar en un plano cartesiano. y son parte del onjunto solución de la cuación: $y = 2x + 3$ que iene infinitas soluciones.



En este caso la gráfica de la función es una recta que corta al eje Y en el punto (0, 3)

Representemos graficamente en el plano cartesiano la función $y = x - 1$

damos valores a x y encontramos los correspondientes de y

si $x = 0$, entonces, $y = 0 - 1$
$y = -1$

si $x = 1$, entonces, $y = 1 - 1 = 0$

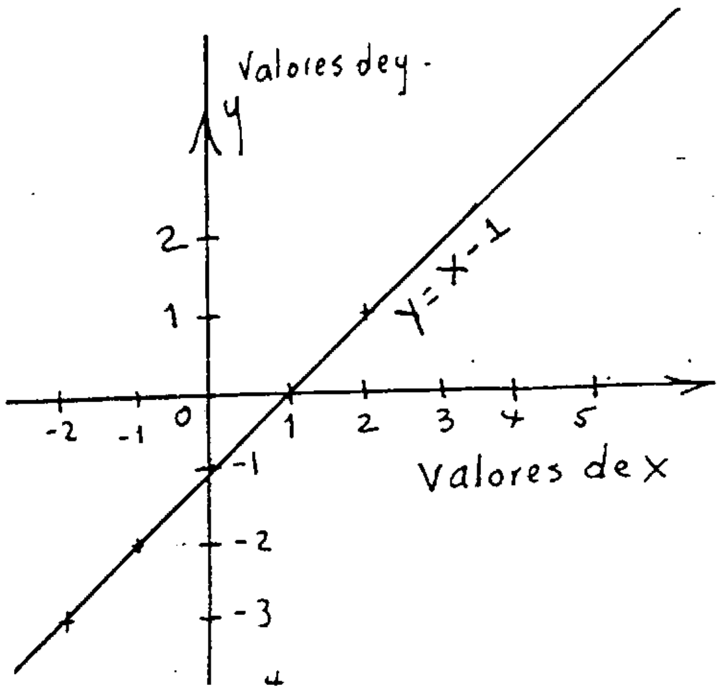
si $x = 2$, entonces, $y = 2 - 1 = 1$

si $x = -1$, entonces $y = -1 - 1 = -2$

si $x = -2$, entonces $y = -2 - 1 = -3$

Elaboramos una tabla de valores donde cada pareja ordenada (x, y) es una solución de la ecuación $y = x - 1$.

X	0	1	2	-1	-2	...
Y	-1	0	1	-2	-3	...



PRÁCTICA

A. Representa gráficamente en el plano cartesiano las siguientes funciones:

① $y = 2x - 5$ ④ $y = 4x + 1$
② $y = 3x + 2$ ⑤ $y = 7x$
③ $y = x + 1$ ⑥ $y = x$

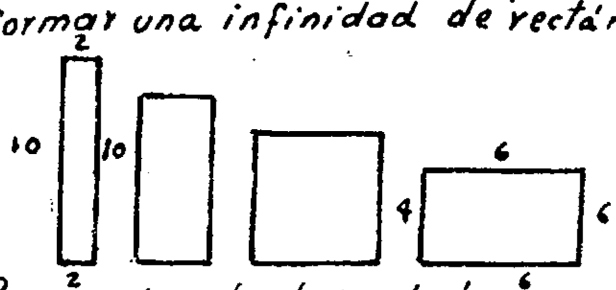
B. Representa gráficamente en el plano cartesiano las siguientes funciones:

① $y = \frac{x}{2}$ ③ $y = \frac{3x}{2} + 1$
② $y = \frac{x}{3} + 1$ ④ $y = \frac{2x}{5} + 3$

GUÍA DE MATEMÁTICAS Nº 17
GRADO: 10.

- Ejemplos de funciones afines

1- Con un cordel de 24 cm podemos formar una infinidad de rectángulos



Para cada valor de x, de base, se obtiene un valor de y de la altura.

base x	1	2	3	4	...
altura y	11	10	9	8	...

a- Halle la pendiente m, calculando $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

b- Halle la ordenada en el origen b.

c- Escriba la ecuación de la función afín:

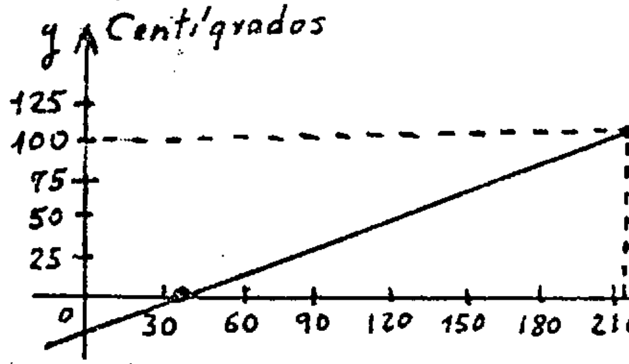
d- Son proporcionales la base y la altura?

e) Justifica la expresión:
$$2x + 2y = 24.$$

f) Despeje y de la función anterior y representala en el plano cartesiano.

g) Calcula aproximadamente la base de un rectángulo de altura 8,2 cm.

2- La escala centígrada de te
peratura (escala Celsius) está
graduada de 0 a 100. La es
cala Fahrenheit - usada en lo
países anglosajones - está gra
duada desde 32 a 212. En am
bas escalas, el extremo in-
ferior corresponde al punto
de congelación del agua, y
el superior al de ebullición.



Dos puntos definen la recta: (32,
y (212, 100).

a) En la tabla siguiente halle
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Fahrenheit x	32	212	.
Centígrados y	0	100	.

b) Halle la ordenada en el ori
gen, para la función afín
de la forma $y = mx + b$.

c) Escriba la fórmula que
pasa grados Fahrenheit a
centígrados.

d) Pasa $-45°F$ a centígrado

e) Pasa $18°F$ a centígrados

f) Imagen inversa:
Expresa en grados Farenheit
$-15°C$; $0°C$; $90°C$.

Colegio Distrital "La Amistad J.T" GRADO 10 Julio 10 - 2000
Ejercicios sobre funciones Lineales y afines. GUIA Nº 18.

1- De las funciones f, g, h, t, s conocemos algunos valores representados en las siguientes tablas:

A- Función f

X	Y
-4	-6
0	0
2	3

B- Función g

X	Y
-1	-3
1	3
5	15

C. Función h

X	Y
-2	1
0	5
2	9

D. función t

X	Y
-2	-11
1	1
0	-3

E. Función s

X	Y
-1	-2
3	6
5	10

a) halle la pendiente de cada una de las funciones:
b) Encuentre la ecuación de la recta correspondiente
c) Escriba si la función es Lineal o afín y explique Por qué?
d) Construya la gráfica.

2- En los siguientes ejercicios se conoce un punto de la recta y la pendiente.

A) Punto (1,1) pendiente 1. B) Punto (-1,1) pendiente 1
C) Punto (-3,2) pendiente 3

a) Halle la ecuación de la recta determinada.
b) Represente la recta en el plano cartesiano
c) Diga si la función es Lineal o afín y explique Por qué?

3- En una olimpiada de Matemáticas, María y Juan hicieron las siguientes afirmaciones:

A) afirmación de María: "El punto (3,-3) pertenece a la línea recta que tiene pendiente -2 y corta al eje Y en el punto (0,3)"
Escriba si la afirmación de María es verdadera o falsa y explique por qué.

B) afirmación de Juan: "El punto (-2,1) pertenece a la Línea recta que tiene pendiente 2 y corta al eje Y en el punto (0,-5)
Escriba si la afirmación de Juan es verdadera o falsa y explique Por qué.

4- Las tablas muestran los valores de funciones Lineales (o proporcionales)

X	3	Q	8
y	2,6	5,2	P

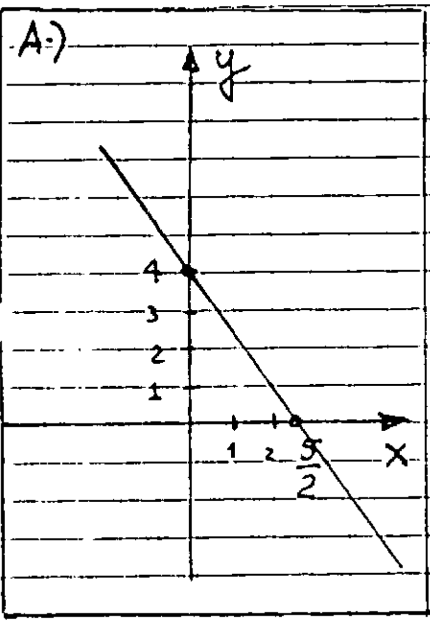
X	90	180	Z
y	250	H	750

X	3	4	C
y	9	J	15

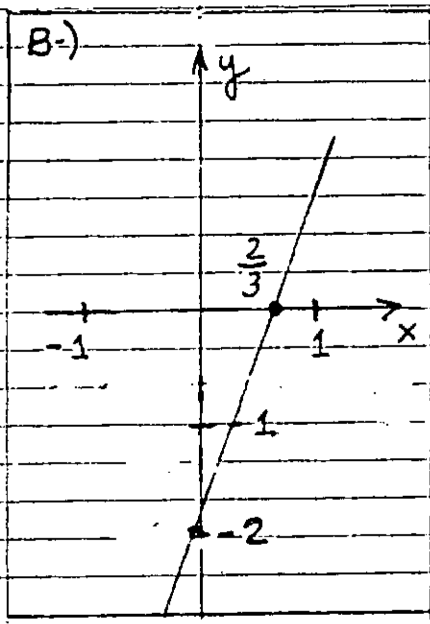
Escriba los procedimientos que ud hace para encontrar los valores desconocidos de cada una de las tablas.

5- A continuación se dan las gráficas de 5 funciones. Escriba al menos 3 afirmaciones verdaderas sobre cada función.

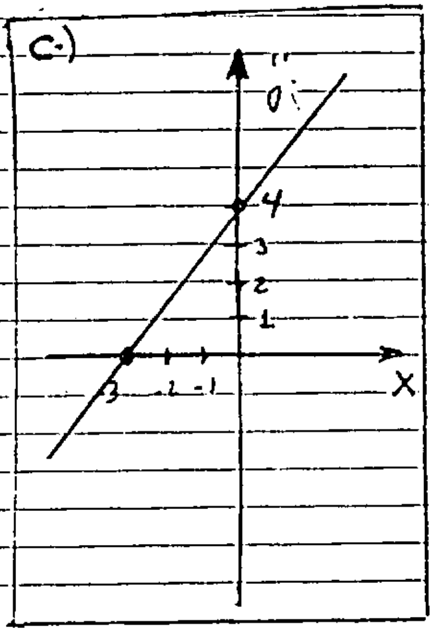
A-)



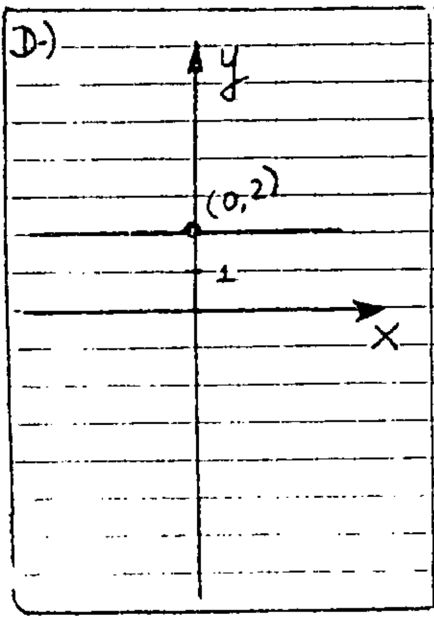
B-)



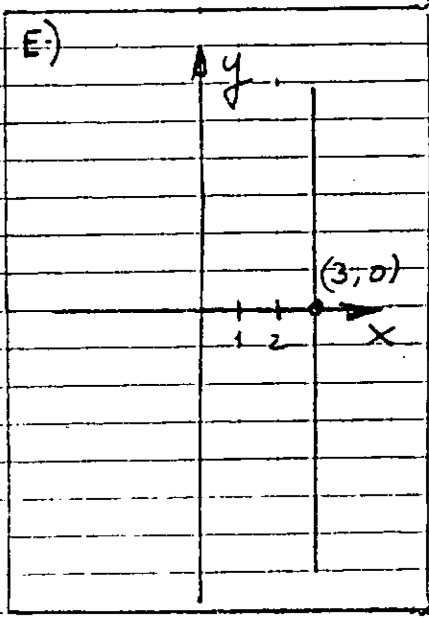
C-)



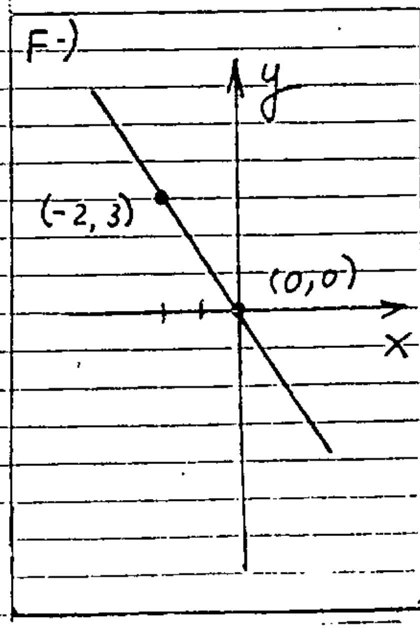
D-)



E-)



F-)



COLEGIO DISTRITAL LA AMISTAD J.T.

PROBLEMAS SOBRE LA FUNCIÓN DE PROPORCIONALIDAD

ALUMNO:------------------------ CURSO:-------------- FECHA:---------------

Además de contestar las preguntas represente los datos en una gráfica en el plano cartesiano y en una tabla de valores:

PROBLEMA DE LA DEVOLUCIÓN DE DINERO(Variación de proporcionalidad directa)

En algunos estados se cobra un depósito sobre los envases de aluminio; este depósito se devuelve cuando en envase se retorna.En Nueva York, el depósito es de 5 centavos por envase.

a) Cuánto dinero se devolvería por retornar 6, 10, 12 envases?
b) Describa como puede el dueño del almacén calcular la cantidad de dinero que debe devolver por cualquier cantidad de envases retornados.
c) Si R representa la cantidad de dinero devuelta y C representa el número de envases retornados, escriba una ecuación para la cantidad de dinero devuelto.
d) Puede usar su ecuación para encontrar cuántos envases deberán retornarle para que el depósito devuelto sea de tres dolares. Cuál seria el depósito recibido por 100 envases?

PROBLEMA DEL SALARIO Y LAS HORAS TRABAJADAS (Proporcionalidad lineal o relación lineal o función afín)

El salario básico de Maria es de 20 dolares por semana. Por cada hora extra que ella trabaje se le pagan 2 dolares adicionales.

a) Cuál será su salario total si ella trabajó 4 horas extra en una semana?. Cuál si trabajó 10 horas?.
b) Describa la relación entre la cantidad de horas adicionales de trabajo en una semana y el salario de María.
c) Si H representa el número de horas extra trabajadas en una semana y S el salario total de María, escriba una ecuación para encontrar el salario total de María.
d) Puede utilizar la ecuación para encontrar cuánto tiempo extra tendría que trabajar María para recibir un salario total de 50 dólares.Cuántas horas extra trabajó cuando ganó 36 dólares por extras.
e) Un compañero de trabajo de María laboró 1 hora extra menos que María. Cuál fue el salario del compañero de María esa semana.

PROBLEMA SOBRE FUERZA Y CAMBIOS DE VELOCIDAD(Proporcionalidad directa)

En una experiencia de laboratorio, a una masa determinada se le aplicó varias fuerzas horizontales y se midió los cambios de velocidad que experimentaba la masa. Los resultados del experimento se muestran en la siguiente tabla:

Fuerza en Newtons	Cambios de velocidad (m / seg)
5	4.9
10	9.8
15	15.2
20	20.1
25	25.0
30	29.9

a) Cuál es la variable dependiente y cuál la independiente?
b) Realiza un gráfico de cambios de velocidad y fuerza.
c) De acuerdo con la gráfica obtenida que tipo de proporcionalidad existe entre estas varibles?
d) Escribe la ecuación que liga las dos variablesRepresenta por F fuerza y por a cambios de velocidad.
e) Encuentra la constante de proporcionalida.
f) Utilizando la ecuación obtenida, encuentre las variaciones de velocidad para una fuerza de de 8 N y 42 N.

PROBLEMA SOBRE LAVADO DE CARROS(Variación inversa)

Una compañía alquila máquinas para lavar los carros que caben en el espacio que tienen disponible para ello. El gerente sabe que 36 máquinas pueden lavar todos los carros en una hora.

a) Que pasa si solo la mitad de las máquinas trabajan? .Cuánto tiempo requerirían 18 máquinas para lavar todos los carros?.Cuáto tiempo si hay 72 máquinas?.Cuáto tiempo con 9 máquinas? y cuánto tiempo con 4 máquinas?
b) Describa cómo podría el gerente calcular cuántas horas se requieren para lavar los carros para cualquier cantidad de máquinas?.
c) Escriba una ecuación para encontrar el número de horas necesarias para lavar los carros si se conoce el número de máquinas lavadoras. H representa el número de horas necesarias para lavar los carros y M representa el número de máquinas lavadoras.

12. A continuación se presentan varias ecuaciones de rectas. Iguala y a cero y analiza el tipo de ecuación en que se transforma:

a. $y = 2x - 8$ c. $y = -2x + \frac{5}{7}$ e. $5x = -\frac{2}{3}y + 4$

b. $y = \frac{1}{4}x + 3$ d. $y = 6$ f. $x = -1$

Forma general de la ecuación de una recta

Toda recta es la gráfica de una ecuación que tienen la forma $Ax + By + C = 0$, en donde A, B y C son constantes y A, B no son nulas simultáneamente.

Ejemplo:

Trazar la gráfica correspondiente a la ecuación $3y + (-2x) + (-3) = 0$

Solución:

Su gráfica es una recta, sólo es necesario determinar dos puntos diferentes de la gráfica para poder trazarla. Como la recta corta a los ejes x y y hallemos estos puntos de corte:

Tomemos $x = 0$, entonces:

$$3y + (-2(0)) + (-3) = 0$$
$$3y + (-3) = 0$$
$$3y - 3 = 0$$
$$y = \frac{3}{3} = 1$$

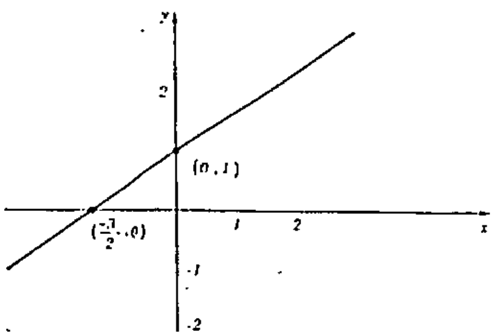
Luego, la recta pasa por el punto $P = (0, 1)$.

Tomemos $y = 0$, entonces:

$$(3(0)) + (-2x) + (-3) = 0$$
$$-2x + (-3) = 0$$
$$-2x - 3 = 0$$
$$x = -\frac{3}{2}$$

Luego, la recta pasa por el punto $P = \left(-\frac{3}{2}, 0\right)$.

La gráfica de la ecuación lineal $3y + (-2x) + (-3) = 0$ es:



13. Grafica cada una de las siguientes ecuaciones lineales:

a. $2x - 4y + 5 = 0$ c. $5x - 2y + 8 = 0$ e. $11x + 22 = 0$

b. $4x - 5y - 3 = 0$ d. $-2x - y + 11 = 0$ f. $2y - 5 = 0$

65

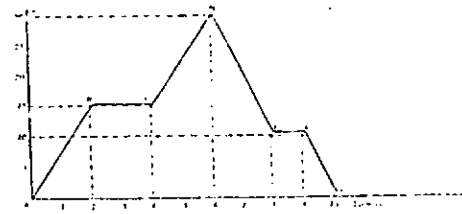
Aplicaciones a funciones lineales

Exploración

Muchas situaciones en la Física, la Geometría, la Economía etc. pueden describirse utilizando gráficas rectilíneas. Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo:

El siguiente gráfico nos muestra el movimiento secuencial de un cuerpo y su posición en función del tiempo. Sobre el eje horizontal determinamos el tiempo t (en segundos) y sobre el eje vertical la posición (en metros).



De acuerdo al gráfico anterior determinar:

a. Las coordenadas de los puntos B, C, D, F.

b. La pendiente de los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DE}$.

c. La ecuación de los segmento $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{FG}$.

d. Determinar la posición del cuerpo en los siguientes tiempos:

$t = 3{,}5$ seg. $t = 5{,}7$ seg. $t = 9{,}3$ seg.

Solución:

a. Las coordenadas de los puntos indicados son: $B = (2, 15)$, $C = (4, 15)$, $D = (6, 30)$ y $F = (9, 10)$.

b. Recuerda que la pendiente m se obtiene a partir de la expresión:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad m_{CD} = \frac{30 - 15}{6 - 4} = \frac{15}{2}$$

$$m_{AB} = \frac{15 - 0}{2 - 0} = \frac{15}{2} \qquad m_{DE} = \frac{30 - 10}{6 - 8} = \frac{20}{-2} = -10$$

Lo que significa que $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.

c. Para determinar la ecuación de $\overline{BC}$ utilizando la forma de recta horizontal: $y = b$. Como el segmento $\overline{BC}$ pasa por el punto $P = (2, 15)$, su ecuación es: $s = 15$.

Ecuación de la recta

Exploración:

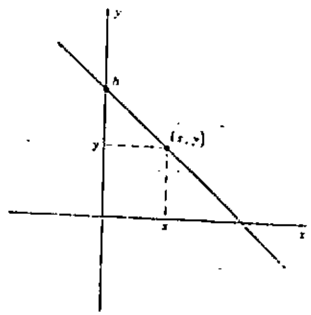
1. Grafica una recta con pendiente $m = 2$. Compara tu gráfica con la de otro compañero. ¿Trazaron la misma recta?

2. Grafica una recta con pendiente m. Compara tu gráfica con la de otro compañero. ¿Trazaron la misma recta?

Introducción

Se ha estudiado un elemento muy importante de las rectas como es su inclinación. Si deseamos referirnos a la recta l y sabemos que su pendiente m, no podremos ubicarla exactamente en el plano, puesto que hay infinitas rectas que poseen dicha pendiente m.

Lo que verdaderamente determina una recta en particular es su ecuación. Una recta queda bien determinada cuando se conoce su ecuación definida en las variables x y y, de tal manera que sea de primer grado para ambas variables, y en la cual las coordenadas de cualquier punto que pertenezca a la recta deben satisfacer a dicha ecuación. Al remplazar los valores de la abscisa y la ordenada del punto en la ecuación se obtendrá una igualdad.



Ejemplo:

Sea la recta l cuya ecuación es $2x - 3y = 6$, comprobar que el punto $P = (-3, -4)$ pertenece a la recta.

Solución:

Remplacemos el valor de las coordenadas x y y:

$$2x - 3y = 6$$
$$2(-3) - 3(-4) = 6$$
$$-6 + 12 = 6$$

Puesto que al remplazar las coordenadas se obtiene una igualdad, el punto P sí pertenece a la recta.

3. Decidir si el punto dado en cada caso pertenece a la recta $y = \frac{3}{4}x - 1$:

a. $A = (4, 2)$ b. $B = (0, 0)$ c. $C = (0, -1)$ d. $D = \left(2, -\frac{1}{2}\right)$ e. $P = \left(-1, -\frac{7}{4}\right)$

Ecuación de la recta

La ecuación de una recta con pendiente [illegible] que se tenga.

Ecuación de la recta cuando se conoce la pendiente y un punto

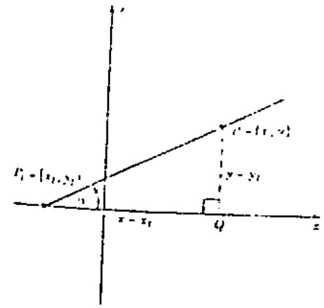
Si se sabe que la recta l pasa por un punto $P_1 = (x_1, y_1)$ y tiene una pendiente m dada, se puede encontrar su ecuación a partir de la [illegible] de la pendiente [illegible] el punto dado y un punto P [illegible] general.

$$m = \tan \alpha$$

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

Despejando:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

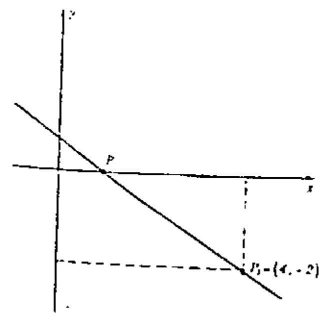


Ejemplo:

Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P_1 = (4, -2)$ y tiene pendiente $m = -\frac{2}{3}$.

Solución:

Para trazar la recta, localizamos en el plano cartesiano el punto $P_1 = (4, -2)$. La pendiente nos permite obtener un segundo punto P, midiendo 3 unidades a la izquierda de P_1 y 2 unidades por encima de P_1.



Escribimos la ecuación de la recta que pasa los puntos $P_1 = (4, -2)$ y tiene por pendiente, $m = -\frac{2}{3}$.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - (-2) = -\frac{2}{3}(x - 4)$$
$$y + 2 = -\frac{2}{3}(x - 4)$$

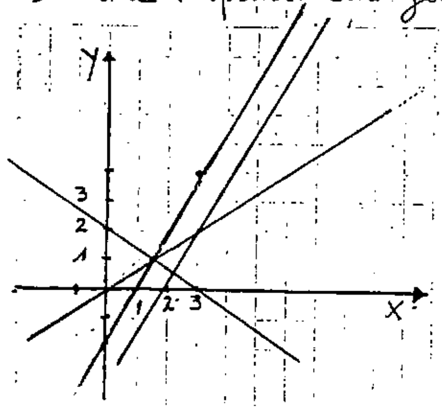
Despejando tenemos:

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{8}{3} - 2$$
$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$$

Col. Distrital "LA Amistad" J.T. Grado 10°

Ecuaciones. Relación entre Representaciones.

I Para responder este ejercicio utilice la figura como referencia.



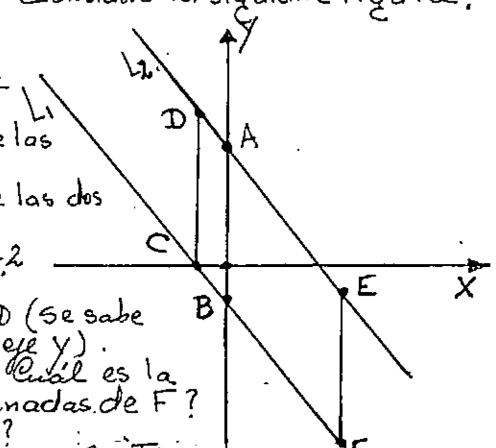
a. Escriba un sistema de dos ecuaciones lineales que esté representado en la gráfica y cuya solución sea el punto $(\frac{3}{2}, 1)$

b. Verifique la solución.

c. Escriba un sistema de ecuaciones lineales que sea inconsistente y que esté representado en la gráfica.

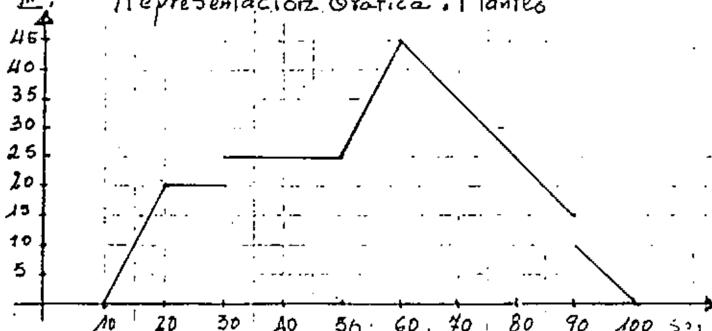
Relación entre representaciones
- Diversas representaciones.

II. Considere la siguiente figura:



1. ¿Qué puede decir acerca del signo de las pendientes de L_1 y de L_2?
2. ¿Qué puede decir del signo de los cortes de las rectas con el eje y?
3. LA siguiente lista incluye las ecuaciones de las dos rectas. ¿Cuáles son? ¿Por qué?
   $y = 2x+6$; $y = 2x-2$; $y = -2x$; $y = -2x-2$
   $y = -2x+6$; $y = 2x$?
4. Halle las coordenadas de los puntos A, B, C y D (se sabe que los segmentos CD y EF son paralelos al eje y).
5. Si la coordenada en X del punto E es 5, ¿Cuál es la coordenada en y de E y cuáles las coordenadas de F? ¿Es coherente su resultado con la gráfica?
6. Halle las longitudes de los segmentos EF, CD y AB. ¿Tienen sentido sus resultados?
7. Dibuje otro segmento que conecte las dos rectas y que sea paralelo al eje y. ¿Qué longitud tiene? ¿Se puede saber ese valor sin conocer las coordenadas de los extremos de los puntos? ¿Ayuda la ecuación?
8. Haga un plan para hallar el área de la figura CDEF.
9. Use ese plan para hallar el área.

III. Representación Gráfica. Planteo



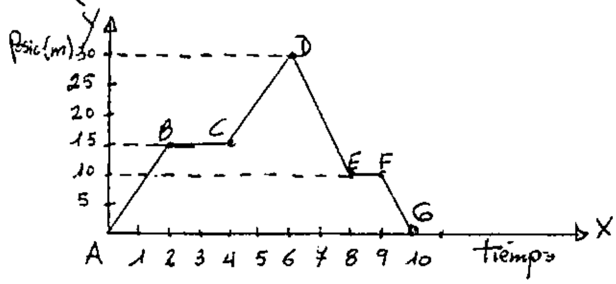
LA figura muestra el nivel del agua en la tina del Señor Díaz en función del tiempo. El Sr. Díaz puede abrir o cerrar el grifo, puede entrar o salir de la tina y puede abrir o cerrar el desagüe. Usted debe describir en palabras lo que muestra la figura indicando qué unidades se están presentando en los ejes y hallar la expresión simbólica de la función mostrada.

Aplicaciones a Funciones Lineales

Muchas situaciones en la Física, la Geometría, la Economía etc., pueden describirse utilizando gráficas rectilíneas.

Ejemplo:

El siguiente gráfico nos muestra el movimiento secuencial de un cuerpo y su posición en función del tiempo. Sobre el eje horizontal determinamos el tiempo t (en segundos) y sobre el eje vertical la posición en (metros)



De acuerdo al gráfico anterior determinar:

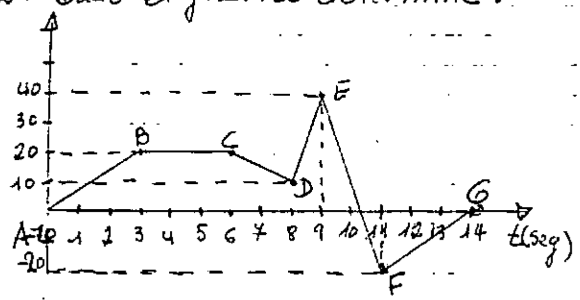
a. LAs coordenadas de los puntos B, C, D, F.
b. LA pendiente de los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DE}$
c. LA ecuación de los segmentos $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{FG}$
d. Determinar la posición del cuerpo en los siguientes tiempos:

$t = 3,5$ seg

$t = 5,7$ seg.

$t = 9,8$ seg.

2. Dado el gráfico determine:



a. LA posición del cuerpo en 1.5 S
b. LA posición del cuerpo en 4,2 S
c. LA posición del cuerpo a los 7 S.
d. LA posición del cuerpo a los 8,99 S
e. LA ubicación del cuerpo a los 10,5 S
f. LA ubicación del cuerpo a los 12 S.

Nombre: ______________________________ Curso: 9.º Fecha

Variación directa - Proporcionalidad.

En algunos estados de Estados Unidos, se cobra un depósito sobre los envases de aluminio. En Nueva York, el depósito es de 5 centavos de dolar por envase.

A) Mire los números en esta tabla y responda las preguntas:

Nº de envases retornados	Cantidad de dinero devuelto
1	5
2	10
3	15
4	20
5	25
6	

1. ¿Cuánto dinero se devolvería por retornar 6, 10 y 12 envases?

2. Describa cómo puede el dueño del almacen calcular la cantidad de dinero que debe devolver por cualquier cantidad de envases retornados.

3. Si y representa la cantidad de dinero devuelto y, X el número de envases, retornados, escriba una ecuación para la cantidad de dinero devuelto.

4. Puede usar su ecuación para encontrar cuántos envases deberán retornarse para que el depósito devuelto sea de 3 (dólares)? ¿Cuál seria el depósito recibido por 100 envases?

B) 1. Encontrar los puntos medios de las diagonales del cuadrilatero cuyos vértices son (2, 2), (2, 6), (5, 7), (5, 3).
2. Encontrar la longitud de cada uno de los lados del cuadrilátero

C) Sea L la recta que pasa por los puntos $P_1(2,3)$ y $P_2(4,7)$. Encontrar la pendiente de L!

Según su responsabilidad (1), trabajo (2), tareas (3), participación (4), disciplina (5), comportamiento (6). Cultura (7) y educación (8). Como persona integral. Escriba el número en cada uno de los símbolos siguientes según sea su apreciación comportamental.

E ____________ R ____________ M ____________

COLEGIO DISTRITAL LA AMISTAD J.T.

AREA: MATEMÄTICAS

ALUMNOS: 1.______________________ Curso: _______ Fecha:

2.______________________

3.______________________

4.______________________

LOGRO:

PASA DIRECTAMENTE DE UNA TABLA DE VALORES QUE INDICA LA CORRESPONDENCIA ENTRE DOS MAGNITUDES DIRECTAMENTE PROPORCIONALES A LA REPRESENTACIÓN SIMBÓLICA O ECUACIÓN Y A LA REPRESENTACIÓN GRÁFICA

ACTIVIDAD DE EVALUACIÓN:

-Un comerciante ha hecho ventas según indica la tabla siguiente,teniendo en cuenta que cobra el impuesto del iva del 15% sobre las ventas.

1.Complete la tabla

2.Explique cómo lo hizo?

3.Explique que valor de iva debe pagar al gobierno en cada caso.

4.Halle la constante de proporcionalidad.

5.Deduzca la expresión que liga las variables.

6.Utilizando solo la expresión calcule el valor del iva para $450.000 .

7. Realice la gráfica en el plano cartesiano

x	Costo sin grabar	10.000	1'000.000	20.000	150.000	?	?
Y	Valor iva	1.500				4.500	
Y/x							

Colegio Distrital La Amistad J.T. Evaluación de Matemáticas Grado 10_____ 2000-04-06

Nombre del estudiante____

1 En algunos estados de los Estados Unidos, se cobra un depósito sobre los envases de aluminio. En Nueva York, el depósito es de 5 centavos de dolar por envase.

2 Mire los números en ésta tabla y responda las preguntas:

No de envases retornados	Cantidad de dinero devuelto
1	5
2	
3	15
	20
5	

A)¿Cuánto dinero se devolvería por retornar 6,10,12 envases?

B)Describa con palabras (escriba claramente) cómo puede el dueño del almacén calcular la cantidad de dinero que debe devolver por cualquier cantidad de envases retornados.

C) Si Y representa la cantidad de dinero devuelto ,y, X el número de envases retornados, Escriba una ecuación para la cantidad de dinero devuelto.

D) Puede usar su ecuación para encontrar Cuántos envases deberán retornarse para que el depósito devuelto sea de 3 dólares. ¿Cuál será el depósito recibido por 100 envases?.

3. Dibuje en un plano cartesiano los puntos cuyas coordenadas son:
A(2,2) B(2,6) C(5,7) D(5,3). Halle las longitudes de cada uno de los lados del cuadrilátero. Trace las diagonales y dé las coordenadas de su punto de corte.

4. Dibuje los puntos de coordenadas A(2,3) y B(4,7). Trace la recta L que pasa por estos puntos y encuentre la pendiente de L.

5. Según su responsabilidad, trabajo en clase y fuera de ella, tareas, participación, puntualidad, disciplina, comportamiento, cultura y educación, como persona integral . Escriba un número de uno a diez, según sea su apreciación comportamental.

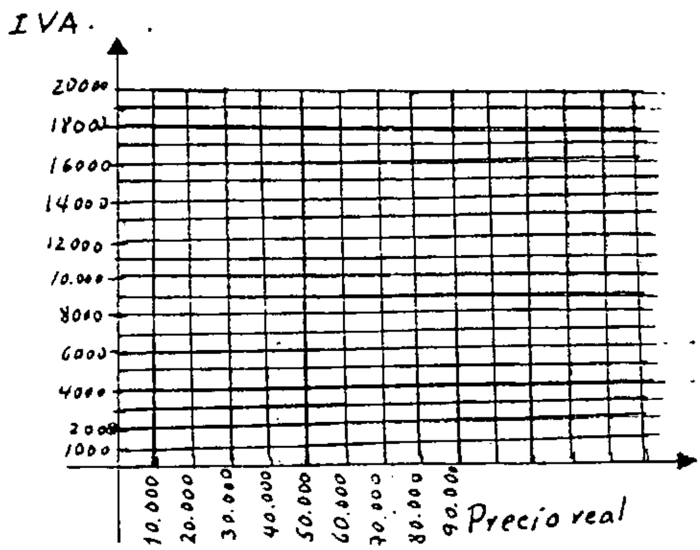
Mi comportamiento en clase lo valoro en___________

Un padre de familia tiene que comprar uniformes para sus siete hijos. El uniforme de Carlos tiene un PRECIO TOTAL de $49680. El PRECIO REAL fue de $43.200 y pagó el impuesto IVA de $6480, equivalente al 15% del precio real.

1. Complete la tabla que contiene los costos de los uniformes. Explique ¿Cómo lo hace?.

Precio real	43200	17000		60200	100.000	90.000	
IVA Impuesto	6480		3825		15000		8295
Precio Total	49680	19550		69030			

2. De la tabla, establezca una expresión que permita calcular un valor cualquiera de la segundc fila a partir de la primera. ¿Explique el proceso?.
3. En el diagrama cartesiano marque un punto para cada precio real y su iva correspondiente, según la información dada en la tabla.



4. Para cualquier precio X ¿Cuál es su IVA respectivo?.

...aluación de recuperación 1 de Matemáticas

Alumno: curso 10.1 Fecha Nota

Conteste todas las preguntas sin hacer tachones, si se equivoca encierre en un cuadrado y vuelva a contestar

1. De la función h conocemos algunos valores representados en la tabla

x	-2	-1	0
h	-1	1	3

a) Halle la pendiente de la función h

b) Encuentre la ecuación de la correspondiente

c. Explique si la función es afín o lineal

d. construya la gráfica.

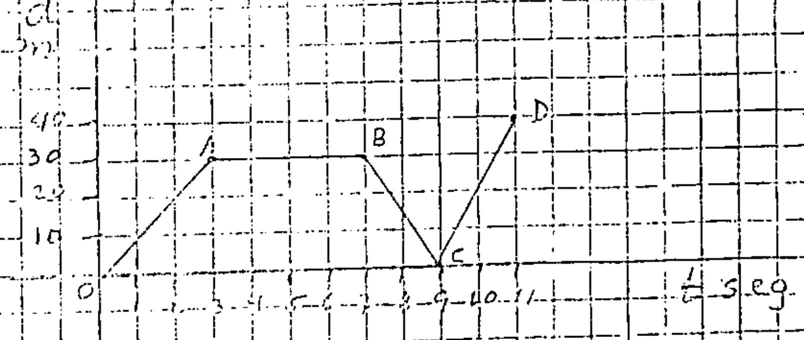
2. En el siguiente punto se conoce un punto de la recta y la pendiente $A(-2, 3)$ $m = -3$

a. Halle la ecuación de la recta determinada

b. Represente la recta en el plano cartesiano

c. Diga si la función es lineal o afín y explique porque

3. para la gráfica siguiente escriba 5 afirmaciones



Evaluación de la función lineal

EVALUACIÓN DE LA FUNCIÓN LINEAL Y AFÍN

Nombre: Curso: Fecha:

Esta es una evaluación que hace parte del Proyecto ICEP, asesorado por la Universidad de los Andes, en el cual participa su profesor de matemáticas. Con esta evaluación queremos que usted tenga la oportunidad de mostrar lo que ha aprendido sobre los temas estudiados.

Lea cuidadosamente todas las preguntas, contéstelas todas, en el orden que quiera, utilizando esfero. Escriba todas las ideas que piense en el proceso de solución. No borre ningún paso hecho y en caso de equivocarse encierre en un cuadrito el error. Si no puede contestar alguna de las preguntas, escriba por qué no lo puede hacer.

Preguntas

1) De la función f conocemos algunos de sus valores que se presentan en la siguiente tabla:

x	-2	3	4
y	-8	12	16

¿Es f una función lineal? Explique detalladamente su respuesta.

2) Un estudiante hace la siguiente afirmación:

El punto (-1, -1) pertenece a una línea recta que tiene pendiente 2 y corta al eje Y en el punto (0, 1).

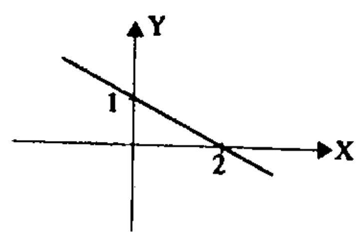
¿Está de acuerdo con la afirmación del estudiante? Escriba en qué se basa su acuerdo o desacuerdo con la afirmación del estudiante.

3) La tabla siguiente muestra algunos valores de una función lineal:

x	3	6	p
y	7	q	35

Encuentre los valores de p y q, escribiendo detalladamente lo que hizo para hallarlos.

4) La siguiente es la gráfica de una función:



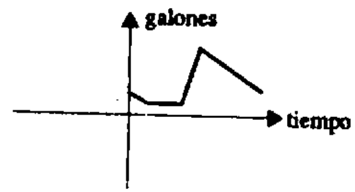
Escriba, al menos, tres afirmaciones verdaderas sobre la función, explicando en qué se basa para hacer cada afirmación.

5) En un periódico aparece la siguiente afirmación:

En Colombia, el desempleo aumentó proporcionalmente durante los últimos meses.

Usted quiere mostrar de la manera más clara posible a sus compañeros de clase, usando sus conocimientos de matemáticas, lo que entiende con tal afirmación. Escriba todos los detalles que incluiría en su explicación.

6) La siguiente gráfica muestra la cantidad de galones de metanol que había en el tanque del automóvil de Juan Pablo Montoya durante una parte del recorrido de las 500 millas de Indianápolis.



Escriba tres afirmaciones verdaderas respecto de la situación representada en la gráfica, explicando en qué se basa para hacer cada afirmación.

PROYECTO DE PRECALCULO
UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
UNA EMPRES DOCENTE

ANALISIS DE RESULTADOS DE LA EVALUACIÓN DE LA FUNCIÓN LINEAL.
PARA: CRISTINA CARULLA DE: ROSA ALICIA ROJAS DE-COBO
AGOSTO 4 DEL 2000
El curso 10.1 tiene 40 alumnos matriculado . 10 no asistieron a clase el día 24 de Julio y 30 contestaron la prueba.

1.ANÁLISIS DE CADA PREGUNTA:
En la primera pregunta 22 alumnos el 73% contestaron bien una o más representaciones de la función lineal: 6 el 20% contestaron mal y 2 el 6.6% no contestaron.
En la segunda pregunta 10 contestaron bien para un 33.3%; 19 contestaron mal 63.3% 1 no contestó el 3.3%.
En la tercera pregunta 10 contestaron bien para un 33.3% ; 19 contestaron mal 63.3% ; 1 no contestó el 3.3%.
En la cuarta pregunta de 2 o más aciertos 10 contestaron bien, el 33.3%; contestaron mal 18 el 60%. 2 no contestaron el 6.6%.
En la quinta pregunta contestaron bien 17 par un 56%;11 contestaron mal un 36% y 2 no contestaron 6.6%.
En la sexta pregunta contestaron bien 7 un 23%; 11 contestaron mal 36% y 12 no contestaron 40%.

2.ANÁLISIS DE RESULTADOS DEL CURSO:
Losalumnos que contestaron bien todas las preguntas para un excelente fueron 3 igual a un 10% de los examinados.
Los que contestaron la mayoría de las preguntas o sea 4 o más para una valoración de bueno fueron 6 alumnos para un 20%.
Con 3 preguntas bien contestadas para regular un total de 6 para un 20%.
Para 1 a 2 preguntas bien contestadas 12 alumnos para un 40%.
Para ninguna respuesta acertada 2 alumnos para un 6.6%

3. ANÁLISIS DE RESULTADOS Y LOGROS ALCANZADOS.
Los alumnos que alcanzaron los logros en el primer periodo fueron los que sacaron la valoración : regular, bueno , excelente.
Un alumno no acertó ninguna respuesta y no alcanzo los logros del primer periodo.
El otro alumno que no acertó ninguna respuesta, alcanzó todos los logros del primer periodo.
El 40% de los alumnos que obtuvieron 1o 2 respuestas acertadas: 9 alcanzaron todos los logros del primer periodo; 2 no alcanzaron los logros y 1 alumno alcanzó un logro y los otros no los alcanzó.

CAUSAS
Posibles causas de estos resultados:
Falta explicación clara según dos estudiantes.
Muchos ejercicios parecidos y confunden lo aprendido.
Llegan tarde a clase por el convenio con el Sena en tecnología.
Todos no realizan consultas y ejercicios de tarea por falta de libros, por la política de Secretaría de Educación, ya que los libros de los colegios no los pueden llevar para la casa.
Poca lectura adicional en libros de matemáticas.

ESTRATEGIAS:
Diseñar actividades donde el alumno participe activamente
Trabajos de recuperación
Evaluación escrita
Autoevaluación hecha formulando un problema redactado por el alumno, sobre proporcionalidad y darle solución, archivar su trabajo en carpetas.

LA EVALUACIÓN

La evaluación es un proceso complejo y sistemático que realiza el profesor, el estudiante, o en conjunto profesores y estudiantes para indagar sobre las estructuras y procesos matemáticos. Es una realización de tareas, de productos, es una reflexión del comportamiento del profesor y del estudiante en donde tanto el profesor como el estudiante aprenden.

Para el profesor es una tarea difícil, puesto que tiene que orientar a los estudiantes, observarlos, para de acuerdo a lo que hacen y producen diseñar las nuevas tareas, también para él mismo por medio del estudio, el diseño de actividades, y su propia reflexión conducir el proceso de aprendizaje.

Evaluación de las funciones lineales y afines:

De un total de 112 estudiantes, presentaron la evaluación 106 estudiantes.

1. Análisis de la primera pregunta:

Se les dio una tabla de una función lineal, para que ellos dijeran si era función lineal o no y explicaran claramente por qué , 59 estudiantes dijeron que sí era función lineal y 72 explicaron cuando una función es lineal, este desface pienso que se debe a que algunos estudiantes saben las condiciones de linealidad en forma teórica pero no las pueden aplicar.

2. Análisis de la segunda pregunta:

En este punto los estudiantes tenían un punto, la pendiente, y el corte de de la recta con el eje y, y se les preguntaba el acuerdo o desacuerdo con la afirmación. 54 estudiantes estuvieron de acuerdo contestanto acertadamente la pregunta y sólo 43 lo pudieron explicar bién utilizando la ecuación pendiente punto. Pienso que los que no los contestaron o no lo explicaron bién fue porque les faltó conocimiento matemático de la ecuación de la recta.

3. Análisis de la tercera pregunta:

Se les entregó una tabla de una función lineal en la aparecen dos valores desconocidos de p y q se les pidió encontrar estos valores y detallar claramente el proceso. 36 estudiantes encontraron el valor de p y q , sólo 31 explicaron el proceso, la mayoría lo hizo por regla de tres simple directa. P

4. Análisis de la cuarta pregunta:

Se les dio la gráfica de una función afín que cortaba a los ejes x y y y se les pedía al menos tres afirmaciones verdaderas sobre la función.42 estudiantes dieron tres o más afirmaciones correctas y sólo 11 las justificaron.

5. Análisis de la quinta pregunta:

Se les dio una afirmación "En Colombia, el desempleo aumentó proporcionalmente durante los últimos meses." Para que ellos usaran sus conocimientos de matemáticas respecto a la función lineal o afín. 46

estudiantes hicieron gráficas y explicaciones pero sólo 25 lo hicieron en forma coherente.

6. Análisis del sexto punto:

Se les dio una gráfica que que mostraba la cantidad de metanol que había en el tanque del automóvil de Juan Pablo Montoya durante una parte del recorrido de las quinientas millas de Indianápolis. Y se les pedía tres afirmaciones verdaderas respecto de la situación representada en la gráfica. 31 estudiantes hicieron las tres afirmaciones correctamente pero sólo 16 dieron las explicaciones pertinentes.

OPERACIONES

FUNCIÓN

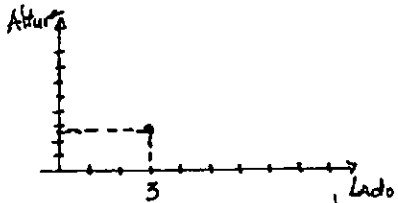
AL

Colegio Distrital "LA Amistad" J.T.
Trabajo de Recuperación y P.

1. Afirmemos nuestros conocimientos sobre la proporcionalidad.

a) Dibuje varios triángulos equiláteros, complete la tabla y la gráfica (utilice un compás).

Lado: X	3	6	8	9	...
altura: y	2.6				...
$\frac{y}{x}$	0.86				



b) ¿Son aproximadamente constantes los cocientes y/x? ¿Es la gráfica una recta que pasa por el origen? Hay proporcionalidad entre base y altura?

c. Despeje y en $y/x = m$, donde m es la constante que ha hallado, para obtener la fórmula aproximada de la función base → altura.

2. Problema sobre lavado de Carros (Variación inversa)

Una compañía alquila máquinas para lavar los carros que caben en el espacio que tienen disponible para ello. El gerente sabe que 36 máquinas pueden lavar todos los carros en una hora.

a) Qué pasa si solo la mitad de las máquinas trabajan? Cuánto tiempo requerirían 18 máquinas para lavar todos los carros? Cuánto tiempo si hay 72 máquinas? ¿Cuánto con 9 máquinas? y Cuánto tiempo con 4 máquinas?

b) Describa cómo podría el gerente calcular cuántas horas se requieren para lavar los carros para cualquier cantidad de máquinas?

c. Escriba 1 ecuación para encontrar el N° de horas necesarias para lavar los carros si se conoce el N° de máquinas lavadoras. H representa el N° de horas necesarias para lavar los carros y M representa el N° de máquinas lavadoras.

3. Distancia entre dos puntos. Punto Medio.

Ejercicios

a) Encontrar la longitud de las medianas del triángulo que tiene vértices $A(2,3)$, $B(3,-3)$ y $C(-1,-1)$

b) Encontrar los puntos medios de las diagonales del cuadrilátero cuyos vértices son $(0,0)$, $(0,4)$, $(3,5)$ y $(3,1)$

c) Encontrar el área del triángulo rectángulo cuyos vértices son $A(3,-6)$, $B(8,-2)$ y $C(-1,-1)$.

d) Los puntos $B(1,1)$, $S(3,2)$, $T(4,3)$ y $H(0,9)$ forman un cuadrilátero. Demuestre que los puntos medios de los lados forman un paralelogramo.

e. Compruebe que el triángulo de vértices $P(1,-2)$, $Q(-4,2)$ y $H(1,6)$ es Isósceles.

4. Halle la pendiente de las rectas que pasan por los puntos:

a. $A(2,3)$ y $F(1,4)$

b. Si la inclinación de la recta es $60°$, entonces $m = ?$

c. Si la inclinación de una recta es $45°$, $m =$

d. Si la inclinación de una recta es $130°$, $m =$

Halle la inclinación de las rectas que pasan por los puntos:

a. $P_1(3,-5)$, $P_2(2,-3)$
b. $P_1(1,-2)$, $P_2(3,4)$
c. $P_1(1,3)$, $P_2(7,1)$
d. $P_1(3,-2)$, $P_2(3,5)$

5. Halle la ecuación de la recta que pasa por los puntos:
$P_1(-5,2)$, $P_2(3,2)$

Trabajo de Recuperación

Logros: 1. Expresa patrones de Variación y establece relaciones de proporcionalidad. Resuelve problemas

2. Da significado a la información numérica y traduce diferentes representaciones

5. Identifica los efectos de las transformaciones en los elementos de la función lineal.

6. Resuelve ecuaciones lineales con una incógnita

Hacia LA función de Proporcionalidad directa

1. Un profesor tan sólo registro los siguientes datos durante un entrenamiento de ciclismo de uno de sus alumnos, quien mantuve el mismo ritmo de carrera.

Nº de Vueltas	Tiempo Minutos
3	12
	20
7	
	36
35	

Ayúdele a completar la tabla. Explique como lo hace.

2. Los registros tomados por el profesor para otro alumno quien también mantuvo el mismo Ritmo de Carrera son:

Nº de Vueltas	Tiempo Minutos
2	3
4	6
6	9
10	15

a) ¿Cuántos minutos gasta para dar 5 vueltas? Explique su respuesta

b) ¿En doce minutos cuántas vueltas ha dado? Explique su respuesta

c) Con sólo los datos de la tabla Calcule: ¿Cuánto tiempo gastaría en recorrer 24 Vueltas? Explique su respuesta

3. De la tabla, establezca una expresión que permita calcular un valor cualquiera de la segunda columna a partir de su correspondiente valor en la primera.

a) Halle la constante de proporcionalidad (pendiente)

b) Construya un diagrama Cartesiano y ubique los puntos.

c. Escriba la ecuación que relaciona X con Y.

Nº de Fotocopias	Costo $
3	75
6	150
9	225
12	300

4. De las funciones siguientes: Conocemos algunos valores representados en las tablas:

A) función

X	Y
-4	-6
0	0
2	3

X	Y
-1	-2
3	6
5	10

a) Halle la pendiente de cada una de las funciones.
b) Encuentre la ecuación de la recta correspondiente.
c) Diga si la función es lineal o afín. Explique por qué.
d) Construya la gráfica.

Función Cuadrática.

ÍNDICE

FUNCIONES CUADRÁTICAS

FUNCIÓN CUADRÁTICA

La Amistad

Posibles objetivos de aprendizaje asociados a la función cuadrática

Este documento intenta, a la luz de los tres niveles de competencias básicas en matemáticas, establecer algunos de los objetivos que podrían proponerse en el aprendizaje de la función cuadrática.

vel 1: conocimiento de ementos nceptuales y ocedimentales.

Descripción general

A este nivel de desempeño también se le denomina *Reconocimiento y distinción* o *Adquisición de códigos.*

Asociado con la identificación y descripción de objetos matemáticos, sus atributos o propiedades, sus representaciones y sus operaciones.

Objetivos de aprendizaje

- Identificar una función cuadrática a través de la expresión simbólica; es decir, reconocer que una función descrita por un polinomio de segundo grado en una variable (o por expresiones algebraicas equivalentes a éste) es una función cuadrática.
- Identificar una función cuadrática a través de la gráfica cartesiana; es decir, reconocer que una parabola de eje vertical representa una función cuadrática.
- Identificar una función cuadrática a través de la tabla de datos; es decir, reconocer que los datos de una tabla se relacionan de "manera cuadrática".
- Identificar y describir la manera como se establecen las variaciones de las imágenes, respecto de las variaciones de las preimágenes, en las distintos sistemas de representación (simbólico, gráfico, tabular). Particularmente, reconocer la existencia de un punto o valor numérico (máximo o mínimo) en el cual se altera un comportamiento creciente (de la variable dependiente) en uno decreciente, así como, reconocer que las variaciones no son proporcionales.
- Identificar al conjunto de los reales como dominio de toda función cuadrática, así como identificar el conjunto $(-\infty,k]$ ó $[k,\infty)$ como rango de cualquier función cuadrática.
- Identificar que la función cuadrática puede tener a lo sumo dos ceros (o raíces). Además, conectado con esto, reconocer (en las diferentes representaciones) las características que determinan el número de ceros.
- Reconocer que la función cuadrática no satisface las dos condiciones que definen la linealidad (aditividad y homogeneidad).
- Reconocimiento de la simetría como característica de algunas funciones cuadráticas. Igualmente, determinar las características que definen la existencia o no de la simetría de una función cuadrática.

es en la gráfica

par impa

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
APARTADO AÉREO 4976
BOGOTÁ - COLOMBIA
TELÉFONO: 339 4949 EXT. 2717
FAX: 339 4999 EXT. 2709

80

ivel 2: terpretación y uso e elementos nceptuales y rocedimentales.

Descripción general

También denominado *Interpretación* o *Uso de códigos*.

Asociado con la competencia para relacionar, clasificar, comparar, conjeturar, estimar, organizar información, verificar resultados matemáticos y soluciones, y traducir entre diversas representaciones.

Objetivos de aprendizaje

- ▲ Transformar los polinomios de segundo grado en expresiones algebraicas equivalentes en las cuales se visualicen algunas características de la función cuadrática (v.g. la existencia del mínimo o máximo (vértice), ó, la existencia de ceros (cortes con el eje de las abscisas ó coeficientes independientes de los factores lineales)).
- ▲ Transformar la expresión simbólica de una función cuadrática en una gráfica, pasando y sin pasar por una representación tabular.
- ▲ Identificar el papel que cumplen algunas características de la gráfica de una función cuadrática en la(s) expresión(es) simbólica(s) de la misma.
- ▲ Establecer las variaciones que sufre una gráfica de una función cuadrática al hacer variaciones en los coeficientes del polinomio que la describe o en los coeficientes de los polinomios cuyo producto describe la función.
- ▲ Estimar el valor (punto o números) en el cual la función cuadrática puede tener un máximo o un mínimo.
- ▲ Predecir (extrapolar o interpolar), con relativa aproximación, los valores numéricos o puntos implicados en una función cuadrática.

ivel 3: Producción generalización.

Descripción general

También denominado *Producción* o *Explicación de uso*.

Se relaciona fundamentalmente con la construcción de modelos y representaciones, formulación de problemas, la argumentación, las transformaciones analíticas y algebraicas, la inferencia y la generalización.

Objetivos de aprendizaje

- ▲ Identificar la función cuadrática como modelo de variación de algunos fenómenos físicos (v.g. la relación entre espacio y tiempo en los movimientos de caida libre).
- ▲ Establecer las operaciones entre funciones cuadráticas que producen nuevas funciones cuadráticas, atendiendo a las restricciones posibles para las mismas.

81

Martha López 6 — Jaqueline Cruz — alicia

Calentando motores...

Forma de las gráficas de las funciones cuadráticas

1. Para las siguientes funciones completa la tabla e identifica la gráfica con alguna de las indicadas más abajo.

$y = x^2$

x	...	−3	−2	−1	−1/2	0	1/2	1	2	3	...
y		9	4	1	$\frac{1}{4}$	0	¼	1	4	9	

$y = -\frac{1}{2}x^2$

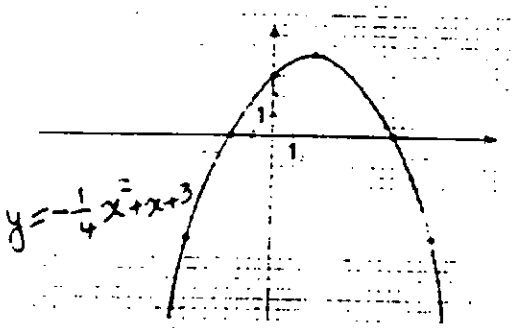
x	...	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	...
y		-8	-4,5	-2	-½	0	-½	-2	-4,5	-8	

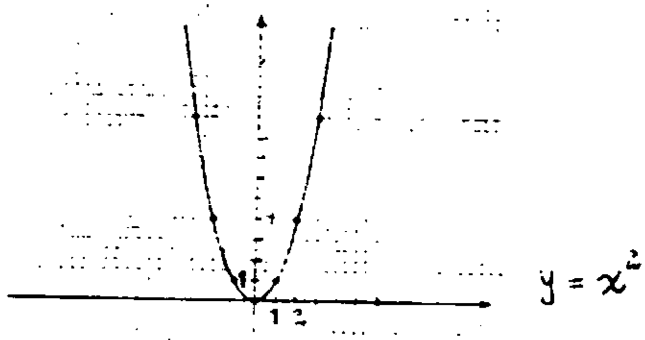
$y = x^2 - 4x$

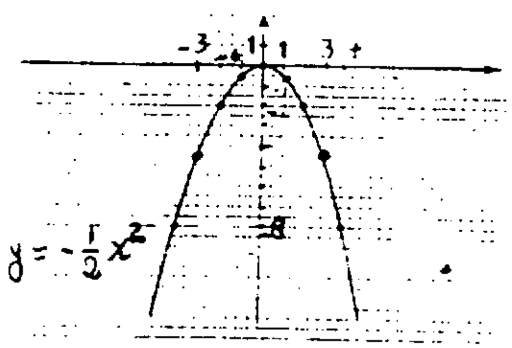
x	...	−1	0	1	1.5	2	2,5	3	4	5	...
y		5	0	-3	-3,75	-4	-3,75	-3	0	5	

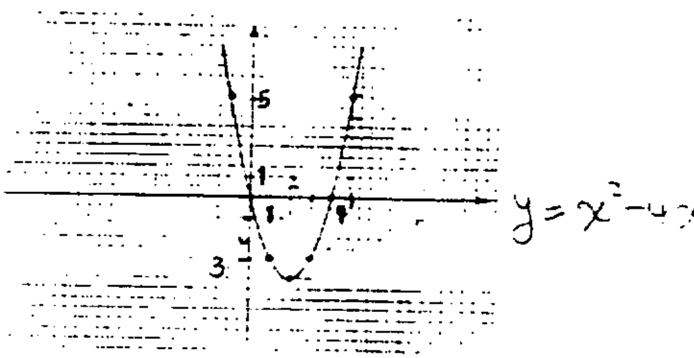
$y = -\frac{1}{4}x^2 + x + 3$

x	...	−4	−2	0	1	2	3	4	6	8	...
y											









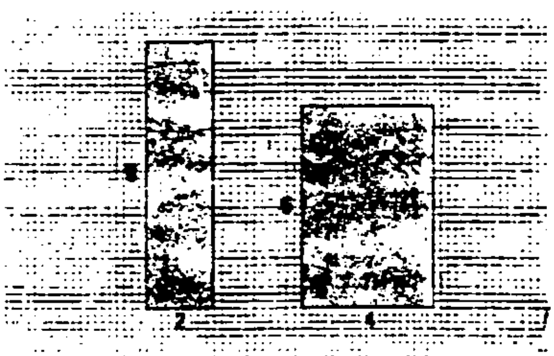
Las expresiones de las funciones anteriores son de segundo grado. Las gráficas, todas del mismo tipo, abren sus brazos hacia arriba o hacia abajo. Relaciona este hecho con el signo del coeficiente de x^2.

Rectángulos de igual perímetro y distinta área

2. Un joven profesor de matemáticas se va a casar y, para celebrarlo, invita a sus alumnos con una tarta del tamaño de la pizarra.

Cada alumno puede partir el trozo que quiera con dos limitaciones: ha de ser rectangular y el perímetro debe medir 20 cm.

Aquí tienes dos rectángulos posibles.



Pero su área no es igual y Patricia, que es muy glotona, intenta coger el trozo más grande posible.

a) Calcula la altura para los rectángulos de base 1, 3, 5, 7 y 10 cm.

b) ¿Es cierto que si la base es x, la altura es $10 - x$?

c) El área en función de la base x es:

$$A(x) = x\,(10 - x)$$

Completa la tabla y represéntala.

	0	1	2	3	4	4,5	5	5,5	6	7	8	9	10
	0	9											

d) A la vista de la gráfica, ¿de qué dimensiones cogerá su trozo Patricia?

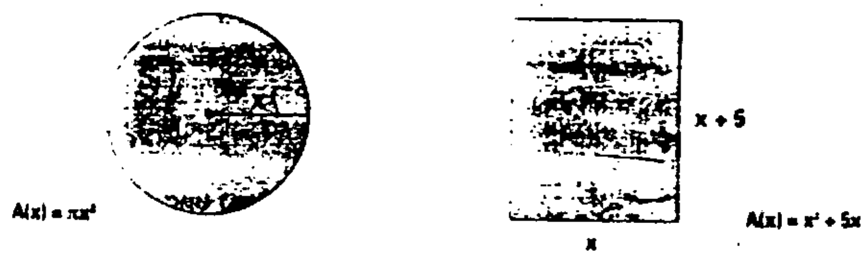
En marcha

Funciones cuadráticas. Introducción

Las funciones más frecuentes son, sin duda, las lineales y afines, donde la variab aparece simplemente multiplicada por una constante. Pero es muy fácil encontr problemas donde la variable se multiplica por sí misma, originando expresiones c segundo grado o cuadráticas.

Considera, por ejemplo, el área de un círculo en el que vamos variando el radio: ol tenemos la función cuadrática $A(r) = \pi r^2$. Otro ejemplo es el área de un rectángu cuya altura es 5 unidades mayor que la base: obtenemos la función

$$A(x) = x\,(x + 5) = x^2 + 5x$$



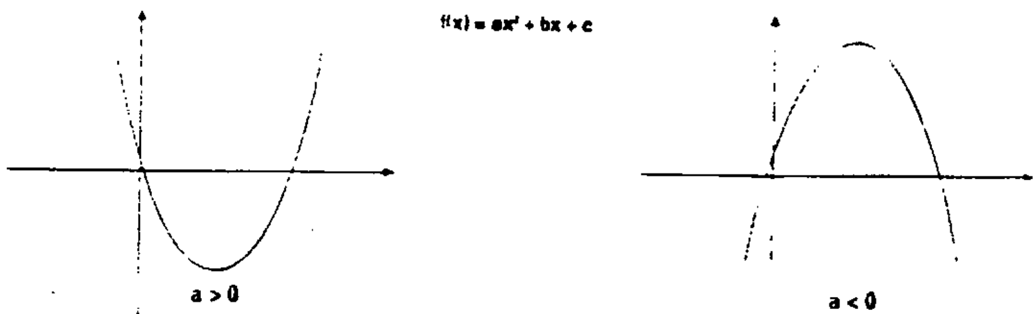
Una función cuadrática tiene por expresión:

$$\boxed{f(x) = ax^2 + bx + c}$$

Puede faltar el término bx o c pero nunca ax^2. Ejemplos de funciones cuadráticas:

$f(x) = 3x^2$ $\qquad$ $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + 4$ $\qquad$ $f(x) = -x^2 + 2x - 3$

Las gráficas de las funciones cuadráticas las llamamos ***parábolas***, siempre son de mismo tipo, y su forma es:



El estudio de la representación lo realizaremos en tres fases:

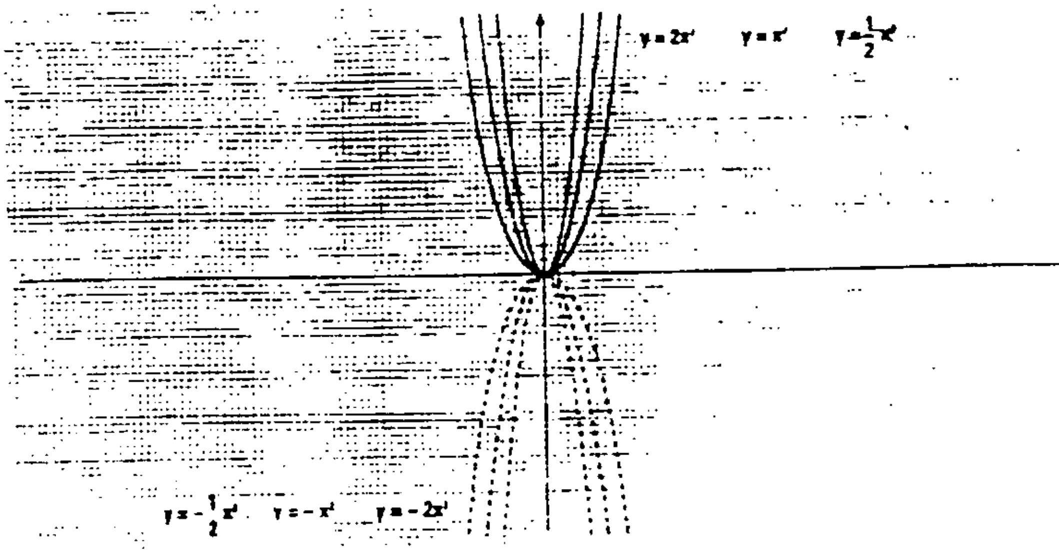
1º Gráfica de $y = ax^2$; 2º Gráfica de $y = ax^2 + bx$; 3º Gráfica de $y = ax^2 + bx + c$

De esta manera podremos ver cómo varía la gráfica de $y = ax^2$, al ir añadiendo sucesivamente los términos bx y c.

Gráfica de $y = ax^2$

En la figura hemos representado seis funciones de la forma $y = ax^2$ para:

$a = 2$, $a = 1$, $a = 1/2$, $a = -1/2$, $a = -1$ y $a = -2$.



Cada parábola tiene dos ramas, una creciente y otra decreciente. El punto de uni
de las dos ramas se llama **vértice**.

La gráfica de $y = ax^2$ se llama parábola. Sus propiedades son:

- Tiene un eje de simetría: OY.
- Tiene el vértice en (0 , 0)
- Si *a* es positivo, las ramas se dirigen hacia arriba. Si *a* es negativo, hacia abajo
- Las parábolas se cierran a medida que aumenta *a*, en valor absoluto.
- Las gráficas de $y = ax^2$ e $y = -ax^2$ son simétricas respecto del eje OX.

¡ACCIÓN!

1 Forma una tabla y representa en unos mismos ejes:

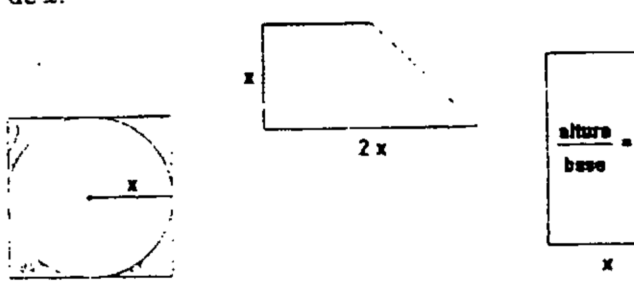
$y = 0{,}2\,x^2$ $\quad y = 1{,}5\,x^2$ $\quad y = -0{,}1\,x^2$ $\quad y = -2/3\,x^2$

2 Representa en unos mismos ejes:

$y = x^2$, $y = x^2 + 2$ e $y = x^2 - 3$

Formula un enunciado relativo a las tres gráficas que incluya la palabra "traslación".

3 Halla el área de la zona coloreada en func
de x.



124
25

Gráfica de $y = ax^2 + bx$

Conocida ya la gráfica de $y = ax^2$ consideremos ahora la función $y = ax^2 + bx$.

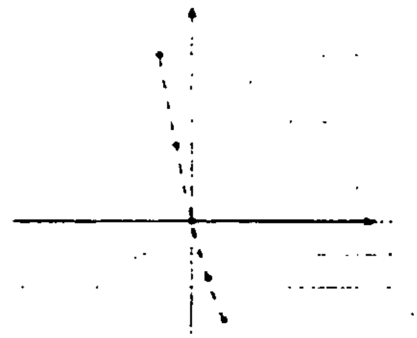
Adelantemos que la única pertubación que introduce el término bx será trasladar la parábola $y = ax^2$ de su posición original. la gráfica de $y = ax^2$ es idéntica a la de $y = ax^2 + bx$, de modo que, disponiendo de una plantilla de la primera, podríamos trazar la segunda, sin más que localizar la posición del nuevo vértice.

EJEMPLO

Tracemos la gráfica de $y = x^2 - 4x$.

Si comenzamos formando una tabla corremos el peligro de representar la curva en un sitio poco interesante. Por ejemplo, la siguiente tabla nos llevaría a dibujar:

x	$x^2 - 4x$
−1	5
−0,5	2,25
0	0
0,5	−1,75
1	−3



El punto más importante es el vértice y con nuestra tabla hemos tenido poco éxito.

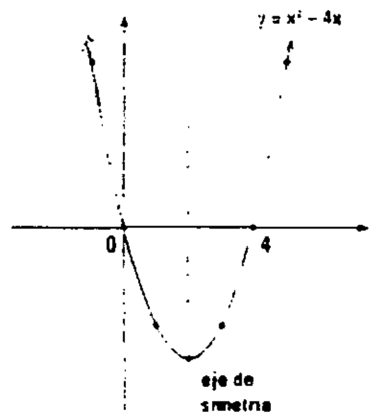
Podemos construir una tabla con más probabilidad de éxito si localizamos antes los cortes con OX. Éstos son los puntos en los que $y = 0$, luego:

$$x^2 - 4x = 0 \qquad x(x-4) = 0 \qquad \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

La curva corta el eje X en $x = 0$ y $x = 4$.

Veamos cómo es la curva en el intervalo [0 , 4] y en puntos próximos:

x	$x^2 - 4x$
−1	5
0	0
1	−3
2	−4
3	−3
4	0
5	5



Vértice: se encuentra sobre el eje de simetría, a mitad de camino entre 0 y 4

Abscisa: $x_v = 4/2 = 2$. Ordenada: $y_v = 2^2 - 4 \cdot 2 = -4$.

Vértice en v (2 , −4)

Coordenadas del vértice de $y = ax^2 + bx$

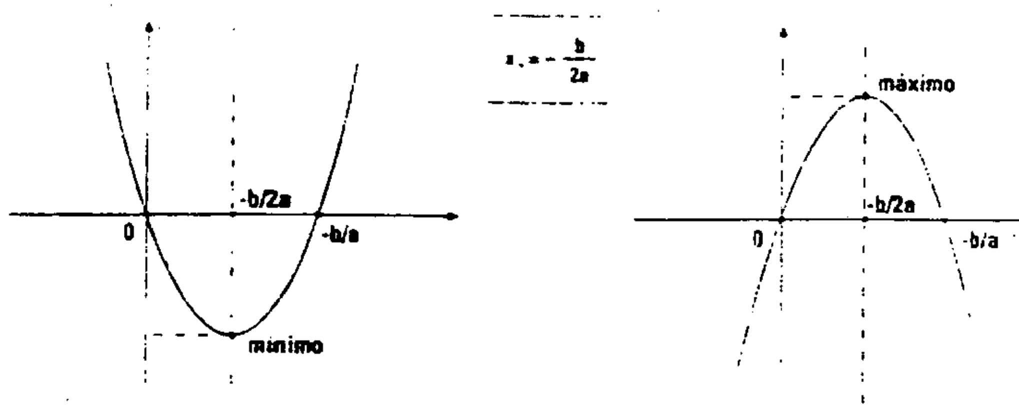
Repitamos el proceso de localización del vértice de $y = ax^2 + bx$, siguiendo ex mente los pasos del ejemplo. La fórmula que obtendremos no sufrirá alterac cuando estudiemos la forma general de la parábola: $y = ax^2 + bx + c$

La función $y = ax^2 + bx$ siempre puede escribirse: $y = x\,(ax + b)$

- Los puntos de corte con el eje X son las soluciones de $x\,(ax + b) = 0$:

$$x\,(ax+b) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ ax + b = 0 \rightarrow x = -b/a \end{cases}$$

- Como la parábola corta el eje X en $x = 0$ y $x = -b/a$, la abscisa del vértice en el punto medio, tanto si las ramas van hacia arriba como si van hacia aba



Para obtener la ordenada del vértice sustituimos x por $-b/(2a)$ en la función

¡ACCIÓN!

1 Indica las coordenadas del vértice, los puntos de corte con el eje X y representa:

a) $y = 2x^2 - 8x$ **b)** $y = 2x^2 + 8x$

c) $y = -3x^2 - 12x$ **d)** $y = -3x^2 + 12x$

Indica en cada caso el valor máximo o mínimo de la función.

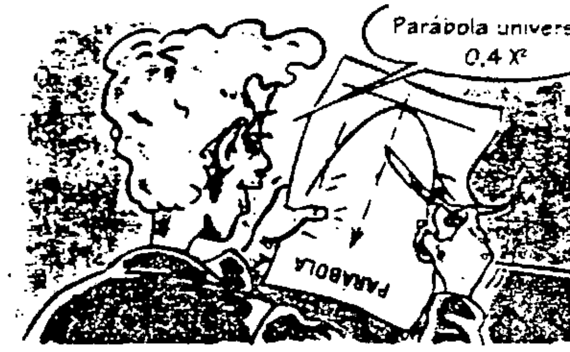
2 Tijeras y papel milimetrado.

a) Traza con precisión las gráficas de:

$y = 0{,}4x^2$ $y = 0{,}4x^2 - 8x$

$y = 0{,}4\,x^2 + x$ $y = 0{,}4x^2 + 2x$

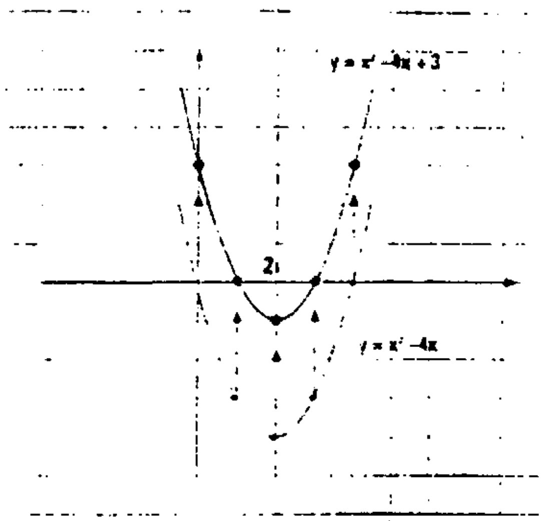
b) Recorta una cualquiera de las gráficas y su ponla sobre las restantes. ¿Conclusión?



Gráfica de $y = ax^2 + bx + c$

Comparemos las gráficas de $y = x^2 - 4x$ e $y = x^2 - 4x + 3$. Observa el efecto que produce la adición del término independiente + 3:

x	$x^2 - 4x$	$(x^2 - 4x) + 3$
0	0	$0 + 3 = 3$
1	-3	$-3 + 3 = 0$
2	-4	$-4 + 3 = -1$
3	-3	$-3 + 3 = 0$
4	0	$0 + 3 = 3$



Se produce una traslación vertical.

Coincide el eje de simetría y, con él, la abscisa de los vértices.

1. Vértice. Caso general

Para representar la función cuadrática completa, $y = ax^2 + bx + c$, hay que localizar el vértice y formar una tabla adecuada. Su abscisa, como hemos visto, es la misma que la del vértice de $y = ax^2 + bx$, y sabemos que ésta es:

$$x_v = -\frac{b}{2a}$$

Conocida la abscisa, la ordenada se calcula sustituyendo x por x_v en $ax^2 + bx + c$.

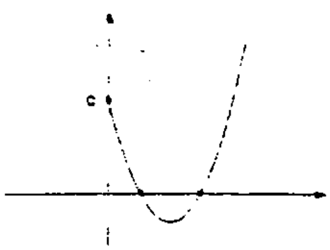
2. Otros puntos notables

- *Corte con el eje Y*: Viene representado por el término independiente c. En efecto, para $x = 0$:

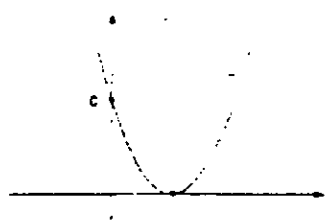
  $y = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$ Corte con CY: $(0, c)$

- *Cortes con el eje X*. Hay que determinar para qué valores de x es $y = 0$. Basta para ello resolver la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, que puede tener dos soluciones distintas, una solución doble o ninguna.

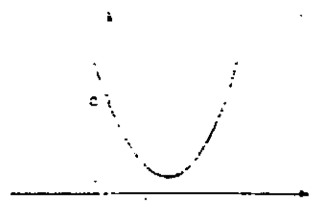
  Los posibles casos, con $a > 0$, son:



dos soluciones



una solución



sin solución

Trazado de parábolas. Ejemplos

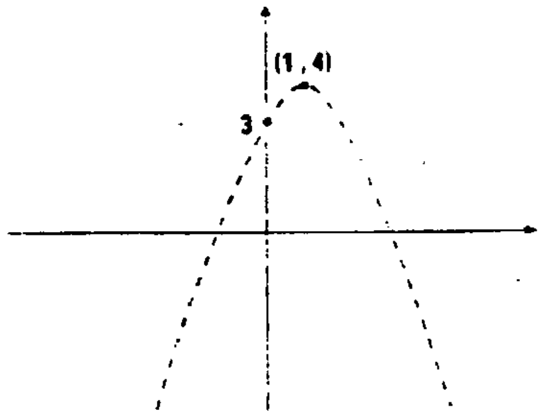
EJEMPLOS

1. *Representemos $y = -x^2 + 2x + 3$*

   - Como el coeficiente de x^2 es negativo, la parábola dirige sus ramas hacia
   - La abscisa del vértice es $x_v = -b/(2a) = -2/-2 = 1$

     La ordenada del vértice es $y_v = -1^2 + 2 \cdot 1 + 3 = 4$
   - El punto de corte con el eje Y es (0,3)

   Con estos datos, y aprovechando la simetría de la parábola, tenemos una aproximación de la gráfica:

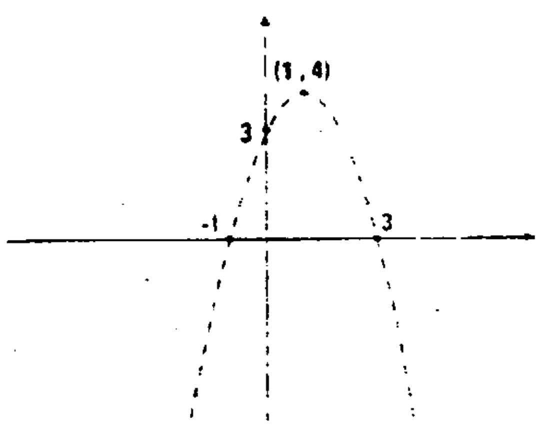


En arquitectura muchos arcos tienen forma parabólica.

   - Cortes con el eje X:

     $-x^2 + 2x + 3 = 0 \qquad x^2 - 2x - 3 = 0 \qquad x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2}$

   Con esta información conseguimos ya una gráfica aceptable:



Si la precisión deseada es mayor, entonces deberemos trazar una tabla cl del vértice.

57

2. *Representemos* $y = 4x^2 - 4x + 1$

- Como $a = 4 > 0$, las ramas se dirigen hacia arriba.
- Abscisa del vértice: $x_v = -b/(2a) = -(-4)/(2 \cdot 4) = 1/2$

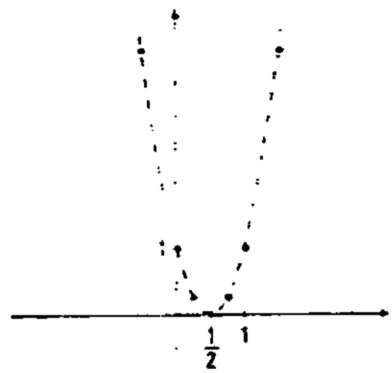
  Ordenada del vértice: $y_v = 4(1/2)^2 - 4(1/2) + 1 = 0$

  Observa que como el vértice está situado sobre el eje X ya no puede haber más cortes con él. Esto se debe a que la ecuación $4x^2 - 4x + 1 = 0$ tiene una solución doble. En efecto:

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{8} \begin{cases} 1/2 \\ 1/2 \end{cases}$$

- La parábola corta el eje Y en (0, 1).

x	$4x^2 - 4x + 1$
−0,5	4
0	1
0,25	0,25
0,5	0
0,75	0,25
1	1
1,5	4



La estructura de algunos puentes nos recuerda una parábola.

3. *Representemos* $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 3$

- Como $a = 1/2 > 0$, las ramas van hacia arriba.
- Abscisa del vértice: $x_v = -b/(2a) = -2/(2(1/2)) = -2$

  Ordenada del vértice: $y_v = 1/2\ (-2)^2 - 2(-2) + 3 = 1$

  Como las ramas van hacia arriba y el vértice, que en este caso es el mínimo, está situado en v (−2 , 1), es imposible que la gráfica corte el eje X.

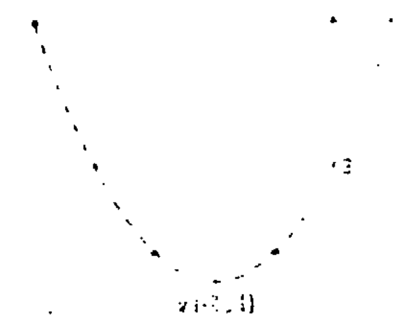
  En efecto, al resolver $\frac{x^2}{2} + 2x + 3 = 0$, obtenemos

$$x_1 = -2 + \sqrt{-2} \qquad x_2 = -2 - \sqrt{-2}$$

- Corte con el eje Y en (0,3).

Formamos una tabla alrededor del vértice:

x	$\frac{1}{2}x^2 + 2x + 3$
−5	5,5
−4	3
−3	1,5
−2	1
−1	1,5
0	3
1	5,5



Máximos y mínimos

Consideremos todas las parejas de números positivos o nulos que sumen 100 cuál de ellas su producto es máximo (mínimo)?

- Llamamos x al primer número.

  El segundo será $100 - x$

  y el producto de ambos:

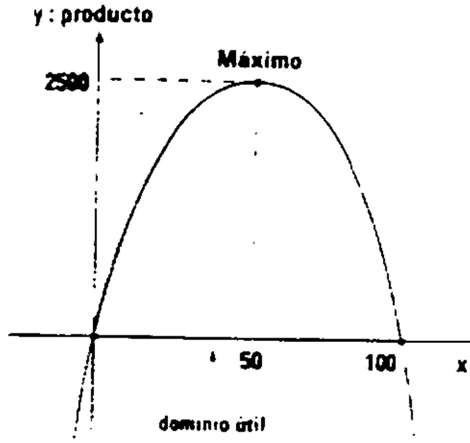
  $$x\,(100 - x)$$

- Representamos la función producto:

  $$p\,(x) = x\,(100 - x)$$

  Vértice:

  $$v\,(50\;,\;50^2)$$



- *Dominio útil:* x sólo puede variar en el intervalo [0 , 100]. Este es el domi el que la gráfica describe nuestro problema.

- *Máximo/Mínimo*: La función es creciente en el intervalo [0 , 50]: los pro van aumentando desde 0 hasta 2 500.

  La función decrece en [50 , 100]: los productos disminuyen de 2 500 hasta 0

  $x = 50$
  y $100 - x = 50$

  El producto máximo se obtiene para $x = 50$, y es igual a 2 500.

  El producto mínimo es 0. Se obtiene para $x = 0$ y $100 - x = 100$, y también

  $$x = 100 \quad \text{y} \quad 100 - x = 0.$$

Resumen de las funciones polinómicas de 2º grado

Sea la función $y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$

- El coeficiente a determina el sentido de las ramas $\begin{cases} a > 0 & \text{ramas hacia arri} \\ a < 0 & \text{ramas hacia aba} \end{cases}$
- La abertura de la parábola disminuye al aumentar el valor absoluto de a.
- La abscisa del vértice es $x_v = -\dfrac{b}{2a}$
- La ordenada del vértice es el máximo absoluto si $a < 0$;
  y el mínimo absoluto si $a > 0$.
- El eje de simetría de la parábola es la vertical que pasa por el vértice.
- Corte con OY : punto $(0\;,\;c)$
- Cortes con OX : se determinan resolviendo la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.
  Puede haber dos puntos de corte, uno o ninguno.

Aplicación a las inecuaciones de segundo grado

En la unidad 6 resolvimos inecuaciones cuadráticas mediante factorizaciones. Veamos ahora otro método que consistirá, simplemente, en mirar una grafica.

Ejemplos

1. *Resolvamos:* $2x^2 < 5x - 2$.

   Esto equivale a resolver: $2x^2 - 5x + 2 < 0$.

   Para ello, creamos la función: $y = 2x^2 - 5x + 2$ y la representamos:

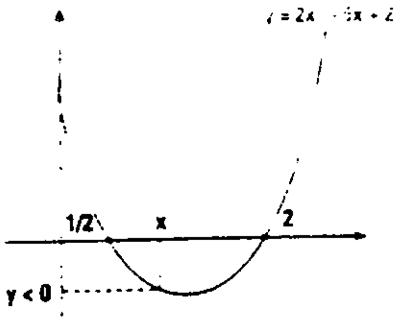


figura 1

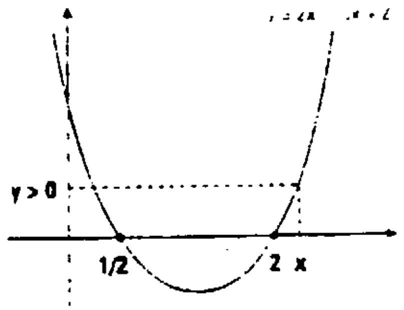


figura 2

Los valores que toma *y*, es decir, los que toma la expresión $2x^2 - 5x + 2$, son las ordenadas de los puntos de la gráfica (fig. 1).

En particular, los valores de *x* tales que $2x^2 - 5x + 2 < 0$ corresponden a ordenadas negativas, es decir, a todos los del intervalo:

$(1/2\ ,\ 2)$ o bien $1/2 < x < 2$. Soluciones: $(1/2\ ,\ 2)$

Vamos ahora a resolver $2x^2 - 5x + 2 \geq 0$

Comparando con la inecuación resuelta anteriormente sólo cambia el sentido de la desigualdad, y nos sirve la misma gráfica (fig. 2).

Los valores de *x* cuya ordenada es positiva o nula son los del intervalo $(-\infty\ ,\ 1/2]$ y también los de $[2, +\infty)$ o bien $x \leq 1/2$ o $x \geq 2$

Observa que ahora $x = 1/2$ y $x = 2$ forman parte de las soluciones.

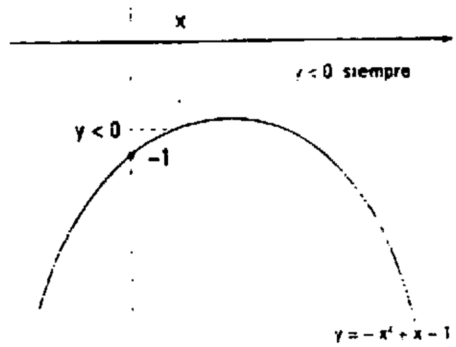
2. *Puede ocurrir que una inecuación no tenga soluciones. Resolvamos:* $-x^2 + x - 1 > 0$

   Creamos la función: $y = -x^2 + x - 1$

   La representamos. No hay cortes de OX y las ramas van hacia abajo. Las ordenadas, es decir, los valores de $-x^2 + x - 1$ nunca son positivos. La inecuación carece de solución.

   Si la inecuación fuese $-x^2 + x - 1 < 0$,

   la misma gráfica muestra que cualquier número real es solución.



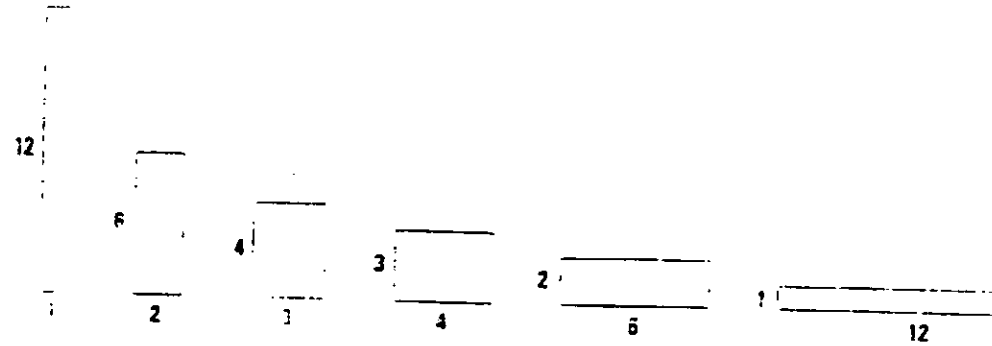
Observación:

Para resolver inecuaciones, sólo interesan los puntos de corte y ver si las ramas van hacia arriba o hacia abajo.

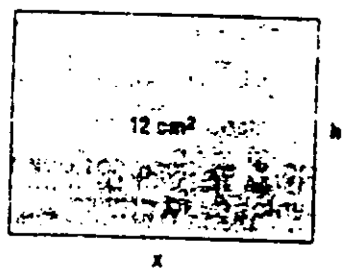
Proporcionalidad inversa: funciones de ecuación $y = k/x$

Estudiemos la relación existente entre la base y la altura de todos los rectángulos de área 12.

Algunos posibles rectángulos son:



Calculemos la altura h en funcion de la base x para un rectángulo cualquiera:



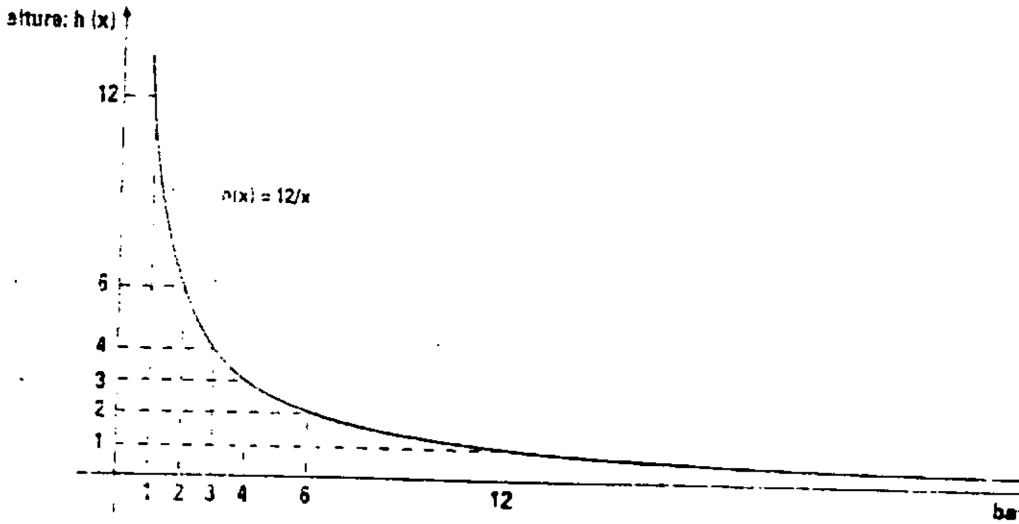
Área = $x\,h$

$12 = x\,h \qquad h = \frac{12}{x}$

$$h(x) = \frac{12}{x}$$

Representemos la función altura:

x	... 0,2	0,4	1	2	3	4	6	12	30	60
$h(x)$	60	30	12	6	4	3	2	1	0,4	0,2



- Cada punto de la gráfica representa un rectángulo de área 12. El decrecim... de la gráfica indica que a medida que aumenta la base disminuye la altura

93

- Cuando la base es muy pequeña, la altura de los rectángulos se hace enormemente grande (y de imposible representación):

$$h(0{,}1) = 120 \qquad h(0{,}01) = 1\,200 \qquad h(0{,}001) = 12\,000 \ldots$$

- La gráfica tiende a confundirse con el eje Y. Decimos que el eje Y es una **asíntota vertical**.
- Para bases muy grandes, la altura se va acercando a cero:

$$h(100) = 0{,}12 \qquad h(1\,000) = 0{,}012 \qquad h(10\,000) = 0{,}0012 \ldots$$

- La gráfica tiende a confundirse con el eje X. Decimos que el eje X es una **asíntota horizontal**.

Dos magnitudes x e y son *inversamente proporcionales* si su producto se mantiene constante:

$$x\,y = k \text{ (cte)}$$

Al despejar una **de ellas** se obtiene: $y = \frac{k}{x}$. Su gráfica se denomina **hipérbola**.

Observa:

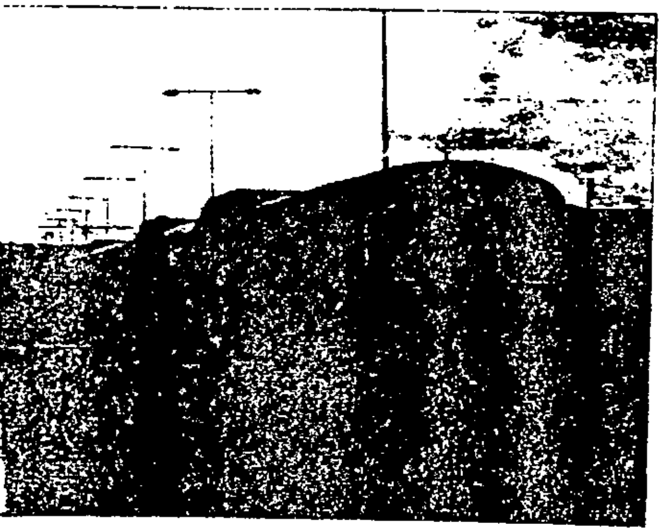
Si $\frac{y}{x}$ = cte, decimos que x e y son *directamente* proporcionales.

Si $x\,y$ = cte, decimos x e y son *inversamente* proporcionales.

¡ACCIÓN!

1 Un tren recorre una distancia de 200 km. De la fórmula del espacio $e = v\,t$ se obtiene:

$$200 = v\,t$$



a) ¿Son v y t inversamente proporcionales? Despeja t.

b) Completa la tabla y representa la gráfica:

velocidad (km/h): v	...	25	50	75	100	150	200	250	...
tiempo (horas): t									

2 Representa las siguientes funciones. Considera también valores negativos para x.

a) $y = \frac{[illegible]}{x}$ b) $y = -\frac{[illegible]}{x}$

c) $y = \frac{24}{x}$ d) $y = \frac{[illegible]}{x}$

e) $y = \frac{3}{x}$ f) $y = \frac{[illegible]}{x}$

9..

Parábolas

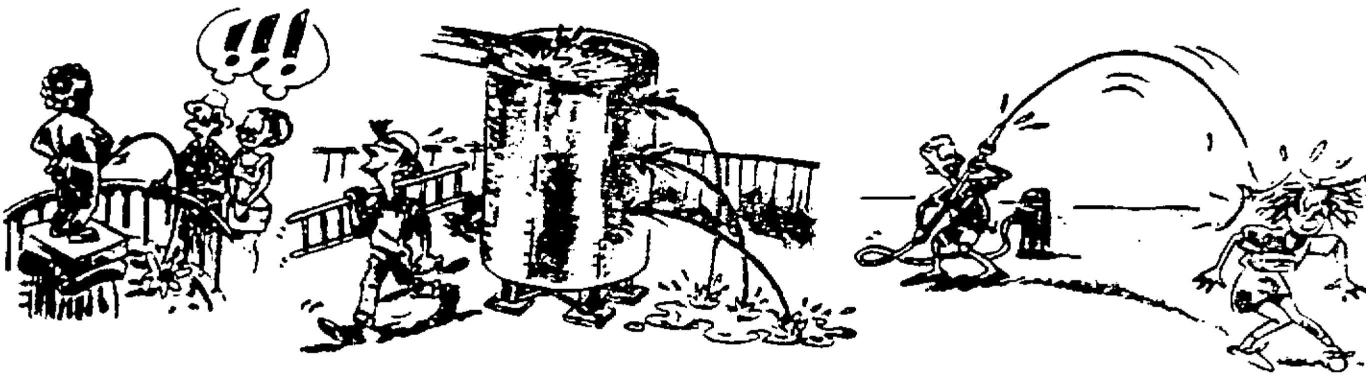
I. Galileo Galilei (s. XVI) fue quizá el primer científico experimental de Occidente. Entre sus muchas aportaciones descubrió la ley que rige el movimiento de caída de los cuerpos. Hasta entonces, y siguiendo los escritos de Aristóteles, se pensaba que los cuerpos pesados caían más rápidamente que los ligeros.

Galileo comprobó que lo hacían con la misma celeridad, y se cuenta que para convencer a sus incrédulos colegas de Pisa dejó caer desde la famosa torre inclinada dos esferas del mismo tamaño, una de madera y otra de hierro, las cuales llegaron a tierra simultáneamente

Llegó a la conclusión de que el espacio recorrido, s, en función del tiempo, t, seguía la fórmula cuadrática.

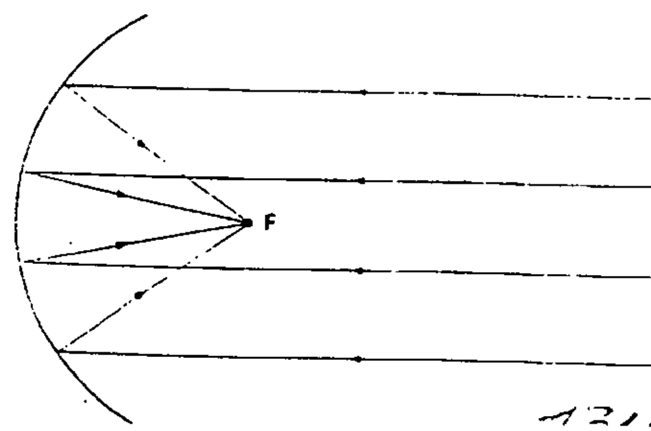
$s(t) = 4.9\,t^2$ (s en metros, t en segundos).

II. El efecto de la gravedad crea trayectorias en forma de parábolas, allí donde quiera que se lance un objeto.



III. Las parábolas tienen una curiosa propiedad de reflexión: cualquier rayo paralelo a su eje de simetría confluye en un punto llamado foco. Esta propiedad se usa en los radiotelescopios que, debidamente orientados, y gracias a su forma parabólica, amplifican la radiación del espacio exterior, concentrándolo en un punto.

Ejemplos más domésticos los tenemos en las antenas parabólicas de televisión o también en los faros de los coches, aunque aquí los rayos parten del foco y siguen el camino opuesto.



Ejercicios de cálculo

1 Traza las gráficas de:

a) $y = 1.5\,x^2$ b) $y = 2x^2 - 6x$

c) $y = 1.5\,x^2 - 3$ d) $y = -1/2\,x^2 + 3$

2 Localiza el vértice, los cortes con los ejes y traza las gráficas:

a) $y = x^2 + 6x - 2$ b) $y = 4x^2 + 4x + 1$

c) $y = x^2 - 4x + 3$ d) $y = -x^2 + 12x - 24$

e) $y = -\frac{1}{3}x^2 + 2x - 3$ f) $y = -2x^2 + 6x - 10$

3 Las gráficas de las siguientes parábolas tienen el vértice situado en OX. Analiza por qué y trázalas:

a) $y = (x - 3)^2$ b) $y = -2\,(x + 4)^2$

c) $y = (x + 2)^2$ d) $y = -3\,(2x - 1)^2$

4 Sin desarrollar los paréntesis, halla la intersección de las gráficas con los ejes, localiza el vértice y trázalas:

a) $y = (x + 1)(x - 1)$ b) $y = -2\,(x + 2)(x - 3)$

5 Sea la función $f(x) = x^2 - 4x + 3$. Sin dibujar:

a) ¿Pertenece a la gráfica el punto (3.1, 3.1)?

b) ¿Tiene ordenada 6 algún punto de la gráfica? ¿Y ordenada −10?

c) ¿Cuál es el valor mínimo de $f(x)$?

6 Resuelve las inecuaciones:

a) $x^2 > 0$ b) $(2x + 1)^2 < 4$

c) $x^2 + 6x \geq -9$ d) $x^2 > x + 2$

e) $0.1\,x\,(10x - 1) \leq 0$ f) $-x^2 + 5 > -(6x + 1)$

Hipérbolas

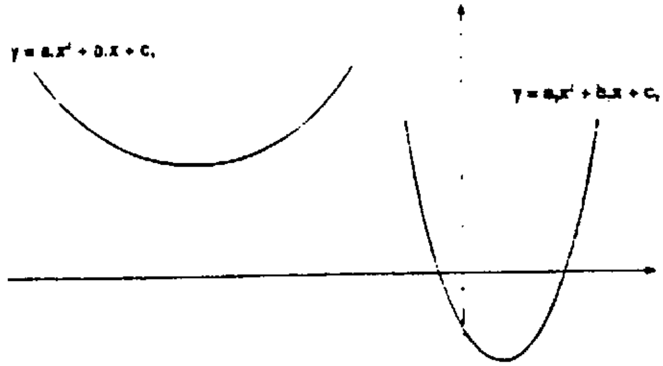
7 Traza las gráficas:

a) $y = \frac{3}{x}$ b) $y = -\frac{3}{x}$ c) $y = \frac{3}{x} - 2$

8 En unos mismos ejes, traza las gráficas de:

$y = \frac{2}{x}$ $y = \frac{4}{x}$ $y = \frac{6}{x}$

9 Verdadero o falso:



a) $a_1 > 0$

b) $a_1 > a_2$

c) $c_2 > 0$

d) $c_1 > c_2$

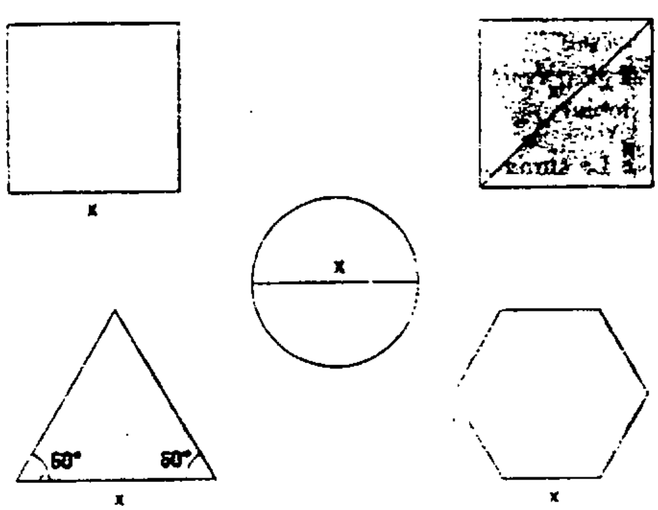
e) La ecuación $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$ tiene dos soluciones iguales.

f) La ecuación $a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0$ tiene una solución positiva y otra negativa.

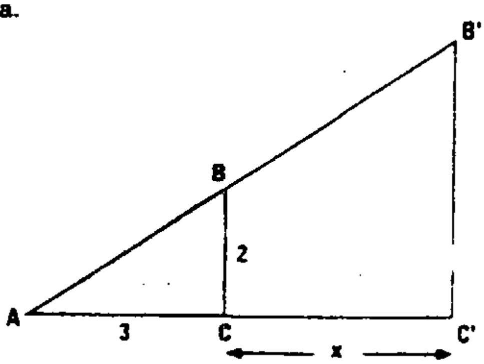
Para entrenarse

Áreas y función cuadrática

10 Calcula el área de las siguientes figuras y polígonos regulares en función de x:



11 Ampliamos el triángulo ABC, como indica la figura y siendo B' C' paralelo a BC. Calcula el area de AB'C' en función de x. Traza la grafica de la función obtenida.



Indicación: ABC semejante a AB'C'. Justifica primero que $C'B' = \frac{2}{3}(x + 3)$.

12 *Una funcion para conductores*. En el código de circulación se establece la siguiente norma sobre el estado de los frenos:

"... El espacio –medido en metros– recorrido por el vehículo, desde que se acciona el freno hasta su total detención no excederá al cuadrado de la décima parte de su velocidad, expresada en km/h".

a) Indica el espacio máximo de frenado permitido para un coche que marcha a 20, 60 y 100 km/h, respectivamente.

b) Indica la función: velocidad — espacio de frenado. Traza la gráfica.

Inecuaciones

13 ¿Para qué valores de x, su cuadrado es menor que su doble?

14 La suma de un número x y su cuadrado es negativa. ¿Cuánto puede valer x?

15 Desconocemos x pero sabemos que $x > 2$. Indica en qué intervalo se encuentra:

a) $-x$ b) $3 - x$ c) $4x^2 - 1$ d) $\frac{1}{x}$

16 Muchos creen que las soluciones de la doble inecuación $4 \le x^2 \le 9$ son los números del intervalo $[2, 3]$. ¿Qué opinas tú?

17 Halla x de modo que:

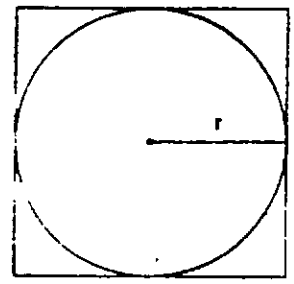
a) $0 \le x^2 - 4x < 2$

b) $-1 \le -\frac{x^2}{4} + x + 3 < 5$

c) $-2 < x^2 + 4x + 4 < 2$

d) $x^2 < 3 < 2x^2 - 1$

18 Calcula los posibles valores de r de mo[...] área de la superficie coloreada esté comprend[...] 10 y 20.



19 Con un hilo de 16 cm construimos un re[...] ¿Qué dimensiones puede tener de modo que el [...]té comprendida entre 12 cm² y 15 cm²?

Máximos y mínimos

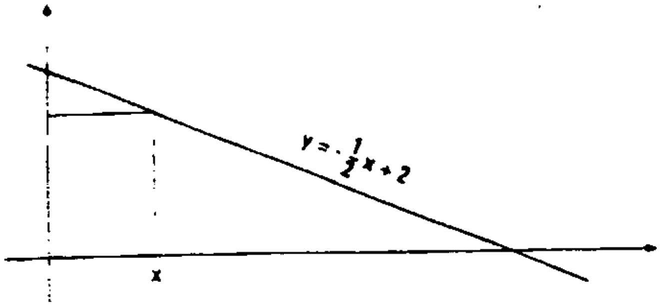
20 Con 22 m de tela metálica se quiere acota[...] rral para conejos de forma rectangular y ut[...] una tapia ya construida.

Se pretende que el area del corral sea la mayor[...] Calcula sus dimensiones.

Indicación: Calcula el área A (x) y traza la gráfi[...]

73

21 **a)** Calcula el área del rectángulo en función de x.

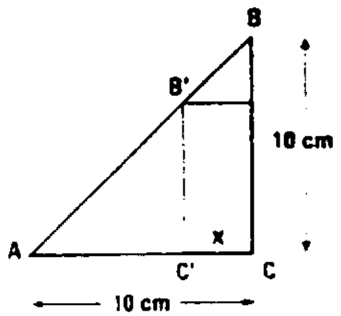


b) Traza la gráfica. ¿Cuál es el dominio útil de la función?

c) ¿Cuál es el rectangulo de área máxima? ¿Cuánto vale ésta?

22 **a)** Calcula la altura del rectángulo en función de x.

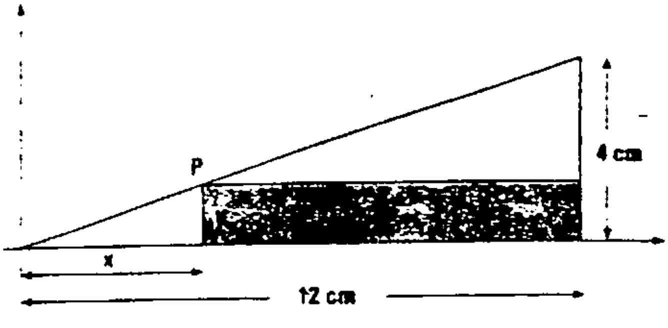
Indicación: ABC semejante a AB'C'.



b) Calcula la funcion área. Determina el rectángulo de area maxima.

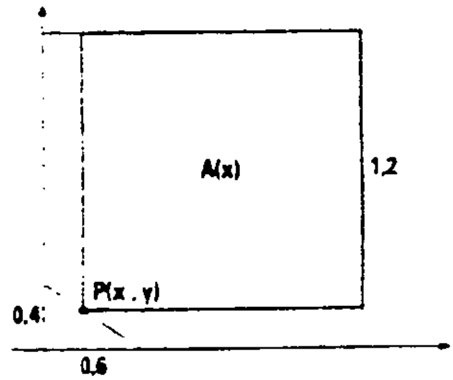
c) El perímetro de todos los rectángulos tiene una peculiaridad. Investígala.

23 ¿Para qué posición de P, el área de la región azul es mínima?



Indicación: Comienza expresando y en términos de x, basándote en la semejanza.

24 De un cristal cuadrado, de 1,20 m de lado, se ha roto una esquina. Del pentágono restante queremos obtener un rectángulo de la mayor área posible, cortando por P, como indica la figura. Halla las coordenadas de P.



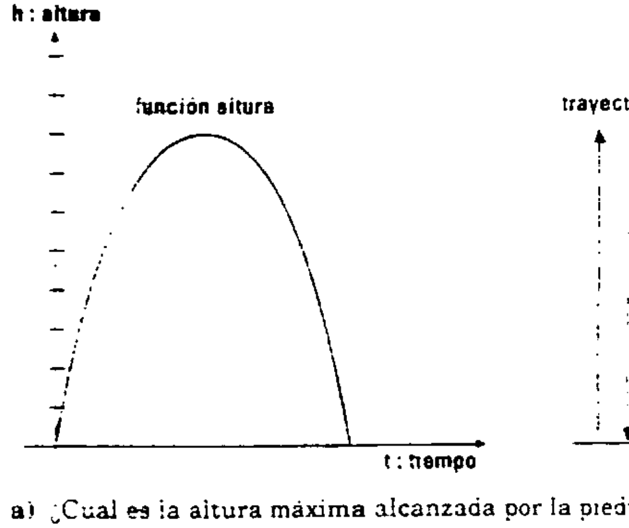
Indicación: Halla la ecuación de la recta "borde partido" y las coordenadas de P en función de x. Halla A

25 La diferencia de dos números es 6. Calcúlalos sabiendo que la suma de sus cuadrados es la menor posible.

26 Se lanza verticalmente hacia arriba una piedra con una velocidad de 20 m/s.

La altura (medida en metros) a la que se encuentra la piedra, transcurridos t segundos desde su lanzamiento, viene dada por la fórmula:

$$h(t) = -5t^2 + 20t$$

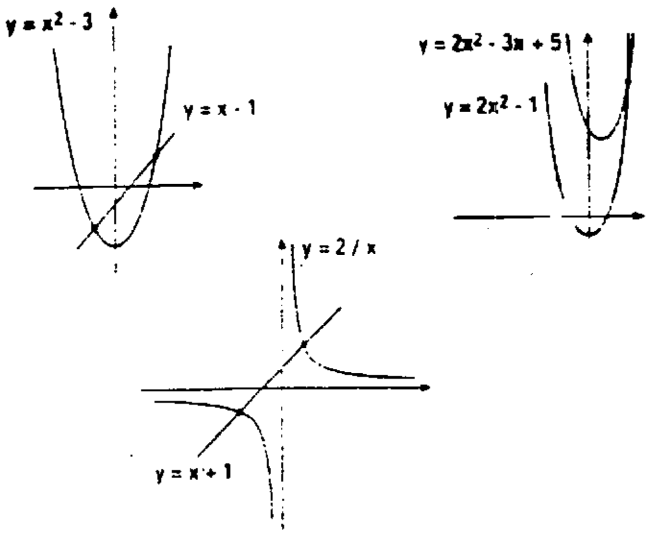


a) ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por la piedra?

b) ¿Cuánto tiempo tarda en volver al suelo?

Gráficas conjuntas

27 Resolviendo el correspondiente sistema, halla los puntos de corte de las gráficas en los siguientes pares de funciones:



28 ¿Qué cilindro tiene mayor capacidad? Halla los volúmenes en función de x, represéntalos en unos mismos ejes y obtén tus propias conclusiones.

29 Resuelve la inecuación $\frac{1}{x} \geq \frac{2x-3}{2}$

a) De forma algebraica: considera por separado $x > 0$ y $x < 0$, resuelve en cada caso y reúne los resultados.

b) Con funciones: traza las gráficas de

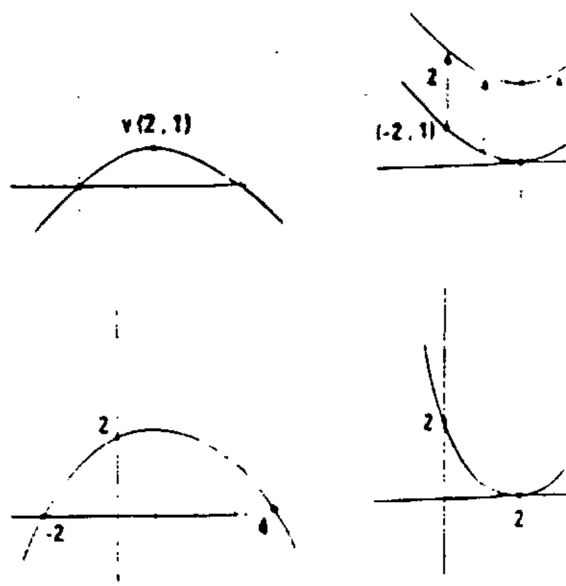
$$y = \frac{1}{x} \qquad y = \frac{2x-3}{2}$$

Determinación de parábolas

30 Calcula c de modo que la gráfica de $y = 2x^2 - 3x + c$ pase por (2 , 1)

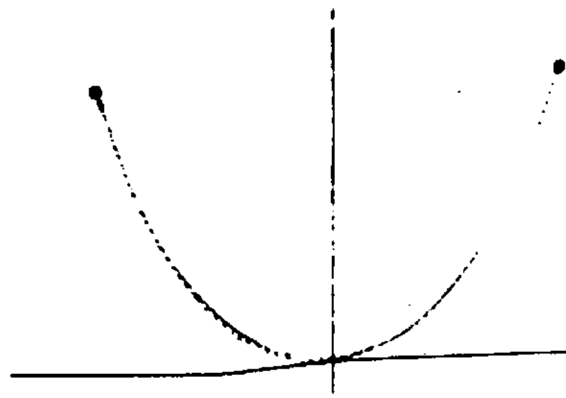
31 Calcula b y c de modo que la gráfica de la función $y = x^2 + bx + c$ pase por A (1 , 2) y B (3 , 8).

32 Halla la ecuación de las funciones cuya g
indica.



Experimento

33 Cuelga una cadena fina en la pared sobre
pel cuadriculado. Vértice en el origen.



- Si es una parábola, su ecuación será: y = ax
algún punto de coordenadas enteras y calcu
- Traza la gráfica de $y = ax^2$ con el valor de
do y superpón de nuevo la cadena. ¿Coincide
- Puedes repetir el experimento variando la
de los alfileres (no hace falta que estén en
simétrica respecto a OY).
- Conclusión: ¿es o no una parábola?

FUNCIONES CUADRÁTICAS • PRIMER TALLER (PRIMERA PARTE)

Para la actividad siguiente se van a organizar en grupos de 4 estudiantes. Inicialmente habrá un trabajo individual, luego un trabajo en el grupo de 4 y para terminar habrá una puesta en común en la que cada grupo expondrá un resumen del trabajo que realizó.

Trabajo individual

1) Con la hoja de papel cuadriculado, de 20 cm. por 24 cm. que cada uno de ustedes trajo y siguiendo la misma estrategia que les mostré para hacer una caja sin tapa, cada uno de ustedes va a construir su propia caja. Queremos que entre todos los alumnos de este curso haya mucha variedad en los tamaños de las cajas construidas; para ello, asegúrese de que su caja sea de diferente tamaño a las construidas por sus compañeros de grupo.
2) ¿Qué medida tiene el lado del cuadrado que recortó?
3) Con el dato anterior, calcule las medidas de la caja construída. Escriba una descripción de lo que hizo.
4) Mida el largo, el ancho y la altura de su caja. ¿Coinciden dichas medidas con los datos calculados en el punto anterior?
5) ¿Qué cantidad (área) de papel se desperdició al construir la caja de la manera como se hizo? Describa por escrito cómo llegó a su respuesta.
6) ¿Qué cantidad (área) de papel tiene la caja? Explique cómo llegó a su respuesta.

Trabajo en los grupos de 4

1) En la siguiente tabla registren los datos correspondientes a la caja de cada uno de los cuatro integrantes del grupo.

Nombre del estudiante	altura de la caja	largo de la caja	ancho de la caja	área del papel desperdiciado	área del papel de la caja

2) Cada uno de los integrantes del grupo debe explicar oralmente a sus compañeros cómo calculó las medidas de su caja registradas en las últimas cuatro columnas de la tabla. Para cada una de las medidas incluidas en la tabla, escriban qué similitudes y diferencias encontraron en los procedimientos expuestos.
3) Describan cómo podrían calcular los datos correspondientes a las últimas cuatro columnas de la tabla para la caja de cualquiera de los alumnos de otro grupo.
4) Si x representa la medida del lado de cualquier cuadrado recortado en cualquiera de las cajas construídas y l representa la medida del largo de la caja, escriban una ecuación que les permita calcular l a partir de x.

5) Si x representa la medida del lado de cualquier cuadrado recortado en cualquiera de las cajas construídas y a representa la medida del ancho de la caja, escriban una ecuación que les permita calcular a a partir de x.

6) Si x representa la medida del lado de cualquier cuadrado recortado en cualquiera de las cajas construídas y d representa el área del papel desperdiciado, escriban una ecuación que les permita calcular d a partir de x.

7) Si x representa la medida del lado de cualquier cuadrado recortado en cualquiera de las cajas construídas y u representa el área del papel que tiene la caja, escriban una ecuación que les permita calcular u a partir de x.

8) Pidan a otro grupo la tabla que registra los datos de sus cajas. Con estos datos, pongan a prueba las cuatro ecuaciones que establecieron anteriormente. Es decir, usen las medidas de los cuadrados recortados para calcular l, a, d, u y comparen los resultados obtenidos con los datos de la tabla. Reporten por escrito el resultado de la prueba, ilustrando algunos de los cálculos realizados.

9) Determinen si el siguiente enunciado es falso o verdadero y expliquen su respuesta. Entre las cuatro ecuaciones que quedaron determinadas en los puntos 4 a 7, hay algunas que representan funciones afines y otras no.

10) Con base en sus respuestas a los puntos 6 y 7, describan las ecuaciones que representan el área del papel desperdiciado y el área del papel que tiene la caja.

11) Preparen una breve exposición del trabajo realizado por el grupo en la que destaquen la manera como llegaron a las ecuaciones y las ecuaciones mismas, incluso si éstas no funcionaron al ponerlas a prueba en el punto anterior.

CONSIDERACIONES RELATIVAS AL DESARROLLO CURRICULAR DEL PRIMER TALLER (PRIMERA PARTE)

Intencionalidad

Con esta tarea se pretende propiciar una oportunidad para que los estudiantes tengan un acercamiento a lo que significa la dependencia entre variables y que esa dependencia se puede representar simbólicamente. Además, queremos que los estudiantes vean que hay situaciones de la realidad que no se describen con ecuaciones lineales.

Consideraciones metodológicas

Materiales requeridos: tres hojas de papel cuadriculado de 24 cm. por 20 cm., tijeras, cinta pegante, regla. El día anterior a la clase, se pide a los estudiantes traer esos materiales.

Estrategia: Se organizan los estudiantes en grupos de cuatro y a cada estudiante se le da una hoja con las instrucciones y las preguntas correspondientes a la tarea que se les está proponiendo (la hoja titulada "Funciones cuadráticas • Primer taller").

Para comenzar, como la idea es que cada alumno construya una caja de un modelo dado, utilizando una estrategia específica, el profesor la indicará a medida que él mismo construye una de tales cajas, a manera de ilustración para todo el curso. La estrategia para construir la caja sin tapa consiste en recortar cuadrados de las esquinas, con lo cual queda determinado el tamaño de la caja; luego hacer los correspondientes cuatro dobleces; y, finalmente hacer las uniones con cinta pegante. Se quiere que el profesor haga delante de sus alumnos todo el proceso que se espera que ellos hagan para construir la caja. Así, pues, en la ilustración del proceso —dado que el profesor trabajará con una hoja en blanco— tendrá que dar cuenta de, por ejemplo, (a) la elección de un valor para la medida de los cuadrados que va a recortar; (b) el trazado de las líneas guías para saber por dónde recortar; (c) la forma de armar la caja. Se recomendará a los estudiantes no botar los pedazos de papel que se han recortado; la razón para esto es que los estudiantes se puedan valer de ese material concreto en el caso de que hayan olvidado la fórmula del área de un cuadrado.

Puesto que no se pretende que la construcción de la caja distraiga en demasía la atención de los estudiantes, se restringirá la estrategia a utilizar a una específica (la que el profesor muestre) y además, se les pedirá trabajar en papel cuadriculado, de las medidas indicadas.

Se espera que entre todos los alumnos del curso se tengan construidas cajas de diversos tamaños —para lo cual se dará una instrucción que apunte a este hecho— que permitan ver que la altura de la caja es una variable de la que dependen las otras dos dimensiones de la caja y en consecuencia, de dicha variable también dependen las variables sobre las que se enfocarán esta tarea y la siguiente: el área del papel que se desecha al hacer los recortes en las esquinas, y el área del papel que tiene la caja.

Una vez cada alumno haya construido su caja y haya respondido a ciertas preguntas relativas a ella, habrá un trabajo en el grupo de 4. Se espera que teniendo más información (la de los compañeros) y teniendo que enfocar la atención sobre semejanzas y diferencias en los procedimientos personales, los estudiantes puedan describir verbalmente la generalidad y luego haya espacio para que hagan conjeturas (representadas simbólicamente) que podrán poner a prueba en otros casos específicos para los cuales tienen la información obtenida por alumnos de otros grupos.

Si en la exposición de los grupos de 4 no salió sino una forma de expresar simbólicamente la cantidad de papel de la caja, sugerimos hacer preguntas para promover que se explicite otra forma y podría aprovecharse la oportunidad para verificar la equivalencia matemática entre las dos expresiones (sin embargo, vale la pena darse cuenta de que desde el punto de vista del aprendizaje y de la enseñanza esas dos expresiones no son equivalentes). Es importante que cada profesor, planee cómo va a cerrar la puesta en común surgida a través de las exposiciones; para ello conviene tener en cuenta la intencionalidad de la actividad con el fin de destacar en las conclusiones los puntos que se querían destacar.

FUNCIONES CUADRÁTICAS • PRIMER TALLER (SEGUNDA PARTE) VERSIÓN A

Para trabajar en la situación que se plantea a continuación van a seguir organizados en los mismos grupos que para la primera parte del taller. También ahora se quiere lograr una gran variedad de tamaños de cajas, así que asegúrese de que el tamaño de sus dos cajas sea diferente al tamaño de las cajas de sus compañeros de grupo.

Trabajo individual

1) Con la misma estrategia usada en la primera parte del taller y usando el mismo tamaño de papel (24 cm. por 20 cm.), construya una caja muy alta. Determine las tres medidas de la caja y calcule el área del papel de tal caja.
2) Con la misma estrategia usada en la primera parte del taller y usando el mismo tamaño de papel (24 cm. por 20 cm.), construya una caja muy baja. Determine las tres medidas de la caja y calcule el área del papel de tal caja.

Trabajo en grupos de 4

Acerca de las cajas muy altas

1) En las filas 3 a 6 de la siguiente tabla registren los datos correspondientes a las cajas muy altas que cada uno de los cuatro integrantes del grupo construyó (organicen ascendentemente los datos correspondiente a la altura de la caja).

1	Nombre del estudiante	medidas de la caja construida			área del papel de la caja
2		altura	largo	ancho	
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					

2) Juan y Mercedes, alumnos que están realizando este taller, hacen respectivamente las siguientes afirmaciones:

   "en el contexto en el que estamos trabajando, la caja de mayor altura que se puede construir, así sea en la imaginación, es la que tiene altura 11.9999 cm."

   "en el contexto en el que estamos trabajando, la caja de mayor altura que se puede construir, así sea en la imaginación, es la que tiene altura 9.9999 cm."

¿Cuál de los dos alumnos tiene razón? Expliquen su respuesta.

3) ¿En el grupo de ustedes se ha construido la caja de mayor altura posible? Expliquen su respuesta.

4) En las filas 7 a 10 de la tabla anterior, registren en forma ascendente la medida de la altura de cuatro cajas (de tamaños diferentes) que se puedan construir, por lo menos en la imaginación, en el contexto dado y que tengan altura mayor que las ya construidas. Calculen también las otras medidas que están implicadas en el resto de la tabla.

5) Examinen la tabla que han elaborado y describan, en términos generales, cómo varían las medidas del largo, el ancho y el área del papel de la caja cuando la medida de la altura se hace cada vez más grande, en el contexto dado.

Acerca de las cajas muy bajas

6) En las filas 3 a 6 de la siguiente tabla registren los datos correspondientes a las cajas muy bajas que cada uno de los cuatro integrantes del grupo construyó (organicen descendentemente los datos correspondiente a la altura de la caja).

1	Nombre del estudiante	medidas de la caja construida			área del papel de la caja
2		altura	largo	ancho	
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					

7) Un estudiante de un grupo dice haber construido en su imaginación una caja de altura 0.001 cm. y afirma que esa es la caja de menor altura en el contexto en el que se está trabajando. Si consideran que el estudiante tiene razón, expliquen por qué; y si consideran que el estudiante no tiene razón, construyan un argumento para convencerlo de que no tiene razón.

8) ¿En el grupo de ustedes se ha construido la caja de menor altura posible? Expliquen su respuesta.

9) En las filas 7 a 10 de la tabla anterior, registren en forma descendente la medida de la altura de cuatro cajas (de tamaños diferentes) que se puedan construir, por lo menos en la imaginación, en el contexto dado y que tengan altura menor que las ya construidas. Calculen también las otras medidas que están implicadas en el resto de la tabla.

10) Examinen la tabla que han elaborado y describan, en términos generales, cómo varían las medidas del largo, el ancho y el área del papel de la caja cuando la medida de la altura se hace cada vez más pequeña, en el contexto dado.

Acerca de cualquier caja

11) Den dos valores (los llamaremos e y q) muy próximos entre sí, que sean las medidas de la altura de dos cajas en el contexto en el que se está trabajando. Para las dos cajas que quedan así determinadas, calculen las medidas del largo, el ancho y el área del papel. ¿Se podría construir una caja que tuviera altura w entre e y q? Den un valor para w. Hagan algún tipo de estimativo (no se les pide que hagan cálculos) para la medida del largo y el ancho de la caja de altura w y para el área del papel de tal caja.

12) Con respecto al punto anterior, ¿el valor que dieron a w es el único posible? Expliquen su respuesta.

13) En el contexto en el que estamos trabajando, ¿habría dos cajas de alturas diferentes entre las cuales no se pudiera encontrar una tercera caja de altura intermedia? Expliquen su respuesta.

14) Expresen el conjunto que representa todos los valores que podría tomar la medida del lado del cuadrado recortado para construir cualquier caja en este contexto.

15) Expresen el conjunto que representa todos los valores que podría tomar la medida del largo de cualquier caja construida en este contexto.

16) Expresen el conjunto que representa todos los valores que podría tomar la medida del ancho de cualquier caja construida en este contexto.

17) Expresen el conjunto que representa todos los valores que podría tomar el área del papel de cualquier caja construida en este contexto.

18) Preparen una breve exposición del trabajo realizado por el grupo en la que destaquen la manera como llegaron a determinar los conjuntos de valores en las preguntas 14 a 17 y los conjuntos mismos.

FUNCIONES CUADRÁTICAS • PRIMER TALLER (SEGUNDA PARTE) VERSIÓN B

Para la situación que se plantea a continuación van a seguir organizados en los mismos grupos que para la primera parte del taller. También en este caso se quiere lograr una gran variedad de tamaños de cajas, así que asegúrese de que el tamaño de sus dos cajas sea diferente al tamaño de las cajas de sus compañeros de grupo.

Trabajo individual

1) Con la misma estrategia usada en la primera parte del taller y usando el mismo tamaño de papel (24 cm. por 20 cm.), construya una caja muy alta. Determine las tres medidas de la caja y calcule el área de papel desperdiciado.
2) Con la misma estrategia usada en la primera parte del taller y usando el mismo tamaño de papel (24 cm. por 20 cm.), construya una caja muy baja. Determine las tres medidas de la caja y calcule el área de papel desperdiciado.

Trabajo en grupos de 4

Acerca de las cajas muy altas

1) En las filas 3 a 6 de la siguiente tabla registren los datos correspondientes a las cajas de altura muy grande que cada uno de los cuatro integrantes del grupo construyó (organicen ascendentemente los datos correspondiente a la altura de la caja).

1	Nombre del estudiante	medidas de la caja construida			área del papel desperdiciado
2		altura	largo	ancho	
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					

2) Juan y Mercedes, alumnos que están realizando este taller, hacen respectivamente las siguientes afirmaciones:

   "en el contexto en el que estamos trabajando, la caja de mayor altura que se puede construir, así sea en la imaginación, es la que tiene altura 11.9999 cm."

   "en el contexto en el que estamos trabajando, la caja de mayor altura que se puede construir, así sea en la imaginación, es la que tiene altura 9.9999 cm."

¿Cuál de los dos alumnos tiene razón? Expliquen su respuesta.

3) ¿En el grupo se ha construido la caja de mayor altura posible? Expliquen su respuesta.

4) En las filas 7 a 10 de la tabla anterior, registren en forma ascendente la medida de la altura de cuatro cajas (de tamaños diferentes) que se puedan construir, por lo menos en la imaginación, en el contexto dado y que tengan altura mayor que las ya construidas. Calculen también las otras medidas que están implicadas en el resto de la tabla.

5) Examinen la tabla que han elaborado y describan, en términos generales, cómo varían las medidas del largo, el ancho y el área del papel desperdiciado cuando la medida de la altura se hace cada vez más grande, en el contexto dado.

Acerca de las cajas muy bajas

6) En las filas 3 a 6 de la siguiente tabla registren los datos correspondientes a las cajas de altura muy pequeña que cada uno de los cuatro integrantes del grupo construyó (organicen descendentemente los datos correspondiente a la altura de la caja).

1	Nombre del estudiante	medidas de la caja construida			área del papel desperdiciado
2		altura	largo	ancho	
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					

7) Un estudiante de un grupo dice haber construido en su imaginación una caja de altura 0.001 cm. y afirma que esa es la caja de menor altura en el contexto en el que se está trabajando. Si consideran que el estudiante tiene razón, expliquen por qué; y si consideran que el estudiante no tiene razón, construyan un argumento para convencerlo de que no tiene razón.

8) ¿En el grupo se ha construido la caja de menor altura posible? Expliquen su respuesta.

9) En las filas 7 a 10 de la tabla anterior, registren en forma descendente la medida de la altura de cuatro cajas (de tamaños diferentes) que se puedan construir, por lo menos en la imaginación, en el contexto dado y que tengan altura menor que las ya construidas. Calculen también las otras medidas que están implicadas en el resto de la tabla.

10) Examinen la tabla que han elaborado y describan, en términos generales, cómo varían las medidas del largo, el ancho de la caja y el área del papel desperdiciado cuando la medida de la altura se hace cada vez más pequeña, en el contexto dado.

Acerca de cualquier caja

11) Den dos valores (los llamaremos e y q) muy próximos entre sí, que sean las medidas de la altura de dos cajas en el contexto en el que se está trabajando. Para las dos cajas que quedan así determinadas, calculen las medidas del largo, el ancho y el área del papel desperdiciado. ¿Se podría construir una caja que tuviera altura w entre e y q? Den un valor para w. Hagan algún tipo de estimativo (no se les pide que hagan cálculos) para la medida del largo y el ancho de la caja de altura w y para el área del papel desperdiciado al construir tal caja.

12) Con respecto al punto anterior, ¿el valor que dieron a w es el único posible? Expliquen su respuesta.

13) En el contexto en el que estamos trabajando, ¿habría dos cajas de alturas diferentes entre las cuales no se pudiera encontrar una tercera caja de altura intermedia? Expliquen su respuesta.

14) Expresen el conjunto que representa todos los valores que podría tomar la medida del lado del cuadrado recortado para construir cualquier caja en este contexto.

15) Expresen el conjunto que representa todos los valores que podría tomar la medida del largo de cualquier caja construida en este contexto.

16) Expresen el conjunto que representa todos los valores que podría tomar la medida del ancho de cualquier caja construida en este contexto.

17) Expresen el conjunto que representa todos los valores que podría tomar el área del papel desperdiciado para cualquier caja construida en este contexto.

18) Preparen una breve exposición del trabajo realizado por el grupo en la que destaquen la manera como llegaron a determinar los conjuntos de valores en las preguntas 14 a 17 y los conjuntos mismos.

CONSIDERACIONES RELATIVAS AL DESARROLLO CURRICULAR DEL PRIMER TALLER (SEGUNDA PARTE)

Intencionalidad

Con esta situación se pretende que los estudiantes puedan identificar la existencia del dominio y rango para cada una de las funciones implicadas, y además las características de tales conjuntos.

Consideraciones metodológicas

Para la segunda parte del taller hemos preparado dos versiones (A y B) que difieren entre sí porque una de ellas (A) aborda la función que representa el área del papel de la caja, mientras que la otra (B) aborda la función que representa el área de papel desperdiciado. A través de las dos versiones queremos poder cubrir simultáneamente el estudio de dos funciones cuadráticas, originadas en el mismo contexto, empleando para ello menor tiempo que el que sería necesario si se hiciera como dos actividades consecutivas.

Para optimizar el tiempo de la sesión de clase, sugerimos que el trabajo individual planteado se proponga como tarea para la casa. Suponemos que el trabajo puede requerir de dos sesiones de clase (4 horas de clase) y eventualmente algo de tiempo adicional extraclase. La plenaria debería no tomar más de una sesión de clase.

En la realización del trabajo en grupo, probablemente los estudiantes tendrán varias y diversas inquietudes con respecto a las preguntas del taller. Proponemos que el papel del profesor ante tales inquietudes esté encaminado a plantear preguntas que ayuden a los estudiantes a encontrar sus propias respuestas y no a formular respuestas correctas y definitivas. Esta actitud del profesor aporta principalmente a dos cuestiones que consideramos fundamentales. Por un lado, en el debate que se genera a partir de la discusión de las diferentes ideas se hacen unas exigencias más cercanas a la forma científica de la construcción de conocimiento, que a la manera dogmática implicada en situaciones en las que lo importante es responder correctamente a las preguntas. Por otro lado, la participación del profesor a través de preguntas lo despoja de su papel de validador de la verdad; en ese caso, es posible y necesario construir la verdad entre quienes participan del debate.

En la plenaria, se sugiere que el papel del profesor sea guiar las posibles discusiones surgidas por las diferencias en las exposiciones de los grupos, o, proponer objeciones, inquietudes, preguntas, afirmaciones que puedan generar discusión entre los alumnos. De nuevo, no creemos que lo importante sea que el profesor siente cátedra.

Comentarios acerca de algunas preguntas y algunas respuestas

1) En una versión preliminar de este taller, se pedía "... construya la caja que tenga mayor/menor altura posible". Para la versión definitiva, se cambió tal enunciado por "... construya una caja muy alta/muy baja". Vimos la conveniencia de hacer el cambio porque consideramos que podía-

mos aprovechar la situación no sólo para evidenciar la inexistencia de unos casos extremos que determinan los límites del dominio de la variable independiente (altura de la caja) y el rango de variación de las variables dependientes (largo y ancho de la caja y área del papel de la caja y área del papel desperdiciado), sino también para evidenciar características generales de la variación de cada una de tales variables con respecto a la variación de la variable independiente. Es decir, con la serie de preguntas planteadas no estamos tratando de justificar solamente el por qué de los extremos del dominio y recorrido de las funciones implicadas; también estamos tratando de justificar por qué están incluidos todos los reales entre ciertos valores extremos.

2) Para la pregunta 5, la respuesta esperada es algo del estilo: cuando la medida de la altura se hace cada vez más grande (tendiendo a 10), la medida del largo de la caja se hace cada vez más pequeña tendiendo a 4 y la medida del ancho, también se hace cada vez más pequeña tendiendo a 0; el área del papel de la caja se hace cada vez más pequeña, tendiendo a 80; y el área de papel desperdiciado se hace cada vez más grande, tendiendo a 400.

3) Para la pregunta 10, la respuesta esperada es algo del estilo: cuando la medida de la altura se hace cada vez más pequeña (tendiendo a 0), la medida del largo de la caja se hace cada vez más grande tendiendo a 24 y la medida del ancho, también se hace más grande tendiendo a 20; el área del papel de la caja se hace cada vez más grande, tendiendo a 480; y el área de papel desperdiciado se hace cada vez más pequela, tendiendo a 0.

4) Hemos adoptado la convención anglosajona que emplea "punto" en vez de "coma" para la notación de números decimales; con esto queremos adoptar la misma convención que utilizan las calculadoras que se van a usar en los cursos. Sin embargo, para evitar la posible confusión en la lectura de los números (leer un decimal como entero) decidimos usar cuatro dígitos a la derecha del punto decimal cuando fue necesario.

5) En una versión del taller —preliminar a la definitiva— se había planteado el siguiente trabajo individual para realizar en la casa:
Imagine que ya no estamos trabajando en el contexto de las cajas y que en el contexto de las matemáticas no aplicadas, encuentra usted las ecuaciones $u = 480 - 4x^2$ y $l = 24 - 2x$ (versión B, $d = 4x^2$, $a = 20 - 2x$).

   a. Para cada una de tales ecuaciones, ¿hay algún valor real que no pueda asignar a la variable x? Explique su respuesta.

   b. ¿Qué tipo de valores para l se obtienen al asignarle a x los valores que es posible asignarle? Explique su respuesta.

   c. ¿Qué tipo de valores para u se pueden obtener al asignarle a x los valores que es posible asignarle? Explique su respuesta.

Como se puede ver, decidimos suprimir tal tarea al intentar responder a las siguientes inquietudes:

¿A partir del trabajo realizado por los estudiantes en el contexto específico, habrán podido construir los elementos necesarios para lograr un manejo significativo de la generalidad que implican las funciones en el contexto de los números reales?

¿La intención fundamental del aprendizaje de las matemáticas escolares está ligada al manejo de las funciones cuadráticas en el contexto de las funciones de variable real, o al desarrollo de las posibilidades de pensamiento matemático que exige y promueve el manejo de modelos matemáticos en contextos particulares con referente concreto?

Qué conocimiento pone en juego la situación planteada

El desarrollo de la segunda parte del taller exige:

- usar las ecuaciones obtenidas en la primera parte del taller ($l = 24-2x$, $a = 20-2x$, $u = 480-x^2$, $d = 4x^2$ para calcular el largo y el ancho de la caja construida, y el área del papel de la caja (área del papel desperdiciado) para valores determinados de la altura de la caja;
- ordenar números racionales no enteros;
- operar (elevar al cuadrado, multiplicar, restar) con números racionales no enteros;
- reconocer y explicitar verbalmente regularidades en el comportamiento de conjuntos ordenados de datos;
- hacer estimativos con base en las regularidades que se han reconocido;
- usar una noción de densidad de los racionales;
- usar una noción de límite de una función cuando la variable independiente tiende a un cierto valor;
- usar tablas para registrar datos correspondientes a casos particulares;
- establecer generalidades a partir del examen de varios casos particulares y de la consideración, en términos abstractos, del asunto.

TALLER SOBRE FUNCIONES CUADRÁTICAS (TERCERA PARTE)

En el contexto en el que estamos trabajando hay otras dos funciones que queremos estudiar en este taller, ellas son: la función *área de la base de la caja* y la función *capacidad de la caja*.

Trabajo individual

1) Para las tres cajas que construyó en la primera y segunda parte del taller, calcule la medida del área de la base y la medida de la capacidad. Explique cómo calculó cada uno de los valores. En la tabla escriba, en cada caso, los procedimientos aritméticos realizados y su resultado.

altura	área de la base de la caja	capacidad de la caja

Trabajo en grupos de 4

1) Reunan los datos de las tablas individuales en la siguiente tabla. Atendiendo a la altura, ordénenlos ascendentemente. Describan algunas características de los datos registrados en cada una de las columnas de la tabla, para ello consideren, por ejemplo, si los datos están ordenados, el tipo de orden de los datos, en qué lugar de la columna se ubica el menor o el mayor de los datos y hacia qué valores se tiende en los extremos de las columnas.

altura	área de la base de la caja	capacidad de la caja

2) Teniendo en cuenta el(los) procedimiento(s) usado(s) para calcular la medida del área de la base y la medida de la capacidad de la caja en los casos particulares, escriban ecuaciones que sirvan

para calcular las medidas del área de la base y de la capacidad de cualquier caja en términos de la medida de la altura de la caja. Representen con x la altura de la caja, con b la medida del área de la base de la caja, y, con c la medida de la capacidad de la caja.

3) Para una caja cuya altura es 3.63 cm., la medida del área de la base es 213.27 cm^2 y la capacidad es 774.16 cm^3. ¿Las ecuaciones que ustedes dieron en el ítem anterior corroboran esos valores?

4) Examinen la tabla elaborada en el punto 2 y la de otros grupos para hacer una conjetura acerca de cuáles son todos los valores que puede tomar la medida del área de la base. Usen la calculadora para verificar si su conjetura parece ser razonable. Describan por escrito los procesos utilizados. Expresen el conjunto que representa todos los valores que podría tomar la medida del área de la base de cualquier caja construida en este contexto.

5) Examinen las tablas de sus compañeros de grupo y de otros grupos para hacer una conjetura acerca de cuáles son todos los valores que puede tomar la medida de la capacidad. Usen la calculadora para verificar si su conjetura parece ser razonable. Describan por escrito los procesos utilizados (seguramente será necesario modificar las opciones TblStart y ΔTbl de TBLSET de manera que pueda tomar valores de x cada vez más juntos entre sí y más cercanos al valor que corresponde a la mayor capacidad). Expresen el conjunto que representa todos los valores que podría tomar la medida de la capacidad de cualquier caja construida en este contexto.

6) Con base en los resultados encontrados en los talleres anteriores y en éste completen la siguiente tabla. En la columna titulada "Expresión" utilicen la notación que se emplea para las funciones, en la que se expresa el hecho de que hay una variable de la que depende la función.

Nombre de la función	Expresión	Posibles valores de la función (todos)
largo de la caja		
ancho de la caja	$f_2(x) = a = -2x + 20$	
área del papel desperdiciado		(0, 400)
área del papel de la caja		
área de la base		
capacidad de la caja		

7) Preparen una breve exposición del trabajo realizado por el grupo en la que destaquen las ecuaciones encontradas para calcular la medida del área de la base y de la capacidad de cualquier caja construida en el contexto, y la forma como llegaron a ellas. También deben hablar de la forma como llegaron a determinar los conjuntos de valores que pueden tomar la medida del área de la base y la medida de la capacidad de cualquier caja, y expresar cuáles son esos conjuntos.

CONSIDERACIONES RELATIVAS AL DESARROLLO CURRICULAR DEL PRIMER TALLER (TERCERA PARTE)

Intencionalidad

Este taller pretende introducir dos funciones que enriquecen las posibilidades de análisis y contrastación del tipo de variación exhibido por funciones descritas por diversos tipos de polinomios. Este enriquecimiento se expresa fundamentalmente en:

- ▲ la existencia de una expresión simbólica que involucra un polinomio de segundo grado con sus tres coeficientes reales diferentes de cero,
- ▲ la existencia de una función cuadrática decreciente (con coeficiente principal positivo) en el dominio significativo en el contexto de trabajo,
- ▲ la existencia de una función cuya expresión simbólica es un polinomio de grado tres,
- ▲ la existencia de una función que no es monótonamente creciente o decreciente en el dominio significativo en el contexto de trabajo,
- ▲ la existencia de rango no definido por los valores correspondientes a los extremos del dominio de variación en el contexto,
- ▲ la existencia de una variación no lineal que no es del tipo cuadrático.

Para estas dos funciones se pretende inferir y representar su expresión simbólica correspondiente, así como identificar el rango de variación significativo.

De otra parte, el taller puede asumirse simultáneamente como una actividad que permita visualizar y, en cierto sentido, evaluar el desempeño de los estudiantes frente a la identificación de un patrón procedimental en las operaciones aritméticas implicadas en el cálculo de algunas medidas, frente a la identificación de una expresión algebraica que dé cuenta de dicho patrón, y frente a la identificación del comportamiento de datos numéricos y su consecuente determinación de conjuntos o intervalos numéricos.

Consideraciones acerca de algunas preguntas y respuestas

En el ítem del trabajo individual se exige que los estudiantes escriban los procedimientos aritméticos empleados para calcular las medidas objeto de estudio. Se trata, con esto, de facilitar la identificación de los términos y las operaciones y la relación que configurarían una ecuación algebraica que represente la manera de calcular cualquier medida y la medida misma.

En el primer ítem del trabajo en grupo se propone ordenar los datos. La intención de esta instrucción no es otra que la de permitir una mejor visualización del comportamiento de las medidas del área de la base y de la capacidad de la caja. Al respecto se quiere que los estudiantes puedan identificar tanto el decrecimiento monótono de los valores de la medida del área de la base de la caja, mientras que la medida de la altura de la caja aumenta; como el crecimiento y posterior decrecimiento de la medida de la capacidad de la caja cuando la medida de la altura aumenta (o disminuye). De igual manera se quiere que los estudiantes reconozcan que el máximo valor reportado para la medida del área de la base de la caja se ubica al inicio de la columna y el mínimo al final; en tanto que para la medida de la capacidad de la caja, el valor máximo reportado muy probablemente no se ubica en los extremos de la columna. También se quiere que los estudiantes adviertan que para medidas de la altura muy pequeñas o muy grandes, los correspondientes valores para ambas funciones tienden a un cierto valor.

En el segundo ítem del trabajo en grupo se pide la escritura de ecuaciones que permitan generalizar el procedimiento aritmético. Para el caso del *área de la base de la caja* se pueden presentar dos estrategias de solución procedimental que conducirían a sendas expresiones algebraicas matemáticamente equivalentes. La primera posibilidad es el cálculo del área a partir del producto de las longitudes del largo y ancho de la caja; en este caso la expresión algebraica es $(24-2x)(20-2x)$. La segunda posibilidad se obtiene al restar del área del papel de la caja, el área de las cuatro caras laterales, en cuyo caso la expresión resultante podría ser la expresión siguiente o alguna "procedimentalmente equivalente"[1] $\left(480-4x^2\right)-(2(20-2x)(x)+2(24-2x)(x))$. Para el caso del volumen sólo prevemos una estrategia, el producto de las medidas del largo, ancho y altura de la caja; sin embargo, puede darse el caso que este producto se realice y se obtenga un polinomio de grado tres.

No es difícil advertir que la intención del tercer ítem es permitir un dato para corroborar la validez de las ecuaciones planteadas en el ítem inmediatamente anterior. Al respecto de este dato vale la pena mencionar que el valor de la altura seguramente no aparecerá en la tabla construida por los estudiantes, dado que éste tiene dos cifras decimales; de otra parte, el cálculo con este valor pretende, además, exigir el uso de la calculadora; finalmente, el valor dado para la altura es muy cercano al valor relativo a la máxima medida de la capacidad de la caja, o —de manera más intuitiva— a la altura de la caja más grande.

La determinación del recorrido de las funciones, objeto de estudio de los ítems (4 y 5), implica identificar tres elementos. En primer lugar, es necesario advertir el comportamiento relativo al orden de los datos de las dos columnas de resultados numéricos, respecto del comportamiento de los datos de la primer columna; este aspecto debió haber sido referenciado en el ítem 1, como característica de los datos. En segundo lugar, se debe reconocer la posible existencia de valores extremos, es decir, de tendencias hacia ciertos valores; advertimos que en sentido estricto, el valor mínimo no existe para ninguna de las dos funciones consideradas, pues el dominio de variación (significativo) de la altura es un intervalo abier-

1. Empleamos la expresión "procedimentalmente equivalente" para representar la equivalencia entre diferentes expresiones que impliquen el procedimiento de restar las medidas de las áreas de las cuatro caras laterales, cualquiera sea el orden o la configuración de esta resta. Queremos, a la vez, diferenciarla de la expresión "matemáticamente equivalentes", que implicaría la existencia de una identidad (numérica) entre expresiones algebraicas de diferente estructura. En ese sentido las expresiones $\left(480-4x^2\right)-(2(20-2x)(x)+2(24-2x)(x))$ y $(24-2x)(20-2x)$ son matemáticamente equivalentes, pero no procedimentalmente equivalentes.

to, el que se transforma a través de las funciones en un intervalo abierto que sí tiene extremos inferior (Inf), pero no mínimo. Para el caso de la función área de la base, tampoco existe el máximo, pero sí el extremo superior (Sup). Mientras que para la función capacidad, existe el máximo, pero la determinación de su valor, aun con ayuda de la calculadora sólo es aproximado. En tercer lugar, se debe reconocer la continuidad de la variación, hecho que puede ser algo intuitivo y no explícito.

TALLER SOBRE FUNCIONES CUADRÁTICAS (CUARTA PARTE)

En los talleres anteriores hemos comenzado el estudio de seis funciones que dependen de la altura de la caja, a saber: largo de la caja, ancho de la caja, área del papel desperdiciado, área del papel de la caja, área de la base de la caja, capacidad de la caja. Para tales funciones hemos encontrado una representación simbólica y el conjunto de valores de cada función, sabiendo que la altura de cualquier caja es un valor entre 0 y 10. A continuación presentamos una tabla de resumen de estos datos:

Nombre de la función	Expresión simbólica	Posibles valores de la función (todos)
largo de la caja	$f_1(x) = l = -2x + 24$	(4, 24)
ancho de la caja	$f_2(x) = a = -2x + 20$	(0, 20)
área del papel desperdiciado	$f_3(x) = d = 4x^{-}$	(0, 400)
área del papel de la caja	$f_4(x) = u = -4x^2 + 480$	(80, 480)
área de la base	$f_5(x) = b = 4x^2 - 88x + 480$	(0, 480)
capacidad de la caja	$f_6(x) = c = 4x^3 - 88x^2 + 480x$	(0, 774.1646...)

Trabajo en grupo

1) Para la función asignada al grupo, construyan una tabla de valores, donde TblStart = 0 y Δ Tbl = 0.5; y el valor máximo de x sea 10.

2) En medio pliego de papel periódico, elaboren una gráfica cartesiana de la función asignada. Tengan en cuenta que en el contexto, el valor de la altura pertenece a (0, 10) y que tal intervalo no incluye los extremos; además, asuman que en la gráfica el eje horizontal representa los valores de la altura de la caja. A la vez que vayan haciendo la gráfica, recojan información que les permita preparar la exposición que se reporta en el ítem 4.

3) Respondan las preguntas relativas a la función para la que hayan hecho la gráfica.

   Función largo

   a. En los ejes marquen con color los posibles valores de la altura y de la función que tienen asignada.

b. El punto de coordenadas (3.25, 17.5) pertenece a la gráfica de la función. ¿Qué significa cada una de las dos coordenadas cartesianas del punto?

c. Determinen cuáles de los siguientes puntos expresados a través de sus coordenadas cartesianas pertenecen a la gráfica de la función: (11, 2); (6, 14); (14, -4). Expliquen sus respuestas.

d. Señalen un punto en el eje X, que represente la altura de una caja posible en el contexto. Sin realizar cálculos, determinen para dicho punto el correspondiente punto en el eje $f_1(X)$, que representa el largo de tal caja.

e. Señalen un punto en el eje $f_1(X)$, que represente el largo de una caja posible en el contexto. Sin realizar cálculos, determinen para dicho punto el correspondiente punto en el eje X, que representa la altura de tal caja.

f. Un grupo de estudiantes del curso afirma que es posible construir dos cajas de diferente largo que tengan la misma altura. Discutan si tal afirmación es verdadera o falsa; justifiquen su respuesta valiéndose de la tabla, la gráfica, o, la expresión simbólica correspondientes.

g. ¿Es válido afirmar que "de dos cajas de diferente altura, es más larga la más alta"? Utilicen la gráfica para argumentar su respuesta.

Función ancho

a. En los ejes marquen con color los posibles valores de la altura y de la función que tienen asignada.

b. El punto de coordenadas (3.25, 13.5) pertenece a la gráfica de la función. ¿Qué significa cada una de las dos coordenadas cartesianas del punto?

c. Determinen cuáles de los siguientes puntos expresados a través de sus coordenadas cartesianas pertenecen a la gráfica de la función: (11, -2); (6, 10). Expliquen sus respuestas.

d. Señalen un punto en el eje X, que represente la altura de una caja posible en el contexto. Sin realizar cálculos, determinen para dicho punto el correspondiente punto en el eje $f_2(X)$, que representa el ancho de tal caja.

e. Señalen un punto en el eje $f_2(X)$, que represente el ancho de una caja posible en el contexto. Sin realizar cálculos, determinen para dicho punto el correspondiente punto en el eje X, que representa la altura de tal caja.

f. Un grupo de estudiantes del curso afirma que es posible construir dos cajas de diferente ancho que tengan la misma altura. Discutan si tal afirmación es verdadera o falsa; justifiquen su respuesta valiéndose de la tabla, la gráfica, o, la expresión simbólica correspondientes.

g. ¿Es válido afirmar que "de dos cajas de diferente altura, es menos ancha la más alta"? Utilicen la gráfica para argumentar su respuesta.

Función área del papel desperdiciado

a. En los ejes marquen con color los posibles valores de la altura y de la función que tienen asignada.

b. El punto de coordenadas (3.25, 42.25) pertenece a la gráfica de la función. ¿Qué significa cada una de las dos coordenadas cartesianas del punto?

c. Determinen cuáles de los siguientes puntos expresados a través de sus coordenadas cartesianas pertenecen a la gráfica de la función: (11, 484); (6, 140). Expliquen sus respuestas.

d. Señalen un punto en el eje X, que represente la altura de una caja posible en el contexto. Sin realizar cálculos, determinen para dicho punto el correspondiente punto en el eje $f_3(X)$, que representa el área del papel desperdiciado para construir tal caja.

e. Señalen un punto en el eje $f_3(X)$, que represente el área del papel desperdiciado para construir una caja posible en el contexto. Sin realizar cálculos, determinen para dicho punto el correspondiente punto en el eje X, que representa la altura de tal caja.

f. Un grupo de estudiantes del curso afirma que es posible construir dos cajas para las que el área del papel desperdiciado es diferente y tienen la misma altura. Discutan si tal afirmación es verdadera o falsa; justifiquen su respuesta valiéndose de la tabla, la gráfica, o, la expresión simbólica correspondientes.

g. ¿Es válido afirmar que "de dos cajas de diferente altura, el área de papel desperdiciado es mayor en el caso de la caja más alta"? Utilicen la gráfica para argumentar su respuesta.

Función área del papel de la caja

a. En los ejes marquen con color los posibles valores de la altura y de la función que tienen asignada.

b. El punto de coordenadas (3.25, 437.75) pertenece a la gráfica de la función. ¿Qué significa cada una de las dos coordenadas cartesianas del punto?

c. Determinen cuáles de los siguientes puntos expresados a través de sus coordenadas cartesianas pertenecen a la gráfica de la función: (10.75, 17.75); (6, 332); (11, -4). Expliquen sus respuestas.

d. Señalen un punto en el eje X, que represente la altura de una caja posible en el contexto. Sin realizar cálculos, determinen para dicho punto el correspondiente punto en el eje $f_4(X)$, que representa el área del papel de tal caja.

e. Señalen un punto en el eje $f_4(X)$, que represente el área del papel de una caja posible en el contexto. Sin realizar cálculos, determinen para dicho punto el correspondiente punto en el eje X, que representa la altura de tal caja.

f. Un grupo de estudiantes del curso afirma que es posible construir dos cajas para las que el área del papel es diferente y tienen la misma altura. Discutan si tal afirmación es verdadera o falsa; justifiquen su respuesta valiéndose de la tabla, la gráfica, o, la expresión simbólica correspondientes.

g. ¿Es válido afirmar que "de dos cajas de diferente altura, el área del papel de la caja es menor en el caso de la caja más alta"? Utilicen la gráfica para argumentar su respuesta.

Función área de la base

a. En los ejes marquen con color los posibles valores de la altura y de la función que tienen asignada.

b. El punto de coordenadas (3.25, 236.25) pertenece a la gráfica de la función. ¿Qué significa cada una de las dos coordenadas cartesianas del punto?

c. Determinen cuáles de los siguientes puntos expresados a través de sus coordenadas cartesianas pertenecen a la gráfica de la función: (11, -4); (6, 98). Expliquen sus respuestas.

d. Señalen un punto en el eje X, que represente la altura de una caja posible en el contexto. Sin realizar cálculos, determinen para dicho punto el correspondiente punto en el eje $f_5(X)$, que representa el área de la base de tal caja.

e. Señalen un punto en el eje $f_5(X)$, que represente el área de la base de una caja posible en el contexto. Sin realizar cálculos, determinen para dicho punto el correspondiente punto en el eje X, que representa la altura de tal caja.

f. Un grupo de estudiantes del curso afirma que es posible construir dos cajas para las que el área de la base es diferente y tienen la misma altura. Discutan si tal afirmación es verdadera o falsa; justifiquen su respuesta valiéndose de la tabla, la gráfica, o, la expresión simbólica correspondientes.

g. ¿Es válido afirmar que "de dos cajas de diferente altura, la que tiene base de menor área es la más alta"? Utilicen la gráfica para argumentar su respuesta.

Función capacidad

a. En los ejes marquen con color los posibles valores de la altura y de la función que tienen asignada.

b. El punto de coordenadas (3.25, 767.8125) pertenece a la gráfica de la función. ¿Qué significa cada una de las dos coordenadas cartesianas del punto?

c. Determinen cuáles de los siguientes puntos expresados a través de sus coordenadas cartesianas pertenecen a la gráfica de la función: (11, -44); (6, 578). Expliquen sus respuestas.

d. Señalen un punto en el eje X, que represente la altura de una caja posible en el contexto. Sin realizar cálculos, determinen para dicho punto el correspondiente punto en el eje $f_6(X)$, que representa la capacidad de tal caja.

e. Señalen un punto en el eje $f_6(X)$, que represente la capacidad de una caja posible en el contexto. Sin realizar cálculos, determinen para dicho punto el(los) correspondiente(s) punto(s) en el eje X, que representa(n) la(s) altura(s) de tal caja.

f. Un grupo de estudiantes del curso afirma que es posible construir dos cajas de diferente capacidad que tengan la misma altura. Discutan si tal afirmación es verdadera o falsa; justifiquen su respuesta valiéndose de la tabla, la gráfica, o, la expresión simbólica correspondientes.

g. ¿Es válido afirmar que "de dos cajas de diferente altura, tiene volumen mayor la más alta"? Utilicen la gráfica para argumentar su respuesta.

4) Preparen una exposición en la que den información acerca de:

- cómo eligieron la escala sobre ambos ejes, el horizontal y el vertical;
- cómo asociaron un par de valores correspondientes de la tabla con un punto de la gráfica;
- por qué hicieron o no un trazo uniendo los puntos ubicados a partir de la tabla;

- cómo hicieron para determinar qué tipo de trazo habría que hacer entre dos puntos;
- cómo representaron los valores extremos de la función;
- cómo hicieron para determinar si un punto dado a través de sus coordenadas cartesianas pertenece o no a la gráfica de la función;
- cómo hicieron para ubicar el punto sobre el eje $f_n(X)$, correspondiente a un punto dado sobre el eje X;
- cómo hicieron para ubicar el punto sobre el eje X, correspondiente a un punto dado sobre el eje $f_n(X)$;
- cómo argumentaron la veracidad o falsedad de las afirmaciones de los puntos (f) y (g).

5) Luego de las exposiciones, realicen en una hoja de papel milimetrado una gráfica cartesiana de la función asignada. Saquen tantas fotocopias de esa gráfica como la mitad de grupos que haya conformados y entreguen una a cada uno de esos grupos. Después de esto, cada grupo deberá tener copia de una gráfica de cada una de las seis funciones con las que estamos trabajando.

6) Determinen algunas características que sean comunes a las gráficas de las seis funciones. Repórtenlas por escrito.

7) Determinen algunas características que permitan configurar grupos de gráficas de las seis funciones. Reporten cada característica seguida de la clasificación de las funciones por ella generada.

8) Determinen algunas características que permitan configurar grupos de expresiones simbólicas de las seis funciones. Reporten cada característica seguida de la clasificación de las funciones por ella generada.

9) Identifiquen si el resultado de alguna clasificación generada en el punto 7 se corresponde con alguna clasificación generada en el punto 8.

TABLA

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	$f_5(x)$	$f_6(x)$
0	24	20	0	480	480	0
0.5	23	19	1	479	437	218.5
1	22	18	4	476	396	396
1.5	21	17	9	471	357	535.5
2	20	16	16	464	320	640
2.5	19	15	25	455	285	712.5
3	18	14	36	444	252	756
3.5	17	13	49	431	221	773.5
4	16	12	64	416	192	768
4.5	15	11	81	399	165	742.5
5	14	10	100	380	140	700
5.5	13	9	121	359	117	643.5
6	12	8	144	336	96	576
6.5	11	7	169	311	77	500.5
7	10	6	196	284	60	420
7.5	9	5	225	255	45	337.5
8	8	4	256	224	32	256
8.5	7	3	289	191	21	178.5
9	6	2	324	156	12	108
9.5	5	1	361	119	5	47.5
10	4	0	400	80	0	0

CONSIDERACIONES RELATIVAS AL DESARROLLO CURRICULAR DEL PRIMER TALLER (CUARTA PARTE)

Intencionalidad

La representación gráfica de funciones polinómicas se ha asumido como un procedimiento matemático relativamente simple y no siempre ha sido objeto de estudio por parte de los profesores de matemáticas. Sin embargo, la elaboración y comprensión de este sistema de representación exige y promueve una buena cantidad y variedad de objetos, relaciones y conocimientos matemáticos, que habitualmente pueden pasar desapercibidos para profesores y estudiantes.

A través de este taller pretendemos, entonces, generar un ambiente en el que, de un lado, los estudiantes pongan en juego, revelen y mejoren su nivel de manejo y comprensión acerca de los procesos de elaboración, interpretación y uso de las gráficas de funciones (en un contexto específico); y de otro, los profesores puedan advertir algunas particularidades de los conocimientos matemáticos implicados en el aprendizaje de estos procesos.

Consideraciones acerca de la metodología implicada

La cuarta parte del primer taller pretende desarrollarse a través de cinco momentos. En el primero, el profesor asignará a cada grupo de estudiantes una de las seis funciones que se están trabajando; en esta distribución es necesario tener en cuenta que al menos dos grupos trabajen por separado la misma función para garantizar la posibilidad de confrontación de resultados y facilitar que luego todos los grupos dispongan de las gráficas de las seis funciones.

En la segunda parte se espera que con la función asignada, cada uno de los grupos desarrolle los cuatro primeros ítems, uno de los cuales —ítem (3)— presenta versiones diferentes para cada una de las funciones pero equivalentes entre sí; esta actividad podría sugerirse como trabajo extraclase —en cuyo caso se perdería la posibilidad de observar e intervenir los desarrollos que realicen los estudiantes—, sin embargo consideramos más pertinente que se realice durante la clase y que el profesor cumpla tanto el papel de observador del trabajo de sus estudiantes como el rol de cuestionador de la validez del mismo.

La realización de una exposición de tales desarrollos y sus resultados, constituirá el tercer momento. En éste es muy importante brindar la posibilidad de confrontación de ideas y resultados, y la posibilidad de realizar preguntas que permitan evidenciar y esclarecer dudas respecto del proceso adelantado por cada grupo en las diferentes funciones.

Posteriormente, en un cuarto momento, cada grupo reconstruirá y distribuirá copias de la gráfica de la función aisgnada. Con las copias de las seis gráficas de sendas funciones los grupos desarrollarán las actividades registradas en los ítems (6) a (9). El profesor deberá interactuar con los grupos para que puedan identificar la mayor cantidad de características acerca de las gráficas y puedan generar una buena cantidad de clasificaciones de las mismas.

Sugerimos que en un quinto y último momento se desarrolle una plenaria, orientada por el profesor, en la que se pongan en juego las diversas características identificadas y sus respectivas taxonomías.

Consideraciones acerca de algunas preguntas y respuestas

Respecto del contenido que precede los ítems que orientan el trabajo en grupo, señalemos que si bien la tabla que aparece al inicio del taller reporta de manera sintética algunos resultados obtenidos en los anteriores talleres, también introduce una nueva notación, pues, de un lado, usamos los símbolos $f_n(x)$ con n=1,2,3,4,5,6 para denotar cada una de las seis funciones objeto de estudio, y de otro, escribimos los polinomios que describen las funciones en su forma estándar, que difiere (no desde el punto de vista matemático) de las expresiones utilizadas en los anteriores talleres. Igualmente, advertimos sobre la posibilidad de malinterpretación, por parte de los estudiantes, de la notación de intervalos; ellos podrían llegar a pensar que la expresión (4, 24) no representa un intervalo abierto en los reales, sino que representa una pareja de números reales de las medidas de la altura de la caja y el largo de la misma, que podría hacerse corresponder con un punto del plano.

A través del ítem (1) se pretende la obtención rápida de una buena cantidad de valores para cada una de las funciones, para lo cual se sugiere el uso de la calculadora. Sin embargo, si no se dispone de ésta, podría obviarse la construcción de la tabla y simplemente entregar una tabla con los valores establecidos y proponer la verificación de la validez de algunos de los datos.

Para el ítem (2), el cual propone la realización de la gráfica de la función en un tamaño que permita su visualización al momento de la exposición bajo unas condiciones, sugerimos que el profesor centre su atención en los diversos procedimientos y decisiones que están involucrados en la elaboración de la gráfica y que se revelan en el actuar de los estudiantes. Se podrían observar—entre otras—: la estrategia que usan para trazar ejes perpendiculares; la manera como los estudiantes eligen la escala para cada uno de los ejes; el criterio (paralelismo o perpendicularidad respecto de los ejes) que utilizan para trazar un punto dadas sus coordenadas; la estrategia usada para determinar la ubicación de la abcisa o la ordenada cuando el valor numérico no coincide con los valores explícitos en el eje; el criterio utilizado para decidir si se hace un trazo "uniforme" que contenga a todos los puntos, si se hace un trazo "segmentado"[2], o si no se hace trazo alguno; o, la manera como se representan las parejas de valores de los extremos de la tabla, que en el contexto no pertenecen a la función.

2. Las palabras "uniforme" y "segmentado" se utilizan aquí bajo una significación intuitiva. Sin embargo, podrían guardar alguna relación con ideas y conceptos de la geometría diferencial o con la idea de diferenciabilidad del cálculo.

Las actividades y preguntas que configuran el ítem (3) tienen intenciones diversas. Con el numeral(a) pretende explorarse la manera como los estudiantes están entendiendo las características de los intervalos que definen el dominio y recorrido de la función (ser denso, continuo y abierto); se espera que los estudiantes tracen segmentos continuos y abiertos en cada uno de los ejes, o que marquen sobre cada eje un número finito de puntos que corresponden a las respectivas coordenadas dadas en la tabla. Con el numeral (b) pretendemos cuestionar el significado de las coordenadas de un punto con relación al contexto de trabajo; al respecto, suponemos que en las respuestas no todos los estudiantes expresen que la primera componente de la pareja ordenada representa la medida de la altura de una caja y la segunda la medida de la magnitud respectiva a la función objeto de estudio (largo, ancho, área, capacidad). A través del numeral (c) intentamos abordar el estudio de las estrategias utilizadas para determinar si un punto pertenece o no a la gráfica de una función en un determinado dominio y recorridc de variación; para lograr esto, hemos propuesto el análisis de: parejas coordenadas que si bien pertenecen a la función, no pertenecen al dominio y recorrido significativo de la función, y parejas coordenadas que no pertenecen a la función. Con las actividades de los numerales (d) y (e) se pretende enfrentar a los estudiantes a una actividad que les exija hacer un uso significativo de la representación gráfica, a la vez que le permite al profesor un ámbito para evidenciar el significado que los estudiantes manejan de ésta; advertimos que la respuesta al numeral (e) para la función capacidad de la caja proporciona una información adicional a las ofrecidas por las otras funciones ya que ésta no es inyectiva. La identificación de la característica de unicidad de las imágenes para cada uno de los elementos del dominio es el objeto de estudio del numeral (f); consideramos que es necesario enfatizar este rasgo esencial al concepto de función. Finalmente, con el numeral (g) queremos abordar una aproximación al comportamiento del orden de la variación, es decir, reconocer consecuencias de la variación creciente y/o decreciente de las funciones; sugerimos que se exija que la argumentación se apoye fuertemente en la gráfica de la función.

El listado que aparece en el ítem 4 pretenden marcar un derrotero para la exposición que realicen los grupos. Todos los aspectos vinculados a las preguntas expresadas en el listado están relacionados con las actividades y preguntas contenidas en los tres ítems anteriores; por tanto esta actividad deberá permitir a los estudiantes no sólo presentar sino también cualificar su trabajo. Es pues importante que el profesor permita a los demás grupos— y se permita— observar, valorar, criticar, etc. los resultados presentados por cada grupo.

La actividad presentada en el ítem 5 pretende constituirse en un espacio en el que los grupos de estudiantes puedan mejorar el resultado de su trabajo a partir de la cualificación del mismo.

Creemos que algunas de las semejanzas que los estudiantes deberían reportar en el desarrollo del ítem 6 tienen que ver con el hecho de que todas las gráficas representan funciones continuas y diferenciables, definidas de un conjunto abierto y absoluto en otro similar. Este hecho se refleja en el carácter continuo del trazo, en la "uniformidad" de las curvas trazadas, en la identificación de los extremos de la gráfica como puntos no pertenecientes a la función, en el uso exclusivo del primer cuadrante para representar la función, entre otras.

Por supuesto que no se espera que las descripciones involucren nombres y conceptos matemáticos en su presentación formal; sin embargo, sí se espera que impliquen una interpretación intuitiva de estos conceptos.

Dentro de las características esperadas como respuesta al ítem 7 quisiéramos que surgiera —entre otras—: el tipo de trazo (rectilíneo o curvo), el tipo de orden en la variación (creciente, decreciente, o combinado) y la consecuente existencia o no de máximos y mínimos relativos, el tipo de recorrido (intervalo abierto o semiabierto), la ubicación de los extremos de la gráfica (ambos, alguno o ninguno, ubicado(s) sobre el eje de las abcisas), el tipo de concavidad del trazo (sin concavidad, cóncavo o convexo). Nuevamente, se espera una descripción intuitiva, no formal, de estos rasgos. Es muy importante que no sólo se describan las características, sino que éstas permitan hacer taxonomías de todas las funciones objeto de estudio.

Los grupos que surjan de la clasificación de las funciones a través de sus expresiones podrían considerar: el valor del exponente del monomio principal del polinomio que describe la función, el valor algebraico del coeficiente principal del polinomio, o la cantidad de términos explícitos del polinomio.

Con el ítem 9 pretendemos que se pueda establecer alguna identificación entre grupos generados en el desarrollo de los dos ítem anteriores; particularmente podría surgir el reconocimiento del valor del exponente con el del tipo de gráfica. También, interesa establecer algunas relaciones que no siempre son válidas, por ejemplo la identificación del signo algebraico del coeficiente principal del polinomio con el carácter decreciente de la gráfica.

FUNCIONES CUADRÁTICAS • PRIMER TALLER (QUINTA PARTE)
VERSIÓN A

En este taller seguiremos trabajando con las seis funciones establecidas en el taller anterior, las cuales dependen de la altura de la caja. En lo que sigue vamos a examinar con algún detalle la variación de estas funciones.

Trabajo individual en los grupos

1) En el contexto en el que estamos trabajando surgen dos cuestiones que queremos tratar de resolver con el trabajo de este taller.

   Si al comparar varias parejas de cajas se encuentra que su altura difiere en la misma cantidad, ¿será cierto que el largo de las cajas también difiere en una misma cantidad?

   Si al comparar varias parejas de cajas se encuentra que su altura difiere en la misma cantidad, ¿será cierto que el área del papel de las cajas también difiere en una misma cantidad?

   a. Sin utilizar más de cinco minutos, intente responder por escrito las dos preguntas anteriores.

   b. Si en los cinco minutos que tuvo no pudo responder, ¿qué estrategia seguiría para resolver tales cuestiones? Explique su respuesta.

<u>Acerca de la función *largo de la caja*</u> ($f_1(x) = -2x + 24$)

2) Cada uno de los integrantes del grupo va a examinar cómo varían los valores de $f_1(x)$ cuando la variable x varía con incrementos de un valor específico. Para ello, cada miembro del grupo debe completar la segunda fila de una de las cuatro tablas que aparecen a continuación (usando calculadora) y luego, con base en la información de su tabla, debe responder las preguntas 3 a 6.

a.

diferencia en x									
x	0.2	1.2	2.2	3.2	4.2	5.2	6.2	7.2	8.2
$f_1(x)$									
diferencia en $f_1(x)$									

b.

diferencia en x

x	3.3	3.8	4.3	4.8	5.3	5.8	6.3	6.8	7.3
$f_1(x)$									

diferencia en $f_1(x)$

c.

diferencia en x

x	0.3	1.1	1.9	2.7	3.5	4.3	5.1	5.9	6.7
$f_1(x)$									

diferencia en $f_1(x)$

d.

diferencia en x

x	0.1	1.3	2.5	3.7	4.9	6.1	7.3	8.5	9.7
$f_1(x)$									

diferencia en $f_1(x)$

3) En la tabla, los valores dados a x están ordenados ascendentemente. Determine si la siguiente aseveración es verdadera o falsa: entre dos valores consecutivos cualesquiera de x (considerando primero el que está a la derecha) hay una diferencia constante (los valores de las diferencias son iguales). En la primera fila de óvalos registre los valores de las diferencias.

4) Para cada par de valores consecutivos de $f_1(x)$ registrados en su tabla, determine la diferencia (lo mismo que para los valores de x, considere primero el que está a la derecha); si lo considera necesario utilice la calculadora. En la segunda fila de óvalos, escriba el valor de la diferencia obtenida. ¿Es cierto que los valores de las diferencias son el mismo?

5) Que la diferencia en valores consecutivos de x sea la misma en la tabla fue decisión de quien escogió los valores. ¿Puede dar alguna explicación o alguna justificación de por qué la diferen-

cia entre valores consecutivos de $f_1(x)$ resultó negativa y por qué esa diferencia es la misma en todos los casos considerados?

6) ¿Las respuestas a los ítems 3, 4 y 5 se modifican si la diferencia entre valores consecutivos de la tabla se calcula considerando primero el valor que está a la izquierda (y no a la derecha como se especifica en los ítems 3 y 4)? Explique su respuesta.

Acerca de la función *área del papel de la caja* ($f_4(x) = -4x^2 + 480$)

7) Cada integrante del grupo va a examinar cómo varían los valores de $f_4(x)$ cuando la variable x varía con diferencias de un valor específico. Para ello, cada miembro del grupo debe completar la tercera fila de una de las cuatro tablas que aparecen a continuación (usando calculadora) y luego, con base en la información de su tabla, debe responder las preguntas 8 a 9.

e.

diferencia en x									
x	0.2	1.2	2.2	3.2	4.2	5.2	6.2	7.2	8.2
$f_4(x)$									
diferencia en $f_4(x)$									

f.

diferencia en x									
x	3.3	3.8	4.3	4.8	5.3	5.8	6.3	6.8	7.3
$f_4(x)$									
diferencia en $f_4(x)$									

g.

diferencia en x									
x	0.3	1.1	1.9	2.7	3.5	4.3	5.1	5.9	6.7
$f_4(x)$									
diferencia en $f_4(x)$									

h.

diferencia en x									
x	0.1	1.3	2.5	3.7	4.9	6.1	7.3	8.5	9.7
$f_4(x)$									
diferencia en $f_4(x)$									

8) También en este caso, al considerar dos valores consecutivos en la tabla, la diferencia en x es constante. En la primera fila registre el valor de dicha diferencia.

9) Para cada par de valores consecutivos de $f_4(x)$ registrados en su tabla, utilizando calculadora, determine su diferencia. En la segunda fila de óvalos, escriba el valor de la diferencia obtenida. ¿Es cierto que los valores de las diferencias son el mismo? Describa la mayor cantidad de detalles acerca del comportamiento de los valores de las diferencias que obtuvo.

Trabajo en grupos de 4

<u>Acerca de la función *largo de la caja*</u> ($f_1(x) = -2x + 24$)

10) En la respectiva gráfica cartesiana, entregada por el profesor, identifiquen y marquen con un mismo color los puntos correspondientes a los valores de la tabla (a.) que elaboraron en el trabajo individual. Con el mismo color, representen en esa gráfica las diferencias que calcularon. Describan las características que se pueden observar al mirar el dibujo obtenido.

11) Con tres colores diferentes al utilizado antes, realicen las actividades propuestas en el ítem 10 para las tablas (b., c., d.) respectivamente.

12) De las características que identificaron en las gráficas de cada una de las tablas, ¿cuáles son comunes y cuáles no lo son?

13) En la siguiente tabla, registren un resumen de los resultados obtenidos en el trabajo individual.

Nombre del estudiante	Diferencias entre valores consecutivos de x	Diferencias entre valores consecutivos de $f_1(x)$

14) Con base en el trabajo individual y en la tabla anterior, si dos cajas difieren en su altura en 1.5 cm., ¿se puede averiguar en cuánto difieren los correspondientes largos? Expliquen cómo dan respuesta a esa pregunta.

Acerca de la función *área del papel de la caja* ($f_4(x) = -4x^2 + 480$)

15) En la respectiva gráfica cartesiana, entregada por el profesor, identifiquen y marquen con un mismo color los puntos correspondientes a los valores de la tabla (e.) que elaboraron en el trabajo individual. Con el mismo color, representen en esa gráfica las diferencias que calcularon. Describan las características que se pueden observar al mirar el dibujo obtenido.

16) Con tres colores diferentes al utilizado antes, realicen las actividades propuestas en el ítem 10 para las tablas (f., g., h.) respectivamente.

17) De las características que identificaron en las gráficas de cada una de las tablas, ¿cuáles son comunes y cuáles no lo son?

18) En la siguiente tabla, registren un resumen de los resultados obtenidos en el trabajo individual.

Nombre del estudiante	Diferencias entre valores consecutivos de x	Diferencias entre valores consecutivos de $f_4(x)$

19) Con base en el trabajo individual y en la tabla anterior, si dos cajas difieren en su altura en 1.5 cm., ¿se puede averiguar en cuánto difieren las correspondientes áreas del papel de las cajas? Expliquen cómo dan respuesta a esa pregunta.

20) Discutan las respuestas que cada quien dio al ítem 1. Atendiendo a lo discutido y a lo realizado en el taller, elaboren una nueva respuesta del grupo para las preguntas:

Si al comparar varias parejas de cajas se encuentra que su altura difiere en la misma cantidad, ¿será cierto que el largo de las cajas también difiere en una misma cantidad?

Si al comparar varias parejas de cajas se encuentra que su altura difiere en la misma cantidad, ¿será cierto que el área del papel de las cajas también difiere en una misma cantidad?

FUNCIONES CUADRÁTICAS • PRIMER TALLER (QUINTA PARTE) VERSIÓN B

En este taller seguiremos trabajando con las seis funciones establecidas en el taller anterior, las cuales dependen de la altura de la caja. En lo que sigue vamos a examinar con algún detalle la variación de estas funciones.

Trabajo individual

1) En el contexto en el que estamos trabajando, surgen dos preguntas que queremos tratar de responder con el trabajo de este taller.

   Si al comparar varias parejas de cajas se encuentra que su altura difiere en la misma cantidad, ¿será cierto que el ancho de las cajas también difiere en una misma cantidad?

   Si al comparar varias parejas de cajas se encuentra que su altura difiere en la misma cantidad, ¿será cierto que el área del papel desperdiciado también difiere en una misma cantidad?

   a. Sin utilizar más de cinco minutos, intente responder por escrito las dos preguntas anteriores.

   b. Si en los cinco minutos que tuvo no pudo responder, ¿qué estrategia seguiría para resolver tales cuestiones? Explique su respuesta.

<u>Acerca de la función *ancho de la caja*</u> ($f_2(x) = -2x + 20$)

2) Cada uno de los integrantes del grupo va a examinar cómo varían los valores de $f_2(x)$ cuando la variable x varía con incrementos de un valor específico. Para ello, cada miembro del grupo debe completar la segunda fila de una de las cuatro tablas que aparecen a continuación (usando calculadora) y luego, con base en la información de su tabla, debe responder las preguntas 3 a 6.

a.

diferencia en x								
x	0.2	1.2	2.2	3.2	4.2	5.2	6.2	7.2	8.2
$f_2(x)$									
diferencia en $f_2(x)$								

b.

diferencia en x

x	3.3	3.8	4.3	4.8	5.3	5.8	6.3	6.8	7.3
$f_2(x)$									

diferencia en $f_2(x)$

c.

diferencia en x

x	0.3	1.1	1.9	2.7	3.5	4.3	5.1	5.9	6.7
$f_2(x)$									

diferencia en $f_2(x)$

d.

diferencia en x

x	0.1	1.3	2.5	3.7	4.9	6.1	7.3	8.5	9.7
$f_2(x)$									

diferencia en $f_2(x)$

3) En la tabla, los valores dados a x están ordenados ascendentemente. Determine si la siguiente aseveración es verdadera o falsa: entre dos valores consecutivos cualesquiera de x (considerando primero el que está a la derecha) hay una diferencia constante (los valores de las diferencias son iguales). En la primera fila de óvalos registre los valores de las diferencias.

4) Para cada par de valores consecutivos de $f_2(x)$ registrados en su tabla, determine la diferencia (lo mismo que para los valores de x, considere primero el que está a la derecha); si lo considera necesario utilice la calculadora. En la segunda fila de óvalos, escriba el valor de la diferencia obtenida. ¿Es cierto que los valores de las diferencias son el mismo?

5) Que la diferencia en valores consecutivos de x sea la misma en la tabla fue decisión de quien escogió los valores. ¿Puede dar alguna explicación o alguna justificación de por qué la diferen-

cia entre valores consecutivos de $f_2(x)$ resultó negativa y por qué esa diferencia es la misma en todos los casos considerados?

6) ¿Las respuestas a los ítems 3, 4 y 5 se modifican si la diferencia entre valores consecutivos de la tabla se calcula considerando primero el valor que está a la izquierda (y no a la derecha como se especifica en los ítems 3 y 4)? Explique su respuesta.

Acerca de la función *área del papel desperdiciado* ($f_3(x) = 4x^2$)

7) Cada integrante del grupo va a examinar cómo varían los valores de $f_3(x)$ cuando la variable x varía con diferencias de un valor específico. Para ello, cada miembro del grupo debe completar la tercera fila de una de las cuatro tablas que aparecen a continuación (usando calculadora) y luego, con base en la información de su tabla, debe responder las preguntas 8 a 9.

e.

diferencia en x									
x	0.2	1.2	2.2	3.2	4.2	5.2	6.2	7.2	8.2
$f_3(x)$									
diferencia en $f_3(x)$									

f.

diferencia en x									
x	3.3	3.8	4.3	4.8	5.3	5.8	6.3	6.8	7.3
$f_3(x)$									
diferencia en $f_3(x)$									

g.

diferencia en x									
x	0.3	1.1	1.9	2.7	3.5	4.3	5.1	5.9	6.7
$f_3(x)$									
diferencia en $f_3(x)$									

h.

diferencia en x									
x	0.1	1.3	2.5	3.7	4.9	6.1	7.3	8.5	9.7
$f_3(x)$									
diferencia en $f_3(x)$									

8) También en este caso, al considerar dos valores consecutivos en la tabla, la diferencia en x es constante. En la primera fila registre el valor de dicha diferencia.

9) Para cada par de valores consecutivos de $f_3(x)$ registrados en su tabla, utilizando calculadora, determine su diferencia. En la segunda fila de óvalos, escriba el valor de la diferencia obtenida. ¿Es cierto que los valores de las diferencias son el mismo? Describa la mayor cantidad de detalles acerca del comportamiento de los valores de las diferencias que obtuvo.

Trabajo en grupos de 4

Acerca de la función *ancho de la caja* ($f_2(x) = -2x + 20$)

10) En la respectiva gráfica cartesiana, entregada por el profesor, identifiquen y marquen con un mismo color los puntos correspondientes a los valores de la tabla (a.) que elaboraron en el trabajo individual. Con el mismo color, representen en esa gráfica las diferencias que calcularon. Describan las características que se pueden observar al mirar el dibujo obtenido.

11) Con tres colores diferentes al utilizado antes, realicen las actividades propuestas en el ítem 10 para las tablas (b., c., d.) respectivamente.

12) De las características que identificaron en las gráficas de cada una de las tablas, ¿cuáles son comunes y cuáles no lo son?

13) En la siguiente tabla, registren un resumen de los resultados obtenidos en el trabajo individual.

Nombre del estudiante	Diferencias entre valores consecutivos de x	Diferencias entre valores consecutivos de $f_2(x)$

14) Con base en el trabajo individual y en la tabla anterior, si dos cajas difieren en su altura en 1.5 cm., ¿se puede averiguar en cuánto difieren los correspondientes anchos? Expliquen cómo dan respuesta a esa pregunta.

Acerca de la función *área del papel desperdiciado* ($f_3(x) = 4x^2$)

15) En la respectiva gráfica cartesiana, entregada por el profesor, identifiquen y marquen con un mismo color los puntos correspondientes a los valores de la tabla (e.) que elaboraron en el trabajo individual. Con el mismo color, representen en esa gráfica las diferencias que calcularon. Describan las características que se pueden observar al mirar el dibujo obtenido.

16) Con tres colores diferentes al utilizado antes, realicen las actividades propuestas en el ítem 10 para las tablas (f., g., h.) respectivamente.

17) De las características que identificaron en las gráficas de cada una de las tablas, ¿cuáles son comunes y cuáles no lo son?

18) En la siguiente tabla, registren un resumen de los resultados obtenidos en el trabajo individual.

Nombre del estudiante	Diferencias entre valores consecutivos de x	Diferencias entre valores consecutivos de $f_3(x)$

19) Con base en el trabajo individual y en la tabla anterior, si dos cajas difieren en su altura en 1.5 cm., ¿se puede averiguar en cuánto difieren las correspondientes áreas del papel desperdiciado? Expliquen cómo dan respuesta a esa pregunta.

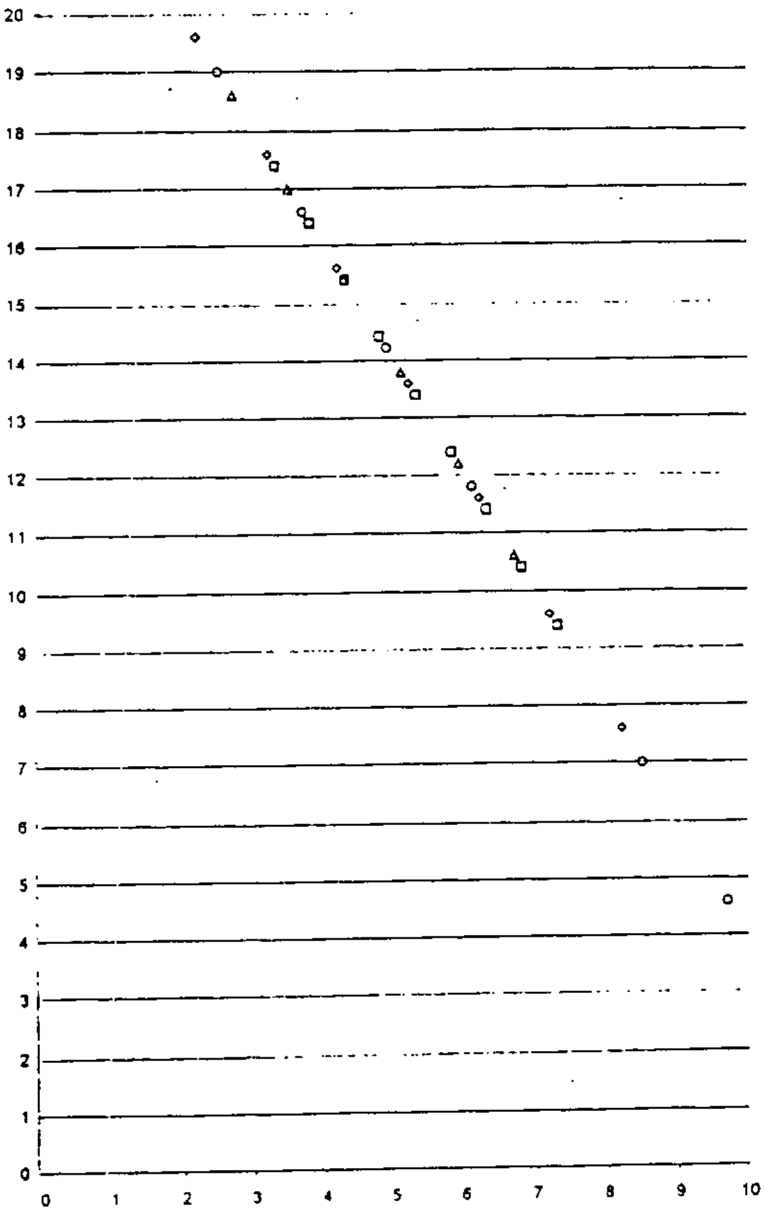
20) Discutan las respuestas que cada quien dio al ítem 1. Atendiendo a lo discutido y a lo realizado en el taller, elaboren una nueva respuesta del grupo para las preguntas:

Si al comparar varias parejas de cajas se encuentra que su altura difiere en la misma cantidad, ¿será cierto que el ancho de las cajas también difiere en una misma cantidad?

Si al comparar varias parejas de cajas se encuentra que su altura difiere en la misma cantidad, ¿será cierto que el área del papel desperdiciado también difiere en una misma cantidad?

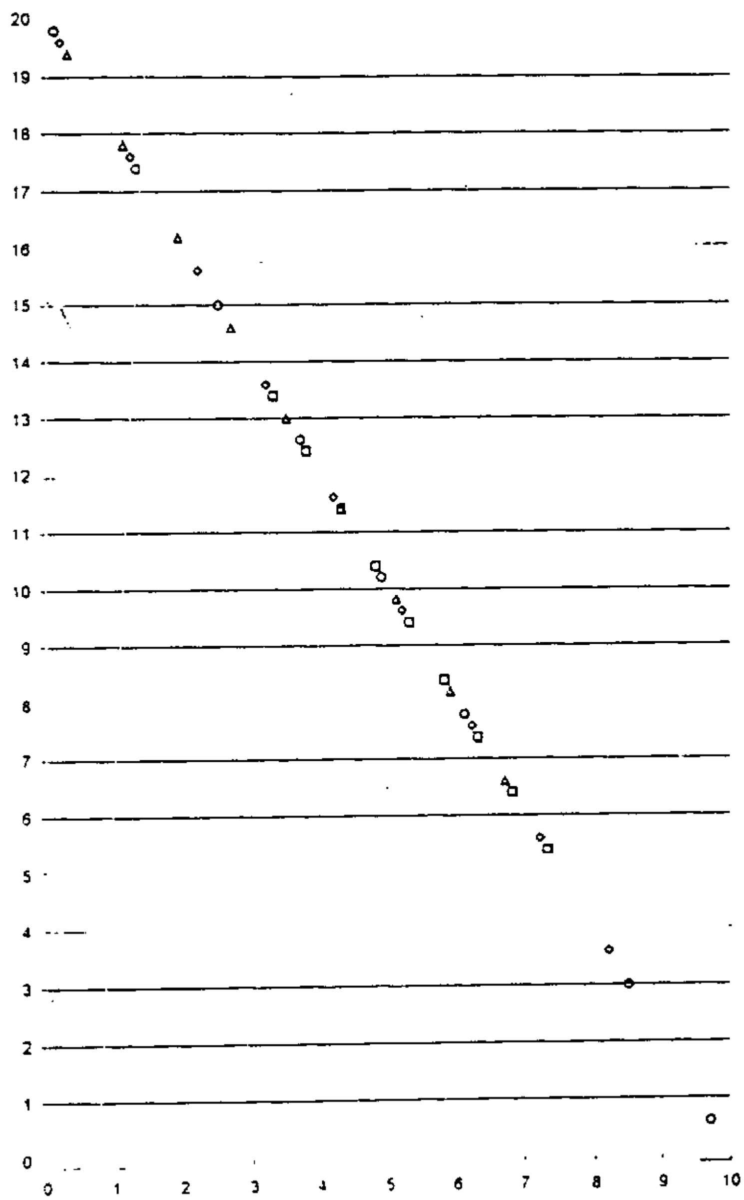
GRÁFICA DE LA FUNCIÓN LARGO DE LA CAJA

$f_1(x) = -2x + 24$



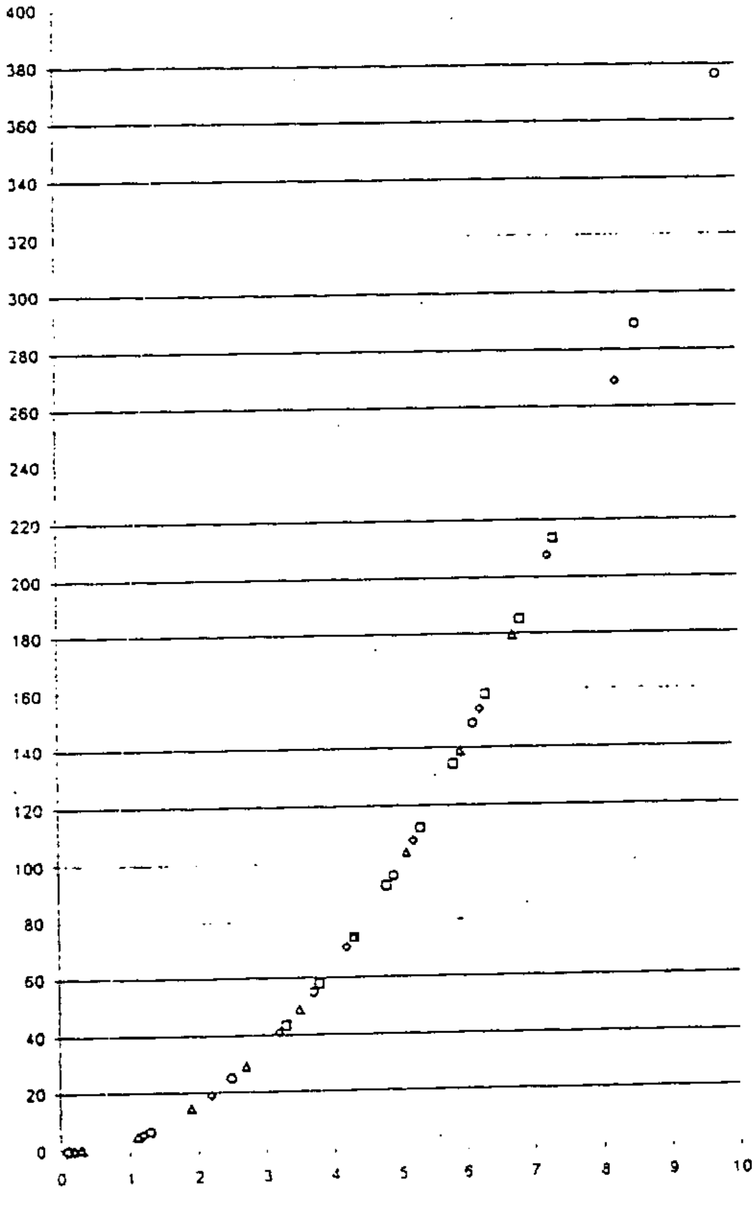
GRÁFICA DE LA FUNCIÓN ANCHO DE LA CAJA

$f_2(x) = -2x + 20$



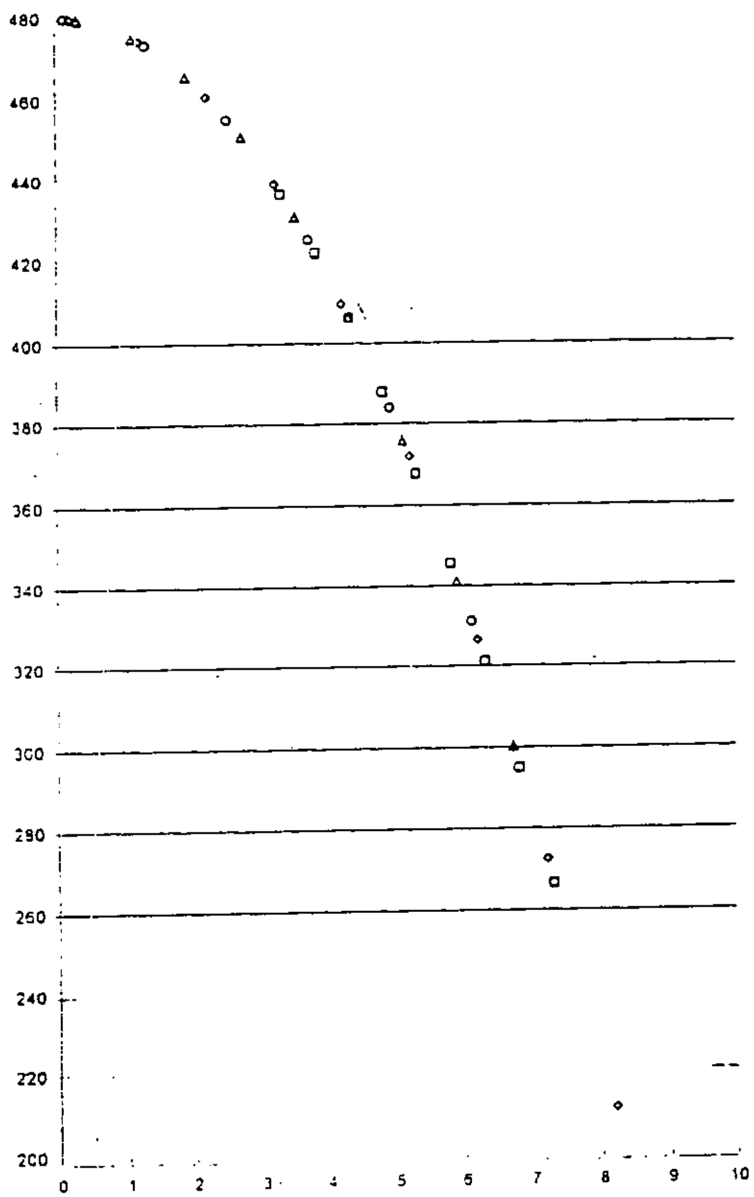
GRÁFICA DE LA FUNCIÓN ÁREA DEL PAPEL DESPERDICIADO

$$f_3(x) = 4x^2$$



GRÁFICA DE LA FUNCIÓN ÁREA DEL PAPEL DE LA CAJA

$f_4(x) = -4x^2 + 480$



Evaluación de la función Cuadrática.

EVALUACIONES DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

Evaluación 10.2 10.1.

1. Qué dificultades encontró en el desarrollo del taller? ¿Por qué?
2. Alcanzó los logros que usted esperaba a través de su trabajo - Por qué sí o porque no?

3. Con respecto a los alumnos: Juan y Mercedes. Cuál de los dos alumnos tuvo razón? Por qué? Cuáles son sus argumentos?.

4. Pudo darse cuenta en las tablas que usted elaboró la variación de las medidas del largo, el ancho y el área del papel de la caja? ¿Qué observó cuando la medida de la altura era más grande?

5. Cuando el estudiante dice haber construido en su imaginación una caja de altura 0.001 cm y argumenta que esa es la caja de menor altura en el contexto. ¿Usted piensa que el estudiante tiene razón? Argumente su respuesta.

6. Cómo varían las medidas del largo, el ancho y el área del papel de la caja cuando la medida de la altura se hace cada vez más pequeña? (en el contexto dado).
∴ Sí, las medidas se hacen cada vez más grandes es decir que el largo tiende a 24, el ancho se acerca a 20; y el área del papel tiende a 480 cm
¿Qué comentario le merece?
∴ Pudo recordar en el numeral 11 que la propiedad de densidad se aplica y se puede decir que 3 o se puede construir una caja intermedia. ¿Qué estimativo hizo?

8. Qué evidencia tendría la existencia de algunos casos extremos.? ¿Cuáles son esos casos? Enúncielos.
9. Cuáles son los límites del dominio de la variable I.? (Altura)
10. Cuáles son los límites de las variables dependientes o el rango de variación largo, ancho de la caja, área del papel de la caja y el área del papel desperdiciado?

11. ¿Qué características generales tiene la variación de cada una de las variables con respecto a la variación de la variable I. Explique y de argumentos.
12. Con las preguntas se estará solamente tratando de justificar el porqué de los extremos del dominio y recorrido de las funciones o se estará tratando de justificar el por qué están incluidos todos los reales entre ciertos valores extremos?
De los argumentos adecuados.
13. Cómo se debe responder la pregunta 5 o cuál sería la respuesta adecuada?
14. Cuál es la respuesta adecuada de la pregunta 10?
15. En una versión del taller preliminar se había planteado el trabajo individual para realizar en la casa. Ahora imagine que ya no está trabajando en el contexto de las cajas y que en el contexto de las matemáticas no aplicadas encuentra usted las ecuaciones: $u = 480 - 4x^2$; $l = 24 - 2x$ (versión B $d = 4x^2$ y $a = 20 - 2x$).
16. Para cada una de tales ecuaciones: ¿Hay algún valor real que no pueda asignarle a la variable x? Explique su respuesta.
17. ¿Qué tipo de valores para l se obtienen al asignarle x los valores que es posible asignarle? Explique.
18. ¿Qué tipo de valores para u se pueden obtener al asignarle a x los valores que es posible asignarle? Explique.
19. A partir del trabajo que usted ha realizado en el contexto específico, ha podido construir los elementos necesarios para lograr un manejo significativo de la generalidad que implican las funciones en el contexto de los números reales?

Nombre ALVARO H. ROA ROJAS Fecha
Institución LA AMISTAD Profesor CARLOTA PORRAS
Materia PRE - CALCULO Curso 10 - 02 Nota

Evaluacion 10-02

1)- Que dificultades encontro en el desarrollo del taller ¿POR QUE?

RTA=/ ninguna por que supe leer todo bien y asi comprendi lo que debia hacer.

2) Alcanzó los logros que usted esperaba a traves de su trabajo ¿por qué si o no?

RTA=/ si por que hize el esfuerzo de realizar los talleres y además cumpl con las exposiciones

3) Con respecto a los alumnos: Juan y Mercedes cuál de los 2 tubo la razón por qué?

RTA=/ Tiene razon mercedes por que 9.999 es la medida máxima que se puede tomar de acuerdo a la hoja de 20 X 24

4) Pudo darse cuenta en las tablas que usted elaboró la variación del largo, el ancho y el Area del papel de la caja ¿Qué observó cuando la medida de la altura era mas grande?

RTA=/ Que cuando la altura es mas grande el largo y el ancho disminuye y asi llega al limite.

5) Cuando el estudiante dice haber construido en su imaginacion una caja de altura 0.001cm y argumenta que esa es la caja de menor altura en el contexto ¿Usted planteá que el estudiante tiene razon porque?

RTA=/ No tiene la razón por que hay unidades mas pequeñas que esa.

6) Cómo varían las medidas del largo el ancho y el área de la caja cuando la medida de la altura se hace cada vez más pequeña

Si las medidas se hacen cada vez mas grandes es decir que el largo tiende a 24 el ancho se acerca a 20 y el area del papel tiende a 480.

RTA=/ Que cuando la altura es menor el largo y el ancho tienden a aumentar.

7) Pudo recordar en el numeral 11 que la propiedad de densidad se aplica y se puede decir que 3 o se puede construir una cajan intermedia ¿Que estimativa hizo?

RTA=/ Si se puede realizar por que en este caso aplicariamos la propiedad de densidad de los números reales.

8) Que evidencia, tendría la existencia de algunos casos extremos ¿cuáles son esos casos?

RTA=/ Son los límites del largo, ancho y área de la caja.

- 20 ancho
- 24 largo
- 480 Area caja.

9) Cuáles son los límites del dominio de la variable I ?

RTA=/ Altura variable independiente.
Rango es el largo, ancho Area del Papel desperdiciado Area de la caja. se Nota que domina el ALTO

10) Cuáles son límites de las variables dependientes o el rango de variación largo, ancho, área del papel de la caja y el área del papel desperdiciado.

RTA =/ Ancho tiende a 20.
Largo tiende a 24
area caja tiende a 480.

11) Qué características generales tiene la variación de cada una de las variables con respecto a la variación de la variable I. Explique y Argumente.

RTA=/

ALTURA	LARGO	ANCHO	AREA DE LA CAJA
6 cm	8 cm	7.6 cm	226 cm^2
6.9 cm	9.9 cm	8.2 cm	281.76 cm^2
7.3 cm	9 cm	9 cm	423.75 cm^2
7.5 cm	9 cm	9 cm	423.75 cm^2

12) Con las preguntas se estaría tratando de justificar el por qué de los extremos del dominio y recorrido de las funciones o se (J) están tratando de justificar el por que están incluidos todos los reales entre ciertos valores extremos? Argumente.

RTA=/ Tiende al oficio de los números reales positivos o negativos y se justifica con los positivos.

13.) ¿Cómo se debe responder la pregunta 5 o cuál sería la pregunta adecuada?

RTA=/ El largo varía de forma descendente con respecto a la altura.
el ancho de forma ascendente.

14) ¿Cuál es la respuesta adecuada de la pregunta 10?

RTA=/ Varía de forma descendente.

15) En una versión del taller preliminar se había planteado el trabajo individual para realizar en la casa. Ahora imagine que ya no está trabajando en el contexto de las cajas, y que en el contexto de las matemáticas no aplicadas encuentra usted la ecuaciones $U = 480 - 4x^2$; $l = 24 - 2x$ (versión B) $d = 4x^2$, $a = 20 - 2x$

RTA=/ si por que se le pueden asignar otras clases de valores reales y así lo podemos realizar.

16) Para cada una de tales ecuaciones. Hay algún valor real que no pueda asignarle a la variable x Explique su respuesta ?

RTA=/ No por que podemos aplicar cualquier valor real ya sea positivo o negativo.

17) Qué tipo de valores para l se pueden obtener al asignarle a x los valores que es posible asignarle ? Explique.

RTA=/ le podemos dar los valores reales negativos.

18) Que tipo de valores para U se pueden obtener al asignarle a x los valores que es posible asignarles ? Explique.

RTA=/ desiguales con los valores asignados.

$L = 24 - 2x$

$24 - 2x > 0$

$24 > 2x \quad \frac{24}{2} > x \quad 12 > x \quad 0 < x < 12$

$A = 20 - 2x > 0$

$20 > 2x \quad \frac{20}{2} > x \quad 10 > x \quad 0 < x < 10$

$480 - 4x^2$

$480 - 4x^2 > 0$

$480 > 4x^2 \quad \frac{480}{4x^2} \quad 120 > x^2 \quad \sqrt{120} > x \quad 10.9 > x$

$0 < x < 10.9$

Proyecto de precálculo
Universidad de los Andes
Una empresa docente.

Al curso 10·2 con 37 estudiantes se les entregó a cada uno la evaluación diseñada por una empresa docente. el 3 de de Octubre / 2000. Se les hizo las orientaciones pertinentes. Hoy 12 de Octubre recibo solamente Cuatro evaluaciones. El resto de estudiantes están fuera del Colegio en actividades programadas

Análisis

Los cuatro alumnos que entregaron dicha evaluación:

Contestaron cinco preguntas bien. y uno no pudo describir dos preguntas en forma escrita.
Tres estudiantes escribieron en forma simbólica tabular y gráfica según la exigencia de cada pregunta. En la pregunta 6) no fueron Claros o no hubo la claridad requerida. Tabularon las alturas las areas de varias parejas de cajas y escribieron las diferencias. pero sin ninguna respuesta.

Causas

- El compromiso con ellos mismos no es Claro.
- Hay mucha inasistencia -
- Retardos.
- Ausencia de lecturas adicionales en libros de matemáticas
- Falta mas orientación y seguimiento.
- Tiempo limitado (actividades - fiestas etc.)

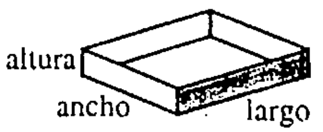
Estrategias

Diseñar actividades en donde el estudiante se convenza que él es el protagonista de su propio aprendizaje.
Trabajos de recuperación
Evaluación: En donde el estudiante manifieste verbalmente y comunique su trabajo.
Trabajos que lo lleven a realizar en forma gráfica problemas de la vida real.

EVALUACIÓN ACERCA DEL TRABAJO EN FUNCIONES CUADRÁTICAS
SEPTIEMBRE DE 2000

Para responder esta evaluación deben trabajar en grupos de dos estudiantes, disponen de una (1) semana a partir de hoy, y pueden utilizar calculadora. Esta evaluación es una oportunidad para que ustedes demuestren lo que han comprendido a través de la realización de los talleres anteriores. Se espera que usen tablas, gráficas, ecuaciones; que utilicen datos de otras parejas; que hagan conjeturas; que den explicaciones; que examinen casos particulares; es decir, **que hagan todo lo necesario para responder de manera justificada sus respuestas**. Deben entregar un reporte que recoja sus respuestas a las tareas que aquí se plantean y todas las explicaciones y comentarios que consideren necesarios para **demostrar todo lo que han comprendido** acerca del asunto que se está evaluando.

En la evaluación van a continuar trabajando en el mismo contexto, es decir, con las cajas formadas a partir de cortar cuadrados de lado x en cada una de las esquinas de una hoja de papel de 24 cm. de largo, y de 20 cm. de ancho. En esta ocasión van a trabajar con la función que relaciona la medida del lado del cuadrado con la medida del área de una de las caras determinadas por el largo de la caja. (Nos referimos a la cara sombreada en el dibujo que representa la caja).



Evaluación

1) Si x representa la medida del lado de cualquier cuadrado recortado en cualquiera de las cajas construidas y t representa la medida del área de la cara determinada por el largo de la caja, escriban una ecuación que les permita calcular t a partir de x.

2) Determinen el conjunto de todos los valores que puede tomar la medida del área de la cara determinada por el largo de cualquiera de las cajas que es posible construir en el contexto.

3) Utilizando la notación que se emplea para las funciones, en la que se expresa el hecho de que hay una variable de la que depende la función, expresen la función área de la cara determinada por el largo de la caja y llámenla f_7. Describan algunas características de la expresión.

4) Describan el conjunto de valores que puede tomar la función f_7, teniendo en cuenta la mayor cantidad posible de características.

5) Hagan una gráfica cartesiana de la función f_7 y mencionen todas las características de la función que se pueden ver en dicha gráfica.

6) Si al comparar varias parejas de cajas se encuentra que las alturas difieren en la misma cantidad, ¿será cierto que sus respectivas áreas de una de las caras determinada por el largo de la caja, también difieren en una misma cantidad?

Funciones cuadráticas

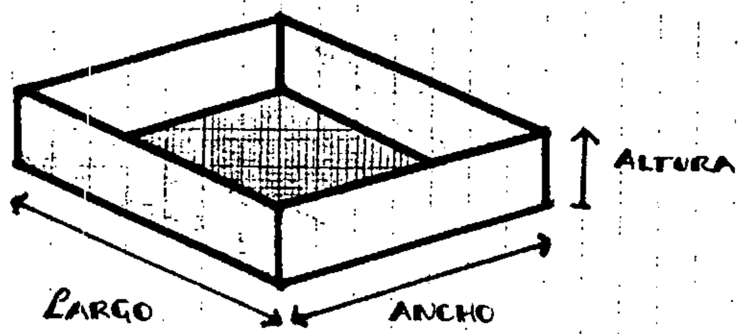
Ciro David Silva Ruiz
Curso 11-05

Trabajo de Pre-Cálculo
Presentado a la profesora.
Magdalena Oliveros

Colegio
Distrital La Amistad
10 de octubre
2000.

ALTURA DE LA CAJA.	LARGO DE LA CAJA.	AREA DEL LARGO DE LA CAJA.
0		
0.5	24-2x0.5= 23.	0.5x(24-2X) = 11.5.
1	24-2x1 =22.	1 x(24-2x1)= 22.
1.5	24-2x1.5=21.	1.5x(24-2x1.5)= 31.5.
2	24-2x2= 20.	2x(24-2x2) = 40.
2.5	24-2x2.5= 19	2.5x(24-2x2.5)=47.5.
3	24-2x 3=18	3x(24-2x3) = 54.
3.5	24-2x3.5= 17	3.5x(24-2x3.5)=59.5.
4	24-2x4 =16.	4x(24-2x4) =64
4.5	24-2x4.5=15.	4.5x(24-2x4.5)= 67.5.
5	24-2 x 5 = 14	5x(24-2x5) = 70.
5.5	24-2 x 5.5=13	5.5x(24-2x5.5)= 71.5.
6	24-2 x6 = 12	6x(24-2x6) = 72.
6.5	24-2x6.5=11.	6.5x(24-2x6.6)= 71.5.
7	24-2 x7 =10.	7x (24-2x7)= 70.
7.5	24-2 x7.5= 9	7.5x(24-2x7.5)= 67.5.
8	24-2x8 =8	8x(24-2x8)= 64
8.5	24-2x8.5=7	8.5x(24-2x8.5)= 59.5.
9	24-2x9= 6.	9 x(24-2x9)= 54
9.5	24-2x9.5 =5.	9.5x(24-2x9.5)= 47.5
10.	24-2x10=4.	10x(24-2x10)= 40.
/	2	

FUNCIONES CUADRATICAS



* Si x representa la medida del lado de cualquier cuadrado recortado en cualquiera de la cajas construidas y t representa la medida del área de la cara determinada por el largo de la caja, escriba una ecuación que les permita calcular t a partir de x.

$$t = x.(24-2x)$$

Con esta ecuación podemos calcular el área de largo de la caja, de la siguiente manera: t = Area del largo de la caja.

x = Medida del lado de cualquier cuadrado recortado

24-2x La ecuación para hallar el largo de la caja.

Para encontrar t vamos hacer el siguiente procedimiento se multiplica X con el resultado de la ecuación (24-2X) y así obtendremos a t.

* Determinen el conjunto de todos los valores que puede tomar la medida del área de la cara determinada por el largo de cualquiera de las caja que es posible construir en el contexto.

La altura de la caja al multiplicarse por el resultado de la ecuación se obtienen varios resultados, unos aumentan, otros estan en la mitad y otros disminuyen.

Según la tabla los valores de:

0.-4.5 = De este valor se puede sacar la conclusión que entre menos sea la medida del cuadrado recortado aumenta el largo pero al multiplicarlos X.(24-2X), el área de largo va aumentando.

5-7 = Estos valores tiene un nivel establecido ya que no aumenta ni disminuyen.

8-10 = Los valores que se puede hallar en estos niveles, es que estos van disminuyendo el área del largo, mientras el cuadrado recortado va aumentando.

* Utilizando la notación que se emplea para las funciones, en la que se expresa el hecho de que hay una variable de la que depende la función, expresen la función área de la cara determinada por el largo de la caja llámelo F7. Describan algunas características de la expresión.

$$\boxed{F7(x) = (24-2x).x}$$

$$\boxed{F7(x) = (24-2x).x = 24x - 2x^2}$$

Esta es una función cuadratica ya que la altura realiza la ley distributiva, en la ecuación $(24-2x)$, colcando a 24 por X y $2X$ elevado al cuadrado, obteniendo de esta ecuación una parabóla.

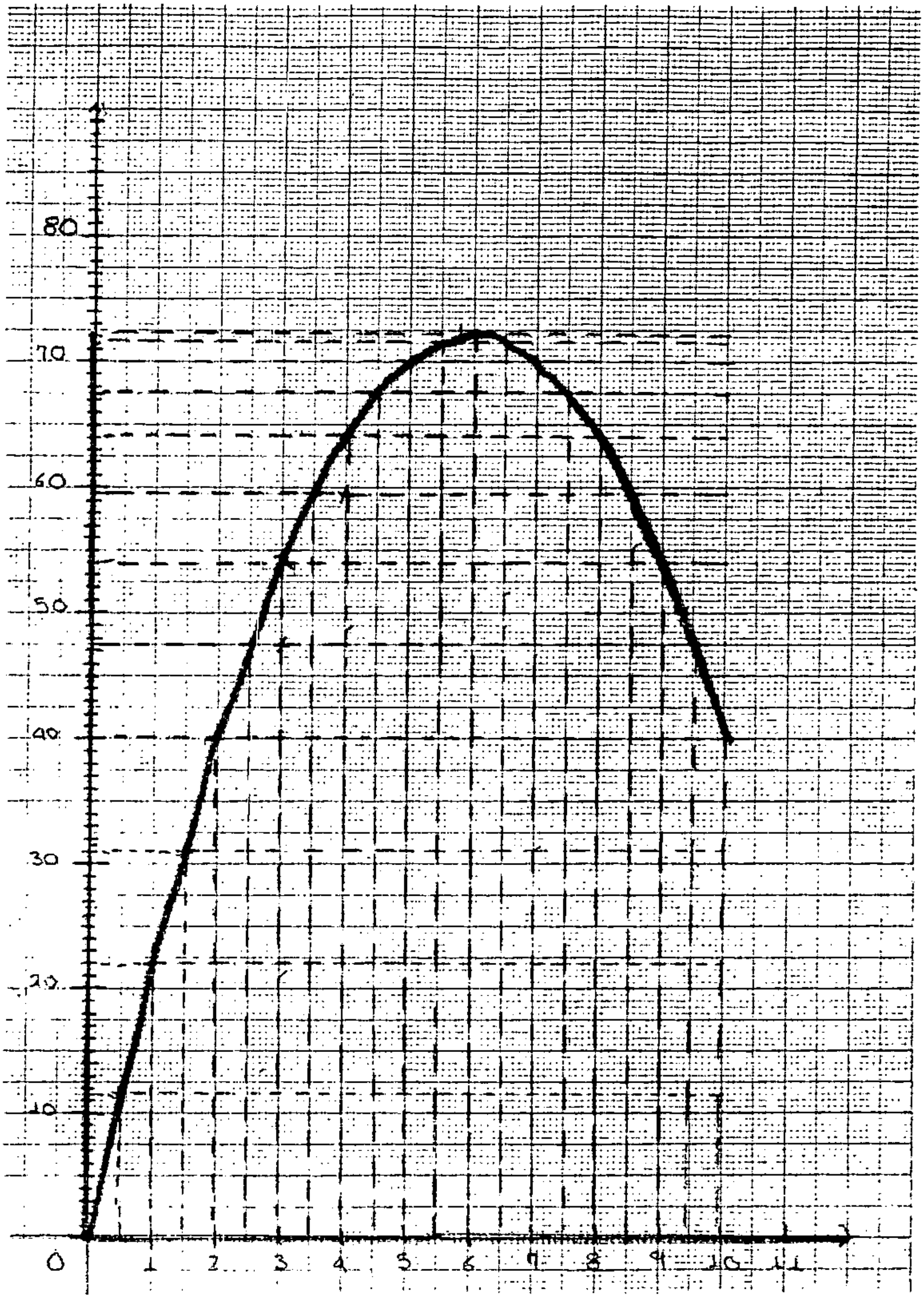
* 0-4.5 Los valores de la F7 se dividen en tres en los cuales aumentan, son estables y disminuyen, estos valores que estamos viendo aumenta su área, cuando su altura es muy pequeña.

5=7 Estos valores se encuentran en la mitad de la tabla ya que no aumentan demasiado, ni disminuyen, estando nivelada, no importa si la altura va de menor a mayor.

8=10 Esta es la última parte de la tabla, y en está parte se puede observar que mientras la altura va aumentando la área va disminuyendo.

Toda esta tabla tiene algo en común que de 0-10, la diferencia entre una altura y otra hay una diferencia de 0.5 que parece muy pequeña, pero que a su vez va ayudando a que el área vaya aumentando.

0-4.5, 8-10: Al observar la tabla de la parte inicial con la tabla de la parte final podemos observar que sus valores son iguales, el porque de esto, es que en la tabla inicial el largo es muy grande y al multiplicarlo por X que es muy pequeño nos da los resultados: 11.5, 22, 31.5, 40, 47.5, 54, 59, 64, 67.5. En cambio la tabla final trabaja de la siguiente manera, mientras el largo disminuye, el X aumenta dando los mismos resultados.



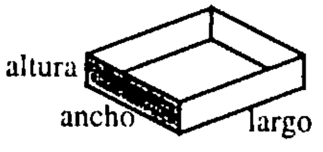
80
70
60
50
40
30
20
10
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11

	ALTURA CAJA	LARGO DE LA CAJA:	AREA DEL LARGO DE LA CAJA.	
0.5	0.5	24-2×0.5 = 23	0.5 × (24-2x) = 11.5	10.5.
	1	24-2×1 = 22	1 × (24-2x) = 22.0	
0.5	1.5	24-2×1.5 = 21	1.5 (24-2x) = 31.5	8.5.
	2	24-2×2 = 20	2 (24-2x) = 40.0	
0.5	2.5	24-2×2.5 = 19	2.5 (24-2x) = 47.5	6.5.
	3	24-2×3 = 18	3 (24-2x) = 54.0	
0.5	3.5	24-2×3.5 = 17	3.5 (24-2x) = 59.5	4.5
	4	24-2×4 = 16	4 (24-2x) = 64.0	
0.5	4.5	24-2×4.5 = 15.	4.5 (24-2x) = 67.5	2.5
	5	24-2×5 = 14	5 (24-2x) = 70.0	
0.5	5.5	24-2×5.5 = 13	5.5 (24-2x) = 71.5	0.5.
	6	24-2×6 = 12	6 (24-2x) = 72.0	
0.5	6.5	24-2×6.5 = 11	6.5 (24-2x) = 71.5	1.5.
	7	24-2×7 = 10	7 (24-2x) = 70.0	
0.5	7.5	24-2×7.5 = 9.	7.5 (24-2x) = 67.5	3.5.
	8	24-2×8 = 8	8 (24-2x) = 64.0	
0.5	8.5	24-2×8.5 = 7	8.5 (24-2x) = 59.5	5.5
	9	24-2×9 = 6	9 (24-2x) = 54.0	
0.5	19.5	24-2×9.5 = 5	9.5 (24-2x) = 47.5	7.5.
	10	24-2.10 = 4.	10. (24-2x) = 40.0	

EVALUACIÓN ACERCA DEL TRABAJO EN FUNCIONES CUADRÁTICAS
SEPTIEMBRE DE 2000

Para responder esta evaluación deben trabajar en grupos de dos estudiantes, disponen de una (1) semana a partir de hoy, y pueden utilizar calculadora. Esta evaluación es una oportunidad para que ustedes demuestren lo que han comprendido a través de la realización de los talleres anteriores. Se espera que usen tablas, gráficas, ecuaciones; que utilicen datos de otras parejas; que hagán conjeturas; que den explicaciones; que examinen casos particulares; es decir, **que hagan todo lo necesario para responder de manera justificada sus respuestas.** Deben entregar un reporte que recoja sus respuestas a las tareas que aquí se plantean y todas las explicaciones y comentarios que consideren necesarios para **demostrar todo lo que han comprendido** acerca del asunto que se está evaluando.

En la evaluación van a continuar trabajando en el mismo contexto, es decir, con las cajas formadas a partir de cortar cuadrados de lado x en cada una de las esquinas de una hoja de papel de 24 cm. de largo, y de 20 cm. de ancho. En esta ocasión van a trabajar con la función que relaciona la medida del lado del cuadrado con la medida del área de una de las caras determinadas por el ancho de la caja. (Nos referimos a la cara sombreada en el dibujo que representa la caja).



Evaluación

1) Si x representa la medida del lado de cualquier cuadrado recortado en cualquiera de las cajas construidas y w representa la medida del área de la cara determinada por el ancho de la caja, escriban una ecuación que les permita calcular w a partir de x.

2) Determinen el conjunto de todos los valores que puede tomar la medida del área de la cara determinada por el ancho de cualquiera de las cajas que es posible construir en el contexto.

3) Utilizando la notación que se emplea para las funciones, en la que se expresa el hecho de que hay una variable de la que depende la función, expresen la función área de la cara determinada por el ancho de la caja y llámenla f_8. Describan algunas características de la expresión.

4) Describan el conjunto de valores que puede tomar la función f_8, teniendo en cuenta la mayor cantidad posible de características.

5) Hagan una gráfica cartesiana de la función f_8 y mencionen todas las características de la función que se pueden ver en dicha gráfica.

6) Si al comparar varias parejas de cajas se encuentra que las alturas difieren en la misma cantidad, ¿será cierto que sus respectivas áreas de una de las caras determinada por el ancho de la caja, también difieren en una misma cantidad?

Nombre: Edward Sleyder Gombo Profesora: Magdalena Olivero

Curso: 10.4

1) $20 - 2x$ = Ancho

x = Altura

Area del Ancho $(20-2x)$

2)

x	y
0	0
1	18
2	32
3	42
4	48
5	50
6	48
7	42
8	2
9	8
10	[illegible]

3) $x - (20-2x) = F8$

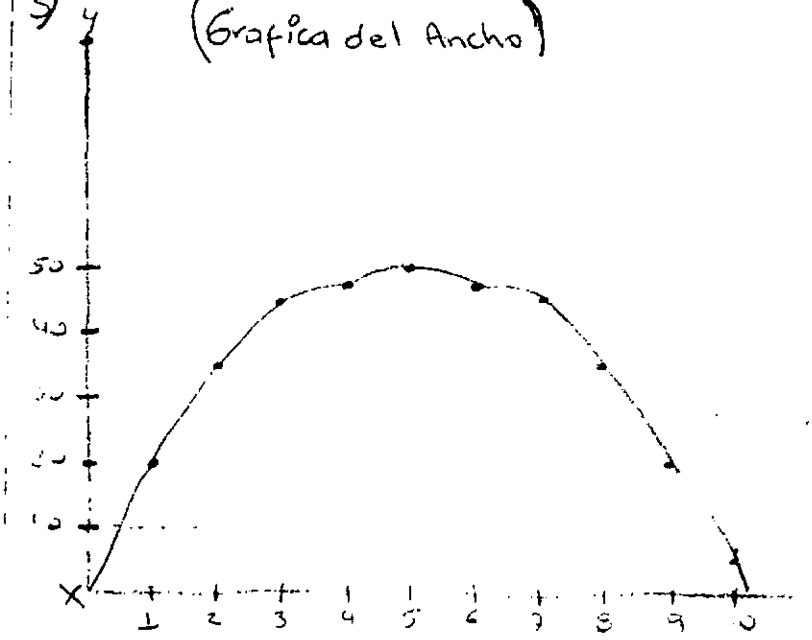
- X Representa la altura
- (20 - 2x diriamos que representa la base
- 20 representa ancho de la hoja
- 2 representa los cuadritos extraidos de la hoja
- Al multiplicar X por la función tenemos como resultado el area de la caja del ancho.

4) la función F8 puede llegar a tener 10 valores va de uno a cinco. va aumentando osea por ejemplo altura 1 ± a 50 cm^2 de 5 hacia abajo

Empieza de nuevo a diferenciar.
Ejemplo

altura 9 cm es = 18 cm²

5) (Grafica del Ancho)



* la grafica resultante es una curva

- del punto 0 al 5, x aumenta. y del 6 al 10 x disminuye formando una curva
- Su punto más alto es 50 y su punto más bajo es cero
- El punto 0 al 5 del eje X aumenta su curva y del punto 5 al 10 del eje X disminuye su curva

6) hay areas que son iguales como cuando la altura por ejemplo es 3 el Area de la cara del Ancho es 42 cm² y cuando la Altura es 7 el area de la cara del Ancho es 42 cm²
el eje X la constante es 1 porque la resta nos lo indica
El eje Y muestra que de 18 hasta 2 va disminuyendo en 4 y desde 2 hasta 18 va aumentando de 4 en 4

- El punto más alto es 50