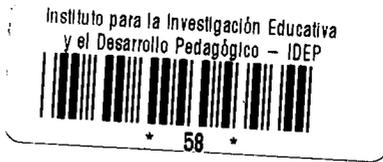


372.7  
L 36e  
6/1

121



**INSTITUTO PARA LA INVESTIGACION EDUCATIVA Y EL DESARROLLO  
PEDAGOGICO - IDEP - COLCIENCIAS - GRUPO DE INVESTIGACION  
INTERDISCIPLINARIA EN PEDAGOGIA DEL LENGUAJE Y LAS  
MATEMATICAS**

**PROYECTO:** CARACTERIZACION DE LOS REQUERIMIENTOS DIDACTICOS  
PARA EL DESARROLLO DE COMPETENCIAS ARGUMENTATIVAS  
EN MATEMATICAS EN EL AULA

**INFORME.** INFORME FINAL ACADEMICO & FINANCIERO

**GRUPO INVESTIGADOR:** GRUPO DE INVESTIGACION INTERDISCIPLINARIA EN  
PEDAGOGIA DEL LENGUAJE Y LAS MATEMATICAS

**INVESTIGADORAS PRINCIPALES:** OLGA LUCIA LEON C  
DORA INES CALDERON

**FECHA:** NOVIEMBRE 17, 2000

Inv. IDEP  
44

80/101/08

482000

## **CONTENIDO DEL INFORME**

- I. GENERALIDADES
- II. DISEÑO DE LA INVESTIGACION
- III. RESULTADOS EN EL CICLO 1
- IV. RESULTADOS EN EL CICLO 2
- V. ESTRATEGIA DE SOCIALIZACION DEL PROYECTO
- VI. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES
- VII. BIBLIOGRAFIA
- VIII. ANEXOS
- IX. INFORME FINANCIERO

**IDEP – COLCIENCIAS - GRUPO DE INVESTIGACION INTERDISCIPLINARIA EN  
PEDAGOGIA DEL LENGUAJE Y LAS MATEMATICAS**

**PROYECTO: CARACTERIZACION DE LOS REQUERIMIENTOS DIDACTICOS  
PARA EL DESARROLLO DE COMPETENCIAS ARGUMENTATIVAS EN  
MATEMATICAS EN EL AULA**

**INFORME FINAL**

GRUPO INVESTIGADOR: OLGA LUCIA LEON CORREDOR  
Msc. Matemáticas

DORA INES CALDERON  
Msc. Lingüística

FECHA: Noviembre 17, 2000

**I. GENERALIDADES**

El presente informe da cuenta de los resultados de la investigación realizada durante la vigencia del proyecto (10 meses). El documento académico aporta información en torno a cuatro aspectos fundamentales: 1) El diseño de la investigación, 2) El proceso de elaboración de los requerimientos, en el marco de la investigación – acción, 3) El papel de los requerimientos en la estructuración del diseño didáctico y su incidencia en el desarrollo de competencias argumentativas en geometría, en los estudiantes observados, y 4) Las formas de socialización del proyecto y su impacto en la comunidad académica.

El primer informe parcial de la investigación reportó el avance teórico elaborado hasta ese momento en torno a: 1) la identificación de aspectos nodales en cada uno de los requerimientos didácticos y su caracterización, 2) los aspectos relacionados con el diseño didáctico y con las estrategias de recolección y análisis de datos y, 3) el desarrollo de eventos de socialización. A continuación, y en aras de facilitar la lectura y comprensión global de la investigación y de sus resultados, se presenta un resumen de la propuesta inicial.

La investigación consideró fundamentalmente la existencia, del problema que hemos dado en denominar "un estado generalizado de incompetencia comunicativa y matemática", tanto en estudiantes como en profesores. Problema que se manifiesta particularmente cuando unos y otros se enfrentan a situaciones que les exigen interpretar y producir: discursos argumentativos y soluciones para problemas matemáticos y validaciones de las mismas, que implican el desarrollo de formas de

razonamiento más elaboradas que las que realizan cotidianamente, en contextos no escolares.

Frente a este problema, el Grupo de investigación consideró, que desde la didáctica y desde la investigación educativa, era necesario generar una reflexión sobre las condiciones y exigencias teóricas y metodológicas que impone el propósito didáctico de desarrollar, en estudiantes de niveles iniciales de universidad, competencias argumentativas en matemáticas. Así, se propuso realizar un proceso de indagación, identificación y caracterización de los elementos que intervienen y que se ponen en juego en la construcción de situaciones didácticas particulares. Para ello, se realizó un proceso de investigación - acción que estructuró un constructo teórico elaborado con base en dos acciones fundamentales: las relaciones establecidas en las reflexiones y discusiones teóricas y los hallazgos obtenidos durante el diseño y aplicación de una propuesta didáctica que surgió como respuesta a la identificación de un estado inicial de desarrollo de competencia comunicativa en matemáticas<sup>1</sup>, del grupo de estudiantes observado.

Como resultado de la investigación, se pretendió responder a preguntas particulares como: 1) ¿De qué naturaleza es la relación que se da entre los componentes epistemológico, comunicativo, cognitivo y socio - cultural en la situación didáctica?, 2) ¿Qué competencias matemáticas desarrolla en los estudiantes la práctica de la interacción argumentativa en situaciones de validación y de demostración de lo geométrico en el aula? y, 3) ¿Cuáles son las condiciones didácticas que garantizan el desarrollo de competencias argumentativas en geometría, en estudiantes de primeros semestres de licenciatura en matemáticas?. Las respuestas a estas preguntas, que se constituyen en los hallazgos de la investigación, se consolidan en los distintos aspectos estructurados y desarrollados en el presente informe.

## II. SOBRE EL DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

El Grupo se planteó como propósito fundamental de la investigación, aportar elementos para el desarrollo de teoría en el campo de la didáctica de las matemáticas. Así, frente al reto puntual que se impuso de caracterizar requerimientos didácticos para el desarrollo de competencias argumentativas en matemáticas, consideró que era necesario realizar un estudio en condiciones convencionales, tanto de orden teórico como metodológico, del contexto didáctico. Desde esta perspectiva, se optó por un tipo de investigación que permitiera la relación directa y dialéctica entre procesos de elaboración teórica y procesos de aula. Así, le eligió, dentro de los métodos de investigación cualitativa, la investigación - acción, por considerarlo como una alternativa metodológica que permite la producción de resultados como efecto de la interacción continua entre

---

<sup>1</sup> Resultado del Proyecto "El papel de la argumentación en las situaciones de validación del conocimiento matemático en el aula". Convenio Colciencias- Universidad del Valle. Realizado por el Grupo Investigador. Vigencia 1999-2000.

procesos de reflexión, observación, diseño, puesta en escena, análisis y teorización de los eventos educativos. La investigación se estructuró de la siguiente manera:

## **A. EL CONTEXTO DEL ESTUDIO**

La población de la investigación estuvo compuesta por 16 estudiantes de segundo semestre de Licenciatura en Matemáticas, de la Universidad Distrital "Francisco José de Caldas". El grupo investigador propuso al Programa una asignatura electiva denominada "Estilos de Razonamiento en Matemáticas" para el primer semestre de 2000; con el fin de garantizar un espacio de aula lo más convencional posible. Se buscó impactar un aula regular, en condiciones normales y con el criterio de formación curricular, con el fin de obtener datos en un contexto regulado institucionalmente, que permitiera procesos de interpretación más concordantes con la situación real del aula de matemáticas.

Dadas las características de "electiva", la asignatura contó con un horario de dos horas semanales los días lunes en la mañana, aunque el Grupo Investigador había solicitado cuatro horas semanales. Para el desarrollo curricular de la asignatura, una de las investigadoras principales (Olga Lucía León, Msc. Matemáticas) actuó como profesora del curso y la otra investigadora (Dora Inés Calderón Msc. Lingüística), como observadora no participante.<sup>2</sup> De igual manera, se contó con el apoyo técnico de un camarógrafo para efectos de la recogida de datos mediante grabaciones de vídeo y de una auxiliar de investigación para la transcripción de datos y el diseño de documentos del proyecto.

Culminado el primer semestre de 2000, se diseñó un segundo momento de trabajo con la población (cuatro estudiantes del grupo inicial), desarrollado durante dos meses y medio (agosto a octubre de 2000), mediante la estrategia del Grupo de Estudio. Esta fase se concibió como el espacio de las entrevistas para la confirmación de conjeturas y como la proyección del desarrollo argumentativo de los estudiantes. El grupo se conformó, informalmente, por el interés de los estudiantes en seguir trabajando sobre la relación pitagórica y colaborar con el desarrollo de la investigación. De ahí que esta etapa de la fase de acción no se realizara en un marco institucional, como sí era el caso de la primera etapa.

## **B. ESTRATEGIA DE ACCION INVESTIGATIVA**

Para el desarrollo del estudio en el marco de la investigación – acción, el Grupo Investigador se formuló las siguientes preguntas:

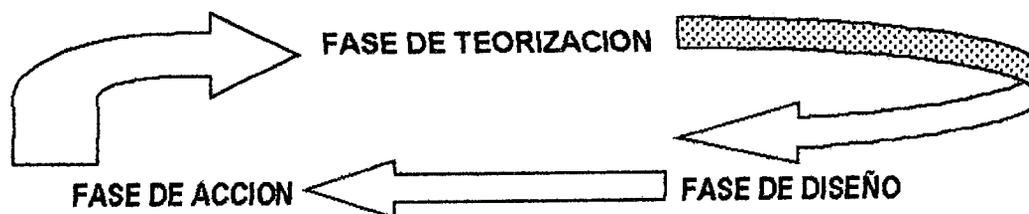
---

<sup>2</sup> En la primera etapa de la investigación, durante cuatro meses, participó un Co-investigador, (Santiago González, Msc. Matemáticas) quien realizó labores de observador no participante en el Ciclo de Acción.

- ¿Metodológicamente qué implica la elaboración de requerimientos didácticos?
- ¿Qué función tienen los requerimientos en el diseño didáctico?
- ¿Cuáles son las unidades y categorías de análisis que permiten realizar un estudio y elaboración de requerimientos, al servicio del desarrollo de competencias argumentativas en geometría?

### 1. Sobre las implicaciones metodológicas de la elaboración de requerimientos didácticos

El Grupo consideró que las implicaciones metodológicas de una acción investigativa tendiente a la elaboración de requerimientos didácticos tenían que ver con tres momentos fundamentales: a) la elaboración de un marco referencial primario sobre requerimientos, constituido por las precisiones teóricas del Grupo a preguntas específicas y por las intuiciones prácticas, derivadas de la experiencia docente del Grupo. Este referente se convertiría en un punto de partida para el diseño didáctico preliminar y para el diseño de instrumentos de observación, que facilitarían la identificación de problemas y cuestionamientos, tanto a los requerimientos como al diseño, b) la puesta en juego y observación y análisis de los requerimientos, a través de un diseño didáctico que propendiera por el desarrollo de competencias argumentativas en geometría. Esta segunda acción garantizaría un espacio para la validación, regulación, evaluación y observación del comportamiento de los requerimientos; es decir, se convertiría en el espacio "aclarador" de la naturaleza y función de tales requerimientos, c) la reestructuración de requerimientos, como efecto de los dos momentos anteriores. Tales momentos generaron un ciclo investigativo del tipo:



Así, el Grupo diseñó una estrategia metodológica, que comprometió dos ciclos y tres fases paralelas. Las fases de la investigación en el primer ciclo estuvieron orientadas a la identificación empírica – analítica de requerimientos didácticos para el desarrollo de competencias argumentativas en matemáticas. En el segundo ciclo, se propendió por una estructuración de relaciones didácticas, a partir de los hallazgos del primer ciclo, a saber:

## ESQUEMA GENERAL DE LA INVESTIGACIÓN

CICLO1: HACIA LA IDENTIFICACIÓN DE REQUERIMIENTOS		CICLO ADYACENTE: Estrategias de regulación
FASE DE TEORIZACIÓN	FASES DE ACCIÓN 1	
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Desarrollo del problema de investigación: Análisis teórico.</li> <li>• Diseño didáctico: Dimensiones cognitivas, comunicativas y epistemológicas de la geometría.</li> <li>• Elaboración del plan general para el proceso investigativo:</li> <li>• Determinación de los focos de investigación.</li> <li>• Inserción en el marco curricular.</li> </ul>	<p>Fase de acción 1:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Argumentación en geometría:</li> <li>• Realización del Plan didáctico detallado.</li> <li>• Diseño de la Programación del plan.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Identificación y acción sobre problemas de control de cuestiones disciplinarias y actitudinales.</li> </ul>
	<p>Fase de acción 2:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Validación y demostración en geometría:</li> <li>• Realización del Plan didáctico detallado.</li> <li>• Diseño de la Programación.</li> <li>• Implementación Fase de Acción 1.</li> <li>• Observación de la implementación y resultados.</li> <li>• Reflexión y toma de decisiones.</li> </ul>	
CICLO 2: HACIA LA ESTRUCTURACION DE RELACIONES DIDACTICAS.		
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Revisión del propósito inicial.</li> <li>• Reajuste del plan general.</li> <li>• Reajuste fase de acción 2.</li> <li>• Implementación de la fase de acción 2.</li> <li>• Observaciones de la implementación y resultados.</li> <li>• Reflexión y toma de decisiones.</li> </ul>		

### a) Fase de Teorización:

O fase de discusión y elaboración de los referentes teóricos. Esta fase orientó el diseño didáctico, permitiendo la identificación de puntos focales en cada requerimiento y la posibilidad de relacionar estos puntos para diseñar una actividad de aula.

El problema de la investigación se consolidó como la identificación y caracterización de requerimientos didácticos para el desarrollo de competencias argumentativas de tipo geométrico, en estudiantes universitarios de matemáticas, de niveles iniciales. Esto, por cuanto se consideró que el desarrollo de competencias constituye uno de los aspectos fundamentales de la formación escolar. Además, porque es evidente que, si bien se ha identificado la necesidad de desarrollar competencias en los estudiantes, también es un hecho que aún no se consolida una noción específica de

competencia matemática y tampoco se ha teorizado sobre las implicaciones didácticas para el desarrollo de competencias en los estudiantes.

En ese sentido, el Grupo tuvo como punto de partida la estructuración de la triada didáctica (contenido- estudiantes- profesor), como un aporte de la teoría de las situaciones didácticas (Brousseau, 1988, Douady, 1996). Esta estructura permitió establecer, comprender y teorizar las relaciones de tipo didáctico que configuran las interacciones entre los tres componentes del triángulo didáctico: Contenido - Estudiante - Profesor. No obstante, a partir de las reflexiones del Grupo, se consideró que la estructura de relaciones didácticas en el contexto de la argumentación en el aula, exige tener en cuenta la interacción entre pares (estudiantes) como otra de las relaciones fundamentales. Se modificó así el triángulo didáctico por el tetraedro didáctico.



Así, desde el punto de vista de la estructura de la interacción en el aula, se realizaron las siguientes consideraciones:

- (1) Que cada uno de los cuatro componentes es indispensable para la estructuración de la interacción didáctica, cumple un rol fundamental en el proceso de aula y permite un análisis de condiciones y categorías de manera individual, pero en función de los demás componentes.
- (2) Que las relaciones que se tejen entre los componentes de la estructura generan el saber propio de la didáctica, para la comprensión de la naturaleza de este espacio de interacciones sociales.

- (3) De la comprensión inicial de los anteriores aspectos, inicialmente se identificaron como elementos estructurales generados de las relaciones didácticas, tres requerimientos didácticos: el **epistemológico** asociado a la relación contenido- profesor; el **cognitivo** asociado a la relación contenido- desarrollo de conocimientos matemáticos en los estudiantes; y, el **comunicativo**, asociado a las relaciones de interacción entre estudiantes - contenido y estudiantes - profesor.

Así, uno de los aspectos fundamentales a desarrollar en el proyecto lo constituyó la explicitación de cada uno de los requerimientos, tanto teóricamente como en su caracterización particular para la situación argumentativa en geometría, que se pretendió construir en el proyecto.

b) Fase de acción:

O de trabajo en el aula, que comprometió dos momentos de la fase: la de acción 1 o de diseño, y la de acción 2 o de implementación para la validación del diseño. Se realizó bajo una estructuración didáctica paulatina: Elaboración de un diseño didáctico inicial fundamentado en los focos identificados teóricamente, implementación y observación del diseño y reestructuración y aplicación en la clase. El inicio del desarrollo de la fase de acción tuvo como presupuesto básico que el diseño didáctico se orientaba a la construcción de una situación argumentativa en matemáticas que propendiera por la realización efectiva de las relaciones iniciales determinadas en los requerimientos identificados.

• Análisis de la acción en el aula:

Se desarrolló desde dos estilos de análisis: Durante el tiempo de ejecución se realizó un tipo de análisis que permitió formular unas primeras conjeturas y tomar decisiones para el diseño paulatino. Finalizada la aplicación se realizó un análisis que permitió el diseño del Ciclo 2. En esta instancia del trabajo se prepararon instrumentos para la recolección de datos y el esquema de observación, como resultado del análisis didáctico.

Las tres instancias del diseño incluyeron el aporte de las permanentes discusiones teóricas en las actividades de asesoría y de formación teórica que se desarrolla en el seno de los proyectos doctorales de cada investigadora, en los que se inscribe este proyecto.

c) Ciclo adyacente:

Este ciclo se concibió como el espacio de regulación del proceso investigativo. Fundamentalmente se consideró que este espacio lo constituirían dos instancias: la asesoría y los eventos de socialización del proyecto. Esto, por cuanto la asesoría se asumió en el proyecto como el momento de discusión del proceso teórico y

metodológico realizado por parte del equipo investigador y los asesores del proyecto en las áreas de lenguaje y de matemáticas, en función de una validación parcial del proceso. Por su parte, los eventos de socialización se asumieron como la posibilidad de generar un proceso de reflexión teórica y metodológica en la temática del proyecto, con un grupo de docentes e investigadores más amplio que el equipo investigador. Esa actividad, en función de construir un espacio de reflexión y validación de las conjeturas alcanzadas por el grupo investigador.

Con base en los anteriores presupuestos, se consideró una asesoría permanente tanto en el campo del lenguaje como en el de las matemáticas, con los asesores vinculados al proyecto. También se diseñó un plan de asesorías parciales con expertos invitados en las dos áreas, a los eventos de socialización. Complementariamente, se contactaron expertos nacionales (en algunos casos profesores del Doctorado en Educación), como interlocutores para los eventos de socialización y para el proyecto. En el apartado sobre el avance de los eventos de socialización se describe la evolución de esta actividad.

## **2. Sobre la función que cumplen los requerimientos en el diseño didáctico**

El Grupo se respondió que la función de los requerimientos es ser el referente orientador de tipo epistemológico, para el diseño didáctico, en sus distintos componentes. Así, su función es proporcionar elementos teóricos y metodológicos para *aclara*r preguntas de los distintos órdenes que se involucran en las relaciones didácticas. En ese sentido, los requerimientos, siendo una base epistemológica, necesitan ser particulares para los distintos propósitos de aprendizaje en el aula. Esta respuesta se extiende en los resultados obtenidos en el presente estudio.

## **3. Sobre las unidades y categorías de análisis**

El Grupo consideró unas categorías presentes en el estudio, como las categorías conceptuales básicas que permiten dar razón de la estructuración de requerimientos y unas unidades de datos que permitieron observar la relación entre requerimientos y diseño didáctico y entre requerimientos, diseño didáctico y desarrollo de competencias argumentativas en geometría, a saber:

CATEGORÍAS GENERALES DE LA INVESTIGACIÓN			
REQUERIMIENTO DIDÁCTICO	DISEÑO DIDÁCTICO	TAREA	ACCIÓN
Referente teórico que da razón de un componente de la estructura de las relaciones didácticas y que da elementos para la estructuración de relaciones entre todos los componentes, a propósito de las relaciones didácticas.	Estructura de una secuencia didáctica establecida a través de un programa particular. Explicita opciones epistemológicas, comunicativas y cognitivas, en el contexto de las relaciones didácticas.	Diseño parcial de momentos del aprendizaje, generado según propósitos de aprendizaje en el aula. Constituye las etapas de la secuencia didáctica y hace evidente el discurso instruccional y el regulativo.	Conjunto de movimientos cognitivo-comunicativos para el aprendizaje, generados, por la tarea, en los sujetos del aprendizaje, en el marco del desarrollo de una secuencia didáctica.

Las anteriores categorías permitieron establecer y unidades y categorías de análisis para el estudio de los dos contextos de la acción investigativa e investigada, tendientes a dar razón de los resultados en cada uno de los dos espacios construidos para la elaboración de los requerimientos, a saber:

ACCIÓN DE ELABORACIÓN TEÓRICA		ACCIÓN DIDÁCTICA	
Unidad de datos global	Unidades y categorías de análisis	Unidad de datos global	Unidades y categorías de análisis
Reunión de Grupo Investigador	<u>Unidades:</u> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Preguntas.</li> <li>• Acuerdos</li> <li>• Efecto en el diseño de aula</li> </ul> <u>Categorías:</u> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Sentido</li> <li>• Trama argumentativa</li> <li>• Trama de conexión lógica encadenamiento</li> </ul>	Tarea	<u>Unidades:</u> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Etapas</li> <li>• Momentos</li> <li>• Actos</li> </ul> <u>Categorías:</u> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Sentido</li> <li>• Trama argumentativa</li> <li>• Trama de conexión lógica</li> </ul>

Así, las dos acciones diseñadas para la elaboración de requerimientos, a la vez, fueron como objeto de investigación, para la comprensión de los aportes que ofreció cada una de ellas, al propósito global de caracterizar los requerimientos. De esta manera, la acción de elaboración teórica, que hace referencia a la fase de Teorización descrita anteriormente, fue estudiada a través del análisis de las Reuniones del Grupo (como unidad de datos). Se llevó a cabo un seguimiento del proceso de elaboración de cada uno de los requerimientos (como macro - categoría), mediante el rastreo de las preguntas que se formuló el Grupo en diversos momentos, y de los acuerdos a que llegó en la discusión. Los acuerdos alimentaron la construcción paulatina y definitiva de los requerimientos y recibieron el impacto que tuvo este proceso en la elaboración y reelaboración del diseño parcial y secuencial de las tareas. Las categorías de análisis en este estudio fueron

las provenientes del diseño general: sentido, trama argumentativa y trama de conexión lógica.

Por su parte, *la acción didáctica*, que hace parte de la Fase de Acción descrita más arriba, se observó y estudió mediante la unidad de análisis Tarea, teniendo en cuenta que es el objeto didáctico que compromete todas las opciones y decisiones del diseño y que potencia acciones en los estudiantes para el desarrollo de competencias argumentativas en geometría. Por esta razón, las unidades de análisis diseñadas para el estudio de la tarea, pretendieron atender a un análisis de procesos de interacción que dieran cuenta de los procesos cognitivos y comunicativos de los estudiantes:

- Las etapas de la tarea, corresponden a los tipos de interacción propuestos didácticamente para el desarrollo de la tarea: etapa de trabajo individual, etapa de trabajo de pareja, etapa de plenaria, etapa de institucionalización.
- Los momentos, corresponden a los pasos (cognitivos) por los que pasa el desarrollo de la tarea (solucionar un problema): interpretación, elaboración de una solución, estructuración de una respuesta, validación.
- Los actos, hacen alusión a la acción intencionada cognitiva y discursivamente, que tiene como efecto un tipo de enunciado. Se identificaron actos de solución y de no - solución y actos argumentativos y no argumentativos.

Las categorías de análisis, en esta fase, son las mismas que se estudian en la fase teórica. Para una comprensión global del diseño investigativo, a continuación se describen los instrumentos para la recolección y análisis de datos empleados en la investigación:

#### DESCRIPCION DEL PROCESO METODOLOGICO EN GENERAL

##### DESCRIPCION DE LAS HERRAMIENTAS METODOLOGICAS

HERRAMIENTA METODOLOGICA	TIPO	DATO OBTENIDO	PROCESO OBSERVADO
PROTOCOLOS	<ul style="list-style-type: none"> <li>• De observaciones de clases.</li> <li>• De actas de reunión del Grupo.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Información contextual, complementaria a las grabaciones.</li> <li>• Impresiones preliminares del observador, sobre el desarrollo de la sesión.</li> <li>• Horizonte discursivo sobre las elaboraciones parciales del Grupo.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Interacciones entre requerimientos.</li> <li>• Impacto de los requerimientos</li> <li>• Desarrollos argumentativos</li> </ul>

DESCRIPCION DEL PROCESO METODOLOGICO EN GENERAL

DESCRIPCION DE LAS HERRAMIENTAS METODOLOGICAS

HERRAMIENTA METODOLOGICA	TIPO	DATO OBTENIDO	PROCESO OBSERVADO
ENTREVISTAS	<ul style="list-style-type: none"> <li>Entrevistas no estructuradas, realizadas a estudiantes, al final de tareas. El criterio es: corroborar conjeturas.</li> <li>Entrevista no estructurada, realizada al profesor, al final de cada sesión de clase. El criterio es: evaluar sesión y formular conjeturas.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Respuestas para la confirmación de conjeturas.</li> <li>Impresiones sobre el logro de propósitos de la tarea.</li> <li>Identificación de bloqueos.</li> <li>Formulación de conjeturas.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Desarrollo teórico y metodológico.</li> <li>Desarrollo de competencias argumentativas</li> </ul>
RECOLECCION DE REGISTROS ESCRITOS	<ul style="list-style-type: none"> <li>Soluciones escritas elaboradas en cada fase de la actividad de aula</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Soluciones elaboradas</li> <li>Variación de soluciones</li> <li>Nivel de estructuración de argumentos escritos.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Desarrollo argumentativo de soluciones</li> </ul>
GRABACIONES	<p><u>En audio:</u></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>A parejas de estudiantes, durante la confrontación de resultados individuales.</li> </ul> <p><u>En video:</u></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>A parejas y a plenarias de grupo general.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Secuencias discursivas y argumentativas.</li> <li>Esquemas de validación</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Proceso argumentativo</li> <li>Proceso de validación</li> </ul>

### III. RESULTADOS DEL PRIMER CICLO DE LA INVESTIGACIÓN: LOS REQUERIMIENTOS AL SERVICIO DEL DISEÑO DIDÁCTICO

En este apartado se exponen tres tipos de resultados: a) de la fase teórica, b) de la fase de acción en el aula y c) de "el ciclo adyacente". Para el primero se produjo el referente teórico sobre los requerimientos didácticos identificados, para el desarrollo de competencias argumentativas en geometría. Para el segundo resultado se produjo el diseño de la secuencia didáctica de base y del programa de la asignatura "Estilos de razonamiento en matemáticas". Para el tercero, se generó un consolidado de aspectos analizados por el Grupo, que proyectaron el Ciclo 2 de la investigación. Estos tres productos tuvieron como base unas consideraciones de tipo didáctico que permitieron su estructuración e iluminaron su posterior análisis. A continuación se presenta estos resultados.

#### A. CONSIDERACIONES DE BASE PARA EL DISEÑO DIDÁCTICO

Las consideraciones didácticas iniciales se jugaron en dos sentidos: en la comprensión de una epistemis para la categoría *requerimiento didáctico* y, en la explicitación de un referente básico para la noción *de competencia argumentativa en matemáticas*. El establecimiento de relaciones entre los dos referentes de base, orientó el desarrollo de las acciones teórica, de la acción en el aula y de los análisis global y parcial.

##### 1. Los requerimientos didácticos como un imperativo en el diseño didáctico

La preocupación por los denominados "requerimientos didácticos para el desarrollo de competencias argumentativas en geometría" surge de la experiencia del Grupo de investigación, en dos niveles:

a) Desde la experiencia como docentes:

Esto, en tanto el interés por desarrollar competencias argumentativas en los estudiantes de matemáticas, ha exigido una reflexión profunda y sistemática en torno a las condiciones didácticas que impone este propósito didáctico. Según se ha podido observar, este propósito de aprendizaje, le exige al docente tratar, de cierta manera, los distintos aspectos que se involucran en las relaciones didácticas: el saber escolar (como un saber argumentado y susceptible de argumentarse), los estudiantes (como sujetos pueden realizar procesos argumentativos), el profesor (como un sujeto que propicia y mantiene situaciones argumentativas en el aula) y, el contexto mismo del aula (como un espacio de interacciones didácticas de tipo argumentativo). Esto con el fin de obtener diseños de aula más efectivos para un propósito tan particular como el que aquí nos ocupa.

b) Desde la experiencia investigativa:

En el mismo nivel de los intereses didácticos anteriores, pero desde el contexto de la investigación educativa, se consideró que las actividades de: reflexión del docente en torno a los aspectos constitutivos de la relación didáctica y la elaboración y puesta en escena de diseños de aula necesitan ser observadas, descritas, sistematizadas e interpretadas. Esto, en aras de lograr una comprensión profunda, tanto de los elementos que constituyen el contexto didáctico, como de la naturaleza de las relaciones entre estos elementos y de sus efectos en el desarrollo de competencias argumentativas en los estudiantes. El resultado de esta actividad es la construcción de una teoría para el docente que le sirva como referente y como herramienta para la elaboración, puesta en marcha y evaluación de diseños de aula.

Desde esta perspectiva, el punto de partida del presente estudio fue la consideración de la existencia de elementos estructurales que constituyen el marco referencial del saber propio de la didáctica. Tales elementos estructurales han sido denominados aquí como "requerimientos didácticos", desde dos criterios fundamentales: i) Se convierten en la base epistemológica del saber propio de la didáctica, puesto que tanto su existencia como sus relaciones son inherentes a las relaciones didácticas y dan razón del contexto escolar. Desde este punto de vista, se obtiene el carácter de *requerimiento*, en tanto que son factores de obligada reflexión para el docente y para el investigador educativo, si pretende hacer una mirada integral del contexto escolar. ii) En contextos particulares del proceso enseñanza – aprendizaje, tales requerimientos necesariamente adquieren especificidades que se explicitan en el diseño didáctico y que, a la vez, lo sustentan, para el desarrollo de los propósitos de aprendizaje.

Es decir, que si bien, en términos generales, existen requerimientos básicos, en los campos específicos del saber escolar, tales requerimientos adquieren matices particulares en concordancia con las condiciones impuestas por un tipo de saber, por una determinada población escolar y por unos propósitos curriculares puntuales.

Desde esta perspectiva, se identificaron, inicialmente, tres requerimientos didácticos básicos que se corresponden con tres aspectos involucrados en el contexto de las relaciones didácticas y que estructuran, de manera particular, el saber didáctico, a saber: requerimiento epistemológico, requerimiento cognitivo y requerimiento comunicativo.

- **El requerimiento epistemológico:**

Se trata del componente didáctico constituido por el referente teórico puesto en juego en una situación didáctica. Es decir, responde al objeto del proceso de enseñanza y de aprendizaje, concebido curricularmente (estructuración y secuenciación en el contexto de un programa de formación particular).

Este objeto (campo de saber) involucra aspectos relacionados con: i) Su dimensión histórica: perspectivas filosóficas y principios de validación y de argumentación que han orientado los procesos de elaboración de este saber, al interior de una disciplina. ii) Su dimensión disciplinar: las redes conceptuales que se tejen y que estructuran ese saber. iii) Su dimensión epistémica: los procesos semánticos, lógicos y discursivos involucrados en el desarrollo de este saber en los sujetos.

En el marco de las relaciones didácticas, por su naturaleza, el requerimiento epistemológico establece con mayor fuerza la relación contenido – profesor – contenido- estudiantes, dado que de esta relación surgen las formas de organización del contenido y el diseño de tareas y de formas de evaluación.

- **El requerimiento cognitivo:**

Es el componente didáctico que construye teóricamente un sujeto del aprendizaje. Da razón del quién del aprendizaje; es decir, concibe un sujeto epistémico desde dos perspectivas de análisis: i) desde las condiciones epistémicas impuestas por el requerimiento epistemológico y ii) desde las condiciones de desarrollo cognitivo, discursivo, volitivo y socio- cultural del sujeto del aprendizaje.

En el marco de las relaciones didácticas, el requerimiento cognitivo establece con mayor preeminencia la relación contenido- desarrollo de conocimiento matemático en los estudiantes, contenido –desarrollo de conocimiento didáctico en el profesor, dado que se ocupa del análisis de la comprensión del contenido y de sus factores asociados: seguimiento de procesos, identificación de obstáculos, diseño de criterios para la evaluación del desarrollo de competencias, entre otros.

- **El requerimiento comunicativo:**

Es el componente didáctico que estructura la interacción discursiva propuesta para el contexto del aula, en una situación particular de aprendizaje, a través del género discursivo pedagógico. De ahí que este requerimiento involucre: i) la dimensión discursiva del campo del saber puesto en juego (por ejemplo, de la geometría euclidiana), sus formas particulares de significar y de comunicar. ii) la dimensión discursiva del aula: las posiciones discursivas de profesor y de estudiante y sus relaciones de fuerza (que se explicitan mediante el discurso instruccional y el regulativo), que generan formas especiales y prototípicas de comunicar como la exposición y la argumentación, entre otras.

En este sentido, el requerimiento comunicativo da razón del cómo de la interacción entre estudiantes- contenido y estudiantes- profesor y propicia el análisis de la interacción didáctica: su efectividad e impacto en el desarrollo de los procesos de elaboración de conocimientos y en el logro de propósitos de aprendizaje diseñados curricularmente.

## 2. Una primera noción de Competencia argumentativa en matemáticas

Como resultado de la consideración de los tres requerimientos iniciales el proyecto identificó, en primera instancia, como **componentes de la competencia argumentativa** en matemáticas tres factores fundamentales: a) la identificación, interpretación y producción de sentidos en textos matemáticos; b) la interpretación y producción de tramas de encadenamiento en matemáticas; y c) la interpretación y producción de tramas argumentativas. A continuación se describe el sentido asignado inicialmente por el grupo a las categorías que componen la competencia argumentativa en matemáticas y que permitió un desarrollo teórico de cada categoría, en función de la explicitación de los denominados requerimientos didácticos y a propósito del diseño didáctico propuesto en el estudio.

### a) Sentido:

Se comprende en este estudio como la propuesta de significación elaborada por un sujeto (individual o colectivo) para un tema o una situación particular. La postulación de un sentido exige establecer relaciones de tipo semántico, semiótico y pragmático.

### b) Trama de encadenamiento:

Tipo de conexión argumentativa que se establece para dar razón de un esquema de justificación.

### c) Trama argumentativa:

Producción discursiva que teje relaciones de sentido bajo el esquema de la justificación.

## **B. PRIMERA FASE DE TEORIZACION LOS REQUERIMIENTOS DIDACTICOS PARA EL DESARROLLO DE COMPETENCIAS ARGUMENTATIVAS EN GEOMETRIA**

La descripción general de los requerimientos didácticos, permitió al Grupo avanzar en la elaboración de un primer referente teórico para cada uno de los requerimientos, en la perspectiva del objetivo didáctico propuesto: el desarrollo de competencias argumentativas en geometría. Para efectos del presente informe, la primera elaboración de requerimientos se anexa a este documento (anexo No 1), en tanto que ya fue presentado en el primer avance de esta investigación.

### **C. PRIMERA FASE DE ACCIÓN: LA SECUENCIA DIDÁCTICA INICIAL ¿CÓMO SE JUGARON LOS REQUERIMIENTOS PARA EL DESARROLLO DE COMPETENCIAS ARGUMENTATIVAS EN GEOMETRÍA?**

Como resultado de esta fase, se realizó la elaboración de la secuencia didáctica general y del programa para la asignatura "Estilos de razonamiento en matemáticas". Desde el punto de vista del avance en la elaboración de los requerimientos, es necesario recordar que el diseño didáctico se convirtió en el espacio para la validación de conjeturas teóricas. En ese sentido, se propone la lectura de la secuencia didáctica como una primera puesta en juego de los requerimientos didácticos.

Por otra parte, y desde los propósitos de la investigación, el Grupo consideró que todo el proceso realizado se constituye en el diseño y puesta en escena de una situación argumentativa para el desarrollo de competencias argumentativas en geometría.

El diseño de la secuencia didáctica inicial tuvo como punto de partida dos aspectos fundamentales: un antecedente de acercamiento al grupo investigado y el referente teórico de los requerimientos. A continuación se describe el resultado de la observación preliminar, en tanto que permitieron prever aspectos relacionados con concepciones sobre lo matemático y sobre formas y sus condiciones comunicativas de lo matemático en el aula.

#### **1. Los resultados de la observación previa del grupo investigado**

Durante el segundo semestre de 1999, el Grupo investigador realizó una observación<sup>3</sup>, a un grupo de estudiantes de la clase de "Matemáticas básicas" de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Distrital; grupo que, en su mayoría, pasó al curso de "Estilos de razonamiento en matemáticas, propuesto por las investigadoras para el desarrollo del presente proyecto.

La metodología de la clase observada fue considerada por la profesora, como argumentativa. De ahí que se considerara como un espacio importante para la caracterización de procesos comunicativos de lo matemático en el aula; a la vez, como un referente importante para el conocimiento del estado de desarrollo argumentativo de los estudiantes.

Los resultados de esta observación permitieron identificar, en términos generales, estructuras de la interacción de los estudiantes en el proceso de consensuar soluciones para problemas, en pequeños grupos. Estas estructuras estuvieron

<sup>3</sup> En el marco del proyecto "El papel de la argumentación en las situaciones de validación del conocimiento matemático en el aula". Convenio Colciencias – Universidad del Valle, realizado por el mismo Grupo investigador en la vigencia 1999- 2000.

marcadas fundamentalmente por la estructura de la tarea; de tal manera que los estudiantes seguían básicamente los pasos de: leer soluciones individuales; elegir la mejor solución, algunas veces con criterios de pertinencia, otras de conveniencia; elaborar una sola solución, completando, repitiendo, manteniendo un aspecto importante, etc., pero con la intención de responder a lo solicitado en el taller.

Sobre este aspecto, la estructura de la interacción se realizó mediante procesos de acuerdos, ilaciones y resúmenes, para la elaboración discursiva de la solución. Se observó un predominio del consenso por mayoría, sobre el consenso por construcción colectiva. En este sentido, se realizaron acuerdos bajo el criterio de "lo que más se dice" o "lo que todos decimos"<sup>4</sup>. Hecho este que permitió concluir que los estudiantes, en términos generales, realizaron procesos poco elaborados para la obtención y argumentación colectiva de soluciones. Se concluyó también que circulaba una idea de argumentación relacionada con "que todos puedan hablar". En concordancia, la situación de debate, era más una situación de diálogo para dar a conocer lo que "yo pienso". Como resultado, se optaba por la elaboración escrita de la solución, teniendo en cuenta todas las opiniones, para entregar a la profesora. Obteniendo así, una sola voz discursiva, más por el criterio de conveniencia que por el de convicción. Por otra parte, asociados a estos comportamientos discursivos, se identificaron roles discursivos<sup>5</sup> predominantes como:

a) El moderador:

Inicia la sesión, asume la voz institucional, toma la vocería para orientar el trabajo de grupo (formula las preguntas del taller y anima la participación de los otros). Establece conexiones entre ideas; sintetiza; llama al orden (regula las interacciones); sanciona, llama a la textualización; recupera ideas; mantiene la consciencia del discurso público. Generalmente, este rol, es desempeñado por el líder del grupo.

b) El colaborador:

Apoya las ideas de otros; completa ideas y repite palabras; pregunta; se interesa por el proceso grupal; concilia disputas; ayuda a explicitar las ideas del otro; recupera lo dicho anteriormente.

c) El consensuador:

Llama a la justificación y a la toma de posición; llama al acuerdo; textualiza; es la voz colectiva del consenso; pone pautas para ponerse de acuerdo, mediante la regla de cortesía: "¿puede ser?", "¿no les parece?, etc.).

<sup>4</sup> Ver resultados del Proyecto "El papel de la argumentación en las situaciones de validación del conocimiento matemático en el aula".

<sup>5</sup> Esta tipología hace parte de los resultados obtenidos en la investigación referenciada en las anteriores

d) El sancionador:

Valora positiva o negativamente actitudes, respuestas, interacciones o significados; llama la atención sobre los positivo o no de los acuerdos o de los argumentos que se van consensuando.

e) El reflexivo:

Cuestiona sentidos y relaciones y efectos para la tarea; hace llamados al análisis de argumentos o de razones, de su pertinencia y de su conveniencia.

f) El textualizador:

Desarrolla la conciencia y la necesidad del escrito.

## **2. Operacionalización de los requerimientos en el primer diseño de la secuencia didáctica**

El primer paso del diseño consistió en la estructuración de la secuencia didáctica, a partir de los siguientes elementos:

- a) Identificación del contexto escolar: Licenciatura en matemáticas de una institución pública. Curso de Estilos de Razonamiento en Matemáticas de segundo semestre académico, asumida como materia electiva, para su inserción en el marco curricular de la carrera. Se planteó una secuencia de 16 sesiones de clase de dos horas cada una, y se proyectó un total de seis tareas.
- b) Identificación del objeto curricular: La relación pitagórica y sus contextos geométrico y algebraico.
- c) Identificación de propósitos de aprendizaje para la asignatura: Las asignatura pretendían fundamentalmente: i) elaboración de sentido para la relación pitagórica desde el contexto euclidiano, ii) elaboración de tramas argumentativas para la relación pitagórica en el contexto euclidiano, iii) desarrollo de procesos inferenciales en el campo geométrico; iv) aproximación a la comprensión de la relación pitagórica en el contexto poscartesiano.
- d) Identificación del impacto de los requerimientos en el diseño didáctico: Los requerimientos considerados para el diseño son el cognitivo, el epistemológico y el comunicativo. Establecer vínculos entre estos requerimientos para el diseño de actividades de aula, permitió la caracterización de dos relaciones fundamentales: la relación epistemológico - cognitivo que establece la jerarquía de los contenidos y la relación epistemológico - comunicativo que establece la jerarquía de las acciones y reglas de acción que orientan las tareas. Las

- **Una organización de las interacciones:**

Estudiante - estudiante y profesor - estudiante, mediada por la estructura de la tarea: solución individual, solución de parejas, solución colectiva e institucionalización.

- **La determinación de un juego de roles:**

Para el profesor y para los estudiantes, en relación con el contenido. Entre el estudiante y el contenido no se determinó la búsqueda de una respuesta única a las actividades propuestas. Se consideró más bien, que el estudiante está en situación de elaboración de sentido con respecto al contenido. El profesor también está en situación de elaboración de sentido, pero más desde el punto de vista didáctico. Así, la elaboración de sentido entre estudiantes y profesor, con respecto al contenido es de tipo colectivo.

- **Un contrato didáctico:**

Fundamentado en la conciencia de producción colectiva de conocimiento, hecho que implica la interacción con conocimiento ya elaborado y una actitud heurística colectiva con los procesos de solución de problemas.

A continuación se presenta la estructura inicial de secuencia de actividades diseñada con base en los anteriores presupuestos y relaciones didácticas establecidas para el proyecto.

### ESTRUCTURA INICIAL DE LA SECUENCIA DE ACTIVIDADES

REQUERIMIENTO	ACTIVIDAD 1	ACTIVIDAD 2	ACTIVIDAD 3
<b>COGNITIVO</b>			
Registro	Figural	Figural	Figural algebraico
Inferencia	Abductiva	Abductiva	Abductiva
Proceso semántico	Elaboración de la relación pitagórica.	Elaboración de la relación pitagórica.	Justificación y contextualización de la relación pitagórica.
<b>EPISTEMOLOGICO</b>			
Sentido	Areas	Areas	Areas
Relaciones de apoyo	Angulo recto Congruencia de figuras Relaciones de paralelismo	Angulo recto Congruencia de figuras Relaciones de paralelismo	Angulo recto Congruencia de figuras Relaciones de paralelismo
<b>COMUNICATIVO</b>			
Tipo de discurso a producir	Producción de discurso justificativo	Regulación de estructura de producción	Regulación de estructura de producción
Tipo de justificación	Emisión de razones para convencer	Elaboración de relaciones de apoyo	Elaboración de relaciones de apoyo

REQUERIMIENTO	ACTIVIDAD 1	ACTIVIDAD 2	ACTIVIDAD 3
ROL DEL PROFESOR			
Relación con el contenido	Garantizar la producción de una relación	Controlar y orientar las manifestaciones de relaciones de apoyo	Regulación de sentido construido
Relación con los estudiantes	Controlar la producción individual y de pareja	Centrar producción discursiva entre estudiantes	Regulación y orientación de procesos argumentativos
ROL DEL ESTUDIANTE			
Relación con el contenido	Producir una relación justificada	Estructurar tramas argumentativas	Interpretar y producir tramas argumentativas
Relación con el contexto	Producir una relación consensuada	Manifiestar actitud argumentativa	Desarrollar actitud argumentativa

REQUERIMIENTO	ACTIVIDAD 4	ACTIVIDAD 5	ACTIVIDAD 6
COGNITIVO			
Registro	Figural algebraico	Figural algebraico	Figural algebraico
Inferencia	Abductiva Inductiva	Deductiva Inductiva	Abductiva Deductiva Inductiva
Proceso semántico	Elaboración de la relación pitagórica	Justificación de la relación pitagórica	Elaboración de la generalización y recontextualización de la relación pitagórica
EPISTEMOLOGICO			
Sentido	Áreas	Áreas	Áreas
Relaciones de apoyo	Trama de semejanza Angulo recto Proporcionalidad	Angulo recto Perpendicularidad Semejanza Contexto Libro VI de Euclides	Triángulo rectángulo como operador para las áreas Contexto Libro I, II y VI de Euclides
COMUNICATIVO			
Tipo de discurso a producir	Argumentativo para una solución colectiva	Argumentativo para una solución colectiva	Argumentativo para un auditorio más universal
Tipo de justificación	Pruebas empíricas	Validaciones	Demostraciones
ROL DEL PROFESOR			
Relación con el contenido	Orientar vínculos de conexión de sentido entre tramas argumentativas	Orientar vínculos entre tramas argumentativas y tramas de encadenamiento	Institucionalizar sentidos y tramas elaboradas
Relación con los estudiantes	Regular situación argumentativa	Institucionalizar sentidos elaborados	Institucionalizar actitud argumentativa desarrollada

REQUERIMIENTO	ACTIVIDAD 4	ACTIVIDAD 5	ACTIVIDAD 6
ROL DEL ESTUDIANTE			
Relación con el contenido	Interpretar y producir tramas argumentativas	Interpretar y producir sentidos, tramas argumentativas y tramas de encadenamiento	Interpretar y producir sentidos, tramas argumentativas y tramas de encadenamiento
Relación con el contexto	Desarrollar actitud argumentativa	Desarrollo y reflexión de actitud argumentativa	Desarrollo y reflexión de actitud argumentativa

Con base en el diseño propuesto, se elaboró la actividad No 1. La relación de los componentes considerados para esta Actividad determinó las siguientes opciones:

- Se preguntaría por ¿cuál es la relación que se puede establecer a partir de las figuras proporcionadas?. De esta manera, el proceso implicaría más la elaboración de la relación que la confirmación de la misma.
- Se elegiría una de las varias configuraciones figurales establecidas como "pruebas sin palabras" para la relación pitagórica.
- El diseño de la instrucción estaría orientado al desarrollo de inferencias de tipo abductivo.
- Se exigiría una forma de producción discursiva basada en el esquema de justificación.
- Los roles en la interacción didáctica estarían determinados por el esquema trabajo individual, trabajo de pareja, trabajo colectivo y por la petición de generar discursos para convencer.

Los anteriores elementos particularizaron la Actividad No. 1 generando el texto final de la misma (anexo No. 2). Las siguientes actividades fueron rediseñadas de acuerdo con los análisis globales de las actividades precedentes. Para este informe se presentará tan sólo la relación de diseño entre Actividad 1 y Actividad 2 y el análisis que se realizó entre actividades. Este análisis proporcionó elementos que interrogaron el proceso de elaboración de los requerimientos.

#### **D. RESULTADO DEL CICLO ADYACENTE: LOS CUESTIONAMIENTOS AL DISEÑO**

En este apartado se presenta un consolidado de la acción reflexiva del grupo Investigador sobre los dos resultados anteriores (referente teórico de los requerimientos y secuencia didáctica), que compromete particularmente la fase de teorización. En este sentido, esta fase se convierte en la fase de regulación del

proceso realizado. Desde el punto de vista investigativo, representa la acción vigilante del proceso de elaboración de los requerimientos. Esto, por cuanto es el resultado de la actividad reflexiva y validativa del Grupo de Investigación sobre su propio proceso y sobre sus elaboraciones parciales. En la perspectiva didáctica, esta fase se constituye en el espacio para el análisis y formulación de conjeturas teóricas y metodológicas con respecto al desarrollo de la secuencia didáctica.

El consolidado que se presenta a continuación surge de dos acciones básicas: el análisis de la primera actividad puesta en juego en el aula y el análisis de las reuniones de discusión y de diseño del Grupo Investigador. Para efectos de este informe se incluye como anexo el resultado del análisis de la Actividad No 1 (anexo No. 3), con el fin de orientar la lectura del proceso hacia la formulación de los cuestionamientos al proceso del aula. A continuación se presenta el resultado del análisis de las reuniones de Grupo, con el propósito de visualizar el curso de las reflexiones y su efecto en el diseño posterior de los requerimientos didácticos y del rediseño de actividades de aula.

## **1. El contexto de los cuestionamientos**

Durante el desarrollo de la fase de teorización, el Grupo realizó un total de 22 reuniones que tuvieron como propósitos: la discusión de aspectos teóricos, la valoración e incorporación de asesorías al proyecto, la evaluación de sesiones de clase y el diseño de actividades de aula. Este proceso generó protocolos de reuniones, que se constituyeron en una fuente de datos para el estudio del proceso reflexivo y la orientación en la reelaboración de los requerimientos didácticos.

En el contexto de la investigación - acción, el análisis de las reuniones del Grupo, permite realizar una acción metacognitiva, tendiente a la comprensión del propio proceso investigativo y a la consolidación de teoría. De ahí que en el estudio de los protocolos se considerara a "La reunión de Grupo" como el espacio del cuestionamiento del diseño. Así, las unidades de análisis, como se ilustró en el capítulo II, corresponden a los momentos de interrogación que emergieron durante el estudio: "la pregunta", "el acuerdo" y "el efecto en el diseño de actividades". Complementariamente, las categorías para el análisis emergieron de la identificación de los tópicos constantes de los cuestionamientos: el sentido, la trama argumentativa y la trama de conexión lógica, como tópicos fundamentales en el desarrollo de competencias argumentativas en matemáticas y como tópicos estructuradores de los requerimientos didácticos.

## **2. Los cuestionamientos de base o la toma de postura epistémica y discursiva del Grupo Investigador**

El análisis de las Reuniones de Grupo generó un consolidado de: Preguntas formuladas por el Grupo, Acuerdos (o elaboraciones básicas) y Efectos en el diseño

de tareas. La unidad "pregunta" orientó los cuestionamientos macro y micro que realizó el Grupo a la teoría, al diseño de la actividad y a las observaciones de aula. La unidad "acuerdo" estructuró tópicos de análisis y elaboración teórica al interior de cada requerimiento y entre requerimientos. La unidad "efecto en el diseño" se constituyó en el espacio que permitió la estructuración entre requerimientos, en tanto que los llamados que surgían en el aula implicaban establecer relaciones para comprender la naturaleza de los procesos de aula y el papel de los requerimientos para la aclaración de tales relaciones.

a) Sobre las Preguntas elaboradas:

Las preguntas rastreadas en los protocolos permitieron estructurar los siguientes tópicos de interés para el Grupo, e identificar aspectos particulares que se interrogaron en cada tópico. A continuación se visualiza este resultado.

CONSOLIDADO DE TÓPICOS INTERROGADOS PARA LA ELABORACIÓN DE LOS REQUERIMIENTOS DIDÁCTICOS		
Requerimiento Epistemológico	Requerimiento Cognitivo	Requerimiento Comunicativo
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Sentido</li> <li>• Argumentación</li> <li>• Demostración</li> <li>• Requerimiento epistemológico</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Sentido</li> <li>• Razonamiento</li> <li>• Trama argumentativa</li> <li>• Bloqueo</li> <li>• Figura</li> <li>• Comprensión</li> <li>• Estrategias cognitivas</li> <li>• Resolución de problemas</li> <li>• Requerimiento cognitivo</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Argumento</li> <li>• Procesos argumentativos</li> <li>• Procesos de interacción</li> <li>• Impacto en los procesos de aprendizaje</li> <li>• Requerimiento comunicativo</li> </ul>

Las cuestiones interrogadas en los distintos tópicos indagaron por diferentes aspectos de cada tópico, permitiendo caracterizar de manera particular los requerimientos. A continuación se ilustra la orientación que propiciaron las preguntas en la elaboración teórica.

1) Trama conceptual del tópico:

Se interrogó por el significado o el conjunto de significados asociados al tópico; por el sentido de, en el contexto de la geometría euclidiana o en el de la argumentación en geometría. Así, por ejemplo, las preguntas son del tipo: *¿Qué es un argumento?* Este tipo de preguntas, en términos generales, se ubicó en el marco del requerimiento en el que surge; esto, en tanto que indaga por conceptos. Las preguntas de tipo conceptual fueron las menos frecuentes, probablemente, porque se contaba con el referente teórico de base.

2) Procesos involucrados en el desarrollo de...

Se preguntó por los procesos asociados al desarrollo del tópico en cuestión. Estas preguntas evidenciaron con mucha claridad la relación entre requerimientos,

teniendo en cuenta los llamados que su respuesta implicaba. Preguntas de este tipo son, por ejemplo, *¿Cuáles son los procesos involucrados en el desarrollo del saber geométrico?*, *¿Qué procesos de razonamiento realizan los estudiantes cuando argumentan?* *¿Qué procesos están involucrados en la elaboración de requerimientos?* Un gran porcentaje de preguntas fue de esta clase, hecho que contribuyó a situar la discusión al interior de los requerimientos, y entre requerimientos y su relación con procesos involucrados en el desarrollo de en competencias argumentativas en geometría.

### 3) Naturaleza de los tópicos:

Este tipo de preguntas indagó por las condiciones de existencia del tópico, en el marco de una teoría, de una disciplina o de sus aplicaciones en el aula, al servicio del desarrollo del conocimiento geométrico. Por ejemplo, preguntas como *¿Por qué se puede demostrar?*, *¿Cuáles son los alcances y limitaciones de la demostración?* *¿De qué tipo son los bloqueos de los estudiantes?* *¿Cuáles son los criterios de estructuración del sentido?*, situaron la reflexión en las condiciones epistemológicas de los requerimientos y en la explicitación de aspectos relacionados con el desarrollo de la competencia argumentativa en geometría, para el diseño de tareas.

El anterior ejercicio de interrogación por requerimientos consolidó el campo de cuestionamientos al diseño que denominamos "La reflexión didáctica". Este campo se convirtió en el espacio estructurante de las elaboraciones del Grupo, en tanto permitió formular preguntas que exigían relaciones entre los requerimientos, al servicio del diseño de actividades para el desarrollo de la secuencia didáctica. A continuación se presentan los tópicos de preguntas consolidados en la reflexión didáctica.

TÓPICOS INTERROGADOS EN LA REFLEXIÓN DIDÁCTICA	
Tópico	Preguntas Básicas
La investigación y su proceso	¿Cuáles son los focos de la investigación? ¿Cuáles son los límites de la investigación?
La clase	¿Qué es una electiva? ¿Cuál es el status de la signatura en el pènsum? ¿Cómo se marca una secuencia didáctica?
La tarea	¿Cuál es el impacto de los focos de la investigación en la tarea? ¿Cuáles son los propósitos y de la secuenciación y de la estructura de la tarea?
La metodología	¿La metodología es autónoma o subsidiaria? ¿Cuáles son las estrategias metodológicas apropiadas para los propósitos de aprendizaje?
La evaluación	¿Qué criterios de evaluación son pertinentes para los procesos argumentativos? ¿Qué estrategias de evaluación utilizar?

TÓPICOS INTERROGADOS EN LA REFLEXIÓN DIDÁCTICA	
Tópico	Preguntas Básicas
Las interacciones entre estudiantes	¿Qué influye para que los estudiantes consoliden ideas en la discusión? ¿Cuál es el posicionamiento discursivo de los estudiantes? ¿Cuándo las voces de los estudiantes se convierten en una sola voz?
El profesor	¿Cuál es el papel del profesor en el desarrollo de procesos argumentativos en el aula?
El proceso de registro de datos	¿Qué aspectos registrar?
Los requerimientos didácticos	¿A cuántos estudiantes hacer seguimiento? ¿Qué estrategia de recolección emplear?
Los procesos de socialización de la investigación	¿Qué estrategias de participación del grupo emplear en la socialización del proyecto?

La discusión de las preguntas formuladas durante las Reuniones de Grupo generó la producción de acuerdos, que sirvieron como base para la construcción teórica de los requerimientos y como referente del diseño de las tareas. A continuación se presenta el consolidado de tópicos sobre los que se realizaron acuerdos.

CONSOLIDADO DE TÓPICOS ACORDADOS PARA LA ELABORACIÓN DE REQUERIMIENTOS		
Requerimiento Epistemológico	Requerimiento Cognitivo	Requerimiento Comunicativo
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Trama argumentativa</li> <li>• Sentido</li> <li>• Objetos matemáticos</li> <li>• La demostración</li> <li>• Problemas</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Bloqueos</li> <li>• Sentido</li> <li>• Registros</li> <li>• Comprensión</li> <li>• Trama argumentativa</li> <li>• Razonamiento</li> <li>• Problemas</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Argumento</li> <li>• Trama argumentativa</li> <li>• Situación argumentativa</li> <li>• Procesos argumentativos</li> <li>• Estructura de la interacción</li> <li>• Requerimiento comunicativo</li> </ul>

Al igual que en el tipo de preguntas identificadas, el proceso de reflexión de los tópicos acordados, giró en torno a las condiciones epistemológicas de los tópicos, al interior de requerimientos y entre requerimientos. De este proceso se obtuvo la base teórica definitiva para cada requerimiento, y un referente aclarador que se puso en juego en todo el diseño de la investigación, tanto para el diseño de las tareas, como para el desarrollo de la investigación.

Un aspecto de particular importancia, que resultó del proceso de interrogación al diseño general y de la reflexión didáctica, generó un resultado fundamental en relación con el requerimiento cognitivo. La elaboración preliminar de este requerimiento (ver anexo 1) apuntó a una explicación, muy general, de procesos semióticos y cognitivos presentes en cualquier acto de aprendizaje. Para ello, se aportó un referente teórico que daría luces a la comprensión de procesos inferenciales en los sujetos. De igual manera, se realizó una identificación de condiciones para el desarrollo de las relaciones didácticas, que pretendió aclarar las relaciones presentes en el aula.

Definitivamente, el ejercicio de cuestionamiento del diseño, situó la reflexión en la necesidad de comprensión y de explicitación de los procesos cognitivos de los estudiantes, cuando están en situación de aprendizaje geométrico, en un contexto argumentativo. En este sentido, el requerimiento cognitivo, cobró particular importancia en la reflexión didáctica, puesto que vislumbró un hecho fundamental: Es la comprensión de las exigencias cognitivas que le hace un saber particular al sujeto, el aspecto desencadenante de precisiones en los requerimientos epistemológico y comunicativo, para la estructuración de situaciones didácticas específicas. En consecuencia, la reelaboración del requerimiento cognitivo se convirtió en uno de los ejercicios más exigentes en la elaboración de los requerimientos, tal como se evidencia en el resultado definitivo de este requerimiento.

Por otra parte, las precisiones exigidas por el requerimiento cognitivo, impactaron y afinaron, de manera sustancial, los requerimientos epistemológico y cognitivo y dieron pautas para la identificación de un cuarto requerimiento: el socio-cultural del aula. El resultado de estas precisiones fue la reelaboración de los requerimientos, que consolida el capítulo IV de este informe.

Por otra parte, en el campo de la reflexión didáctica se mantuvieron los tópicos de reflexión y se consolidaron dos más, que atendieron al proceso de afinamiento conceptual sobre la denominada competencia argumentativa en geometría. Tales tópicos son:

- La competencia argumentativa en geometría, implicada en la tarea propuesta. Sobre ella se consideró que existen procesos involucrados en su desarrollo, tales como:
  - Identificación del propósito de la tarea, que en el caso de los estudiantes observados, consistía en formular la relación matemática y formular tres razones que la justificaran.
  - Elaborar un mínimo de supuestos y definir una relación.
  - Determinar calidad de supuestos y costos de los mismos.
  - Identificar la situación como situación argumentativa: desde un punto de vista contextual y textual.
  - Realizar un tiempo de "calentamiento" o ambientación al contexto de la tarea.
- La Competencia estratégica para el tratamiento figural: Sobre ella, a partir de la observación del proceso de los estudiantes, se identificaron factores que intervienen en su desarrollo, como por ejemplo:
  - Que distintos textos pueden generar un mismo sentido.
  - Distintos sentidos se construyen a partir de diferentes tramas argumentativas.
  - La institucionalización es el lugar de la explicitación de premisas y conclusiones.
  - Es necesario "ver", "medir", "definir"

- Es necesario realizar procesos reflexivos.
- Las plenarias ilustran "sentidos" construidos.

Los dos hallazgos mencionados sobre competencias, permitieron comprender dimensiones cognitivas, comunicativas y epistemológicas que se ponen en juego en el desarrollo argumentativo de soluciones a problemas geométricos, y, por supuesto, obtener elementos, desde la observación de procesos, para la caracterización de la competencia argumentativa en geometría y el papel que juegan, en su desarrollo, los requerimientos didácticos.

Finalmente, se consideró importante presentar, como complemento al ejercicio de interrogación y de consenso, el consolidado de tópicos y preguntas que incidieron directamente en el diseño de aula. Los tópicos se estructuraron en los requerimientos epistemológico y comunicativo.

EFECTO DEL CUESTIONAMIENTO Y EL ACUERDO EN EL DISEÑO DE AULA			
Requerimiento epistemológico		Requerimiento comunicativo	
Tópico	Aspectos	Tópico	Aspectos
Sentido	Tarea: <i>escribir soluciones y evaluar posición epistémica.</i> Diseño: Generar nueva actividad para potenciar Relación pitagórica	Argumentación	Tarea: <i>problema propuesto: tema polémico (papel del sombreado; ¿qué pasaría si cambiamos la medida?), poner por escrito la solución; identificar la mejor solución; qué le completaría; señalar inconsistencias, etc.</i>
Registro	Tarea: indagar por el papel que juega el sombreado. Poner una situación de variación de medidas. Proponer la misma relación en otras figuras. Pedir razones.	Evaluación	Criterios: Relación registro semiótico y sentido. Preguntar para evaluar. Identificar reacciones a: el proceso, la metodología, a la elaboración obtenida, el proceso investigativo.
Razonamiento	Tarea: poner por escrito razón y relación		
Comprensión	Criterios para tarea: para comprender, identificar creencias, usos de registros.		
Problemas	Criterios para realizar soluciones: proporcionar tiempo para trabajo individual.		
Trama argumentativa	Función: Potencia tramas de conexión; exige cantidad de supuestos. Supuesto como necesidad de prueba.		

Como efecto de todo el proceso anterior, se consolidó el siguiente diseño:

SECUENCIA DIDACTICA DEFINITIVA			
ETAPA TAREA	1: FORMULACION DE LA RELACION	2: CONSOLIDACION DE LA RELACION	3: VALIDACION DE LA RELACION
1	<b>Propósito</b> elaborar un sentido de áreas para la Relación Pitagórica.	→	→
2		<b>Propósito:</b> Elaborar una forma argumentativa para el sentido de áreas en la Relación Pitagórica.	→
3			<b>Propósito:</b> Generalizar el sentido de áreas para la Relación Pitagórica.

En la ejecución de esta secuencia, el profesor atendió particularmente a los siguientes aspectos:

1. El propósito de la clase se restringiría a los procesos posibles a desarrollar en el tiempo que se disponía para la asignatura: dos horas semanales. Por ello, se tomaron las siguientes opciones:
2. Se consolidó, con restricciones, el propósito de aprendizaje de: "Establecer una relación matemática". Propósito que complejiza la tarea, en términos de su orientación hacia la elaboración y justificación de relaciones matemáticas.
3. Complementariamente, de los tres sentidos identificados teóricamente para la Relación Pitagórica, se optó por el de Áreas, con el propósito de consolidar un campo teórico para en la construcción de la Relación y para la institucionalización de saberes en los estudiantes.
4. Para el efecto anterior, se consolidó la opción por la entrada a la Relación, mediante el registro figural, en tanto que se consideró el figural como un registro más común a los estudiantes y menos complejo en su accesibilidad, frente a otros como el de fórmulas.
5. Desde el punto de vista de la opción por la forma de acceso comunicativa al conocimiento geométrico, se consolidó la estrategia argumentativa, como una estrategia discursiva y cognitiva que exige realizar rupturas con discursivos espontáneos y pasar a procesos discursivos más complejos como los argumentativos.
6. Finalmente, para efectos de la regulación y el mantenimiento de una situación argumentativa en el aula, se consideró que el profesor asumiera dos roles: En la dimensión didáctica, regular, interacciones, centrar tópicos de reflexión,

preguntar para potenciar procesos de solución, reorientar discusiones e institucionalizar elaboraciones parciales e identificar bloqueos. En la dimensión argumentativa, asumir eventualmente el rol de contra – argumentador, para obligar posiciones discursivas y epistémicas más fuertes en los estudiantes, o para interpretar (como la conciencia del grupo) aspectos no satisfactorios en las soluciones defendidas por los estudiantes. Potenciando de esta manera, la modelización de interacciones argumentativas en los estudiantes.

7. Como proyección del proceso, se consideró que un semestre con dos horas semanales era un tiempo limitado para el desarrollo completo, tanto de la secuencia argumentativa diseñada como de las posibilidades de desarrollo argumentativo de la Relación Pitagórica. Por ello, se proyectó proponer otra electiva o un espacio de trabajo informal para continuar el proceso. De igual manera, se planeó que en la elaboración del informe académico del proyecto, se incluyeran aspectos relacionados con el desarrollo argumentativo de los estudiantes, como por ejemplo, elaboraciones escritas. Estas dos actividades se realizaron mediante la estrategia de Grupo de Estudio que funcionó en el segundo semestre de 2000.

#### IV. RESULTADOS DEL CICLO 2: LA REESTRUCTURACIÓN DE LOS REQUERIMIENTOS Y SU IMPACTO EN EL DISEÑO DE AULA

Este capítulo se constituye en el último resultado de la investigación. Los análisis anteriores permitieron la consolidación de los requerimientos y dieron luces para el diseño de las actividades de aula. Particularmente se logró la consolidación del cuanto requerimiento, el socio- cultural del aula, como un requerimiento que da razón de las normas de interacción entre saberes y sujetos en el contexto escolar. A continuación se presenta una segunda elaboración de la noción de competencia argumentativa en geometría, como referente para las acciones de teorización y de acción en el aula del Ciclo 2.

##### A. PERO ¿QUÉ ES LA COMPETENCIA ARGUMENTATIVA EN MATEMÁTICAS?: HACIA LA SEGUNDA NOCIÓN

En un segundo momento de elaboración teórica, derivada de observaciones preliminares de los procesos argumentativos de los estudiantes y de las reflexiones teóricas desarrolladas en la primera etapa de la investigación, se propone *que la competencia argumentativa en matemáticas es, en términos generales, un saber realizar procesos argumentativos con el saber matemático*. Desde ese punto de vista, el desarrollo de esta competencia implica varios tipos de saberes, de distintos órdenes, (subcompetencias) y exige un hacer o una experiencia argumentativa con este saber. Entre los saberes implicados en la competencia argumentativa en matemáticas están:

- 1) El desarrollo de tramas conceptuales (competencia cognitiva) de tipo matemático. Este saber garantiza el dominio de referentes y de procesos propios del campo matemático, que permitan la toma de posición epistémica y epistemológica del sujeto frente al objeto de la argumentación; o la asignación de sentidos al conocimiento matemático. Siguiendo a Duval (1999), el sujeto puede tomar, frente al saber matemático, una posición epistémica semántica (si tan sólo asigna valores semánticos desde su experiencia empírica); una posición epistémica teórica (si asigna valores desde una teoría que le permite interpretar); o una postura epistémica lógica (en tanto conoce y desarrolla procesos operatorios de tipo lógico).
- 2) El desarrollo de estrategias de interpretación de textos matemáticos (competencia cognitiva y competencia discursiva), que garantiza formas de operar con el conocimiento y el posicionamiento del sujeto frente al conocimiento. Este dominio le permite al individuo la discriminación de argumentos matemáticos y la elaboración de procesos de validación. La realización de procesos de validación como legitimación de saberes y de procesos, como el establecimiento de verdades o como la determinación de consistencias.

- 3) El desarrollo de estructuras argumentativas deductivas (competencia cognitiva y discursiva), bajo los criterios de verdad y consistencia, que garantiza la producción e interpretación de formas de organización discursiva y textual bajo la estructura justificativa, en los contextos oral y escrito. Este dominio permite al sujeto la toma de posición epistémica y social frente al saber matemático. Es decir, que, además del desarrollo de una postura epistémica, el sujeto habrá de desarrollar juegos de roles argumentativos y actuar en concordancia con ellos; desarrollar juegos de lenguaje adecuados para la argumentación.
- 4) El desarrollo de estrategias para la contextualización y el uso de los procesos argumentativos (competencia estratégica), que garantiza un uso adecuado y pertinente de la argumentación como forma de interacción social. Este dominio exige que el sujeto desarrolle normas de interacción argumentativa, formas de evaluación de efectividad argumentativa y ponga en escena juegos de lenguaje bajo el criterio de eficacia argumentativa.

A partir de la anterior conceptualización sobre la competencia argumentativa en matemáticas, se consideró, como **indicadores gruesos de desarrollo de esta competencia**, dos acciones fundamentales:

- La identificación, interpretación y producción de sentidos en textos matemáticos. Esta acción pone en juego prioritariamente los aspectos uno, dos y tres enumerados como subcompetencias de la competencia argumentativa en matemáticas.
- La interpretación y producción de tramas argumentativas en matemáticas. Esta acción involucra las cuatro subcompetencias enumeradas y exige un desarrollo de encadenamientos desde la lógica matemática.

A continuación se describe una reelaboración del sentido asignado por el grupo a las categorías que constituyen los indicadores globales de desarrollo de competencia argumentativa en matemáticas y que permitió un desarrollo teórico de cada categoría, en función de la explicitación de los denominados requerimientos didácticos y a propósito del diseño didáctico propuesto en el estudio.

- **Sentido:**

Se comprende en este estudio como la propuesta de significación elaborada por un sujeto (individual o colectivo) para un tema o una situación particular. La postulación de un sentido exige establecer relaciones semióticas de tipo sintáctico, semántico y pragmático, que permitan consolidar el punto de vista asumido por el sujeto.

- **Trama argumentativa:**

Producción discursiva que teje relaciones de sentido bajo el esquema de la justificación. La trama argumentativa se convierte en trama, en la medida en que desarrolla el sentido, desde las particulares conexiones que se establecen para dar razón de un esquema conceptual o semántico, inserto en el contexto de la justificación dialógica.

La anterior conceptualización se constituyó en base para la reformulación de los requerimientos didácticos y su puesta en juego en el rediseño de la secuencia didáctica y de sus actividades. Así, la formulación de cada uno de los requerimientos realiza una propuesta interna para responder al reto de desarrollar competencias argumentativas en matemáticas. En este sentido, cada requerimiento genera una explicitación más particular de la competencia argumentativa en matemáticas, en tanto que se diseña para el campo geométrico específicamente. A la vez, cada formulación establece relaciones con los demás requerimientos, en tanto que se comprendió que, en su realización, son inseparables y que tan sólo para efectos del diseño didáctico y de la investigación de sus efectos en el logro de los propósitos de aprendizaje, es necesaria esta separación.

## **B. EL REQUERIMIENTO EPISTEMOLÓGICO PARA EL DESARROLLO ARGUMENTACIÓN EN GEOMETRÍA**

Hay tres acciones didácticas que comprometen la presencia de este requerimiento en el desarrollo de competencias matemáticas y específicamente el de competencias argumentativas que involucren tales competencias matemáticas. En primer lugar, la pregunta por el sentido a elaborar para un conocimiento matemático es una pregunta de carácter epistemológico, que busca obtener, por lo menos, un referente que oriente la acción vigilante del profesor en la articulación de campos conceptuales manifiestos en la diversidad de elaboraciones de sentido que puedan realizarse en el aula. En segundo lugar la pregunta por lo que regula y justifica la aceptación de un enunciado como definición o como teorema y de un proceso como una descripción, una explicación o una argumentación que prueba o una argumentación que demuestra, es una pregunta que permitirá regular y precisar en la elaboración colectiva de conocimiento, la calidad del conocimiento elaborado y los tipos de conexión que evidencian las estructuras consolidadas. Y en tercer lugar, la pregunta por los aspectos que determinan la importancia de un argumento particular en un contexto de elaboración de conocimiento específico, es una pregunta que exige del profesor una conciencia de la dependencia de la diversidad de tramas argumentativas, según juego de roles entre argumentos.

Las anteriores acciones consolidan, en primer lugar, al profesor como un sujeto epistémico que se construye en la tensión didáctica de las exigencias del conocimiento elaborado y las exigencias de solución a problemas de elaboración de

conocimiento en el aula y como efecto de esa relación se construye también al estudiante un como un sujeto epistémico. Es decir se desarrolla una competencia pedagógica en el profesor que se relaciona con su saber para decidir en acción; a la vez, también se desarrolla una competencia en el estudiante, relacionada con su saber para discriminar un texto matemático.

## 1. El sentido de un enunciado

El sentido de un enunciado se constituye desde tres componentes fundamentales: el contenido semántico, el valor lógico de verdad o consistencia y el valor epistémico. La asignación de sentido es el resultado de la puesta en juego de esas tres componentes según contextos de enunciación.

El componente del contenido semántico está determinado por dos factores fundamentales: i) el conocimiento previo del que se dispone para identificar un contenido y en particular unos objetos matemáticos, referidos en el mismo, y ii) las formas de acceder a los objetos matemáticos referidos en esos contenidos. Duval (228) señala tres modos de acceder según la forma de presentación de los objetos matemáticos.

- a) Un modo de acceder intuitivo vinculado al reconocimiento de formas y a la discriminación de propiedades características. La aprehensión de propiedades invariantes a través de modificaciones visuales, aprehensión que, según Duval, fundamenta una epistemología ingenua, en donde el contenido que deviene de las palabras y del discurso depende del acceso directo a los objetos por una experiencia sensible.
- b) Un modo de acceder intuitivo vinculado a la estructuración temporal y espacial de toda experiencia y de toda representación posible. La intuición de ciertas relaciones topológicas y afines y de dimensiones, fundamentales para la geometría. Es un acceso determinado por el campo de percepción y no por los objetos en particular.
- c) Un modo de acceder apofántico. Constituido por la operación de predicación para determinar un objeto, es decir es el establecimiento de vínculos para la expresión de una propiedad de una relación o de una acción con una expresión que designa los objetos.
- d) Un modo de acceder puramente lógico. Vinculado con la construcción del objeto a través de la forma de expansión discursiva efecto de la derivabilidad deductiva. Los objetos a los que se accede son operaciones de pensamiento que están controladas semióticamente.

Duval sitúa las tres últimas formas de acceder como propias de un tipo de epistemología. Así, la segunda sería la de la epistemología Kantiana, la tercera la

de la epistemología dialéctica y la última de la epistemología constructivista desarrollada después de Frege y Hilbert.

En el caso de los sistemas geométricos, los elementos que constituyen el sistema (las relaciones, situaciones y objetos) pueden ser representados en un registro particular; el de las figuras. Estas potencian la forma de acceso intuitiva para los objetos geométricos, pero el acceso a elementos como las definiciones y los axiomas es del tipo apofántico. Es decir, es necesario el desarrollo de las formas de acceso intuitiva y apofántica, para una adecuada comprensión de los objetos geométricos.

Estas formas de acceso determinan, en primer lugar, el contenido semántico puesto en juego en la asignación de sentido a un enunciado y en particular a una proposición. Ese contenido semántico puede ser asociado, más allá de contextos teóricos de enunciación, pero el desarrollo de un contenido geométrico para un enunciado exige la ubicación de contextos teóricos de enunciación.

El segundo componente del sentido, el valor epistémico, es el grado de fiabilidad que posee lo que se enuncia en una proposición. El contenido de una proposición en el instante de su aprehensión genera un rango de fiabilidad del mismo, que va desde lo evidente, lo plausible, lo posible, lo verosímil, lo necesario, hasta lo imposible, lo absurdo, y lo inverosímil. Dado que el valor epistémico está vinculado a la comprensión del enunciado y determinado por la comprensión del contenido, una misma proposición puede tener valores epistémicos diferentes según los interlocutores y puede corresponder a estados de conocimientos diferentes en las personas o la pertinencia de medios sociales diferentes. Esta variación implica la no-existencia de un único sentido para una proposición.

Finalmente el tercer componente del sentido, el valor lógico de la proposición, se relaciona con el hecho de que la proposición pueda ser verdadera, falsa, indeterminada o consistente. Valores lógicos determinados por la forma como ha evolucionado la verdad, desde la derivada por una teoría basada en la correspondencia entre las matemáticas y el mundo real, a una basada en la coherencia (lenguajes formales), pasando por una basada en la utilidad pragmática. Hay un aspecto muy importante a resaltar: el valor lógico de una proposición no depende sólo de la comprensión del contenido sino, que está relacionado con los procedimientos de verificación o prueba.

Aunque el valor epistémico y el valor lógico de la proposición son dos componentes del sentido que en algunas situaciones tienden a identificar, es necesario separarlos, en el estudio del desarrollo del sentido. Es ampliamente conocida la reacción que genera la pregunta de ¿hay más números naturales que números pares?. Esta pregunta tiende a generar el calificativo de pregunta absurda o tonta por la proposición que forma el contenido de la pregunta, dado que la expresión "número par" induce una partición de mitad-mitad en los números enteros y en consecuencia se asocia un valor epistémico de evidente y un valor de verdad de

verdadero, a la proposición "hay más números naturales que números pares". Así, evidente y lógicamente verdadero se vuelven calificativos inseparables, y aunque en otras ramas del conocimiento "Evidente y verdad son inseparables por el papel que juegan los enunciados de constatación, en matemáticas en donde la percepción se excluye como un argumento matemático para la prueba "el único vínculo posible sería el que resulte de un valor epistémico necesario con un valor lógico de verdadero o consistente". Duval (186).

Cuando la proposición se enuncia en un contexto teórico específico, el sentido tiene además un status que depende del contexto de enunciación. En términos de Duval, se discrimina un contexto global como el conjunto de los discursos previos con los cuales se organiza el discurso que se produce y un contexto local que corresponde a la organización propia del discurso que se produce, así un enunciado puede tener un status de premisa, de conclusión, de definición, o de teorema, según los contextos locales. Estos dos niveles de contexto se incorporan a los otras componentes del sentido y constituyen las componentes que conforman el sentido de una proposición enunciada, de esta manera el status teórico de una proposición determina su status operatorio posible para un paso de razonamiento e induce un valor epistémico propio independiente del valor inducido por la comprensión del contenido de la proposición. De tal manera que se conforma un valor epistémico teórico, y la puesta en escena de un contexto de enunciación teórica modifica el sentido de una proposición por la primacía del valor epistémico teórico sobre el valor epistémico semántico.

En el siguiente cuadro se señala las relaciones entre los componentes que determinan la asignación de un sentido a una proposición.

*Flecha 2: (Contenido). Relaciones entre los componentes del "sentido" de una proposición enunciada más allá de todo contexto teórico. La distinción entre los diferentes valores epistémicos es compleja, ya que corresponden a los diferentes grados de convicción así como a los valores modales a los que es susceptible una afirmación: hay un gran número de valores epistémicos entre los valores lógicos de verdad. La enunciación de una proposición en un contexto teórico conduce a enfrentar un segundo valor epistémico (ver flecha 1)*

*Flecha 1: (Contexto teórico de enunciación). Modificación de las relaciones entre los componentes del "sentido" de un enunciado por la introducción de un contexto teórico. Al comparar este esquema con el anterior (flecha 2), se puede ver que la aparición de un valor epistémico teórico inducido por el status teórico, inhibe el valor epistémico semántico inducido por el contenido.*

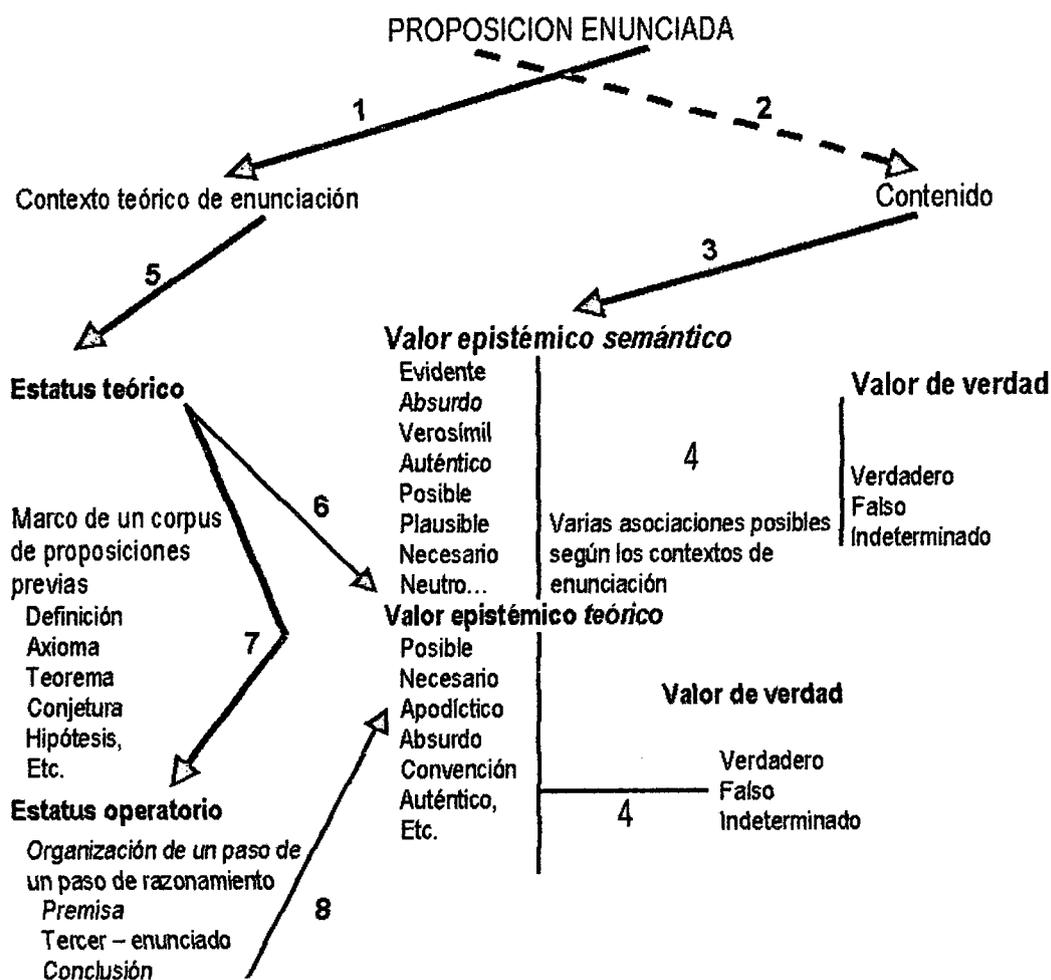


Figura No. 1

\*Tomada de Duval (1991, p. 185, 188)

## 2. Un sentido para la relación pitagórica en el contexto Euclidiano

En el desarrollo de este referente epistemológico hemos querido fijar un contexto de enunciación: el Contexto Euclidiano. Se realiza esta opción para el estudio de un sentido asociado a un objeto particular: la Relación Pitagórica.

El campo teórico de la Geometría Euclidiana está inscrito dentro de lo que se ha llamado Axiomáticas de contenido. Las definiciones y los axiomas se pueden formular independientemente, corresponden a caracterizaciones de objetos simples

a los que se tiene un acceso directo, independiente de las proposiciones que los definen o plantean su existencia. Las funciones de las proposiciones iniciales en Euclides: 23 definiciones, 5 postulados y 9 nociones comunes serán en primer lugar establecer los conceptos básicos de los objetos a tratar, y por otra parte proporcionar los elementos fundamentales que requiere el desarrollo de una teoría de la cantidad, estructurada a través de las formas. Existe un acceso intuitivo a través de las representaciones figurales para los objetos de esta geometría, esto es importante en términos de la asignación de sentido que se le da una proposición que enuncia una relación.

Desde el punto de vista epistemológico, las primeras preguntas que orientaron este estudio son: 1) ¿En qué parte de la obra Euclidiana está involucrada la Relación Pitagórica?, y 2) ¿Cuál es el sentido que se le puede asignar a la Relación Pitagórica según el lugar que ella ocupa en ese contexto?, la respuesta a estas preguntas nos llevó a considerar una caracterización para la obra euclidiana entre las muchas que le han sido asignadas atendiendo a diversos aspectos<sup>6</sup>. Esta caracterización considera dos aspectos fundamentales, el primero manifiesta un desarrollo teórico específico a través de ella y le confiere un contenido global, el segundo que da razón de una estructura global manifiesta para toda la obra y que le asigna una "forma global".

En cuanto al contenido del conocimiento que elabora, Los Elementos de Euclides son un gran tratado de magnitudes en el que se evidencia un carácter irreconciliable entre las magnitudes discretas y las magnitudes continuas. Este aspecto hace que se generen cantidades geométricas y cantidades aritméticas. A los ojos de Euclides el estatuto de cantidad se tiene cuando es posible comparar y operar una magnitud; la posibilidad de comparar, de sumar o restar es la característica propia de toda cantidad, pero debido a que no existe la posibilidad de concebir la cantidad de magnitud de una forma general (que posteriormente será la numérica), desarrolla una teoría de la cantidad que depende de la forma, es a través de la forma, que será posible comparar y operar las magnitudes.

El Libro Primero se ocupa de estudiar tres cantidades geométricas: la longitud, la amplitud y el área que se expresan por los segmentos, los ángulos y las figuras rectilíneas, respectivamente. Las primeras 32 proposiciones de las 48 que tiene el Libro Primero, permiten la suma, la resta y la ordenación de segmentos y de ángulos, privilegiando el triángulo como figura particular para la expresión de estas magnitudes. Es importante destacar que al sumar dos segmentos el resultado es una longitud expresada por otro segmento, y que operadas dos amplitudes expresadas por dos ángulos el resultado es de nuevo una amplitud expresada por un ángulo; es decir, hay una cerradura en forma para el tratamiento aditivo de las longitudes y de los segmentos.

---

<sup>6</sup> Al respecto se puede considerar el documento "El papel del quinto postulado en el libro primero de la geometría Euclidiana" elaborado por Olga Lucía León, para la defensa de la Línea de Historia en el Doctorado en Educación Matemática. Universidad del Valle (2000)

El área se introduce de manera tardía, debido a que el primer criterio de igualdad para las figuras que maneja Euclides es el de coincidencia en la superposición. Inicialmente, con este criterio, no puede operar las áreas pues hay diversidad de figuras rectilíneas que tienen la misma área pero que no son iguales por coincidencia. Necesita generar, entonces, un segundo criterio de igualdad que no dependa de la forma pero sí de la cantidad de área que ella encierra. Este segundo criterio es el que aparece a partir de la proposición 34, en donde habla de igualdad de dos figuras, si se conserva la cantidad de área, aunque la forma de las mismas sea diferente.

Desde la proposición 33, el triángulo deja de ser figura exclusiva para la expresión y tratamiento de las magnitudes. Aparece el paralelogramo como figura a partir de la cual Euclides decide ocuparse de la magnitud que hasta el momento no había tratado: el área.

Con las proposiciones 41 y 42 reduce a una sola figura la expresión de las áreas, pues establece en la 41 una relación entre las áreas del triángulo y el paralelogramo: si tiene la misma base y están en las mismas paralelas. Pero ya en la 42, puede, dado un triángulo, construir un paralelogramo igual en área, es decir, ya consiguió obtener la forma de pasar de una figura a la otra sin cambiar el área.

El último grupo de este Libro lo constituyen las proposiciones 43 a 48, en donde se desarrolla el procedimiento de aplicación de áreas, cuyo uso se remonta a los pitagóricos. Con las proposiciones 43 a 45 se puede transformar áreas de tal manera que es posible añadir o sustraer áreas de figuras rectilíneas y representar la suma o diferencia por un rectángulo de cualquier longitud dada. Es claro entonces, que no hay cerradura en forma para esta operación, pues el resultado de adicionar el área de dos figuras cualesquiera, se expresa siempre a través de un paralelogramo.

De las proposiciones 46 a 48 se va determinar la cerradura en forma para la adición de áreas, pues si hasta la 45 ya es posible la adición y sustracción de áreas, en la 46 se proporciona la forma de construir un paralelogramo cuyos lados sean iguales y cuyos ángulos sean cada uno igual a un ángulo recto. Es esta la proposición que proporciona una forma de construcción para el cuadrado, se resalta el hecho de que el cuadrado mantiene relaciones de igualdad para sus lados y para sus ángulos lo que hace posible manejar la variabilidad de la tercera magnitud: el área. Con la proposición 47 (llamada teorema de Pitágoras), genera una cerradura para la adición de áreas bajo la forma cuadrado. Posteriormente, al garantizar que toda figura rectilínea se puede cuadrar (Libro 2) completa el propósito de convertir el área en magnitud igual a los segmentos y los ángulos.

Las anteriores consideraciones llevan a explicitar el primer sentido que se le asigna a la Relación Pitagórica en el contexto del Libro Primero de la obra euclidiana. La Relación Pitagórica, es una relación que permite la suma de áreas. Se manifiestan

dos componentes que hacen parte del sentido de una proposición: la del contexto global (la obra Euclidiana), que determina el que sea una relación que permite la suma de áreas, y la del contexto local (Proposición 47) que determina un status operatorio consolidándola como la conclusión de la proposición 47. Así, la proposición 47 es el teorema de la suma de las áreas de los cuadrados. Posteriormente, cuando en el Libro Segundo establezca el resultado que permite llevar al área de un cuadrado el área de cualquier figura rectilínea, la proposición 47 se podrá considerar como el teorema que permite realizar la suma de áreas.

La proposición 47 juega un papel muy importante en el desarrollo de un sentido global en este Tratado: *El desarrollo de una teoría de la cantidad*, pero este propósito no culmina en este libro, es decir es posible seguir en toda la obra la trama que va generando un cuerpo teórico para la geometría. Por esta razón, aunque el estudio del Libro Primero permitió formular un sentido para la Relación Pitagórica, a partir de lo que se enuncia en 47 y el lugar que ocupa 47 en toda la trama del Libro Primero, este sentido se consolida con el estudio de las otras proposiciones en donde aparece manifiesta la Relación Pitagórica.

Veamos la presentación de las proposiciones en las que la Relación Pitagórica juega un papel importante:

#### **PROPOSICION 47 "LIBRO PRIMERO"**

En los triángulos rectángulos el cuadrado del lado que subtiende el ángulo recto es igual a los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo recto.

#### **PROPOSICION 12 "LIBRO SEGUNDO"**

En los triángulos obtusángulos el cuadrado del lado que subtiende el ángulo obtuso es mayor que los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo obtuso en dos veces el rectángulo comprendido por un (lado) de los del ángulo obtuso sobre el que cae la perpendicular y la (recta) exterior cortada por la perpendicular, hasta el ángulo obtuso.

#### **PROPOSICION 13 "LIBRO SEGUNDO"**

En los triángulos acutángulos, el cuadrado del lado que subtiende al ángulo agudo es menor que los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo agudo en dos veces el rectángulo comprendido por uno de los lados del ángulo agudo sobre el que cae la perpendicular y la (recta) interior cortada por la perpendicular hasta el ángulo agudo.

#### **PROPOSICION 31 "LIBRO SEXTO"**

En los triángulos rectángulos la figura construida a partir del lado que subtiende el ángulo recto es igual a las figuras semejantes construidas de manera semejante a partir de los lados que comprenden el ángulo recto.

Las proposiciones anteriores constituyen el marco de la Relación Pitagórica en la obra Euclidiana. La proposición 47 establece como conclusión, la Relación Pitagórica, para el caso de los cuadrados: Las conclusiones de 12 y 13 derivan de la Relación Pitagórica, las relaciones entre áreas de cuadrados cuando el triángulo no es rectángulo. La proposición 31 relaciona áreas de figuras semejantes, ya no se limita a la figura cuadrado, la Relación Pitagórica establece cerradura bajo forma para la adición de áreas, al costo de la semejanza. Es decir para dos triángulos semejantes o cualquier otra par de figuras semejantes, la suma de sus áreas será expresada en una figura semejante.

Los aspectos anteriores resaltan el status operatorio que se construye en los contextos locales para la Relación. En la primera y en la última, la Relación tiene el rol de conclusión, en las dos restantes cumple un rol de apoyo.

Un aspecto importante a considerar es que en este marco de proposiciones las magnitudes que se relacionan no son las del triángulo. El papel del triángulo es convertirse en un operador que permite la adición de áreas de otras figuras; por eso la función de operador al modificar el ángulo recto no cambia. Es decir, que la generalización de la Relación Pitagórica está determinada por la garantía de mantener el triángulo como operador para otras magnitudes y en este contexto aparecen las proposiciones 12 y 13 del Libro Segundo y la proposición 31 del Libro Seis.

Estas cuatro proposiciones, aunque mantienen como invariante para la generalización de la Relación Pitagórica al triángulo y el sentido de ser una relación dada para operar la magnitud área, difieren en los enfoques desde los que se formulan. Veamos con más detalle este aspecto. En primer lugar, las tres proposiciones, 47 del Libro Primero (I, 47), 12 y 13 del Libro Segundo (II, 13 y II, 14), están formuladas de tal manera que las relaciones que se establecen para las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados del triángulo, se fundamenta sobre un criterio de igualdad desarrollado desde la teoría de las paralelas (León, 2000), criterio fundamental en las demostraciones de (I, 47 II, 13 y II, 14). Mientras que en la proposición 31 del Libro Seis (VI. 31), la relación entre las áreas se fundamenta con un nuevo criterio para la igualdad entre áreas desarrollado a partir de la teoría de proporciones. De lo anterior se observa que el sentido de la relación pitagórica se elabora a partir de la relación de igualdad pero a partir de dos tramas argumentativas diferentes.

### **3. Dos tramas argumentativas para un mismo sentido**

El segundo aspecto que caracteriza la obra Euclidiana, está relacionado con lo que se ha llamado la "forma Euclidiana" relacionada con una manera particular de distinguir y operar con unos primeros principios. El tratado de los *Elementos*, se constituye en el primer tratado que distingue unos primeros principios y los

subdivide en definiciones postulados y nociones comunes. De manera que esos primeros principios se asuman como puntos absolutamente iniciales de cualquier cadena deductiva de la forma:

$A \rightarrow B \rightarrow Q$  donde A es un principio, P es un teorema y Q es una conclusión y " $\rightarrow$ " señala el orden de deducción.

En tanto A y P permiten la obtención de Q, A y P cumplen la función de elemento en un sentido genérico. Pero además, al considerar la presencia explícita de un grupo de primeros principios y el acumulado de conclusiones como efecto de la transitividad de los encadenamientos deductivos, es posible obtener un cuerpo sistemático de conocimiento. Esta es la característica más destacada de la obra de Euclides dentro de la tradición de los Elementos de la Geometría. Marca un punto de evolución desde unos Elementos que consistían en principios instrumentales, capaces de convocar en torno a una temática particular, un núcleo de resultados, hasta unos Elementos fundados en principios capaces de conformar un cuerpo de conocimiento como una teoría deductiva para la geometría.

Vega pone en evidencia el aspecto novedoso de esta organización con respecto a otras formas de sistematización u otras formas de relación de primeros elementos: "no cabe negar un talante axiomatiforme a los Elementos de Euclides: la puesta en limpio y la reconstrucción sistemática de un conjunto de conocimientos, con miras a su constitución como una teoría Científica autosuficiente, es desde luego, uno de los motivos que se juzgan característicos de la axiomatización" (Vega, 1991). Lo cual marca un desarrollo de lo que se considera un punto de vista axiomático (distinción entre proposiciones demostrables y principios no demostrables, entre principios comunes y tesis propias de un campo de conocimiento) a una organización de determinados campos matemáticos y su conversión en cuerpos autónomos y concluyentes de conocimiento.

Este segundo aspecto, lleva a realizar un estudio más en detalle de la componente local del sentido, *la Relación Pitagórica es una conclusión en las proposiciones I,47 y y VI,37 y un apoyo para, II, 13 y II, 14*. Considerar este aspecto consolida un valor epistémico teórico, que compromete elementos estructurales que se sitúan mas allá del contenido. En primer lugar se ponen en juego unos enunciados que en la teoría tienen un status operatorio de teoremas, se desarrolla un proceso que pretende asegurar un valor lógico de verdad, a estos enunciados, de la manera que se completan las componentes que constituyen el sentido de la proposición y en este caso de nuestra relación. Esos procesos que establecen un valor lógico, son procesos deductivos.

a) El caso del ángulo recto, condiciones de paralelismo e igualdad de áreas:

Consideremos en primer lugar, la demostración de la proposición 47<sup>7</sup>, en donde la relación pitagórica es una conclusión, efecto de tomar como elementos fundamentales, la igualdad de las áreas derivada del criterio del paralelismo. Veamos el proceso:

En primera instancia, se considera un triángulo rectángulo y se consideran los cuadrados construidos sobre los lados<sup>8</sup>.

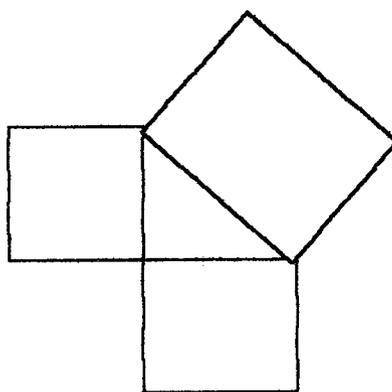


Figura No. 2

En segundo momento, se traza una paralela a los lados CG y BF desde el punto A y divide en dos rectángulos el cuadrado construido sobre el segmento que subtiende el ángulo recto. De ahora en adelante, el proceso que resta es precisamente, probar que el área de cada cuadrado construido sobre los lados que forman el ángulo recto se corresponde con uno de los rectángulos que componen el cuadrado. (Figura No. 3)

El tercer momento se consideran los triángulos EBC y ABF, los cuales resultan ser congruentes por tener iguales los lados BE y BC iguales, respectivamente a AB y BF y el comprendido por los mismos lados. (Figura No. 3)

En un cuarto momento se asegura la igualdad del triángulo EBC con la mitad del cuadrado ADEB, y la igualdad del triángulo ABF con la mitad del rectángulo BFHI;

<sup>7</sup> En su obra: *Axiomática y Geometría desde Euclides hasta Hilberth y Bourbaki* (1994), Alberto Campos hace un análisis detallado de los requerimientos para la realización de la demostración del Teorema de Pitágoras, en el Libro Primero.

<sup>8</sup> En adelante cuando se establezcan comparaciones entre cuadrados, rectángulos o triángulos; se estará considerando que la comparación se realiza para la magnitud área, comprendida por las figuras rectilíneas.



En el momento cinco se construyen los triángulos JBC y CAG, que tienen iguales dos de sus lados, los lados JC y BC del triángulo JBC con los lados CA y CG del triángulo CAG, y además el ángulo comprendido por los lados iguales, también es igual.

En el momento seis, se prueba que el cuadrado ACJK es el doble del triángulo JCB y que el rectángulo CIHG, es el doble del triángulo CAG, como los triángulos son congruentes, y con la garantía de la noción común uno, el cuadrado ACJK y el rectángulo CIHG resultan ser iguales. (Figura No. 4)

Luego con el resultado del momento cuatro y el resultado del momento seis, tenemos que el cuadrado construido sobre el lado que subtiende el ángulo recto, es igual a los cuadrados construidos sobre los lados que forman el ángulo recto. (Figura No. 4)

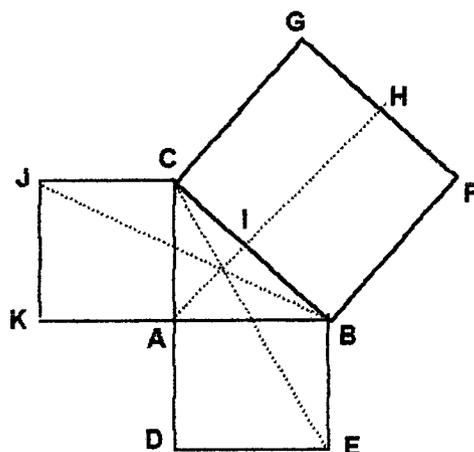


Figura No. 4

Revisando los diferentes momentos por los que pasa la demostración y considerando las garantías que hacen posible los resultados de estos momentos, aparecen como fundamentales los criterios de igualdad de áreas, el papel que juega el ángulo recto y el quinto postulado, en la determinación de la igualdad de áreas.

En primer lugar, el criterio de igualdad de áreas que se manejó en el momento tres y cinco es el de igualdad por coincidencia en la superposición; mientras que el criterio usado en cuatro y seis es el de igualdad por cantidad de magnitud área presente en las figuras rectilíneas, independiente de su forma. Pero la posibilidad de comparar la cantidad de magnitud de esa manera, está determinada por condiciones de paralelismo, las que a su vez se encuentran caracterizadas en relación con el ángulo recto. El mismo quinto postulado establece que si dos rectas al ser cortadas

por una transversal forman con ella ángulos menores que dos rectos, las rectas se cortarán.

Así, el ángulo recto permite establecer las condiciones de paralelismo, las que a su vez establecen condiciones para la comparación de las áreas, generando otro criterio de igualdad para la cantidad de área determinada por una figura rectilínea.

Al revisar con cuidado las demostraciones de las proposiciones 12 y 13 del Libro Segundo, vuelven a tomar un papel importante en ellas el ángulo recto, el quinto postulado y los criterios de igualdad de áreas, el de la superposición y el de las paralelas.

b) El caso del ángulo recto, la semejanza de las figuras y la igualdad de las áreas:

Lo que no ocurre con la proposición 31 del Libro Seis, que aunque también establece la relación sobre las áreas de las figuras construidas sobre los lados que forman el ángulo recto y la figura semejante construida sobre el lado que subtiende el ángulo recto, en este caso el argumento de la igualdad de áreas será el derivado de la semejanza entre las figuras y la proporcionalidad entre los segmentos. Consideremos la demostración del Libro Seis.

En primer lugar construye figuras semejantes sobre los lados de un triángulo rectángulo. (Figura No. 5)

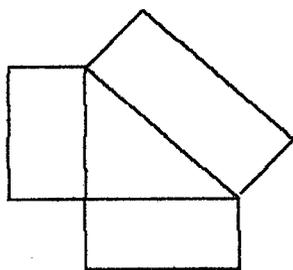


Figura No. 5

En un segundo momento traza la perpendicular AK. (Figura No. 6)

En un tercer momento se prueba que los triángulos AKB, y AKC son semejantes entre sí y semejantes al triángulo ABC. (Figura No. 6)

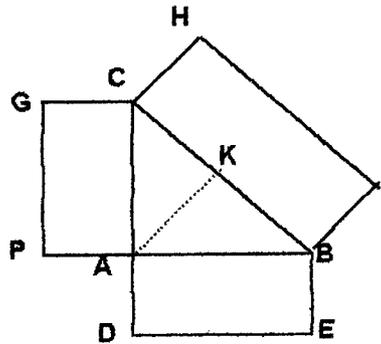


Figura No. 6

En un cuarto momento, a partir de la semejanza entre los triángulos ABC y AKB y la semejanza entre las figuras ADEB y CBIH, es posible establecer con el uso de resultados previos que:

- El segmento BC es al segmento KB como la figura construida sobre el segmento BC es a la figura construida sobre el segmento AB.
- En un quinto momento establece, a partir de la semejanza entre los triángulos ABC y AKC, y la semejanza entre las figuras ACGF y CBIH, es posible establecer con el uso de resultados previos que:
- El segmento BC es al segmento KC como la figura construida sobre el segmento BC es a la figura construida sobre el segmento AC.

Finalmente, en un sexto momento, con los resultados 1 y 2 de los momentos cuarto y quinto, establece que el segmento BC es a los segmentos BK y KC como la figura construida sobre el segmento BC es a las figuras construidas sobre los segmentos BA y AC. Pero como el segmento BC es igual a los segmentos BK y KC, entonces la figura construida sobre el lado BC resulta ser igual a las figuras construidas sobre los lados AB y BC.

Cuando las figuras construidas sobre los lados del triángulo rectángulo son cuadrados, el resultado que se obtiene es precisamente la Relación Pitagórica.

c) Un mismo sentido, dos tramas argumentativas, relaciones a considerar:

Las dos tramas argumentativas establecen el mismo sentido para la Relación Pitagórica y es el de permitir adicionar áreas. Pero por el recorrido realizado a través de las mismas se hace evidente que las tramas argumentativas que soportan tal sentido son diferentes. En ambos casos el ángulo recto, y por ende el quinto

postulado, juegan un papel importante, pero en la primera trama estos dos elementos son los que permiten hablar de igualdad de áreas, a partir de las propiedades del paralelogramo, mientras que en la segunda trama no se privilegia ninguna figura en particular para determinar la igualdad de las áreas. Se enfatiza, en cambio, en relaciones que se pueden establecer entre las figuras a partir de relaciones que se establecen entre las magnitudes como la longitud. Es decir, se habla de la relación de semejanza entre las figuras, a partir de la relación de proporcionalidad entre los segmentos y de igualdad entre los ángulos.

Si se observa el proceso de demostración de I, 47 y VI, 31, se notará que se procede con la semejanza en el Libro Sexto como se procede con la igualdad en el Libro Primero. En ambas tramas argumentativas la relación pitagórica aparece cuando se necesita hablar de igualdad en las figuras.

La mayor parte del Libro Sexto se ocupa de las propiedades de la semejanza por medio del triángulo. Es posible desarrollar una teoría de proporciones para los segmentos y en general se está tratando de desarrollar una teoría de medida para las magnitudes. La noción de semejanza vuelve a dar la caracterización de cantidad a las áreas; la relación de semejanza es una condición para hablar de proporcionalidad entre áreas.

Surgen entonces, dos elementos que parecen articular la Relación Pitagórica en ambos contextos:

- El papel del triángulo en la expresión y tratamiento cuantitativo de las áreas.
- El desarrollo de una relación de igualdad para las áreas, generándose desde dos tramas argumentativas diferentes: 1) desde la congruencia, y 2) desde la semejanza.

Vistas así las cosas, la relación de semejanza pareciera estar estableciendo una generalización para la igualdad; y es la condición para que la teoría de las proporciones llegue a las áreas. Es en estos dos aspectos donde la Relación Pitagórica adquiere su rol protagónico.

#### **4. Sobre las definiciones y sus tipos**

Una pregunta que formuló un estudiante en una sesión de trabajo en la que discutíamos sobre un texto demostrativo, nos llevó a considerar este aspecto en el requerimiento epistemológico, y es que como lo afirma, Brown (1999): "Este es un tópico lleno de interesante e importantes resultados. Muchos de ellos fundamentales para el cómo se comprende las matemáticas". Pero también sostiene que sobre este tópico no es mucho lo que se discute dado que existe en las matemáticas un punto de vista oficial dominante y aparentemente no problemático.

Pero como se verá en el requerimiento cognitivo este tópico si tiene mucho para discutir desde un punto de vista cognitivo, en esta parte dejaremos presentado el punto de vista oficial que asegura ¿Qué es una definición?. Desde el punto de vista oficial una definición debe satisfacer los criterios de *eliminabilidad* y *no-creatividad*. Este punto de vista oficial considera un sistema que privilegia unos términos primitivos, de tal manera que toda definición en ese sistema, esta dada en función de esos términos (eliminabilidad) y por otra parte ningún teorema nuevo se podrá probar con la ayuda de las definiciones si no se puede probar sin ellas, (no-creatividad) Brown (1997). El autor está asegurando que una definición introduce a los objetos, pero no puede introducir ninguna propiedad de ellas que se vuelva parte del argumento en una demostración.

En la teoría de conjuntos hay dos términos primitivos, *conjunto*, y *miembro de*. Todo los otros conceptos son definidos usando estos términos primitivos. Subconjunto, por ejemplo es definido de la siguiente forma:

$$A \subseteq B \leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B).$$

Definición: En lugar de la notación corta (izquierda), se puede siempre recurrir a la forma larga expresada en términos primitivos (derecha) (eliminabilidad).

Ahora bien, si se considera el teorema que dice que el conjunto vacío es subconjunto de todo conjunto, podemos expresarlo en función de la expresión " $\subseteq$ ":  $(\forall S) \phi \subseteq S$ , o bien se pueden tomar los términos primitivos y expresar el teorema con ellos sin perder precisión en la expresión del contenido del teorema:  $(\forall S)(\forall x)(x \in \phi \rightarrow x \in S)$ , la utilidad de la definición como una abreviación es evidente, pero los contenidos de los teoremas pueden ser expresadas sin ellas. La definición tiene entonces la función de permitir la identificación de objetos reales o simplemente posibles, de tal manera que no haya ningún riesgo de confundirlos con otros.

Las definiciones no se hacen aleatoriamente. Están motivadas, bien por la presencia recurrente de un determinado objeto o por la necesidad de realizar una particular identificación para destacar un objeto pedido por un desarrollo matemático específico. Así, la definición del conjunto vacío es una necesidad para quien desea probar el teorema anterior. Es preciso distinguir este conjunto de alguna manera. Por ello es posible encontrar en algunos textos definiciones del conjunto vacío como:  $\phi = [x: x \neq x]$ . Sin tener una definición de tal estilo para el conjunto vacío no es posible demostrar el teorema. Se presenta aquí un aspecto muy importante para las matemáticas, una manera adecuada de trabajar en matemáticas es introducir unos objetos por medio de definiciones (llamadas definiciones nominales) y asegurar su existencia por medio de axiomas en los que se afirma o concede que lo definido existe o puede construirse (definición real).

Los dos criterios de eliminabilidad y no-creatividad devienen de un proceso histórico, que tiene sus raíces para las axiomáticas de contenido como la Euclidiana en los criterios Aristotélicos para la definición: primero, que los diferentes atributos en una definición, cuando son tomados separadamente, cubren más de lo que están definiendo, pero al combinarlos sólo cubre lo definido. El segundo, la definición debe ser expresada en términos de cosas que son previas a ellas y mejor conocidas que las cosas definidas. Y tercero, "conocer *que una cosa es*, es lo mismo que conocer *por qué es*". Es claro que la forma como Euclides propone las definiciones de línea, punto, y plano, obedecen al segundo principio. De tal manera que el punto es definido como el extremo de una línea, la línea como el del plano y el plano como el del sólido. En las axiomáticas de contenido las definiciones corresponden a caracterizaciones de objetos, para los cuales se tiene un acceso directo, cumpliendo mas una función de distinción que de constitución, para los objetos.

El desarrollo a las llamadas axiomáticas formales, se debe a los trabajos de Dedekind (1881) en teoría de números, Hilbert (1899), en geometría y Zermelo (1907) en teoría de conjuntos y con el desarrollo de la formalización por parte de Frege (1879). En las axiomáticas formales, las definiciones no pueden considerarse aisladamente sino en relación con el sistema que ellas forman. Se encuentra presente, entonces, la exigencia de la no-contradicción de los axiomas entre sí, de tal manera que la existencia de los objetos definidos queda determinada por la condición de la no-contradicción.

La necesidad de determinar elementos por la definición varían entonces en las dos axiomáticas, pues si en la primera se hace necesario determinar unos objetos que constituyen el dominio de referencia para la teoría, en las axiomáticas formales, se quiere destacar las relaciones fundamentales. Esto se puede constatar en el siguiente ejemplo tomado de los Elementos de Euclides y de la Geometría de Hilbert.

#### DEFINICIONES:

- Un punto es lo que no tiene partes.
- Una línea es una longitud sin anchura.
- Los extremos de una línea son puntos.
- Una línea recta es aquella que yace por igual respecto de los puntos que están en ella.
- Una superficie es lo que tiene longitud y anchura.
- Los extremos de una superficie son líneas.

(Euclides, Libro Primero)

DEFINICION: "Considere tres conjuntos distintos de objetos. Permitamos que objetos del primer conjunto sean llamados puntos y denotados por A, B, C, (...) permitamos que los objetos del segundo conjunto sean llamados líneas y serán denotadas por a, b, c, (...); permitamos que los objetos del tercer conjunto sean llamados planos y denotados por  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , (...). Los puntos son también llamados los elementos de la geometría de la línea; los

<sup>9</sup> Para ver en detalle le desarrollo de estos tres requerimientos , se puede acudir a la introducción de Heath al libro primero de los Elementos de Euclides. (Heath, 1958)

puntos y la línea son llamados los elementos de la geometría del plano, y los puntos, las líneas y los planos son llamados los elementos de la geometría del espacio a los elementos del espacio".

(Hilbert, 1997, 3)

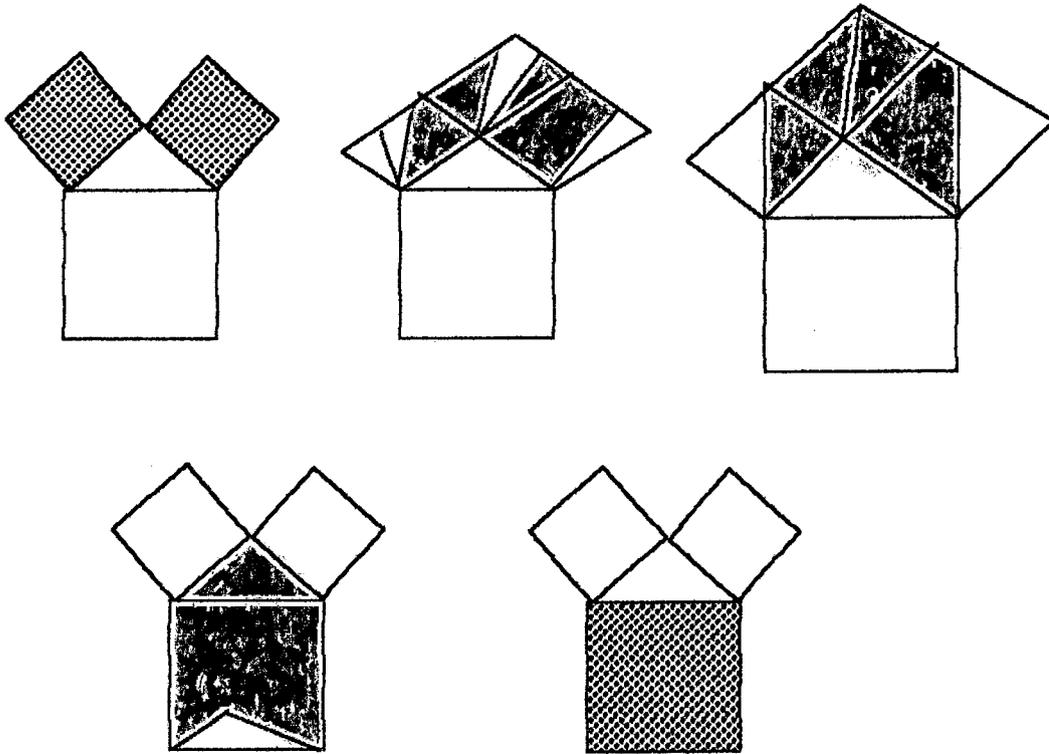
Los dos tipos de definiciones anteriores, muestran que los objetos determinados por ellas no tienen la misma naturaleza, mientras que en la primera los objetos son caracterizados en función de unos atributos en la segunda se pone de relieve una estructura semántica común a los objetos.

Con el desarrollo de la meta-matemática o teoría de la demostración Hilbert, (1924), se consigue una axiomática que permite tematizar por sí misma la derivación de los enunciados unos en relación de otros, de tal forma que la derivación deductiva de las proposiciones se hace con arreglos de signos que son promovidos al status de objetos, y esto independiente de la significación y de la interpretación de esos arreglos. Esto último se consigue renunciando a un modo de acceso puramente lógico o exclusivamente apofántico a los objetos matemáticos. Es decir, que tanto las axiomáticas de contenido como las formales tienen como forma de acceder a los objetos las intuitivas. Pero como lo señala Duval, se diferencian en lo que cada una de ellas privilegia, de tal manera que en las de contenido se privilegia el modo vinculado al reconocimiento de formas y discriminación de propiedades, en las formales el anterior modo se subordina al de estructuración espacial y temporal de toda experiencia y de toda representación posible Duval (1999).

## 5. Definiciones Vs. Explicación

Hay unas proposiciones que, como lo señala Frege, no pueden ser consideradas como matemáticas, pero que juegan un papel muy importante en las diferentes axiomáticas. Frege señala que los axiomas, los términos no definidos y las definiciones no lo son todo: "Nosotros podemos asumir que existen unas proposiciones de una tercera clase, las proposiciones explicatorias, que aunque no deben ser consideradas pertenecientes a las matemáticas mismas, deberían relegarse como el preámbulo para una propedéutica." (1971,7). En cualquier presentación de una teoría se generan formas de acceso a los términos no definidos. Así, para hablar de punto, los textos de geometría introducen expresiones como "la huella que deja la punta de un lápiz en una hoja, aunque ello no es estrictamente un punto se trata de ilustrar de una manera muy informal la idea de punto y en términos de Frege. Este tipo de enunciados constituyen lo que se denomina un preámbulo, pero que no hace parte de la matemática.

Todos esos procesos descriptivos que buscan aclarar en los sujetos la comprensión de determinados objetos, si bien no hacen parte de lo que se considera matemático no se pueden separar en el comportamiento del sujeto epistémico. Pues, aunque desde un punto de vista lógico se tenga que considerar, las definiciones como algo



Demostración Dinámica basada en Euclides

Figura No. 7

\*Tomada de Catalá y otros (p. 59)

Las anteriores gráficas son tomadas de la obra de Roger Nelsen (Nelsen, 1993).

- En un segundo grupo se encuentran las "demostraciones intuitivas" como la siguiente. Tomada de Wang (1998).

Considere un triángulo rectángulo que está dado en el siguiente diagrama.

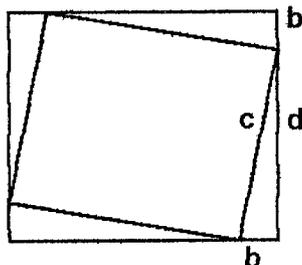


Figura No. 8

\*Tomada de Tymoczko (p. 132)

Nosotros podemos ver que el área del cuadrado mayor es la misma que la suma de las áreas del cuadrado pequeño y de los cuatro triángulos rectángulos. Nosotros escribimos esto así  $(a+b)^2 = c^2 + 4 \left( \frac{1}{2}ab \right)$ , de lo que se tiene que  $a^2 + b^2 = c^2$

- El tercer grupo lo conforman las que se apoyan en el diagrama, pero además proporcionan extensiones discursivas de apoyo a algunos pasos:

Se presenta la llamada prueba de Bháskara, pero que es complementada, pues como se registra Bháskara simplemente exhibió el gráfico señalado anteriormente.

Prueba 3: El área del cuadrado grande de la izquierda es  $c^2$  la disección muestra que el área del cuadrado grande de la izquierda debe ser igual a la suma de las áreas de la figura de la derecha formado por dos rectángulos  $ab$  y un cuadrado de área  $(b-a)^2$ . El teorema se sigue del cálculo:

$$c^2 = 2ab + (b-a)^2 = a^2 + b^2$$

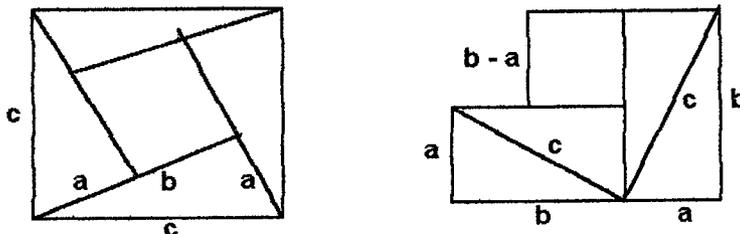


Figura No. 9

\*Tomada de Benson (p. 175)

- El cuarto grupo lo constituyen los que desarrollan un proceso determinado por un esquema de derivabilidad deductiva, en donde cada nuevo paso es efecto

ineludible del anterior y justificado por su correspondencia con unas reglas de derivabilidad muy precisas.

Teorema 1: La suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.

Hipótesis: Consideremos el cuadrado PQRS de la figura 3 b). Sean PT, QU, RV y SW segmentos congruentes, de magnitud a. Sean  $\overline{TQ} = b$  y  $\overline{WT} = c$ .

Tesis:  $a^2 + b^2 = c^2$

Demostración:

De las hipótesis se deducen las siguientes consideraciones:

- Por la relación de congruencia LAL (lado ángulo lado), los cuatro ángulos rectángulos que se generan (PWT, QUT, RVU y SWV) son congruentes.
- Como  $\alpha$  y  $\beta$  son los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, entonces  $\alpha$  y  $\beta = 90^\circ$ ; y como  $\alpha + \theta + \beta = 180^\circ$ , entonces  $\theta = 90^\circ$ . Aplicando en los vértices T, U, V y W, estas conjeturas y las hipótesis preestablecidas, se deduce que el cuadrilátero TUVW es un cuadrado.
- El área del cuadrado PQRS es  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- El área de cada uno de los cuatro triángulos es  $ab/2$
- El área de los cuatro triángulos es  $4(ab/2) = 2ab$ .

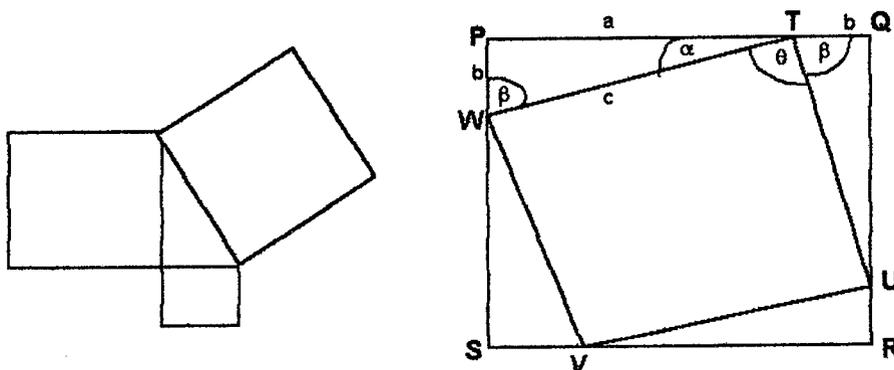


Figura No. 10

\*Tomada de Zárate (p. 130)

- El área del cuadrado TUVW es  $c^2$
- El área del cuadrado TUVW también puede encontrarse restando, del área del cuadrado PQRS, el área de los cuatro triángulos, esto es:

$$(a^2 + 2ab + b^2) - 2ab = a^2 + b^2$$

- Por los resultados de las consideraciones 6 y 7, se tiene que

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Como queríamos probar.

Esas cuatro pruebas tienen en común distintas formas de experiencia que permiten ver o comprender lo que es una prueba. Dada la proyección didáctica de este requerimiento, hemos considerado capturar el aspecto fenomenológico de la prueba, como la manifestación de la importancia de los procesos de prueba y demostración en la comprensión del conocimiento matemático. En esta dirección se encuentra la siguiente caracterización de prueba dada por Martín-Lof:

"La prueba de un juicio es la evidencia de él (...) prueba es lo mismo que evidencia (...) la prueba de un juicio es el mayor acto de aprehensión, comprensión y entendimiento o mirada de él. Así, una prueba no es un objeto es un acto", Martín – Lof 1983-4:231)"

Posteriormente se destaca que la prueba en primera instancia es un acto y sólo después empieza a considerarse como un objeto. Situado en esta concepción Richard Tieszen, señala las siguientes caracterizaciones de prueba que explican la diversidad de actos llamados de prueba ante un mismo enunciado matemático.

a) Una prueba es el cumplimiento de una intención matemática:

Esta caracterización exige la precisión de lo que se considera una intención matemática. El concepto de intencionalidad se determina al explicitar que los actos de cognición están dirigidos hacia, o referidos a objetos por la forma del contenido de cada acto, donde el objeto del acto puede o no puede existir.

El aspecto de la intencionalidad, se relaciona con los procesos de elaboración de sentido, pues como se señalaba anteriormente, una componente del sentido en un contexto de enunciación no teórico es el contenido semántico asociado a una proposición ( $\phi$ ). Pero el acto cognitivo que fija ese contenido semántico, está determinado por lo que un sujeto S, cree de  $\phi$ , o conoce de  $\phi$  o recuerda de  $\phi$ . Creer, recordar o conocer, son actos diferentes, pero en ellos se debe manifestar un mismo contenido de  $\phi$  de acuerdo con la forma como se presente ese contenido en el sujeto, se realiza una extensión de tal manera que el desarrollo del conocimiento está supeditado a la forma como la información y la evidencia son adquiridas.

"Así un procedimiento determinado por una intención dada puede ser totalmente determinado o totalmente indeterminado dependiendo de qué tanto conocimiento se ha adquirido o que tanta experiencia se tiene con el objeto en cuestión. Una creencia acerca de un objeto puede ser totalmente indeterminada pero aun así se tiene al menos alguna concepción del cómo acercarse para mejorar el conocimiento del objeto".

(Tieszen, 1992: 6)

La prueba es, entonces, el cumplimiento de una intención matemática, en tanto que las intenciones matemáticas como actos cognitivos pueden estar vacías (no llenas) o llenas. Como los objetos de los actos matemáticos cognitivos no necesariamente existen, sólo es posible justificar que ellos existen si se tiene la evidencia de su existencia y en este aspecto la prueba es esa evidencia. Obtener tal evidencia es el cumplimiento del acto matemático en razón de un acto cognitivo, de tal manera que se está en un estado pleno, completo si se tiene evidencia, e incompleto si no se tiene evidencia, Tieszen (1992) confirma lo anterior al señalar que se puede tener muchas creencias y opiniones en matemáticas, pero sólo tener pruebas, es decir evidencia de algunas de ellas, con lo cual puede surgir la necesidad de completar estados de conocimiento con respecto a los objetos de los que no se tiene evidencia. De ahí el énfasis en la intencionalidad y el cumplimiento (llenado) como condiciones necesarias para que un matemático conozca  $\phi$ ; esto es crea en  $\phi$ , y la creencia en  $\phi$ , sea producto de una prueba que da la evidencia de él.

De tal manera que la prueba como el cumplimiento de una intención matemática tiene la función de evidencia, y aunque en un contexto amplio se hable de evidencia a priori, evidencia de necesidad, evidencia inter subjetiva, evidencia adecuada, clara y distinta evidencia. En matemáticas, el dúo evidencia y adecuación, juegan un papel relevante en la fundamentación de una teoría de la prueba. De tal forma que las pruebas llamadas factibles, o finitistas o intuicionistas o predicativas, se elaboran sobre una clase de evidencia, que se deriva de lo que se considera relevante para responder preguntas acerca de los procesos que la creencia de  $\phi$  produce.

A las preguntas inmediatas que surgen a tal caracterización de la prueba ¿Es este concepto de prueba privado, materia subjetiva, inmerso en un solipsismo? ¿si la evidencia está tan condicionada, entonces qué puede tener el status de prueba clásica? Tieszen, responde con los siguientes argumentos que fundamentan la mirada de la prueba como el cumplimiento de una intencionalidad matemática desde condiciones externas que se imponen para el cumplimiento de intenciones matemáticas, que van más allá de consideraciones psicológicas. Esta, en tanto existen vinculaciones que tienen el carácter de ser acuerdos intersubjetivos, para todo tiempo, todo lugar y toda proposición matemática, *de facto* la intersubjetividad acerca de la prueba existe, el conocimiento es pensado para tener una fundamentación evidencial firme. Esta es una clase de objetividad de la prueba. Es lo que Tieszen señala como el aspecto que conecta la famosa prueba de Dedekind de la existencia de infinitos sistemas, la solución de Hilbert al problema de Gordon y la historia que tiene el último teorema de Fermat.

Con respecto a la segunda pregunta, se señala un aspecto que cuestiona lo que se ha llamado "prueba clásica" y en el caso de las que se apoyan en el argumento del tercer excluido, es decir las pruebas que tiene la forma:

$$\frac{\neg\phi}{\Psi \wedge \neg\Psi} \\ \phi$$

La presencia de este principio es considerada como una ilegitimidad epistemológica (cuando es aplicado más allá de ciertas fronteras) considerándose entonces como un postulado inevitable de la razón humana, al servicio de hechos humanos. De tal manera que de acuerdo con la caracterización 1 de prueba, la diferencia entre intenciones vacías e intenciones llenas, radica en el hecho de presentar un objeto o al menos poseer la forma de poderlo presentar, por esta razón las llamadas pruebas indirectas que emplean el principio del tercero excluido. Más que una evidencia de los objetos, proporcionan apenas una tenue presencia de ellos, de tal manera que la convicción que de ellas se deriva para el razonamiento resulta ser de orden diferente a la que proviene de los procesos directos.

b) La prueba como una realización de una expectativa matemática:

Se puede tener la concepción de un objeto sin estar viéndolo, de tal manera que la intención dirigida al objeto está vacía. La intención vacía puede ser vista como un conjunto de anticipaciones o expectativas acerca del objeto, que están determinadas por un campo de creencias, recuerdos. Tales expectativas son componentes fundamentales de la cognición humana, especialmente en contextos donde se quiere desarrollar conocimiento. Estas expectativas cambian en el transcurso de elaboración del conocimiento, de tal manera que la prueba como realización de expectativas no es posible verla separada de una teoría de la intencionalidad, así probabilidad o demostrabilidad es lo mismo que realizabilidad.

Al considerar la interpretación de Kolmogorov de las proposiciones como problemas o como preguntas y las pruebas como soluciones, se proporciona una forma de ver la diferencia entre expectativas realizables y no realizables o intuiciones completa e incompletas Intentar elaborar un conocimiento acerca de un objeto es como resolver un problema acerca del objeto. Por esta razón también es posible llegar a la siguiente caracterización de la prueba.

c) La prueba como la solución de un problema matemático:

Desde una teoría de la intencionalidad y con las consideraciones anteriores, no sería posible separar la prueba del hecho de solución de un problema,. Cuando se resuelve un problema se determinan formas de solución que obedecen a parámetros provenientes de creencias adquiridas, de tal manera que se soluciona el problema o se falla en la solución, la reflexión sobre estos procesos desarrollan

insight al interior de las reglas que los gobiernan. Y en consecuencia mejora el conocimiento del objeto referenciado en el problema.

d) La prueba como un programa que satisface una especificación particular:

El procedimiento o método por el cual se llena una intención puede ser visto como un programa que satisface una especificación dada.

Este aspecto pone en consideración un tema de mucha vigencia actualmente, y es el de si las máquinas (como ejecutoras de programas que satisfacen especificaciones particulares), poseen intencionalidad o no, o son capaces de experiencia o no. Si se admite que las máquinas no tiene ninguna experiencia intencionalidad, al menos intrínsecamente, se puede por consiguiente argumentar que las pruebas automatizadas proporcionan una evidencia de derivabilidad, solamente bajo la consideración de que las pruebas son interpretadas y comprendidas por seres con intencionalidad.

Todas las caracterizaciones de prueba están fuertemente conectadas y resaltan formas de ver la prueba desde una teoría de la intencionalidad que permite considerar, la elaboración de conocimiento matemático como un acto determinado por una intención de completitud.

La diversidad de pruebas, que inicialmente se señalaban como demostraciones del teorema de Pitágoras, se constituyen en un buen ejemplo de la identificación de evidencia con prueba. De tal manera que se pasa por las pruebas visuales, cuyo acto intencional es exhibir un aspecto perceptivo del objeto, fundamentada una elaboración de sentido sustentada en un valor epistémico semántico, hasta las demostraciones como un discurso teórico fundamentado en un razonamiento deductivo que permiten elaborar un sentido determinado por las componentes epistémica, teórica y lógica y en este caso la evidencia se subordina a la adecuación. De tal manera que las pruebas estarán caracterizadas por la intencionalidad de hacer evidente un objeto y las demostraciones serán las pruebas que establecen teoría al interior de un contexto teórico específico.

## **7. El rol de la figura en el contexto del Libro Primero de los Elementos de Euclides la Geometría Euclidiana – El caso del triángulo -**

El rasgo fundamental en este Libro es que no existe la posibilidad de concebir la cantidad de magnitud de una forma general. Es decir, no es posible tratar de la misma forma (que posteriormente será la numérica) la cantidad de amplitud, de longitud o de área. Este Aspecto determinara la existencia de tres funciones para la figura en el Libro Primero.

a) La figura como un tipo de registro:

Ella se constituye en un todo significativo que es posible "aplicar" o mover. De esta concepción de la figura se deriva la estrategia de superposición de figuras. Estrategia que se convierte en un argumento sobre el que se estructura la demostración del primer teorema del Libro Primero: La proposición I-4 del los Elementos. Esta proposición establece que si dos triángulos tienen iguales, respectivamente, dos de sus lados y el ángulo comprendido entre ellos, los triángulos serán iguales. La construcción sobre la que se estructura la prueba se reduce a la superposición de los dos triángulos.

El texto Euclidiano dice: "si se aplica el triángulo ABC al triángulo DEZ" (Euclides), pero como no existe ningún postulado o teorema previo, relacionado con la posibilidad de colocar una figura sobre otra figura o sobre un punto dado, el argumento que se elabora para concluir la igualdad de los triángulos se apoya en la imagen derivada de la construcción. En este caso, la imposibilidad de proveer un proceso demostrativo, ha sido superada por la imagen producida a través del procedimiento de transposición. Es decir, el tratamiento figural tiene un efecto de argumento concluyente para la demostración.

Es importante anotar que este procedimiento es usado en I-8 y III-24 y como lo señala Alvarez (2000): "Aun si las proposiciones I-8 y III-24 usan este procedimiento como la construcción sobre la que se basa la demostración. Lo principal no será la conclusión de la igualdad de las figuras como efecto de mostrar su coincidencia; será, en cambio, el mostrar que el movimiento de la figura reduce la demostración de la igualdad de figuras sobre bases iguales a el caso de la igualdad de figuras sobre la misma base".

De esta manera, en los casos en que las figuras están en condiciones de bases iguales, el argumento de Euclides no intenta concluir directamente la coincidencia de la figura de la construcción. La conclusión la obtiene de la imposibilidad de la no coincidencia. Es decir, que aunque se concibe a la figura como un registro figural, hay un argumento más fuerte que le está asignando a la figura otro papel.

b) La figura como un objeto geométrico:

Este aspecto es uno de los que se elabora a lo largo del Libro Primero, pues aunque las definiciones se confiere una existencia representativa para las figuras:

Def. 19: Figuras rectilíneas son las comprendidas por rectas, triláteras, las comprendidas por tres, cuadriláteras las comprendidas por cuatro, multiláteras las comprendidas por más de cuatro rectas.

Def. 20: De entre las figuras triláteras, triángulo equilátero es la que tiene los tres lados iguales, isósceles la que tiene sólo dos lados iguales y escaleno la que tiene los tres lados desiguales." (Euclides, 1991:195.)

Pero sólo con los postulados, las nociones comunes y los teoremas, se garantiza su existencia como objeto geométrico. Para el caso del triángulo equilátero los tres primeros postulados y la proposición 1 garantizan su construcción. Es decir, la existencia del objeto geométrico, está garantizada por una forma de construcción que, en este contexto está asegurada por un proceso demostrativo que garantiza la existencia teórica de la figura. Por esa razón, la construcción de la figura geométrica cuadrado (proposición 46) sólo es posible realizarla cuando se cuenta con la teoría de las paralelas. Proposiciones como:

#### **PROPOSICION 37**

Establece que si los triángulos están sobre la misma base y entre las mismas paralelas son iguales entre si.

#### **PROPOSICION 38**

Afirma que si los triángulos están sobre bases iguales y entre las mismas paralelas son iguales entre sí.

Consolidan al triángulo como un objeto geométrico. Las condiciones de existencia y unicidad del mismo se derivan del quinto postulado y de una teoría de las paralelas. El quinto postulado aparece en el bloque (proposiciones 11 a 32) en el que el ángulo recto se constituye como un referente definitorio de las relaciones entre ángulos. A su vez, determinará criterios de existencia o no de la figura (triángulo), bajo la relación de paralelismo, pues por construcción ya se garantizaba la existencia (proposición 1).

c) La figura como una medición para el tratamiento cuantitativo y cualitativo de las magnitudes:

Se presenta un aspecto muy importante, todo el Libro 1 estuvo proporcionando los elementos para manejar aritméticamente las tres magnitudes: amplitudes, longitudes y áreas, bien sea comparándolas para establecer igualdades, o para establecer órdenes; u operándolas adecuadamente es decir que se garantizara la cerradura en la operación. Pero este propósito se desarrollo al costo de no poder desarrollar una teoría para la cantidad independiente de la forma. En efecto, es la forma la que le impone los tipos de cantidades (longitudes amplitudes áreas).

El postulado 5 permite establecer al ángulo recto como elemento definitorio para relaciones entre ángulos, para relaciones de paralelismo y para la determinación de las propiedades de los paralelogramos y en particular del cuadrado, las dos figuras fundamentales para el tratamiento cuantitativo de las áreas.

Un aspecto muy importante es que la figura no llena la realización cuantitativa. Son las nociones comunes y los postulados los que proporcionan los soportes fundamentales para el desarrollo de una teoría de la cantidad limitada por la forma.

d) La figura como un operador para las magnitudes:

De las proposiciones 46 a 48 se va determinar la cerradura para las áreas, pues si hasta la 45 ya es posible la adición y sustracción de áreas, en la 46 se proporciona la forma de construir un paralelogramo cuyos lados sean iguales y cuyos ángulos sean cada uno igual a un ángulo recto. Con esta figura, genera una cerradura para la adición de áreas, pues las últimas dos proposiciones, que son conversas la una de la otra, formulan el algoritmo para la adición de áreas, utilizando al triángulo rectángulo como operador. Es el único caso en que el triángulo no está determinando relaciones entre las magnitudes que contiene, sino que es usado para permitir la adición de áreas.

El papel del triángulo como operador para las áreas se establece entonces, con la Relación Pitagórica, pues dadas dos áreas - recuérdese que en este contexto las áreas las expresan la figura rectilíneas - si son expresadas por figuras semejantes o por cuadrados, con sólo formar con ellas un triángulo, se determinará el área suma.

Finalmente, desde el punto de vista de la reflexión didáctica, las preguntas formuladas por los estudiantes durante el desarrollo de las sesiones y por los investigadores en las reuniones de trabajo, dilucidaron como aspectos a desarrollar para este requerimiento los anteriormente expuestos y cuyo efecto en el proceso permitió aclarar bloques de orden epistémico en estudiantes y profesora.

### **C. EL REQUERIMIENTO COMUNICATIVO PARA EL DESARROLLO DE LA ARGUMENTACIÓN EN GEOMETRÍA**

La dimensión comunicativa, en el marco de las relaciones didácticas, es el **dispositivo**<sup>10</sup> que da razón de la estructuración del contexto del aula y el espacio para la producción de formas discursivas particulares que dan vida a la relación didáctica. Esto, en tanto que una situación didáctica es en sí misma una situación de comunicación. Los elementos que la estructuran (estudiantes – docente – saber escolar) se ven relacionados por un principio generador de las situaciones sociales: la comunicación (Calderón, 2000). De ahí que, emprender un análisis de los requerimientos de orden comunicativo para el desarrollo de competencias argumentativas en matemáticas, implique realizar una mirada del componente comunicativo como el marco de relaciones y condiciones discursivas e interactivas que estructuran una situación de comunicación argumentativa en el aula.

---

<sup>10</sup> El aula como instancia de materialización simbólica, definida por condiciones espacio- temporales y por las rutinas escolares.

## 1. Una perspectiva discursiva

Un primer aspecto en la definición de los requerimientos comunicativos para el desarrollo de competencias argumentativas en matemáticas, es la identificación de una perspectiva discursiva que sustente las formas de interacción argumentativa en el aula de matemáticas. En este caso, desde un punto de vista epistemológico se ha optado por una propuesta dialógica del lenguaje (Bajtín, 1982, 1997), que implica asumir los procesos discursivos como procesos semióticos – sociales. Esto es, que "tiene como principio la producción permanente de sentidos y significados sociales, empleando como recurso la lengua natural. Esta actividad permite la configuración de sujetos discursivos que representan las voces sociales y que interactúan en actitud dialógica y responsiva, construyendo contextos de comunicación (o esferas de la comunicación) y géneros discursivos. El resultado de la actividad discursiva es el enunciado y sus múltiples formas, que dan razón de las actitudes de los hablantes hacia los otros enunciados y de las relaciones de fuerza que propone el enunciador en una situación específica." (Calderón, 2000).

Desde este punto de vista, el discurso en tanto actividad socio- semiótica permite la configuración permanente de distintas esferas de la comunicación, en concordancia con las diferentes prácticas sociales, produciendo diversos tipos de géneros discursivos (Bajtín, 1982). En el caso particular que nos ocupa, se trata de la esfera social de las prácticas discursivas de tipo pedagógico. Tales prácticas dan como resultado el contexto pedagógico (relaciones socio - culturales del aula y de la institución educativa) y el género discursivo pedagógico que lo expresa y lo desarrolla. El problema de las prácticas pedagógicas será tratado bajo el componente socio- cultural. Según Bernstein, (1993), el discurso pedagógico es el conjunto de reglas de comunicación que integra los discursos instruccional y regulativo. En este sentido, se convierte en el dispositivo que permite el desarrollo de procesos de interacción propios del aula y del espacio educativo, en general. Así, en el presente estudio, el diseño de una situación argumentativa para el desarrollo de competencias argumentativas en geometría, está inmerso en el campo de las interacciones pedagógicas.

Por ejemplo, las reglas del discurso instruccional aplicadas al conocimiento geométrico, generan: un principio de secuenciación del conocimiento puesto en juego (elección de un tópico, de un foco y de un tipo de desarrollo del conocimiento) y diseños de actividades de aula (propósitos de aprendizaje y tareas que propicien su desarrollo). Por su parte, las reglas del discurso regulativo generan, opciones metodológicas (formas de interacción entre estudiantes y contenidos, estudiantes - estudiantes y estudiantes y profesor) y formas de evaluación (formas de seguimiento, de valoración y de rediseño de procesos).

## 2. Una perspectiva comunicativa de la competencia argumentativa en geometría

Con base en lo expuesto anteriormente sobre la competencia argumentativa en matemáticas, se considera aquí que el espacio de la comunicación argumentativa en el aula es el espacio privilegiado para la manifestación y producción de sentidos y de tramas argumentativas. Esto, en tanto que la realización de los procesos discursivos se convierten en la manifestación de los procesos comunicativos. Así pues, el análisis de los requerimientos comunicativos para el desarrollo de competencia argumentativa en geometría, se asumió desde la perspectiva de las condiciones para la interpretación y producción de sentidos y de tramas argumentativas en matemáticas, en el aula. Como punto de partida para la explicitación de tales condiciones y en aras de establecer las relaciones teóricas y metodológicas respectivas con los otros requerimientos, se explicita a continuación una *noción de trama argumentativa y los elementos que intervienen en su estructuración y producción*. En el estudio se identificaron dos elementos que determinan la producción de tramas argumentativas, a saber: la configuración de una situación argumentativa y la producción de textos argumentativos.

### a) Sobre la trama argumentativa:

Apoyados en la teoría de la argumentación (Perelman y Olbrecht – Tyteca, 1989; Gómez, 1991, 1993, 1999; entre otros), consideraremos como trama argumentativa, al tejido de relaciones discursivas que construye un sujeto argumentador con el propósito de convencer o persuadir a un auditorio, del sentido particular expuesto y consolidado a lo largo de esa trama argumentativa. La trama argumentativa es análoga a lo que la teoría de la argumentación ha denominado *la argumentación*; es decir, al producto discursivo que se realiza en un contexto argumentativo y que se concreta en un texto argumentativo. Sin embargo, se destaca aquí que la perspectiva de trama argumentativa prioriza el carácter discursivo<sup>11</sup> (dimensión semiótica y pragmática) de la argumentación y que los factores involucrados en su desarrollo, son fundamentales en los procesos de comunicación de lo matemático en el aula.

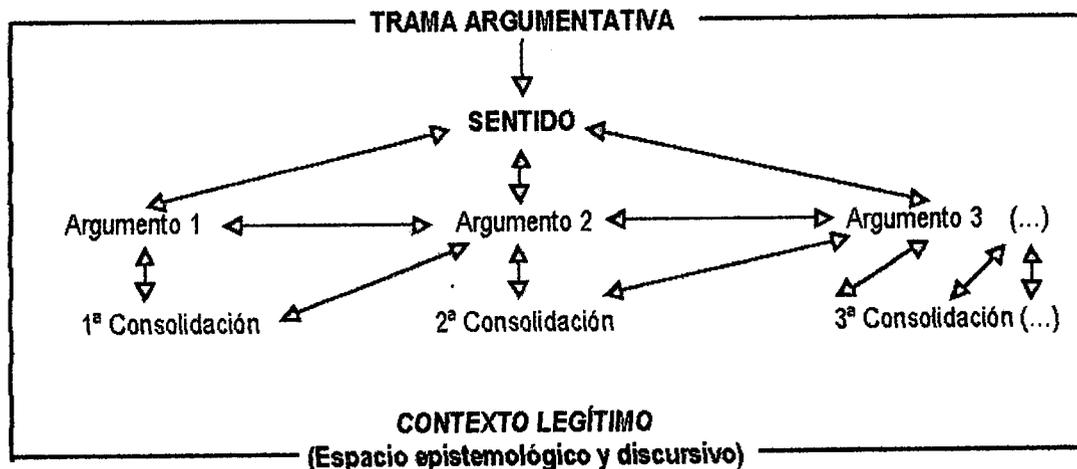
Así, la producción de tramas argumentativas se consideró como la actividad discursiva de los estudiantes en el proceso argumentativo. Tal proceso, al servicio de la *interpretación y producción de tramas argumentativas de tipo geométrico implica*:

---

<sup>11</sup> Ver la noción de discursividad en Calderón, Dora (2000) "Género discursivo, discursividad y argumentación". Ponencia presentada para la defensa de Candidatura a Doctor. Doctorado en Lenguaje y Educación. Universidad del Valle.

DISCURSIVAMENTE	COGNITIVA Y DISCURSIVAMENTE	CONTEXTUALMENTE
<ul style="list-style-type: none"> <li>• La asunción de una actitud argumentativa.</li> <li>• La configuración de roles discursivos de tipo argumentativo.</li> <li>• El dominio de criterios gramaticales para la producción de textos argumentativos de tipo geométrico.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• El reconocimiento de sentidos implicados en los textos geométricos.</li> <li>• La contextualización de tales sentidos.</li> <li>• El posicionamiento epistémico y discursivo frente al saber geométrico.</li> <li>• El uso de registros semióticos de tipo geométrico.</li> <li>• La producción de argumentos para la defensa de soluciones a problemas de geometría.</li> <li>• La interpretación activa de los argumentos contrarios.</li> <li>• La elaboración de consensos.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• El reconocimiento de una situación argumentativa.</li> <li>• La internalización y uso de reglas socioculturales, sociomatemáticas y matemáticas, puestas en la escena argumentativa.</li> </ul>

Particularmente, la trama argumentativa se constituye como trama en tanto que, en un contexto de comunicación particular, teje relaciones entre argumentos parciales, a propósito de un sentido que se pretende configurar y consolidar. Así, cada producción de argumentos contribuye, de cierta manera, a construir significados y relaciones semióticas entre ellos, que van conformando el marco argumentativo (teórico y epistemológico) del sentido en construcción. El siguiente esquema visualiza la estructura de la trama argumentativa que hasta ahora se ha construido en el proyecto y que se convierte en un criterio para el análisis de la producción de tramas argumentativas por parte de los estudiantes.



Del esquema anterior puede inferirse que la trama argumentativa es una categoría de orden discursivo que privilegia las instancias semántica y semiótica, en tanto que es el espacio de construcción del sentido que se argumenta. No obstante, opera efectivamente en la instancia pragmática, en tanto que es puesta en escena a propósito de unos interlocutores, en una situación de comunicación particular y con un objetivo definido. Así, de manera dialéctica, el sentido argumentado es el que orienta la producción de argumentos y de las relaciones que se generan entre ellos; a la vez, los argumentos que se producen y las relaciones de fuerza que se tejen entre ellos, contribuyen paulatinamente a desarrollar diferentes aspectos del sentido, consolidando un campo de significación particular en el que el sentido es legítimo. Este campo de significación se constituye en parte de un marco referencial más amplio (teórico, histórico, filosófico, etc.), que estructura el contexto general en el que un sentido y una trama argumentativa son válidos, tanto desde el punto de su pertinencia semántica - semiótica como desde su nivel de aceptabilidad para el auditorio universal construido en ese contexto.

De esta manera, una trama argumentativa resultará del esfuerzo cognitivo - discursivo de un sujeto argumentador por: i) identificar un sentido particular en un texto matemático y en un contexto específico (he ahí el dominio en la dimensión epistemológica); ii) construir una postura personal frente al sentido particular establecido (afectando las concepciones personales sobre el tópico implicado) y producir argumentos de tipo heurístico; y iii) construir un contexto argumentativo para la puesta en escena de su argumentación (un auditorio y un discurso argumentativo eficaz, en un contexto dado).

Particularmente nos ocuparemos en este apartado de los elementos de tipo comunicativo que constituye la trama argumentativa, dado que los elementos de tipo epistemológico y cognitivo fueron expuestos anteriormente.

#### b) Construcción discursiva de la situación argumentativa:

El contexto de producción argumentativa: La producción de una trama argumentativa exige, en primera instancia, un contexto de producción o una situación de producción. En concordancia con la situación, exige, en segunda instancia, la construcción discursiva de los roles comunicativos asociados a la situación; y, en tercera instancia, la producción de un discurso argumentativo; estos dos últimos aspectos serán explicitados en los siguientes apartados. Una situación de comunicación, cualquiera que sea, es una elaboración parcial de los interlocutores, en un espacio y en un tiempo determinados. Está definida por el reconocimiento de *un contexto de comunicación* (espacio social y legítimo de diálogo), por un *objeto de la comunicación* (temática: tópico, situación, etc.) y por *unos propósitos de la comunicación* (para qué se realiza la comunicación).

c) El contexto de comunicación argumentativa:

Se corresponde con el contexto discursivo de la interacción. Es decir, que se reconoce, en este sentido, la existencia de un espacio social institucionalizado, que produce y legitima cierto discurso y ciertas formas de interacción discursiva como la argumentación. El espacio de la argumentación está definido por un criterio pragmático, por uno semántico y por uno textual: En el primer caso, por la naturaleza socio- cultural del contexto discursivo (tradicionalmente es un espacio para la comunicación argumentada; por ejemplo, el campo jurídico, el científico, el político, el educativo). En el segundo caso, por la necesidad de debatir un asunto para aclarar y tomar la decisión más adecuada con respecto al tema. En el tercer caso, por "el lugar textual" (Lo Cascio, 1991) propio de la argumentación: la discusión, el debate científico, la demostración filosófica o matemática, el mitin político, el texto publicitario, entre otros.

Desde este punto de vista, los hablantes involucrados en la situación argumentativa, habrán de identificar no sólo las condiciones generales de producción discursiva en un contexto dado, sino la pertinencia del uso de la comunicación argumentativa en ese contexto y sus formas particulares de argumentar y de textualizar lo argumentado. Bajo estas condiciones, la producción de la trama argumentativa tendrá ciertas características que obedecen al contexto: tipo de argumentos que se eligen, enfoque para el tema de la argumentación, recursos argumentativos empleados, estructuras textuales construidas, etc..

d) El objeto de la comunicación argumentativa:

Corresponde al tema, al tópico o al asunto tratado en una situación argumentativa. Este aspecto, de orden semántico permite objetivar el proceso argumentativo en la situación argumentativa: ¿qué o sobre qué asunto se va a argumentar?. Si bien este aspecto se desarrolla en la producción de la argumentación, convirtiéndose en un componente textual, en el contexto de la comunicación argumentativa constituye uno de los elementos generadores de la situación de argumentación, en tanto que se reconoce como un tema polémico, susceptible de ser debatido y cuyo debate contribuirá a la consolidación de un saber propio del contexto discursivo implicado.

El objeto de la argumentación construye, en un momento dado, al argumentador, en tanto que pone al sujeto que argumenta en situación discursiva frente a ese objeto y le obliga a asumir una posición epistémica y social frente a él. Así, la producción de una trama argumentativa, exige fundamentalmente la existencia de un **sentido** con respecto a un tema o tópico, que es el que se pretende argumentar en todo el desarrollo de la trama. Para el interlocutor, será necesario, entonces la identificación del sentido argumentado, su valoración y la toma de decisiones con respecto a este sentido: aceptación o rechazo.

e) Los propósitos de la comunicación argumentativa:

Corresponden al para qué de la argumentación. Este aspecto se determina desde dos criterios: pragmático y semántico. El primer criterio, obedece a la pretensión de lograr la adhesión de un interlocutor (individual o colectivo) a la tesis que se argumenta; en este sentido se pretende incidir en las convicciones, en las creencias o en las decisiones de ese interlocutor con respecto al tema en cuestión, para lograr un marco de validez y de pertinencia socio- cultural de la tesis. El segundo criterio, expresa la necesidad de validar un esquema de relaciones semánticas construidas para dar razón de un saber, con el fin de aumentar las posibilidades de confiabilidad de la tesis puesta en cuestión.

Desde este punto de vista, la trama argumentativa exige un desarrollo claro de los propósitos que orientan su producción. De ahí que la generación de argumentos y las conexiones que se establezcan entre ellos, obedeciere fundamentalmente a los propósitos de la argumentación, y consecuentemente, dará vida a estructuraciones particulares de la trama argumentativa.

Para el caso del presente análisis el contexto de la argumentación es el aula y se define por: las condiciones y propósitos de la carrera (la licenciatura en Matemáticas, segundo semestre), por: los propósitos y estructura de la asignatura (Estilos de razonamiento en matemáticas), por el tema objeto de reflexión en la asignatura (la Relación Pitagórica y sus posibles contextos) y, por la tarea concreta en un momento dado (resolver un problema, defender una solución, preparar una respuesta para el grupo, entregar un trabajo, etc.).

f) Construcción discursiva de los interlocutores:

En el contexto de una situación de comunicación, los interlocutores construyen y ponen en escena roles discursivos que permitan el desarrollo de tal situación. En el caso específico de la comunicación argumentativa, existen, de manera predeterminada ciertos roles comunicativos que estructuran la interacción argumentativa. Canónicamente tales roles son los de argumentador y de auditorio (Perelman y Olbrecht-Tyteca, 1989). El primero se construye como el hablante - oyente que se postula epistémica y pragmáticamente como un sujeto a favor y en defensa de una tesis que puede ser discutida. El segundo, se construye como el oyente - hablante que se postula epistémica y pragmáticamente como un sujeto que estudia, valora y decide sobre una tesis puesta en cuestión.

Pero más allá de la estructura canónica de los roles argumentativos, es evidente que en la construcción discursiva de los interlocutores de una situación argumentativa, influye, de manera definitiva, "la naturaleza, el comportamiento, el contexto cultural, la posición social, el prestigio y la postura personal" (Lo Cascio, 1991) de los participantes en la comunicación argumentativa. Desde este punto de vista, en una situación argumentativa la construcción de los roles estará

determinada estructuralmente y matizada por condiciones particulares de tipo personal. Además, incidirá, de manera definitiva, las condiciones mencionadas en el contexto de la argumentación.

Desde un punto de vista estructural, Lo Cascio (1991) determina cuatro fases del acto argumentativo. En estas fases se configura el rol de los interlocutores que argumentan, en función del proceso argumentativo.

Tales fases se consideraron en este estudio como herramientas útiles para la identificación de los desempeños argumentativos de los interlocutores. Sin embargo, a partir de la experiencia de observación de los procesos argumentativos de los estudiantes, el grupo investigador ha identificado una quinta fase, referida a un momento intermedio entre las fases uno y dos de Lo Cascio. Fase que a nuestro juicio garantiza la comprensión de puntos de vista.

- Fase de expresión. Manifestación de la aserción (opinión) bajo una posición determinada, respecto al tema. Esta fase es responsabilidad del argumentador.
- Fase de aclaraciones. Sobre la exposición del argumentador, el auditorio considera e indaga por aspectos que aún no están claros en la exposición. Esta fase es responsabilidad de argumentador y auditorio y representa la garantía de una comprensión más cercana entre la propuesta del argumentador y lo comprendido por el auditorio.
- Fase de toma de posiciones (positivas o negativas) en relación con la opinión o tesis. Esta fase es responsabilidad del auditorio y en ella se define el rol de antagonista o de colaborador del auditorio en el proceso argumentativo.
- Fase de desarrollo del antagonismo o de la cooperación. Es una fase intermedia en la que evoluciona fuertemente el proceso argumentativo y en la que se define la posición de cada uno de los interlocutores, mediante la justificación (por parte del auditorio). Esta fase es responsabilidad de ambos interlocutores.
- Fase de conclusión. En esta fase se consolida alguna de las posiciones o se realiza un acuerdo común. Es resultado de la estrategia argumentativa y en ella suelen incidir también factores externos al proceso argumentativo propiamente dicho (p.e. emociones, prestigio, etc.). Esta fase es responsabilidad de ambos interlocutores y finaliza con el consenso.

Desde una perspectiva pragmática, se pueden identificar condiciones para la postulación de un sujeto argumentativo, en función del buen cumplimiento del acto argumentativo, a saber: la honestidad (compromiso ético con el proceso argumentativo) y la buena ejecución del acto argumentativo (procedimientos adecuados, en concordancia con las exigencias del contexto argumentativo). Desde el punto de vista de la primera condición, los sujetos que argumentan estarán en condiciones de asumir sinceramente una actitud argumentativa y de manifestar una

actitud crítica frente al tema polémico. Estarán dispuestos a establecer el "contacto intelectual" (Perelman y Olbrecht – Tyteca, 1989) y a propender por una decisión razonable y/o razonada sobre el tema en cuestión. Consecuentemente, realizarán un proceso discursivo de: expresión o reconocimiento de la tesis; exposición o identificación de los argumentos; defensa o valoración de los mismos; producción y sostenimiento de contraargumentos o de argumentos de cooperación; formulación de conclusiones y/o acuerdos.

La construcción discursiva de los interlocutores que argumentan, según lo manifestado anteriormente, implica que en la producción de la trama argumentativa sea manifestada la puesta en escena de un locutor que desempeña, de cierta manera su rol y que por ello produce una trama particular.

La comunicación en el aula prefigura roles discursivos generales (profesor, estudiante) que, desde el punto de vista filosófico (Perelman y Olbrecht – Tyteca, 1989) son connaturales al contexto educativo que es un contexto argumentativo de tipo epidíctico. Es decir, que los roles de profesor y estudiante que están prefigurados por la estructura de la comunicación del aula, se matizan, según las situaciones particulares de comunicación; en este caso por la interacción argumentativa. Es evidente, entonces, que la situación argumentativa en el aula exige a los interlocutores escenificar no sólo el rol preconcebido sino también, construir y realizar el rol de argumentador o de auditorio, según las decisiones de la actividad argumentativa y las condiciones del contrato didáctico puesto en marcha.

#### g) Construcción del texto argumentativo:

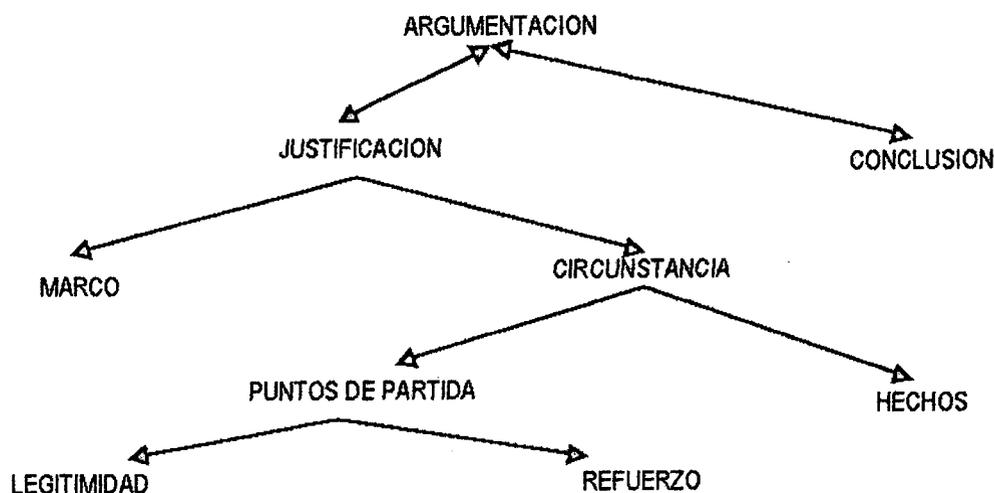
El texto argumentativo es el producto de la actividad discursiva de argumentar. Según Van Dijk (1982), el texto es una unidad de naturaleza semántica compuesta por secuencias de proposiciones y que posee una macroestructura o estructura global de significado. En este sentido, el texto ha de poseer una coherencia global y lineal; es decir, que todas sus oraciones y proposiciones desarrollarán el tema y, a la vez, cada proposición tendrá una relación semántica adecuada con la antecedente y con la consecuente, en la secuencia proposicional.

La construcción de la estructura argumentativa: Para el estudio de la estructura del texto argumentativo, tendremos en cuenta dos posiciones teóricas: la clásica de Toulmin (1975) y la pragmática de Teun A. Van Dijk (1983) y Lo Cascio (1991). Ambas teorías coinciden en considerar fundamentalmente, como función de la argumentación, la justificación bajo una petición implícita de obtener consenso. Derivada de la función, la intención de la argumentación es convencer o persuadir, de la legitimidad de una tesis a un interlocutor. En ese sentido, la estructura de la argumentación obedece a esta función y a esta intención, tan sólo que se concibe más canónicamente o más flexiblemente, de acuerdo con contextos argumentativos particulares.

La estructura argumentativa de Toulmin (1975) considera básicamente tres elementos constitutivos: la opinión (tesis), la regla general (garantía) y la argumentación (hechos o pruebas). No obstante, su estructura considera realmente cinco elementos, los tres anteriores y los calificadores modales (elementos que relativizan la tesis o los argumentos) y la reserva (datos sobre los que se está prevenido en relación con la tesis) (Lo Cascio, 1991). Por su parte Van Dijk y Lo Cascio proponen una estructura mínima de la argumentación compuesta por dos elementos: la hipótesis (premisa) y la conclusión (tesis) y consideran que otros elementos pueden aparecer implícitos en las producciones argumentativas. La estructura de la argumentación subyace fundamentalmente una estructura de conexión de tres tipos: sintáctica (principios de derivabilidad), semántica (implicaciones semánticas y semióticas entre los significados) y pragmática (relación entre hipótesis y conclusión).

En la estructura argumentativa, las relaciones entre hipótesis y conclusión pueden ser del orden de la posibilidad, la credibilidad, la probabilidad, entre otras. Según Van Dijk (1983: 159), la estructura de la argumentación exige una base para la relación pragmática y semántica. Esta base la constituye la GARANTÍA o "legitimidad" que autoriza a alguien a llegar a una conclusión determinada. Para Toulmin (1975) este componente de la estructura es vital y lo denomina "garante" o warrant. Eventualmente asumiremos el término de Van Dijk "*legitimidad*", en tanto que se convierte en el elemento que permite deducir o dar fuerza a la conclusión, al indicar qué y cómo funciona legítimamente la tesis defendida.

De la estructura pragmática simple de la argumentación, se deriva una complejización de tal estructura por el recurso al argumento. En este sentido, un proceso argumentativo puede desencadenar múltiples relaciones entre argumentos, pero a propósito de la relación justificativa del sentido argumentado y, por supuesto, de la consolidación de la conclusión. Para efectos didácticos y para conformar una base teórica para el análisis de datos, se tomará aquí la superestructura del texto argumentativo propuesta por Van Dijk (1983).



Como se observa en el esquema anterior, la producción de la estructura de una trama argumentativa estará soportada fundamentalmente por la relación justificativa entre sus componentes, a propósito de la conclusión o del sentido argumentado. Sin embargo, es un hecho que la estructura canónica de la argumentación puede modificarse sobre la base de transformaciones necesarias, según el contexto argumentativo y las condiciones de argumentación de los interlocutores. Por ejemplo, determinados componentes pueden estar implícitos, dependiendo del punto de partida del acto argumentativo y del contexto.

**La producción de argumentos:** Es la actividad propia de la producción discursiva en un contexto argumentativo. Desde el punto de vista discursivo, la producción de argumentos se refiere a una particular forma de enunciar, a una particular forma de significar y de asumir a un interlocutor, en un contexto específico. Dado que ya se han explicitado aspectos concernientes al contexto, en este momento nos ocuparemos tan solo de la naturaleza de la categoría argumento.

El argumento como categoría discursiva puede definirse como un acto de habla que se inscribe en una estructura textual de tipo argumentativo, que posee alguna fuerza en relación con EL SENTIDO de la argumentación y que de esta manera define su función. Lo Cascio (1991) considera que el argumento, como acto de habla, define la posición de un hablante respecto de un problema y sirve como procedimiento heurístico, para relacionar, de cierta manera, datos, juicios, opiniones, etc.; además, que trata de comunicar a otro(s) un juicio personal, provisto de justificaciones que pueden probar su validez. En este sentido, el argumento es un macroacto de habla, cuya intención es comunicar una opinión para convencer o persuadir a otro de su validez o legitimidad y cuya función se define en la relación de probabilidad, de pertinencia, de posibilidad, etc., con respecto a la conclusión. Es en esta relación semántico- discursiva que un enunciado adquiere el status de argumento y se desarrolla como tal.

Desde esta perspectiva, habría que tener en cuenta que, dependiendo del contexto argumentativo y del sentido en cuestión, los argumentos pueden tomar diversas formas y distintas estrategias de encadenamiento, generando, de manera particular, tramas argumentativas. Desde del punto de vista del desarrollo de competencia argumentativa, se tendrá en cuenta que el sujeto argumentador estará en posibilidad de identificar e interpretar argumentos en textos argumentativos y de producir argumentos en el marco de la elaboración de tramas argumentativas.

#### **D. EL DESARROLLO COGNITIVO EN GEOMETRÍA, EL LUGAR DE LA ARGUMENTACIÓN**

La importancia que tiene la Geometría en el desarrollo intelectual de una persona, puede estar dada por la aplicación que tiene este campo del saber matemático en otras áreas. Por ejemplo, según Doaudy (1991) "la geometría puede ser considerada como una muy buena rama sistematizada de la física". Señala además, que en este caso, la geometría bidimensional se convertiría en un requerimiento para lograr un desempeño eficiente en el espacio tridimensional; aspecto éste fundamental para enfrentarse a los desarrollos tecnológicos actuales. Estos desarrollos exigen proporcionar ubicaciones precisas de cuerpos sólidos en el espacio, proceso necesario para el desarrollo de la robótica, la mecánica la arquitectura, la automatización, las micro construcciones, entre otros.

Pero también existen otras posturas que señalan que la geometría tiene un efecto directo en las estructuras cognitivas del sujeto. Así por ejemplo, Duval (1999) afirma que "más allá de un contenido particular de tal o cual conocimiento, la Geometría más que otras áreas en matemáticas, puede ser usada para descubrir y desarrollar diferentes formas de pensamiento". En uno y otro caso *la construcción de imágenes mentales de configuraciones tridimensionales y bidimensionales, la anticipación a movimientos y la producción de razonamientos visuales y deductivos, constituyen competencias geométricas básicas a desarrollar en los estudiantes.*

El desarrollo de las competencias geométricas, es una exigencia didáctica y en consecuencia debe ser un propósito fundamental para la enseñanza de la Geometría. Esta exigencia didáctica obliga a considerar requerimientos fundamentales para el profesor, como la comprensión de los procesos cognitivos que se deben desarrollar y por consiguiente el diseño de situaciones de aprendizaje que diferencien y coordinen, las diferentes clases de procesos de visualización con los razonamientos requeridos.

Según Duval (1998), los procesos cognitivos necesarios para el desarrollo de esas competencias son de tres tipos: de visualización, de construcción y de razonamiento. Según el autor, estos procesos cumplen funciones epistemológicas específicas. Así, los procesos de **visualización**, que consisten en la identificación de géstales y configuraciones en dos y tres dimensiones, están relacionados con los

espacios de representación usados en las ilustraciones de los enunciados, en las exploraciones heurísticas de una situación compleja o en las verificaciones subjetivas. Los procesos de **construcción**, mediados por herramientas (regla, compás, transportador, software geométricos), permiten elaboraciones de configuraciones que pueden ser usadas como modelos en los que la acción sobre lo representativo y observable, llevan a relaciones entre los objetos matemáticos observados. Los procesos de **razonamiento**, se constituyen en procesos de "expansión discursiva" de las pruebas y de las explicaciones; es decir, son procesos de verbalización que implican la elaboración semántica y discursiva de los objetos geométricos, en estructuras generales de tema y rema (descripciones, narraciones, explicaciones, comparaciones o argumentaciones).

La siguiente figura señala las posibilidades de interacción de estos procesos en una actividad geométrica:

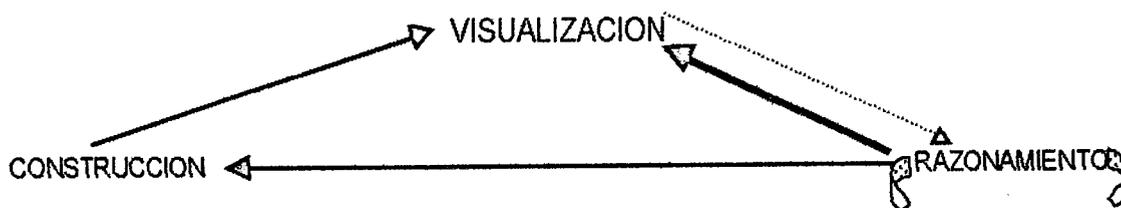


Figura No. 11

\*Tomada de Duval (p. 38)

Las flechas indican la forma como se relacionan los diferentes procesos en función de cuestionamientos específicos. Así, la flecha punteada está indicando que la visualización no siempre ayuda al razonamiento. La flecha sobre razonamiento de la derecha indica que el tipo de razonamiento que se apoya en proposiciones, con status teórico de definiciones, teoremas, axiomas... puede ser desarrollado en una forma independiente. Una secuencia que parta de visualización a razonamiento con proposiciones y que siga a construcciones, puede representar la forma de encontrar una construcción requerida a partir de una figura dada; mientras que la secuencia que parte de la construcción a la visualización y de allí al razonamiento, puede representar la forma de describir una construcción requerida.

En relación con los tres procesos anteriores Duval señala que:

Las tres clases de procesos se pueden desarrollar separadamente.

Es necesario en los currículos enfatizar en el trabajo diferencial entre procesos de visualización y procesos de razonamiento.

La coordinación de estos tres tipos de procesos puede ocurrir sólo después del trabajo de diferenciación.

## 1. Figura y visualización

El papel de la figura en geometría, sitúa la reflexión en los campos epistemológicos y cognitivos, pues como ya se ha señalado anteriormente, la figura hace parte de los argumentos que constituyen la geometría del plano. Por medio de ella es posible manifestar y operar las magnitudes geométricas como la longitud, la amplitud y el área. Pero es también a través de ella, que puede darse un desarrollo cognitivo específico en geometría: "el pensamiento espacial puede desarrollarse con la imaginación y el dibujo de figuras de dos y tres dimensiones, sin necesidad de tomar ninguna medida. La medida de una magnitud espacial con un número y una unidad representa un paso más allá de la geometría... En el desarrollo del pensamiento espacial y en el dominio de los sistemas geométricos veo cada vez más juegos de exploración, clasificación y trans – formación de figuras formadas por unos pocos segmentos de recta" Vasco (1999).

Se han identificado dos requerimientos específicos que debe llenar la figura para que represente un objeto matemático. El primero, que sea una configuración; es decir, ser una unión o una fusión de diferentes géstales que se relacionan y que a su vez caracterizan la configuración (condición visual). El segundo, es el de anclar (fijar - asegurar) en un enunciado algunas propiedades representadas por la gestal (hipótesis); esta ancla discursiva lleva la entrada matemática en la configuración (Condición de prueba).

Las dos condiciones anteriores llevan a considerar la necesidad de, por lo menos, dos tipos de registros: el de la figura y el de la lengua natural. Duval (1999) señala como un problema para el aprendizaje de la geometría, la falsa proximidad entre los tratamientos matemáticos pertinentes y los que espontáneamente se practican en uno de los dos registros, así como la necesidad de coordinación entre los tratamientos que provienen de registros figurales y los que provienen de registros discursivos. De allí la necesidad de establecer criterios de distinción entre los tratamientos espontáneos y los matemáticos pertinentes y, en consecuencia, de precisar los diferentes tratamientos matemáticos pertinentes en el registro de las figuras geométricas. Todo lo anterior lleva a establecer las unidades constitutivas del registro figural, tipos de articulación de las mismas en una figura y posibilidades de modificación de figuras.

Duval (1999) señala como unidades elementales del registro de las figuras Geométricas, las que se obtienen por el cruce de las variables visuales cualitativas (de forma, tamaño, orientación, granulación, color..) y la variable de dimensión. Para esta caracterización se usa la variable visual forma por considerarse que las otras variables, aunque son pertinentes en un gráfico, no los son en una figura geométrica, pues no representan intrínsecamente realizaciones proyectivas o topológicas. "Si el tamaño fuera una variable pertinente la medida de las longitudes sobre una figura, sería un argumento matemático tan válido como la deducción a partir de las propiedades matemáticas dadas discursivamente".

La siguiente es la clasificación de unidades figurales elementales:

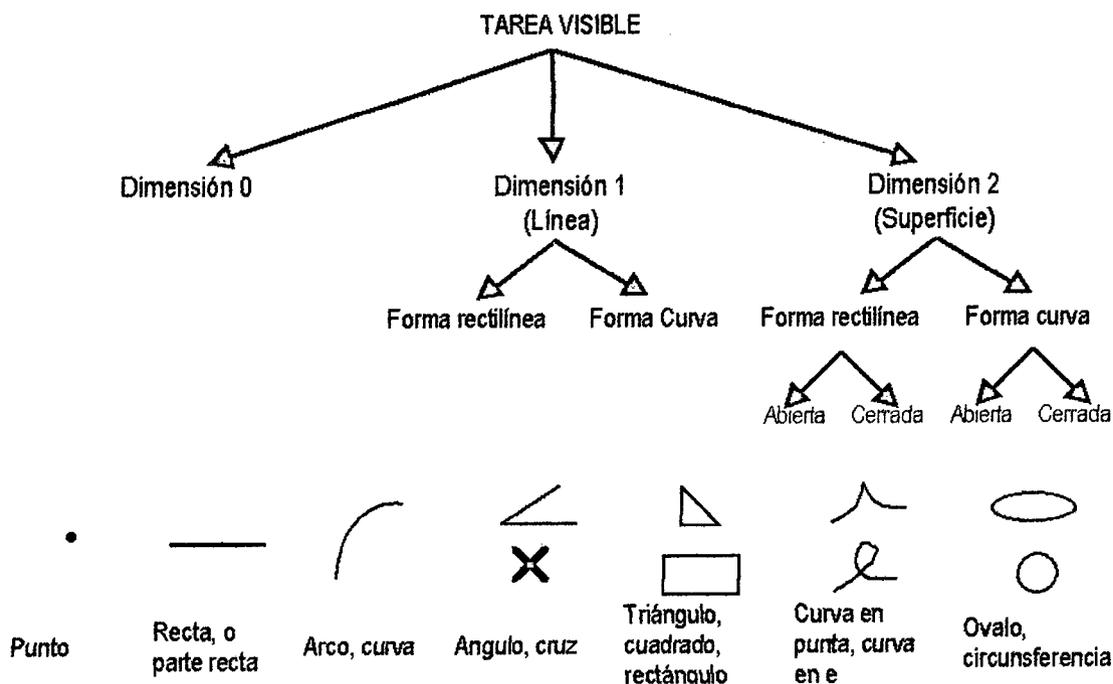


Figura No. 12

\*Tomada de Duval (p. 120)

En estos términos, la figura representa una situación geométrica "si la significación de ciertas unidades figurales y de algunas de sus relaciones están explícitamente fijadas de entrada" Duval (1999, 159). La figura geométrica queda caracterizada, entonces, como una configuración de, al menos, dos unidades figurales elementales. Así, un cuadrado sólo es considerado como figura matemática si se asume como una configuración de unidades figurales de dimensión 1 (segmentos que forman lados), debido precisamente a que son las relaciones entre las unidades figurales elementales (paralelismo, tangencia..), las que dan el contenido a la figura geométrica. Mientras que la percepción se centra automáticamente en las unidades figurales de dimensión 2, el tratamiento de la situación representada requiere una restricción a unidades figurales de dimensión 1 ó 0. En las investigaciones de Kubler – Weber (citados por Duval pág. 152), se señala que un punto se designa como tal cuando es percibido aislado de otras unidades figurales. Al contrario, no es identificado como punto sino como cruce o como corte cuando su discriminación resulta de la incidencia de las otras unidades figurales (corte de rectas).

Particularmente, en el caso de los alumnos, se ha observado que evitan al máximo transformar una unidad figural de dimensión 2 en una configuración de unidades

figurales de dimensión 1 ó 0. La confrontación entre las necesidades de cambio de dimensión para el tratamiento matemático y la renuencia a la transformación dimensional en los estudiantes, se constituye en la complejidad mayor a superar en el aprendizaje de la geometría.

## 2. Tratamientos figurales

El uso de la figura en las actividades geométricas ha generado diversas posturas: Unas que sostienen que las figuras en matemáticas tienen un uso psicológico pero no prueban nada y además pueden llevar a errores en el trabajo matemático (Zárate, 1996). Otras afirman que, aunque las figuras puedan llevar a errores, en cualquier caso las figuras son mucho más que ayudas psicológicas. Ellas pueden ser rigurosas pruebas (Brown, 1999). Otros prefieren asignar a las figuras un papel heurístico "la figura ha de evitar la exploración de todos los caminos posibles captando la atención sobre aquellos caminos susceptibles de conducir a la solución o sobre los que ya han conducido a ella" (Duval, 1999). En esta última postura, los procesos de exploración y anticipación que la figura genera, en la resolución de un problema o en la búsqueda de una prueba conforman un tipo de conducta que limita de entrada la clase de hipótesis o de alternativas que han de considerarse, conducta llamada de abducción. Esta conducta de abducción estaría guiando la deducción según los presupuestos mencionados anteriormente.

En términos generales, pueden considerarse los siguientes aspectos en la relación de los sujetos con las figuras: La figura determina el tipo de acercamiento a una situación matemática. Tales acercamientos estarán determinados por los diferentes tipos de aprehensión de las figuras. Así, por ejemplo, el nivel de la *aprehensión perceptiva* está determinado por el reconocimiento de las unidades figurales. El nivel de la *aprehensión discursiva* en que se realizan asociaciones entre las gésales y enunciados, determinan al objeto representado. Y, en el otro nivel de la *aprehensión operatoria*, se efectúan modificaciones posibles de las relaciones de la parte con el todo de las unidades figurales y de la figura dada.

Según las precisiones anteriores, la aprehensión operatoria lleva a considerar los tipos de transformaciones entre las representaciones figurales. Es decir, la transformación de una representación inicial en otra representación final, respecto a una cuestión, a un problema que proporciona el criterio de interrupción en la serie de transformaciones efectuadas. Un tratamiento es una transformación de la representación al interior de un registro, los tratamientos figurales serán transformaciones posibles al interior del registro de las figuras. En un intento por distinguir los tratamientos propios del registro de las figuras, Duval señala las siguientes características de un tratamiento figural:

- Son específicos al registro de las figuras, no son asimilados a un tratamiento matemático.

- La posibilidad de los tratamientos figurales está vinculada con las posibilidades de modificación que surgen de las relaciones de las partes con el todo.
- Los tratamientos figurales facilitan o inhiben tanto el reconocimiento de las situaciones representadas como la búsqueda heurística.

En el análisis del tipo de tratamientos que pueden realizarse a las figuras se encuentran los de reconfiguración y los de puesta en perspectiva. La reconfiguración es un "tratamiento que consiste en la división de una figura en subfiguras, en su comparación y en su re-agrupamiento eventual en una figura de un contorno global diferente". La puesta en perspectiva es un tratamiento que permite ver en profundidad dos unidades figurales de la misma forma y con la misma orientación, pero cuyos tamaños respectivos pueden variar. Este hecho permite ver superpuestas dos figuras, que cuando se miran como simplemente yuxtapuestas en el plano, son perceptivamente de tamaño diferente. Este tratamiento figural guía los procesos de comprensión de la configuración homotética plana en términos de puntos y relaciones entre segmentos.

Entonces, la visualización en geometría implica, por lo menos, uno de los siguientes cambios: el cambio dimensional, el cambio figural (aprehensión operatoria) y el cambio que asegura la figura a una representación de un determinado objeto matemático (cambios de anclaje). El cambio dimensional que comprende la posibilidades de representar en dos dimensiones aspectos de un cuerpo en tres dimensiones, o de ver figuras de dos dimensiones como configuraciones de unidades de 1 ó 0 dimensiones. En términos de Duval la visualización en geometría cumple a satisfacción un rol heurístico cuando los objetos matemáticos o las propiedades que son relevantes para la prueba pueden ser vistos como una configuración de dimensión mayor que la dimensión en las que están las subconfiguraciones que representan estos objetos en la figura dada. En el siguiente ejemplo se ilustra este aspecto (Mesquita, citada por Duval, p.44):

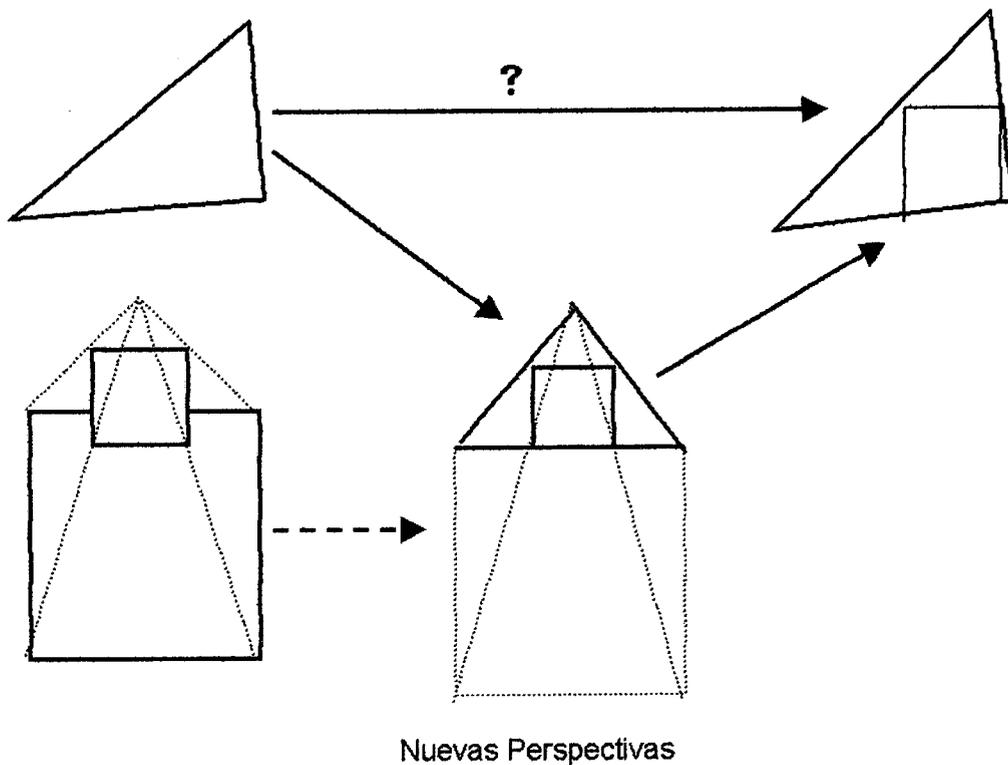


Figura No. 13

\*Tomada de Duval (p. 44)

En este problema encontrar la desviación a una configuración plano homotética es más natural cuando ella puede ser vista en profundidad. El cambio dimensional es como un movimiento interno de arriba a abajo en el número de dimensiones para la aprehensión visual de una configuración.

El cambio dimensional y el cambio de anclaje son característicos de una forma matemática de ver una configuración, mientras que el cambio figural o la aprehensión operatoria concierne a procesos figurales específicos que se relacionan con transformaciones de la organización visual de la configuración. A diferencia del cambio figural, el cambio de ancla requiere una transformación de la representación de la situación dada en un registro, en una representación de la misma situación en otro registro. Es decir, se precisa la realización de una conversión de registros, por ejemplo una ilustración es una correspondencia de una expresión en lenguaje natural, con una figura o con uno de sus elementos, mientras que una descripción o una interpretación estaría realizando una conversión del registro figural al registro discursivo.

### 3. Razonamiento y producción discursiva

De manera muy general un razonamiento puede verse como el conjunto de procesos por los que se obtiene una nueva información a partir de un conjunto de informaciones proporcionadas; de ahí que los razonamientos se afectan por la forma como es presentada la información y por la estructura que la organiza. Por mucho tiempo la enseñanza privilegió el razonamiento deductivo como el fundamental en geometría por su función en la elaboración de una demostración. Los estudios centrados en procesos que desarrollan los estudiantes en el aprendizaje de la geometría, proponen funciones específicas al razonamiento en el aula en donde se asigna como una función fundamental del razonamiento: la comprensión, para explicar y convencer. Por esta razón los razonamientos son "ahora considerados como una variedad de acciones que los estudiantes desarrollan para comunicarse entre sí, para explicarse entre ellos y a otros, lo que ven, lo que descubren, y lo que ellos piensan y concluyen" HershKowitz (1998). De tal manera que investigaciones como las de Barthelot y Salin, (1998), Jones (1998) De Villiers (1998), enfatizan en la importancia de considerar otros tipos de razonamiento como el inductivo, el visual, tanto en la elaboración de conocimiento geométrico como en la elaboración de pruebas. En este contexto, el razonamiento deductivo empieza a verse como una forma para comprender y explicar y convencer a otros de conjeturas descubiertas.

Sin embargo, algo que comparten todos los enfoques sobre los tipos de razonamiento a considerar en el aprendizaje de la geometría, es que el razonamiento juega un papel importante para la entrada matemática a una situación y él se desarrolla en procesos discursivos específicos. En Geometría la información puede ser presentada en configuraciones o en situaciones de las cuales es posible elaborar un enunciado que relacione preguntas, hipótesis, conjeturas sobre configuraciones y relaciones sobre objetos. En particular, interesan los procesos que se involucran en la solución de problemas y en las elaboraciones de pruebas en geometría. Duval (1998) relaciona tres tipos de procesos inmersos en la solución de problemas y elaboración de pruebas en Geometría:

- Procesos puramente configuracionales. Se corresponden con la aprehensión operativa.
- Procesos discursivos naturales: Desarrollos espontáneos en lengua natural manifestados por descripciones, explicaciones y argumentaciones.
- Procesos discursivos teóricos desarrollados a través de la deducción. La experiencia de la necesidad lógica está fuertemente conectada con el proceso teórico.

El siguiente ejemplo, ayuda para la presentación del razonamiento como un proceso discursivo natural inmerso en un proceso figural.

**Problema 1.** En la siguiente figura,  $AC$  es la diagonal del rectángulo  $ABCD$ . Compare las áreas de los dos rectángulos sombreados, cuando el punto  $U$  se mueve sobre la diagonal.

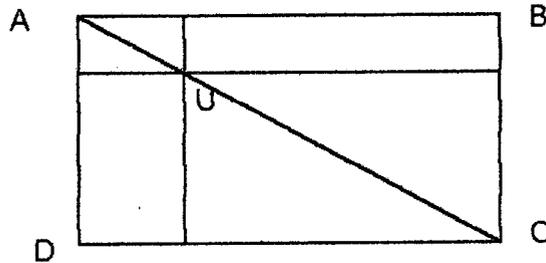


Figura No. 14

\*Tomada de Duval (p. 42)

En la siguiente figura, por el proceso de aprehensión operatoria, se identifican entre todas las posibles configuraciones que se pueden visualizar en la figura, dos subconfiguraciones,  $A$  y  $A'$ ,  $B$  y  $B'$ , importantes para la solución del problema. Pero, como lo señala el autor, esto no es suficiente para resolver el problema. La realización de otro tipo de operaciones que requieren de operaciones discursivas básicas es fundamental en la solución del problema.

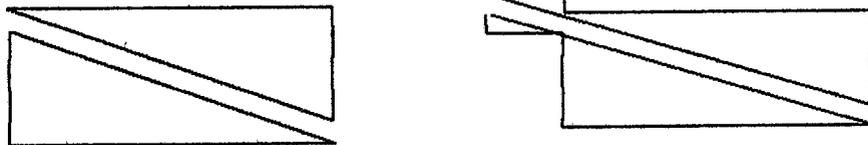


Figura No. 15

\*Tomada de Duval (p. 42)

En la siguiente figura, se puede distinguir *una producción de enunciados*, marcados por cada una de las tres etapas de la organización global y en la organización interna de cada etapa, los usos, del conector "y" permiten ver las subconfiguraciones como palabras, del símbolo "=" significando "produce" y del símbolo "-" significando "quitar de"; hacen que cada configuración sea tomada como una palabra. Tanto la expansión a palabras como al enunciado es necesario para organizar las etapas.

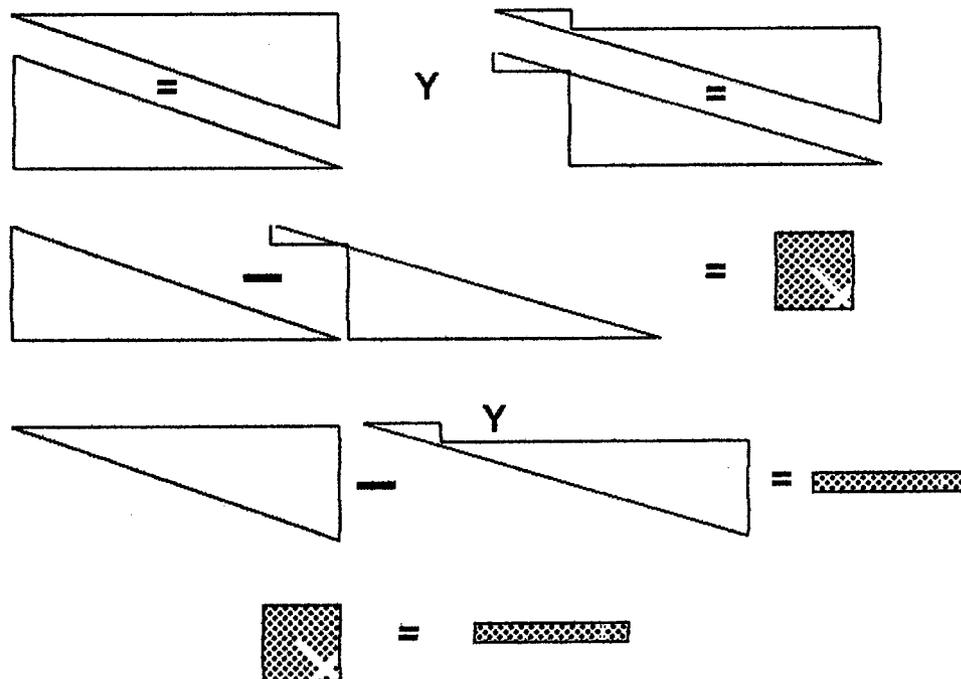


Figura No. 16

\*Tomada de Duval (p. 46)

Este proceso que se constituye en un proceso descriptivo, es el que hacen los estudiantes cuando realizan argumentaciones orales o escritas de sus soluciones a un determinado problema. En este caso la visualización y la verbalización espontánea se encuentran fuertemente conectados.

Cuando se requiere de la elaboración de razones para justificar, los dos procesos anteriores se presentan limitados para responder a ese requerimiento. Esto supone para el sujeto una discriminación de la pregunta y una acción de respuesta que puede ser explicativa o argumentativa. Duval señala que en primera instancia es posible considerar dos tipos de preguntas, Las preguntas *de re*: "¿por qué se produce este fenómeno?", "¿por qué se obtiene este resultado?", este tipo de preguntas hacen el llamado a una explicación, mientras que las preguntas *de dicto*: "por qué?", "¿por qué afirmas que...?", "¿por qué respondes qué?", requieren que se proponga al menos un argumento

Así mientras una explicación da una o más razones para volver comprensible un dato, estas razones propuestas tienen en realidad una función casi descriptiva: contribuyen a presentar el sistema de relaciones, en donde el dato por explicar se produce o halla su lugar.

Un ejemplo de una explicación lo tenemos en el siguiente párrafo., tomado de una observación de clase.

*E1 :o sea la verdad, o sea la ...la relación que usted me dice...no sé, o sea de dónde sale esto?, o lo reorganizan o cómo hacen ahí?...bueno se que inscriben, o sea que el triángulo... que el cuadrado más pequeño está sobre los catetos de un triángulo rectángulo pues lo que esta aquí adentro del... del cuadrado es la hipotenusa, cierto?, queda adentro, pero como reorganizan esas áreas ahí, eso es lo que no le entiendo! O sea porque esa es... pues la relación para usted, yo no entiendo esto tim! Pero esta vaina no la entiendo!*

*E.2.1: ah no! Pues eso es libre distribución, si me entiende?, o sea, eso es complemento, o sea cuando yo digo eso establece la relación...quiero, quiero hacer la acepción de que yo determinó cuáles. .o sea, las partes del cuadrado están inscritas aquí, si? O sea que no se perdieron, entonces empiezo a decir, hay una parte blanca, hay una parte blanca; hay otra parte blanca y hay otra parte blanca; hay una parte sombreada y esta es la parte sombreada y esta es la parte sombreada y esta es la otra parte sombreada; entonces después digo está parte sombreada debe ser igual a esta parte a esta parte sombreada, cierto?*

*E1.2. si*

*E2.3 por uich, o sea pues tiene la misma aceptación, los mismos...entonces uno mismo digámoslo así de ahí se deduce que...que todo esto formo esta área, si?*

*E1.4 y sabe que...viéndolo bien, pues ahora sile doy la razón, porque ya volteando las figuras, esta vaina viene siendo esta misma pero volteada!, mire iuch! Si rotamos este rayado acá, así y ponemos esta parte sobre el cuadrado, cierto? Entonces tenemos la misma figura, lo mismo este lo rotamos así tic y nos queda esta. Y esto.*

*E2.5 es que son como los inversos, inversos si!*

*E1.6 y los volteamos, entonces si; es bueno eso! Ah¡i ya estaría entendible su argumento.*

El segmento presenta todos los elementos que configuran la explicación:

Una petición de inteligibilidad: , yo no entiendo esto tim! Pero esta vaina no la entiendo!.

Una acción intencionada de hacer inteligible algo a otro  
*ah no! Pues eso es libre distribución, si me entiende?, o sea, eso es complemento, o sea cuando yo digo eso establece la relación...quiero*  
y un proceso de exposición de razones, en donde se describe el proceso de configuración

Un reconocimiento de inteligibilidad.

aunque esta fase puede no tenerse, la manifestación de ella , marca el fin del proceso explicativo por el alcance de su logro.

**El razonamiento en cambio proporciona una o dos razones, pero el papel de las razones dadas es muy diferente: es el de "comunicar" su fuerza de argumento a las afirmaciones que de be justificar. En este caso el valor epistémico de los argumentos es importante, el efecto del proceso es precisamente un cambio del valor epistémico que se tenía antes del razonamiento.**

En geometría, una razón que se proporciona para probar requiere dos condiciones fundamentales:

- Usar proposiciones, donde cada una tiene en primera instancia un status teórico específico: axioma, definición, teorema, hipótesis, conjetura, etc..
- Usar solo teoremas, axiomas o definiciones, para pasar de un paso hacia la conclusión.

Las dos condiciones anteriores imponen como lo señala Duval, una organización diferente a las formas de organización del discurso natural. En primer lugar es posible distinguir tres tipos de niveles de organización del discurso determinados por un razonamiento demostrativo:

- Un nivel local en el que cada paso se conecta con el anterior por ser conclusión de este.
- Un nivel local en el cual se organizan al menos tres proposiciones de acuerdo con su status (hipótesis o conclusión previa, definición o teorema, conclusión local)
- Un micro nivel interno para las proposiciones usadas como reglas, en el cual uno puede distinguir dos partes, la parte de condiciones para verificar y la de las conclusiones para establecer.

Entre los procesos discursivos más espontáneos como la explicación y los más condicionados como la demostración, encontramos las argumentaciones, como formas de razonamiento que se realizan la expansión discursiva a los procesos de visualización, en el siguiente cuadro se pretende mostrar las características de cada proceso y las categorías que los relacionan:

	<b>DEMOSTRACION</b>	<b>ARGUMENTACION</b>	<b>EXPLICACION</b>
1. Focalización del discurso	Un enunciado-objetivo siempre formulado de manera explícita	Un enunciado-objetivo que puede ser implícito	Un hecho, objeto de una pregunta "porque..." o "como..."
2. Resultado que se busca en la producción del discurso	Modificación del valor epistémico del enunciado-objetivo (en el sentido de su necesidad) y determinación de su verdad	Modificación del valor epistémico del enunciado-objetivo para sí mismos o para un interlocutor	Conexión del con otros en un sistema de funcionamiento mecánico, teleológico, etc.
3. Aspectos de las proposiciones que se toman en consideración en el discurso	Estatuto operativo determinado a partir del estatuto teórico fijado preliminarmente	Los términos intencionales y extensivos que constituyen el contenido	El contenido conceptual determinado por las proposiciones
4. Consideración de las relaciones de oposición, intención o extensión entre las proposiciones	Limitada la contradicción en el razonamiento por absurdo (producción y rechazo de una <i>contratesis</i> )	Recurrencia a una red de oposición que se explicita de manera parcial para poner en relación razones en pro y en contra	
5. Indicaciones de las relaciones entre las proposiciones	Libre, dado que las relaciones se determina por los respectivos estatutos de las proposiciones. Tres posibilidades: nada, construcciones que se deben completar, conectivos organizados	A través de los conectivos argumentativos	A través de los conectivos organizativos
6. Continuidad del discurso	Asegurada localmente por el reciclaje de las conclusiones intermedias	Asegurada global y temáticamente por el mantenimiento de la referencia a algunos objetos en las proposiciones sucesivas	Asegurada extrínsecamente por la coherencia cognitiva de la descripción del sistema

"Comparación de las características de expansión discursiva de una demostración, una argumentación y una explicación"

\*Tomado de Duval (p. 41)

Todo lo anterior esta señalando la importancia de este requerimiento y su efecto en el aprendizaje de la geometría.

## **E. EL REQUERIMIENTO SOCIO- CULTURAL DEL AULA AL SERVICIO DE LA ARGUMENTACIÓN**

El requerimiento socio- cultural se refiere al componente didáctico de tipo axiológico que identifica y estructura principios de interacción y de regulación al interior y entre los sistemas que constituyen el contexto de relaciones didácticas. En este sentido, es evidente que las normas y principios de interacción que operan al interior de los sistemas involucrados en las relaciones didácticas, son inseparables de su explicación teórica y operan en la escenificación de los procesos comunicativos y cognitivos en el aula. Sin embargo, como resultado de la observación de los procesos de comunicación y de argumentación de lo matemático en el aula, se consideró fundamental explicitar y reflexionar separadamente, lo concerniente al conjunto de principios y normas de interacción en cada sistema, dado que se constituye en un aspecto fundamental, tanto para la comprensión del funcionamiento de cada uno de ellos, como de la manera en que se influyen entre sí y los efectos que tienen en el diseño y desarrollo de las actividades de aula y el aprendizaje de los estudiantes.

Desde la reflexión de cada uno de los tres primeros requerimientos, se comprendió que los requerimientos socio - culturales del aula impactan particularmente tres instancias de las relaciones didácticas: a las formas de acercamiento al saber puesto en juego (el saber geométrico), que genera las normas matemáticas; a las formas de uso social del saber puesto en juego, que genera las normas socio-matemáticas (formas de proceder con ese saber, para ser efectivo socialmente); y, al saber sobre la naturaleza y tipo de interacciones propuestas, las condiciones del grupo y su composición, la estructura de roles generada y los rituales de las relaciones entre estudiantes y entre estudiantes y profesor; saber que hace evidentes y pone en juego las normas socio- culturales del aula.

Desde este punto de vista, el requerimiento socio- cultural, en el marco de las relaciones didácticas, establece relaciones entre todos los elementos constitutivos del contexto didáctico y determina los procesos de producción, internalización y puesta en escena de normas de interacción, al servicio del desarrollo efectivo y eficaz de las relaciones didácticas. La operacionalización y puesta en escena de las reglas mencionadas la realiza el profesor, mediante el diseño didáctico y su respectiva aplicación. Así mismo, los procesos instruccionales y regulativos que se generan desde la puesta en escena de las interacciones del aula, permiten a los estudiantes construir sistemas axiológicos en las instancias mencionadas anteriormente. Sistemas que les permiten desempeños adecuados, pertinentes y efectivos en el aula. A continuación se explicitan las normas y principios identificados para el caso del desarrollo de conocimiento geométrico en el aula, en una instancia de comunicación argumentativa.

## **1. Las normas matemáticas como garantía del dominio en los niveles epistemológico y cognitivo**

La identificación de normas matemáticas surge de la pregunta por ¿cuáles son las condiciones de uso y de operacionalización que impone el saber geométrico, más específicamente el de la geometría euclidiana, tanto a los estudiantes como al profesor? Esto, en tanto que es el saber puesto en juego en el aula. La respuesta a esta pregunta situó la reflexión en el campo de la geometría euclidiana, desde tres criterios:

Desde el contexto que impone la disciplina. Se reconocen aquí formas de interpretación y operacionalización que devienen de la matemática como campo disciplinar general. En este sentido, los textos de la geometría y las redes conceptuales expuestas en ellos, están marcados como textos matemáticos. Así que la forma de acercamiento a ellos impone criterios de lectura e interpretación generados por las formas de producir conocimiento en matemáticas: usos de registros altamente restringidos y unisignificativos (definiciones, axiomas, teoremas, fórmulas); tipos de razonamiento más deductivos; formas de validación y verificación del conocimiento (pruebas y demostraciones), en aras de los procesos de generalización de sus resultados; formas de proceder algebraicas; formas enunciativas impersonales (defínase, trácese, aplíquese, etc.).

Desde esta perspectiva, tanto estudiantes como profesor desarrollarán una gramática que les permita acceder, interpretar y producir en el contexto geométrico: asumir, comprender y operar con definiciones de figuras; realizar formas de tratamiento figural; generar formas de expansión discursiva sobre las figuras, para dar razón de ellas; desarrollar estrategias para la comprensión del saber, entre otras.

Así, por ejemplo, cuando el profesor pide tratamiento de la información como teorema, como axioma, como definición, etc., en realidad está pidiendo al estudiante aplicar normas de interacción con el conocimiento geométrico. Cuando pide nombrar lados de triángulos, áreas, etc., está solicitando un procedimiento propio de la geometría, para poder llevar a cabo operaciones con figuras. Por su parte, cuando el estudiante que lee y trata de comprender un texto euclidiano, acude a otros textos, al profesor, realiza inferencias abductivas, anticipaciones, etc., está desarrollando estrategias para la comprensión y el control de tales comprensiones.

Desde el contexto particular de la geometría euclidiana. Optar por un saber muy particular como la geometría euclidiana implica reconocer normas de interacción que impone ese contexto. Así, por ejemplo, se identificaron aspectos fundamentales provenientes de la propuesta de Euclides para una geometría del plano, en su obra *Los Elementos de Euclides*, a saber: el carácter performativo o instruccional de la forma enunciativa de Euclides; es decir, la obra está concebida como una propuesta para "hacer hacer" (trácese una paralela, subtiéndase una

línea recta... etc.). Como efecto, el lector habrá de desarrollar una regla de acción para su interacción con la obra de Euclides: es necesario realizar construcciones para comprender lo que el autor quiere mostrar; es necesario leer desde la perspectiva de la instrucción.

## **2. Las normas socio- matemáticas como garantía del dominio en los niveles epistemológico, cognitivo y discursivo**

Entendiendo que el saber geométrico es un saber que permite múltiples aplicaciones y que socialmente, en los contextos de aplicación, se desarrollan reglas para esa aplicación y para considerar que se realiza un uso efectivo de ese saber, se han identificado, en el contexto de la interacción con la geometría euclidiana normas de tipo discursivo como: Las figuras poseen significados que se expresan en formas verbales y algebraicas. El recurso algebraico es más matemático y por ello más convincente, para explicar comprensiones geométricas; de ahí que para comunicar efectivamente a otros lo que yo comprendo de un texto geométrico utilice la figura como ejemplo, pero empleo fórmulas algebraicas o aritméticas. La figura visualiza relaciones geométricas que otros pueden leer.

## **3. Las normas socio- culturales del aula como garantía del buen desempeño en los niveles epistemológico, cognitivo y discursivo.**

Se consideran como normas socio- culturales del aula las que se producen como efecto de la estructuración macro y micro del contexto del aula. Desde un punto de vista macro, y desde una explicación sociológica del fenómeno educativo, el contexto pedagógico, como se expuso anteriormente, es un contexto social, altamente regulado, que hace visibles y oficiales "las formas de transmisión en el proceso de reproducción cultural" Bernstein, 1993). Para ello, el contexto pedagógico ha generado el discurso pedagógico que opera como un dispositivo, a través de los discursos instruccional y regulativo. Desde un punto de vista de la micro estructuración del aula, es evidente que lo que ocurre es una realización de los discursos instruccional y regulativo, a propósito de las relaciones que se tejen entre los componentes del tetraedro didáctico (contenido- estudiante- estudiante- profesor).

En el presente estudio, la explicitación del requerimiento socio- cultural del aula, está circunscrita exclusivamente al contexto del aula de matemáticas, a propósito del desarrollo de competencias argumentativas en geometría. Desde ese punto de vista, se han identificado aspectos fundamentales en las relaciones didácticas en los que se manifiestan y se ponen en juego normas que dan vida a las interacciones en el aula. Tales aspectos se evidencian en el diseño didáctico, particularmente en el diseño de las tareas, y su desarrollo, vigilancia y regulación están a cargo del profesor.

Las normas socio- culturales del aula regulan dos aspectos estructurales: los procesos de interacción de estudiantes y profesor con el saber y los procesos de interacción entre profesores y estudiantes. De la interacción entre *estudiantes y profesor con el saber geométrico*, en una situación argumentativa, se han identificado normas como:

La tarea es un espacio (individual o colectivo) para la solución de problemas geométricos y para la elaboración de argumentos; en ese sentido *"hay que tomar posición" frente al conocimiento*.

Para producir argumentos, es necesario *escribir, graficar o hacer visible lo que se quiere decir*.

Lo que se dice se debe explicar; sobre lo que se dice se debe pedir aclaración.

El que expone una solución debe tener fundamentos y *"debe" usar un lenguaje matemático*.

Las preguntas del profesor cumplen una función metacognitiva para el estudiante: *ampliar, aclarar, verificar lo que decimos o lo que nos dicen*.

El tablero es el "cuaderno del grupo" durante la construcción colectiva: *Allí se construye y se visualiza lo que pensamos todos*.

Una buena argumentación necesita un argumento *fuerte*.

De la interacción entre profesor y estudiantes, en una situación argumentativa, se han identificado normas que devienen de las máximas conversacionales como el principio de cooperación en el desarrollo dialogal, la cortesía, la sinceridad, por ejemplo:

En el trabajo de pareja es necesario *hacer consensos. Por eso yo escucho, yo comprendo, yo cedo el turno, yo completo*.

En pareja, hay un orden de la comunicación, que deviene de las exigencias de la tarea: *primero expone usted, luego expongo yo y después nos ponemos de acuerdo*.

El trabajo de pareja busca *una respuesta única*; es una sola voz, por eso *yo completo, yo acepto, yo escribo, yo expongo lo de los dos*.

En la plenaria habla uno cada vez (no se puede hablar al tiempo), pero habla a nombre de los dos.

La palabra se pide levantando la mano.

Los turnos de palabra se respetan.

Es necesario debatir, pero "tenemos que ponernos de acuerdo": *saber qué dice usted y qué digo yo y dejar la mejor opción.*

Para argumentar es necesario dar razones de lo que se hace.

El profesor da la palabra, evalúa lo que se dice, sintetiza.

A partir de la descripción anterior, se observa que el requerimiento socio-cultural en el aula es un requerimiento que emerge de los otros tres y que a la vez soporta las relaciones entre ellos. De ahí que uno de los indicadores de desarrollo de competencia argumentativa en geometría tenga que ver con la internalización y uso de las reglas de interacción que impone cada requerimiento en el contexto de la argumentación en el aula.

## F. LOS REQUERIMIENTOS AL SERVICIO DE LA COMPRESIÓN DEL DESARROLLO DE LA COMPETENCIA ARGUMENTATIVA EN GEOMETRÍA

Como último resultado de la investigación se presenta en este apartado un análisis del desarrollo de la primera tarea de la etapa 1. El sentido de este análisis es comprender los procesos desarrollados por los estudiantes, en el marco de la realización de una tarea que pretendió potenciar el desarrollo de competencias argumentativas en geometría y la elaboración de un sentido para la Relación Pitagórica. Para este análisis se empleó el diseño de unidades y categorías de análisis propuestas para la fase de acción

Unidad de datos global	Unidades de análisis	Categorías de análisis
Tarea	<ul style="list-style-type: none"><li>• Etapas</li><li>• Momentos</li><li>• Actos</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Sentido</li><li>• Trama argumentativa</li><li>• Trama de conexión lógica</li></ul>

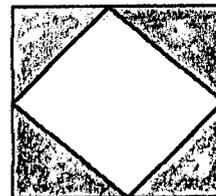
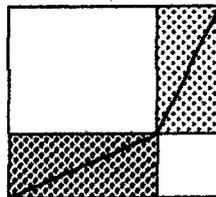
Se tomó una pareja para el seguimiento de su comportamiento de solución, en los distintos momentos que constituyeron la primera etapa; a saber:

Tarea No. 1	<b>Objetivo:</b> Producción de una sentido para la relación pitagórica
Etapas No. 1	<b>Propósito:</b> Elaboración de la relación
MOMENTOS	<p><b>Tipos de interacción entre los estudiantes y el profesor</b></p> <p><b>Yo – yo</b> trabajo individual, para la producción de una primera solución preparación de argumentos.</p> <p><b>Yo – tú</b> trabajo de pareja, para el estudio y debate de soluciones. Y para la elaboración de una solución de pareja</p> <p><b>Nosotros – ellos:</b> Presentación y defensa de la solución de pareja ante el grupo general. Desarrollo un proceso argumentativo para la consolidación de soluciones.</p> <p><b>El – nosotros:</b> Aclaraciones explicitación de consistencias e inconsistencias en las soluciones presentadas e institucionalización de lo elaborado. Este momento esta a cargo del profesor y pretende dar pautas para la legitimación de tramas conceptuales y argumentativas.</p>
ACTOS	<p><b>Actos de solución:</b> Actos orientados por la intención de solucionar el problema.</p> <p><b>No solución.</b> Actos orientados por intenciones externas a la solución del problema. Los actos se clasificaron en argumentativos (tendientes a elaborar sentidos o apoyos para la solución), y actos no argumentativos (tendientes a realizar distintas intenciones discursivas diferentes a la de solucionar el problema.</p>

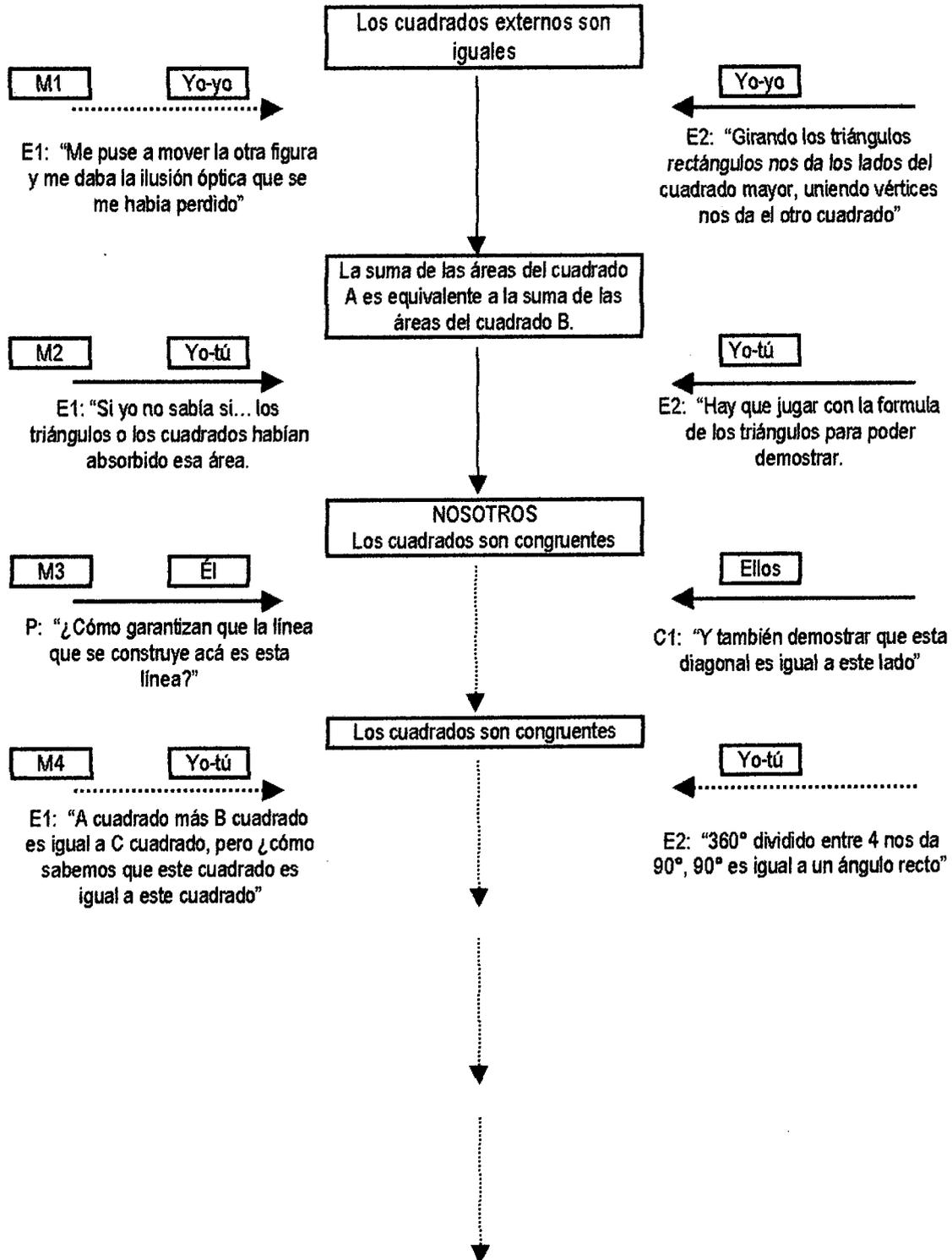
El análisis de los momentos de interacción se realizó empleando como dato el proceso discursivo registrado en audios y en videos. El resultado, es el desarrollo de la solución en los distintos momentos y el impacto de las interacciones en la consolidación de la relación.

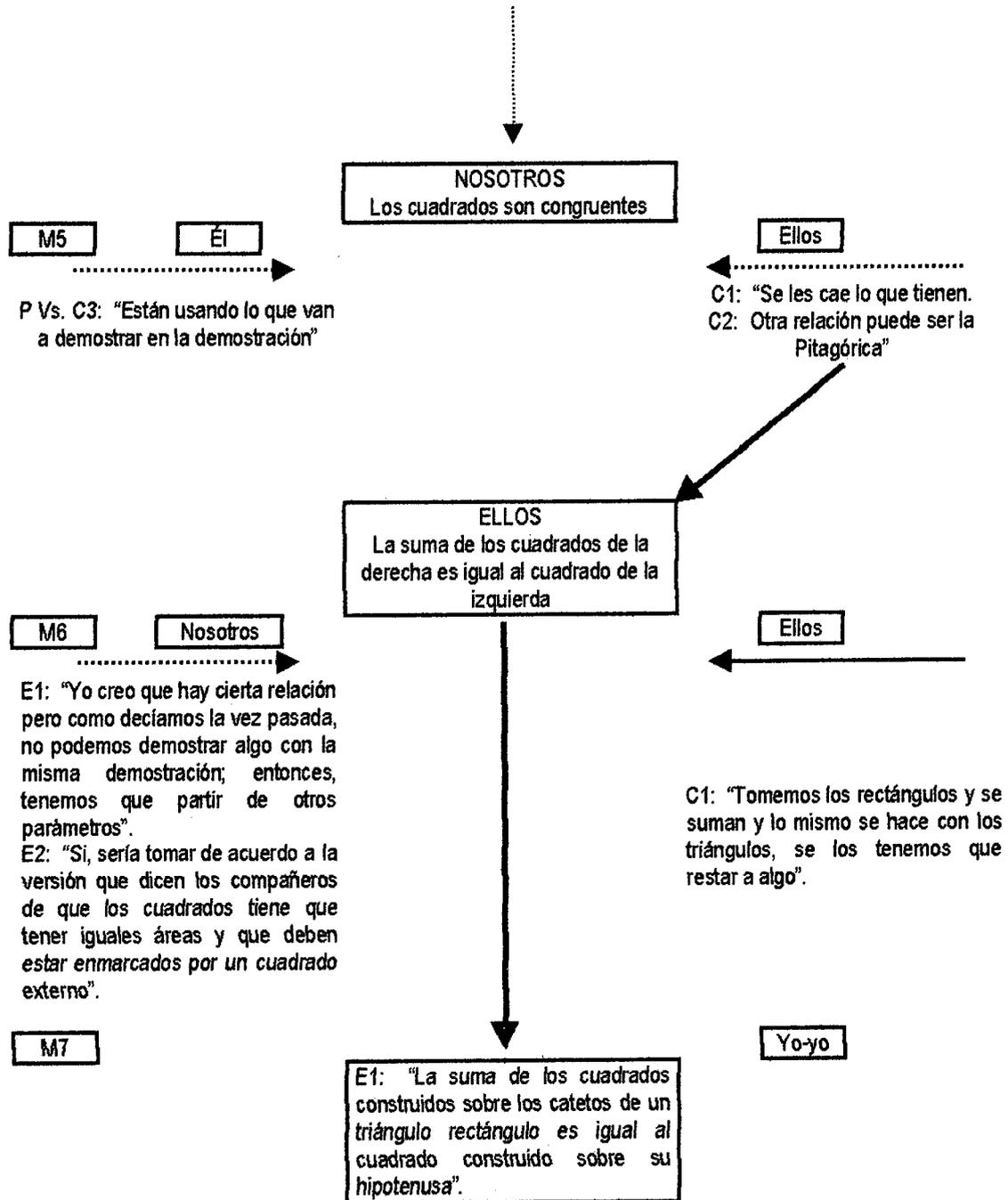
El problema a solucionar es:

*Problema: ¿cuál es la relación matemática que se muestra en la siguiente figura?*



Trayectoria de la solución:





En el esquema anterior, las flechas verticales conectan los momentos y las horizontales presentan posiciones de los estudiantes con respecto a la solución. Las flechas punteadas indican debilidad en la posición. Las flechas continuas indican seguridad en la posición. E1 representa al estudiante1 observado y E2 representa al

estudiante 2 observado. Juntos, E1 y E2, conforman la pareja observada. C1 representa a los compañeros que intervienen en la etapa de nosotros ellos, o de plenaria, y P, representa profesor. En general, se obtuvieron 7 momentos de interacción en esta primera etapa. A continuación se describen sus resultados.

Según el esquema obtenido para la solución se observa que la elaboración de una solución, en este caso, la determinación de una relación matemática, se estructuró en los momentos yo-yo, yo- tú, nosotros-ellos, yo- tú, nosotros- ellos y yo-yo. En estos momentos se analizan los siguientes aspectos para la comprensión del desarrollo de la solución:

### 1. El papel de la figura

Se observó que la entrada a la solución del problema se realizó por la figura, confirmándose el papel heurístico de la figura, en el campo geométrico. En este caso la aprehensión de la figura fue determinante para bloquear como relación principal, la relación pitagórica.

Dos aspectos relacionados con la aprehensión de la figura y el tratamiento operatorio, se revelan como importantes para la solución. El primero tiene que ver con una visión: "Los cuadrados externos se consideran como marco de las figuras internas". En este caso el único tratamiento posible es el desplazamiento o la rotación de los cuadrados o los triángulos en ese marco. Sin embargo, pensar en el movimiento del uno o del otro es suponer huecos al interior del marco. De ahí que una de las aprehensiones considere que los cuadrados internos son los huecos. En este caso los que se desplazan son los triángulos.

Otro tipo de aprehensión considera que hubo una rotación de un cuadrado interno. Estas dos aprehensiones generaron bloqueo, puesto que si se considera que el cuadrado ha sido afectado por una rotación, la inferencia es que: "los dos cuadrados internos son iguales". Este es el caso del momento 1 en E 1.

Si por el contrario se mueven los triángulos (momento 1, E2), se evidenciara una relación entre las sumas de las áreas de los cuadrados internos de una figura y el área del cuadrado interno de la otra. De otra parte el considerar el cuadrado externo como un marco bloquea la estrategia fundamental de separar de ambos cuadrados los triángulos.

En el momento 2. E2 orienta a E1 hacia el movimiento de triángulos, generando un desbloqueo para E1, quien ya no considera cuadrados internos iguales.

La estrategia de separar triángulos manifestada por C1 en el momento 6 cuestiona y debilita el considerar los cuadrados externos como marcos fijos. Este cuestionamiento privilegia la relación pitagórica sobre la relación de congruencia de los cuadrados. Todo el proceso anterior permite considerar que:

- a) El conjunto de gráficas propuesto y que se señala como una evidencia de la relación, no cumple esa función por la aprehensión que se hace de las figuras.
- b) La aprehensión de las figuras le asigna un status teórico operativo a la relación Pitagórica, dado que una relación derivada de la aprehensión perceptual, consolida la relación más como premisa que como conclusión.
- c) El papel que juega la figura los componentes epistémico y lógico del sentido es fundamental. Puesto que el papel heurístico que juega la figura en la conducta abductiva exhibida por los estudiantes privilegia la igualdad de los cuadrados.

## **2) En el efecto de las interacciones en un contexto argumentativo de la tarea**

Mientras que en los momentos 1, 2 y 3 las interacciones permitieron consolidar las relaciones individuales, los momentos 4, 5 y 6 se convirtieron en desestabilizadores de la solución inicial. Dos situaciones de interacción marcaron la tensión sobre la solución inicial:

- a) La petición de justificación (momento 3) solicitada por la profesora y los compañeros.
- b) El reconocimiento de la ausencia de un argumento fuerte (momento 4).

El efecto de estas situaciones fue el debilitamiento de la solución de pareja y el posicionamiento antagónico de la solución de *Ellos* (momento 5).

Finalmente la fuerza del antagonismo y el reconocimiento de esta fortaleza conlleva al abandono de la solución de pareja y a un posicionamiento débil para la solución defendida por el grupo argumentador. El reconocimiento de otra solución se marco por dos actitudes: a) la de admitir haber realizado un paso no legítimo en la solución "no se puede involucrar en la prueba aquello que se va a probar" y, b) la de valorar la solución antagónica. Sin embargo, como efecto final de la tarea si se evidenció que todo el proceso facilitó la construcción de un sentido para la Relación Pitagórica y este sentido es el de las áreas.

## **3) El desarrollo del propósito de la tarea.**

Aunque la figura bloqueó el proceso de identificación de la Relación Pitagórica como un status teórico de conclusión, sí permitió consolidar un aspecto fundamental para la elaboración del sentido en la relación y fue facilitó considerar

como unidades significantes y conceptuales: Las áreas, el ángulo recto y los triángulos. Este registro figural también puso en juego los elementos fundamentales para la elaboración de la relación: los cuadrados, las áreas, los triángulos rectángulos.

En la actividad No. 2 se propuso un conjunto de gráficas en las que no estaban explícitos los cuadrados y en este caso el bloqueo para la relación pitagórica fue mayor y de más resistencia para su movilidad.

Desde el punto de vista del desarrollo argumentativo, se puede afirmar que la estructura de la interacción argumentativa (expresión-aclaración-cooperación-conclusión), estuvo determinada por los momentos propuestos para la tarea. En este sentido, la estructura argumentativa no emergió directamente del posicionamiento argumentativo de los estudiantes, pero sí se consolidaron estos momentos como los pasos propios de un proceso argumentativo para una solución.

Expresiones como: E1: *"Inicialmente tomé una versión.... Eso es lo mío"*. E2: *"Es más o menos lo mismo.... entonces ¿sí está de acuerdo?"* Tienen la función de expresar o exponer la solución, y manifiestan la posición individual, determinando posturas epistémicas frente a la solución.

Expresiones como: E1: *"A igual C, que no entiendo, pero puede ser como usted dice."*, cumplen la función de llamado a la aclaración.

Expresiones como: E2: *"Tengo un nuevo cuadrado... bueno, entonces sí está de acuerdo?"*, E1: *"con su fórmula sí..."*, funcionan como explicaciones al proceso realizado y de llamado al acuerdo.

Después de este tipo de interacciones se inicia una etapa de cooperación para la producción de la solución de pareja, pero a partir del acuerdo por la solución de E2. En este momento, en el plano de la producción argumentativa, se desvanecen definitivamente los roles de argumentador y contraargumentador que se pudieran dar en la pareja, desde la lógica de la interacción propuesta en la tarea: discutir las soluciones. Ocurre, entonces un fenómeno interesante. La cooperación va configurando una sola voz, constituida por los dos estudiantes, como generadores de una solución de pareja; de un solo enunciado; de un argumento y de una posible trama para poner en juego ante el grupo general.

E1: *Bueno, entonces ¿cómo armamos la argumentación? Usamos esta figura de..."*

E2: *Bueno, ahí estamos claros, pero cómo defendemos que éste es este mismo? ¿Cómo lo demostramos?*

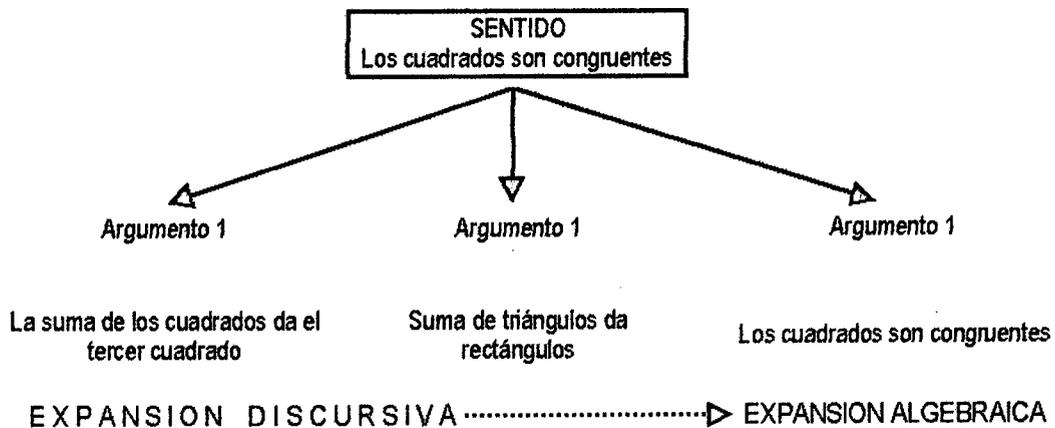
Lo anterior significa que, si bien el proceso argumentativo en general es débil, se pudieron identificar fases argumentativas fuertes y rasgos de validación, como en los momentos 3 y 4. En el momento 4, se consolida un *nosotros* que defiende una

solución actuando discursivamente como una sola voz: se trabaja sobre una sola hoja; el discurso de cada interlocutor se torna en complementario del anterior, generando una única elaboración de texto (escrito a dos manos).

Las demás fases cumplen una función más explicativa en tanto se orientan a hacer inteligible las soluciones y los procesos expuestos.

Por otra parte en cuanto al desarrollo de una actitud argumentativa en los estudiantes, se manifiesta y se desarrolla paulatinamente la conciencia de "sujeto argumentador". Esto se observa en expresiones como: "¿cómo lo argumentamos?", "¿Cuál es el argumento?", "¿cómo demuestra que eso es así?", "Necesitamos un argumento más fuerte" "esta solución si no nos la tumba nadie", "o sea, eso es lo que nos piden, nosotros argumentamos eso, si o no?"

También se observó que la elaboración de la trama argumentativa pone en conflicto al sujeto argumentativo, "en la relación que elaboro, ¿qué se me exige?". Pregunta ésta que va orientando la producción de enunciados solución y, como producto, genera enunciados que van adquiriendo funciones y fuerza de argumentos y se van conectando de cierta manera. Así, la trama identificada en el desarrollo de la solución, por parte de la pareja analizada es:



El resultado de esta trama es un sentido no muy bien consolidado, que en el momento 3 sufre un debilitamiento, como se mostró arriba, frente a la petición de justificación. Particularmente, cuando se quiere validar el proceso, se señala una falencia: falta asegurar que efectivamente el cuadrado se construye sobre la hipotenusa. Responder a esta falencia, los lleva a pasar del tratamiento figural al conceptual. En este sentido, se observa cómo el proceso de elaboración discursiva y semiótica responde particularmente al propósito de justificar la solución. Es decir, que el proceso argumentativo responde a una petición epistémica y social de dar cuenta de, bajo el criterio de validez, corrección y prueba.

## **V. ESTRATEGIA DE SOCIALIZACION DEL PROYECTO**

Frente al requerimiento del IDEP de que todo Proyecto financiado por esta Entidad, debe desarrollar formas de socialización a la comunidad educativa, el Grupo Investigador optó por generar una estrategia de socialización formativa. Esta estrategia consistió en construir un espacio para la consolidación de un grupo de reflexión interdisciplinaria en lenguaje y matemáticas.

El punto de partida de la estrategia fue la consideración de que la socialización, por sí misma, cumple una función importante de "dar a conocer", pero no asegura procesos reflexivos. En este sentido, el Grupo Investigador se propuso generar un espacio de reflexión interdisciplinaria en el campo del desarrollo de la competencia argumentativa en geometría.

Así, se asumió, como parte de la estrategia, conformar un grupo de reflexión permanente, compuesto por: estudiantes de licenciaturas en lenguaje y matemáticas, profesores de lenguaje y de matemáticas de los niveles de básica, media y superior y, por investigadores del lenguaje y las matemáticas. Para ello, se convocó a las Universidades Distrital y Fundación Universitaria Monserrate, para vincularse con un grupo de profesores de las licenciaturas y especializaciones en lenguaje y matemáticas. Se garantizó así un grupo base de 30 personas del sector público y privado. También, se logró vincular como conferencistas invitados, para fortalecer el proceso formativo, un grupo de investigadores nacionales e internacionales que intervienen en distintos momentos del proceso. A continuación, se describe el desarrollo de los eventos.

Los Eventos de Socialización, se realizaron en dos modalidades, i) Eventos de Socialización derivados del desarrollo de la investigación, y ii) Invitaciones que ha hecho la comunidad a las investigadoras de dicho proyecto, para presentación de resultados. A continuación presentamos una descripción general de dichos eventos.

**4) Modalidad i): Desarrollo de la Investigación:**

Evento	Descripción general del Evento	Participantes	Metodología de trabajo	Invitados / asistentes	Lugar y Fecha del Evento
1er. Evento de Socialización	<ul style="list-style-type: none"> <li>Este Evento permitió reflexionar sobre los diversos sentidos que se le asignan a la Argumentación, a la Validación y a la Demostración del conocimiento matemático en el aula, desde las perspectivas epistemológica, lingüística y didáctica.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Conferencistas Invitados: Prof. Carlos Alvarez, UNAM, México "Texto y contexto del Teorema de Pitágoras"</li> <li>Prof. Esperanza Paredes, Universidad de Pamplona, "Lenguaje y Comunicación en el Aula"</li> <li>Moderador del Conversatorio: Prof. Jesús Hernando Pérez, Anillo de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia</li> </ul>	<p>Primer día:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Socialización avance proyecto Grupo de Investigación.</li> </ul> <p>Segundo día:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Taller</li> <li>Plenaria</li> <li>Conferencia Preguntas e inquietudes</li> <li>Conferencia Preguntas e inquietudes</li> <li>Conversatorio</li> <li>Conclusiones</li> </ul>	<p>Profesores, estudiantes e investigadores de las áreas de Matemáticas, y Lenguaje, de las Universidades: Valle, Nacional de Colombia, Industrial de Santander, Pamplona, Distrital, Monserrate, Pedagógica, Nacional, Andes; entidades como Asociación Anillo de Matemáticas, C.E.D. OEA</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Para un total de 83 asistentes.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Bogotá, D.C., febrero 18 y 19 de 2000</li> <li>Sede de Posgrados de la Universidad Distrital "Francisco José de Caldas"</li> </ul>
1ª. Charla de Profundización	<p>Título: "Abducción, deducción e inducción en el desarrollo del conocimiento matemático"</p>	<p>Conferencista Invitado: Prof. Jesús Hernando Pérez, Anillo de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Conferencia</li> <li>Preguntas e inquietudes</li> </ul>	<p>Profesores, estudiantes e investigadores en las área de Matemáticas y de Lenguaje.</p>	<p>Bogotá D.C., Asociación Anillo de Matemáticas, Abril 8 de 2000</p>
2ª. Charla de Profundización	<p>Título: "Competencia Argumentativa"</p>	<p>Conferencista Invitado: Dr. Fabio Jurado Valencia, Universidad Nacional de Colombia</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Conferencia</li> <li>Preguntas e inquietudes</li> </ul>	<p>Profesores, estudiantes e investigadores en las área de Matemáticas y de Lenguaje.</p>	<p>Bogotá D.C., Fundación Universitaria Monserrate, julio 22 de 2000</p>

Evento	Descripción general del Evento	Participantes	Metodología de trabajo	Invitados / asistentes	Lugar y Fecha del Evento
<p><b>2º. Evento de Socialización</b></p>	<p>Temática: "La identificación de problemas que surgen para el estudio de la relación: argumentación-validación-demostración en el aula"</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>El Evento se constituyó en un espacio para el encuentro entre profesionales de diversas disciplinas y para la reflexión sobre problemáticas relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y el lenguaje.</li> </ul>	<p>Conferencistas Invitados:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Prof. Carlos Alvarez, UNAM, México, "Conjeturas sobre el ángulo de contacto"</li> <li>Prof. Francisco Rodríguez Latorre, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Tunja, "Racionalidad e irracionalidad en la argumentación"</li> </ul> <p>Moderador del Conversatorio:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Prof. Jorge Rodríguez, Coordinador Especialización en Matemáticas, Universidad Distrital</li> </ul>	<p>Primer día:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Contextualización de los encuentros.</li> <li>Socialización avance proyecto Grupo de Investigación.</li> <li>Preguntas</li> <li>Cierre</li> </ul> <p>Segundo día:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Conferencia Prof. Alvarez</li> <li>Preguntas e inquietudes</li> <li>Conferencia Prof. Rodríguez</li> <li>Preguntas e inquietudes</li> <li>Taller por grupos: a) básica, b) media-superior</li> <li>Conversatorio</li> <li>Conclusiones</li> </ul>	<p>Profesores, estudiantes e investigadores de las áreas de Matemáticas, y Lenguaje, de las Universidades: Valle, Nacional de Colombia, Industrial de Santander, Pamplona, Distrital, Monserrate, Pedagógica, Nacional, Andes; entidades como Asociación Anillo de Matemáticas, C.E.D. OEA</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Para un total de 83 asistentes.</li> </ul>	<p>Bogotá D.C, Sede Posgrados Universidad Distrital "Francisco José de Caldas", agosto 11 y 12 de 2000</p>
<p><b>3º. Charla de Profundización</b></p>	<p>Título: "Dinámica enunciativa en el discurso: La construcción polifónica del punto de vista"</p>	<p>Conferencista Invitado:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Dra. Ma. Cristina Martínez, Escuela de Ciencias del Lenguaje – Doctorado en Lenguaje y Educación, Universidad del Valle</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Conferencia</li> <li>Preguntas e inquietudes</li> </ul>	<p>Profesores estudiantes e investigadores de las áreas de Matemáticas, y de Lenguaje.</p>	<p>Bogotá D.C., Fundación Universitaria Monserrate, septiembre 13 de 2000</p>

### 5) Modalidad ii): Invitaciones de la Comunidad

Evento	Descripción general del Evento	Participantes	Metodología de trabajo	Invitados / asistentes	Lugar y Fecha del Evento
Congreso Nacional de Matemáticas	Curso: "Historia de la Demostración"	<ul style="list-style-type: none"> <li>Prof. Carlos Alvarez, UNAM, México, Idep</li> <li>Prof. Olga Lucía León, Idep, Universidad del Valle</li> </ul>	Curso	Comunidad matemática colombiana	Bogotá, D.C., Pontificia Universidad Javeriana, agosto de 2000
	Conferencia y curso: "Consideraciones históricas y epistemológicas sobre la estructura deductiva de la geometría"	<ul style="list-style-type: none"> <li>Prof. Carlos Alvarez, UNAM, México, Idep</li> </ul>	Conferencia Curso	Comunidad matemática colombiana	Bogotá, D.C., Pontificia Universidad Javeriana, agosto de 2000
2º. Encuentro Colombiano de Matemática Educativa	Curso-Taller: "Una perspectiva para el desarrollo de la relación pitagórica"	<ul style="list-style-type: none"> <li>Prof. Olga Lucía León</li> <li>Prof. Dora Inés Calderón</li> </ul> Grupo de Investigación Interdisciplinaria en Pedagogía del Lenguaje y las Matemáticas – IDEP	El curso se desarrolló mediante la metodología de seminario-taller. Se pretendió realizar un proceso de formación básico para la aplicación y discusión de talleres en torno a la temática del curso.	Profesionales de la educación, profesores de matemáticas e investigadores, de diversas regiones del país.	Valledupar, Cesar, Universidad Popular del Cesar, octubre 5, 6 y 7 de 2000
Charlas para cooperación académica	Conferencia Inaugural de Semestre: "Sobre la competencia argumentativa"	<ul style="list-style-type: none"> <li>Prof. Dora Inés Calderón</li> </ul> Grupo de Investigación Interdisciplinaria en Pedagogía del Lenguaje y las Matemáticas – IDEP	Conferencia	Estudiantes y profesores de la Licenciatura en Básica, con énfasis en Lengua Castellana y de Especializaciones.	Bogotá, D.C., Fundación Universitaria Monserrate, febrero 19 de 2000.
	Especialización en Didáctica de las Matemáticas: "Discurso y Argumentación"	<ul style="list-style-type: none"> <li>Prof. Dora Inés Calderón</li> </ul> Grupo de Investigación Interdisciplinaria en Pedagogía del Lenguaje y las Matemáticas – IDEP	Conferencia	Estudiantes y profesores de la Especialización en Educación Matemática	Bogotá D.C., posgrados Universidad Distrital "Francisco José de Caldas", abril de 2000.

Evento	Descripción general del Evento	Participantes	Metodología de trabajo	Invitados / asistentes	Lugar y Fecha del Evento
Charlas para cooperación académica	"Estructura deductiva del Libro Primero de los Elementos de Euclides"	<ul style="list-style-type: none"> <li>Prof. Carlos Alvarez, UNAM, México, Idep</li> </ul>	Conferencia	Profesores e Investigadores de Matemáticas de la Asociación Anillo de Matemáticas. Invitados profesores: Jesús Hernando Pérez y Alberto Campos, Universidad Nacional de Colombia	Bogotá D.C., Asociación Anillo de Matemáticas, febrero de 2000.
	Licenciatura de Matemáticas: "Dos momentos en el desarrollo de la noción de cantidad"	<ul style="list-style-type: none"> <li>Prof. Carlos Alvarez, UNAM, México, Idep</li> </ul>	Conferencia	Estudiantes, profesores e investigadores de la Licenciatura en Educación Básica, con énfasis en Matemáticas.	Bogotá D.C., Sede Macarena A, Universidad Distrital "Francisco José de Caldas", febrero de 2000.
	Especialización en Educación Matemática: "Sobre las magnitudes"	<ul style="list-style-type: none"> <li>Prof. Carlos Alvarez, UNAM, México, Idep</li> </ul>	Conferencia	Estudiantes de la Especialización en Educación Matemática	Bogotá D.C., Sede posgrados, Universidad Distrital "Francisco José de Caldas", febrero de 2000.
	Licenciatura en Matemáticas: "Teorema fundamental del álgebra: ¿qué demostrar?"	<ul style="list-style-type: none"> <li>Prof. Carlos Alvarez, UNAM, México, Idep</li> </ul>	Conferencia	Estudiantes y profesores de la Licenciatura en Educación Básica, con énfasis en Matemáticas.	Bogotá D.C., Sede Macarena A, Universidad Distrital "Francisco José de Caldas", agosto de 2000.

### 3) Impacto del proyecto en programa de formación:

Programa	Relación Proyecto	Investigador que orienta	Resultado
Especialización en Educación Matemática, Universidad Distrital "Francisco José de Caldas"	Desarrollo de investigación de procesos argumentativos en matemáticas en profesores de básica primaria del Distrito Capital.	Olga Lucía León	Seminario en Investigación en Argumentación en Matemáticas. Proyecto de grado: La argumentación en la resolución de problemas de tipo multiplicativo, en estudiantes de tercero de primaria. (Sustentado) Proyecto de grado: Comportamiento discursivo en procesos de resolución de problemas multiplicativos en contextos argumentativos matemáticos, no matemáticos. Reporte de una experiencia. (en evaluación)

## V. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Desde la experiencia desarrollada en esta investigación, se observa que la elaboración de requerimientos didácticos para el desarrollo de competencias argumentativas en geometría compromete procesos cognitivos complejos para el profesor. Esto, por cuanto para la comprensión de los procesos empleados en la elaboración de conocimiento en el aula, se ponen en juego varios campos de conocimiento: el matemático, el psicológico y el comunicativo. Consideramos entonces, que este proceso tendría que ser efecto de la reflexión de grupos conformados por formadores de profesores o por grupos de investigación en educación. Grupos en los que el profesor pueda jugar el mismo rol de los formadores e investigadores y, por supuesto, estar presente como miembro fundamental de los equipos.

Así por ejemplo, el desarrollo del presente proyecto evidenció el papel dinamizador de las preguntas de aula, para el desarrollo de los requerimientos de didácticos. En este sentido, se comprobó que el profesor proporciona elementos de base que se convierten en los llamados a integraciones teóricas en los requerimientos. Un ejemplo interesante de este problema didáctico lo constituyó, en este proyecto, el uso del registro figural. Pensar en el papel de este registro para el aprendizaje de la geometría se convirtió en un llamado fundamental para el desarrollo de los requerimientos didácticos. Tanto es así que, a partir de los cuestionamientos que las investigadoras realizaron al diseño didáctico (ver capítulo III), el requerimiento cognitivo cobró un rol protagónico, tanto para la explicitación de los asuntos que debía resolver, como para el desarrollo de los otros requerimientos.

De otra parte, la pregunta por el factor que regula la producción de sentido para un conocimiento matemático, se convirtió en una pregunta que proporcionaba una articulación didáctica natural para los requerimientos. Es decir, que las preguntas de aula se convierten, además, en elementos articuladores de tales requerimientos. No se desconoce, sin embargo, la tensión que se genera entre la autonomía teórica de los campos de los que provienen los requerimientos y la necesidad de autonomía de un saber didáctico. Tensión que no será fácil de eludir, dado que la naturaleza del saber didáctico es ser un saber que recontextualiza saberes.

Desde esta perspectiva, se reconoce que la elaboración de requerimientos didácticos no es una tarea sencilla que pueda realizar sólo el profesor o sólo el investigador o el formador de formadores. Por el contrario, para este fin, exige la conformación de grupos de trabajo interdisciplinario e intercontextual, en el contexto de la ecuación.

Otra posibilidad de articulación en la puesta en juego de los requerimientos didácticos la constituye la pregunta por las competencias específicas a desarrollar en los estudiantes. Este proyecto se preguntó particularmente por: ¿Cuáles son las competencias argumentativas en geometría, dentro de un marco general de

desarrollo del estudiante universitario? Esta pregunta generó reflexiones en el orden de las consideraciones cognitivas y epistemológicas implicadas en el desarrollo del saber geométrico.

De la reflexión anterior se concluyó que la elaboración de requerimientos siempre implicaría la realización de selecciones teóricas y de perspectivas de análisis. Por ello, resulta fundamental la explicitación de elementos reguladores de la puesta en juego de los requerimientos. Preguntas como ¿los requerimientos permiten la elaboración de diseños de aula? y, ¿los requerimientos aclaran la mirada sobre los procesos realizados por los estudiantes en el cumplimiento de un propósito didáctico, y permiten anticipar efectos del diseño en el proceso escolar? proporcionan los elementos de regulación ineludibles para los requerimientos.

Por otra parte, y desde el punto de vista del análisis de la argumentación en el aula, se evidenció que el efecto de los requerimientos en el desarrollo de competencias argumentativas en matemáticas se sitúa en dos contextos. En primer lugar, los requerimientos proporcionan criterios que determinen competencias específicas a desarrollar. En segundo lugar, ellos proporcionan criterios para valorar los estados de desarrollo de las competencias. En esta perspectiva los resultados de este estudio aportan elementos para la caracterización de competencias específicas en geometría.

Finalmente, en la perspectiva del impacto de la estrategia de socialización del proyecto en la comunidad académica, se puede concluir que cumplió una función, más que socializante, formadora. Esto, en tanto que la estrategia permitió construir, desde la diversidad disciplinar y de desempeño laboral y estudiantil, un espacio de reflexión que comprometió al desarrollo del proyecto en una dinámica social de elaboración de conocimiento. A la vez, consolidó una respuesta para una pregunta que se repetía en estos encuentros ¿Qué es el desarrollo de una competencia argumentativa en geometría? Naturalmente, que en un contexto teórico y metodológico general, la respuesta que proporciona este estudio se convierten en un aporte para la teorización sobre este aspecto. Teorización que cumple dos funciones en el contexto de la educación matemática y del lenguaje y la educación: a) ser una herramienta para los docentes e investigadores en el tema de las competencias, que proviene de un proceso de investigación – acción; b) abonar el campo del debate científico sobre este tema.

Con base en todo lo anterior, y en la perspectiva del desarrollo de la línea de investigación en argumentación en matemáticas que adelanta el Grupo, la investigación proyecta un desarrollo sobre las características particulares de las competencias que se identificaron. Tal trabajo no se propuso en los objetivos del estudio y tampoco era posible realizarlo en el tiempo de vigencia del presente proyecto. Sin embargo, es un hecho que se constituye en la continuidad de esta investigación.

## BIBLIOGRAFIA

ALVAREZ, Carlos. (2000) "Two ways of reasoning and two ways of arguing in geometry. Some remarks concerning the application of figures in Euclidian geometry". (en prensa). México: UNAM.

BERNSTEIN, Basil. (1993) La construcción social del discurso pedagógico. (Ed. Mario Díaz). Bogotá: El Griot.

BENSON, Donald. (1999) The moment of proof. New York – Oxford: University Press.

BARTHELOT y SALIN (1998)

BROUSSEAU, G. (1998) Fundamentos de Didáctica de la Matemática. En: Arce, J., Castrillón, G. Y Obando, G. (1998) (Comps.) Lecturas en Didáctica de las Matemáticas. Ingeniería Didáctica I. Cali. Universidad del Valle pp. 97-182

CAMPOS, Alberto (1994) Axiomática y Geometría desde Euclides hasta Hilberth y Bourbaki. Bogotá: Alberto Campos Editor

CALDERON, Dora (2000) "Género Discursivo, Discursividad y Argumentación". Ponencia presentada para la defensa de Candidatura a Doctor. Doctorado en Lenguaje y Educación. Universidad del Valle

CATALA, Claudia, Et. al. (1998) ¿Por qué geometría? Propuestas didácticas para ESO. Madrid: Síntesis

CORRINGTON, R (1993) An Introduction to C.S. Peirce, Boston. Rowman and Littlefield Publishers.

DOUADY, Régine (1996). Ingeniería Didáctica y Evolución de la Relación con el Saber. IREM París VII: Publication des I.R.E.M. La direction de E. Barbin et R. Douady.

DUVAL, Raymond. (1999) Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. (Tr. Myriam Vega). Cali: Universidad del Valle.

\_\_\_\_\_ (1995). Argumentar, demostrar, explicar: ¿Continuidad o ruptura cognitiva?. Bologna – Querétaro: Grupo Editorial Iberoamericano

EUCLID (1956) The Thirteen Books of Euclid's Elements. Introduction and Commentary by Sir Th. L. Heath. New York. Dover Publications, Inc. Vol. I, II, III (2ª Edición)

EUCLIDES (1999) Elementos Libros I-XIII Madrid: Gredos Traducción y Notas María Luisa Puertas Castaños Tomos I, II, III

FRANCOS, D.F. (1989). "Demostraciones del Teorema de Pitágoras". En: Notas de Matemáticas No. 28 Bogotá: Universidad Nacional. Dpto. de Matemáticas y Estadística. Octubre de 1989. pp. 64-86

GÓMEZ, Adolfo León (1993) Argumentos y Falacias. Cali: Universidad del Valle

\_\_\_\_\_ (1991) El primado de la razón práctica. Cali: Universidad del Valle

JONES, K. (1998) "Deductive and inductive approaches to solving geometrical problems". En: Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21 Century. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher

JOSEPHSON, J.R y JOSEPHSON, S.G. (1996) (Eds) Abductive Inference. Computation, Philosophy, Technology. Cambridge: Cambridge University Press

LEON, Olga Lucía (2000) "El Papel del Quinto Postulado en la Arquitectura del Libro Primero de los Elementos de Euclides" Ponencia presentada para defensa de Candidatura a Doctor. Doctora en Educación Matemática. Universidad del Valle

LO CASCIO, Vincenzo (1991). Gramática de la argumentación. Madrid: Alianza Editorial.

MERREL, F. (1995) Peirce's Semiotics Now. Toronto: Canadian Scholar's Press

PEIRCE, Charles (1903) "Abduction and Induction". En: J. Buchler (1955). Philosophical Writings of Peirce. New York: Dover Publications. pp. 150-156

\_\_\_\_\_ (1978a) Deduction, Induction and Hypothesis. The Popular Science Monthly, vol. XIII. Pp. 470-480

\_\_\_\_\_ (1978b). The Probability of Induction. The Popular Science Monthly, vol. XII. Pp. 705-718

PEREDA, Carlos (1994) Vértigos Argumentales. Una Etica de la Disputa. Barcelona: Anthropos/Universidad Autónoma Metropolitana

\_\_\_\_\_ (1995) "Teorías de la Argumentación". En: León, Olivé (ed.) Racionalidad Epistémica. Madrid: Trotta

PERELMAN, Chaim y OLBRECHT-TYTECA, Lucien (1989). Tratado de la Argumentación. Madrid: Gredos

PÉREZ, Jesús Hernando (2000) "Trilogía de Pierce". Ponencia presentada en el Encuentro de profundización. Proyecto "Caracterización de los requerimientos didácticos para el desarrollo de competencias argumentativas en matemáticas" – IDEP- Bogotá: Sede Asociación Anillo de Matemáticas. Agosto 4 de 2000

SÁENZ-LUDLOW, Adalira (1998) "Procesos inferenciales en el pensamiento matemático de Miguel". En: Revista EMA. vol 4, No. 1. Bogotá: Una Empresa Docente, Universidad de los Andes. pp. 3-15

VAN DIJK, Teun A. (1983) La Ciencia del Texto. Barcelona: Paidós

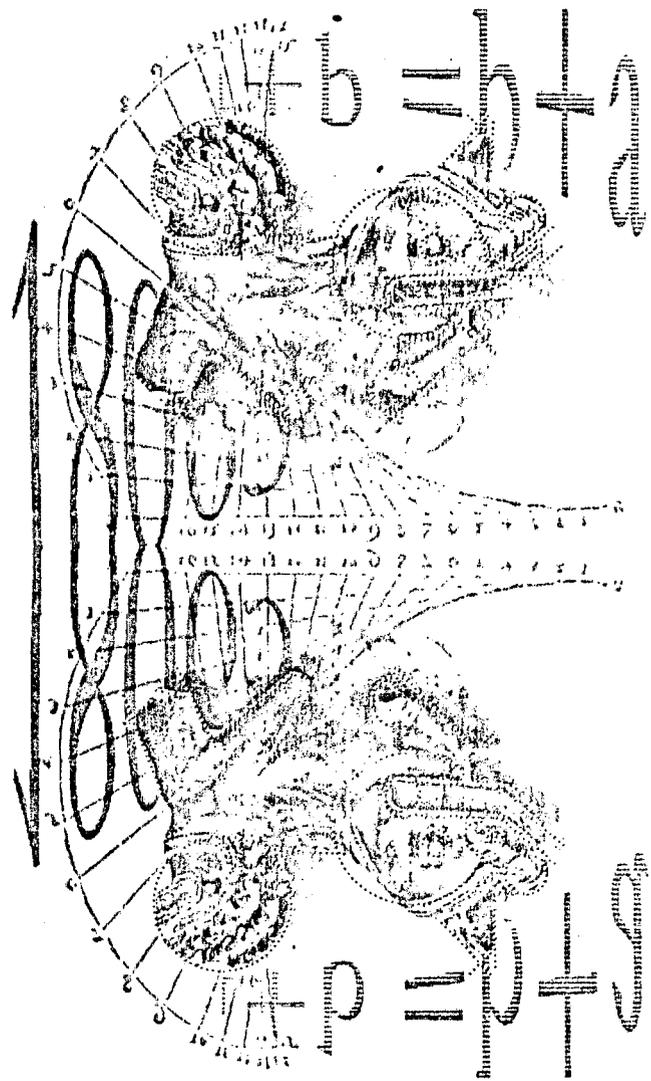
VASCO, Carlos Eduardo. (1998). Dynamic geometry in the Colombian school curriculum. En: Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21 Century. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher

ZÁRATE, E. (1996). "Generalización del Teorema de Pitágoras". En: Educación Matemática. vol. 8 No. 2. México: Grupo Editorial Iberoamericano. Pp. 127-144.

ANNEXOS

S  
A  
R  
O  
E  
E  
E

# Segundo Encuentro colombiano de matemática educativa



Octubre 5, 6 y 7 de 2000 Valledupar (Cesar)

Organiza:



ASOCIACIÓN COLOMBIANA  
DE MATEMÁTICA EDUCATIVA  
ASOCOLME



UNIVERSIDAD POPULAR  
DEL CESAR  
Sede

- puntos medios correspondientes a lados consecutivos.
- Escriba las conjeturas y/o las ideas que le sugiere la observación global de los gráficos realizados.
- Trate de verificar y probar cada una de las conjeturas que formule.

### Situación problemática No 2: Semáforos

Necesitas: papel, lápiz, regla.

Martín Vía y Carolina Calle eran los ingenieros de tráfico de la ciudad de Simpleton. Se lo pasaron bomba diseñando calles para que pasara el tráfico de la ciudad, y construyeron incluso una autopista que la rodeaba; pero ahí fue donde comenzó su gran problema.

Una de las calzadas de la autopista cruzaba la nueva carretera de circunvalación, que a su vez se cruzaba con muchas otras calles que también se cruzaban entre sí. Estaba claro que había que poner semáforos para que los coches no se chocaran pero, ¿cuántos semáforos hacían falta?

—*Vamos a dibujar un mapa— dijo Martín. —Buena idea— contestó Carolina.*

Pero se encontraron con que no sabían como trazar el mapa de las carreteras y los semáforos.

“Parece que vamos a necesitar un montón de semáforos”, dijo Carolina, “pero es difícilísimo hacer el mapa. Tiene que haber otro sistema para averiguar cuántos semáforos hacen falta”.

¿Puedes ayudarles?. Puedes averiguar cuántos grupos de semáforos harían falta para ocho calles que se cruzaran entre sí?, y para nueve calles, para 10, para 21, o ...?

### Situación problemática No 3: Tres dados

Este es un juego para cualquier número de personas. Se necesitan tres dados y un tablero de cartulina o en una hoja de papel.

Reglas:

- Cada jugador elabora una ficha o tablero en el que escribe 9 números diferentes.
- Por turnos cada jugador tira los tres dados y adiciona los números obtenidos.
- Si el total de esta suma es uno de los números que esta en su tablero, táchelo.
- La primera persona que tache todos los números, es el ganador.

Juegue varias veces.

¿Qué números escogería usted para su tablero, de tal manera que le den la mejor oportunidad para ganar?

## UNA PERSPECTIVA ARGUMENTATIVA PARA EL DESARROLLO DE LA RELACIÓN PITAGÓRICA

Olga Lucía León  
Dora Inés Calderón

GRUPO DE INVESTIGACIÓN INTERDISCIPLINARIA  
EN PEDAGOGÍA DEL LENGUAJE Y LAS MATEMÁTICAS - IDEP

### Contexto del curso-taller

En el marco del desarrollo del proyecto “Caracterización de los requerimientos didácticos para el desarrollo de competencias argumentativas en matemáticas”, que realiza el Grupo investigador con el auspicio del Instituto de Investigación y Desarrollo Educativo IDEP de la Secre-

taria de Educación de Santa Fe de Bogotá, se propone este curso-taller, con la finalidad de socializar y poner en juego, con maestros de distintos niveles, una perspectiva argumentativa para el tratamiento de la relación pitagórica en el aula. Así, se tendrá la oportunidad de considerar, con los talleristas, los efectos didácticos de tipo epistemológico, cognitivo y comunicativo de esta elección.

**ANNEXO 1**

## ANEXO 1

### PRIMERA ELABORACION DE LOS REQUERIMIENTOS

#### A. Requerimientos Epistemológicos

Existen dos aspectos básicos para el desarrollo de la competencia argumentativa en matemáticas en estudiantes en general, pero de gran valor en estudiantes de la licenciatura en matemáticas. El primero tiene que ver con el **reconocimiento de un sentido** en cualquier tipo de texto matemático, y el segundo, tiene que ver con el **desarrollo de sentido** para los textos matemáticos que se elaboran en la escuela, por parte de profesores y estudiantes.

Estos dos aspectos determinan la presencia en el diseño de actividades didácticas, de un componente epistemológico que dé razón de la elaboración de sentido para los conocimientos matemáticos en los procesos de producción de conocimiento matemático, a través de la historia. Sentidos que se encuentran manifiestos en los textos matemáticos a los que acceden los estudiantes en sus consultas para el desarrollo de los procesos que orienta la institución escolar.

Pero este requerimiento de orden epistemológico es también un requerimiento en el desarrollo de la competencia didáctica del profesor de matemáticas. Esto, por cuanto el conocimiento de los diferentes sentidos que se le asigna a un texto matemático, le permitirá diseñar las actividades didácticas para el desarrollo de este componente en la estructura argumentativa del estudiante.

A continuación se presenta el aporte del componente epistemológico en la comprensión de los sentidos de la relación pitagórica, asignados según contextos matemáticos en los que se sitúa esa relación. Hasta el momento del estudio, se han identificado tres contextos amplios de significación para la relación pitagórica: el primero es el contexto de la matemática pre-euclidiana, el segundo el de la geometría euclidiana y el tercero el de la geometría pos-cartesiana. A continuación se desarrollaran los sentidos identificados al interior de la geometría euclidiana.

#### **EL CONTEXTO DE LA GEOMETRIA EUCLIDIANA PARA LA RELACION PITAGORICA**

Desde el punto de vista epistemológico, las primeras preguntas que orientaron este estudio son 1) ¿En qué parte de la obra Euclidiana está involucrada la relación pitagórica?, y 2) ¿Cuál es el sentido que se le puede asignar a la relación pitagórica según el lugar que ella ocupa en ese contexto?. La respuesta a estas preguntas nos llevó a considerar una caracterización para la obra euclidiana entre las muchas

que le han sido asignadas atendiendo a diversos aspectos<sup>1</sup>. El enfoque que nos interesó es precisamente el que a continuación se menciona.

Los Elementos de Euclides son un gran tratado de magnitudes en el que se evidencia un carácter irreconciliable entre las magnitudes discretas y las magnitudes continuas. Este aspecto hace que se generen cantidades geométricas y cantidades aritméticas. A los ojos de Euclides el estatuto de cantidad se tiene cuando es posible compararlas y definir la suma de la magnitud a tratar; la posibilidad de comparar, sumar o restar es la característica propia de toda cantidad.

La relación pitagórica aparece por primera vez en el Libro Primero de los Elementos, específicamente en la proposición 47, como se menciona en (León, 2000). El Libro Primero se ocupa de evidenciar el carácter de cantidad geométrica, cuando hace posible la suma de segmentos, la suma de ángulos y la de áreas; este aspecto hace que se consideren como magnitudes continuas la longitud, la amplitud y el área. La magnitud área se introduce de manera tardía, debido a que el primer criterio de igualdad para las figuras que maneja Euclides es el de coincidencia en la superposición. Inicialmente, con este criterio, no puede operar las áreas pues hay diversidad de figuras rectilíneas que manifiestan la magnitud área pero que no son iguales por coincidencia. Necesita generar, entonces, un segundo criterio de igualdad que no dependa de la forma pero si de la cantidad de área que ella encierra. Este segundo criterio es el que aparece a partir de la proposición 34, en donde habla de igualdad de dos figuras, si se conserva la superficie, aunque la forma de las mismas sea diferente.

La magnitud área es introducida tardíamente en el Libro Primero, dado que las primeras 32 proposiciones de las 48 que tiene el Libro Primero, permiten la suma, la resta y la ordenación de segmentos y de ángulos, privilegiando el triángulo como figura particular para la expresión de estas magnitudes. Desde la proposición 33, el triángulo deja de ser figura exclusiva y aparece el paralelogramo como figura a partir de la cual Euclides decide ocuparse de la magnitud que hasta el momento no había tratado y es precisamente el área. Con las proposiciones 42 a 45, Euclides garantiza que toda figura rectilínea se puede llevar a un paralelogramo, y así mismo presenta un procedimiento “que permite añadir o sustraer áreas rectilíneas y representar la suma o diferencia por un rectángulo de cualquier longitud dada” (Vega, 1999).

En el teorema de Pitágoras, el área adquiere un estatuto de magnitud igual a la de los segmentos y los ángulos, posteriormente al garantizar que toda figura rectilínea se puede cuadrar, Euclides vuelve a recuperar el criterio de igualdad que tenía inicialmente para las áreas, pues dos figuras tendrán la misma área, si se pueden llevar al mismo cuadrado.

---

<sup>1</sup> Al respecto se puede considerar el documento “El papel del quinto postulado en el libro primero de la geometría Euclidiana” elaborado por Olga Lucía León, para la defensa de la Línea de Historia en el Doctorado en Educación Matemática. Universidad del Valle (2000)

Las anteriores consideraciones llevan a explicitar el primer sentido que se le asigna a la relación pitagórica en el contexto del Libro Primero de la obra euclídiana: es una relación entre áreas de cuadrados, fundamentada en un criterio de igualdad para las figuras, y así el teorema de Pitágoras es el teorema de la suma de las áreas, dado por la posibilidad de cuadrar el área de cualquier figura rectilínea.

La anterior caracterización de un primer sentido para la relación pitagórica, permite considerar dos posibles generalizaciones para la misma. En primer lugar tenemos que el teorema de Pitágoras es el único teorema sobre el triángulo que hace alusión a una propiedad que no hace parte del triángulo.

Las magnitudes que se relacionan no son las del triángulo. El papel del triángulo es convertirse en un operador que genera más magnitudes que las que por naturaleza tiene el triángulo; por eso la función de operador al modificar el ángulo recto no cambia. Es decir, que la generalización de la relación pitagórica está determinada por la garantía de mantener el triángulo como operador para otras magnitudes y en este contexto aparecen las proposiciones 12 y 13 del Libro Segundo y la proposición 31 del Libro 6. Veamos en la presentación de las proposiciones en las que la relación pitagórica juega un papel importante.

#### **PROPOSICION 47 "LIBRO PRIMERO"**

En los triángulos rectángulos el cuadrado del lado que subtiende el ángulo recto es igual a los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo recto.

#### **PROPOSICION 12 "LIBRO SEGUNDO"**

En los triángulos obtusángulos el cuadrado del lado que subtiende el ángulo obtuso es mayor que los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo obtuso en dos veces el rectángulo comprendido por un (lado) de los del ángulo obtuso sobre el que cae la perpendicular y la (recta) exterior cortada por la perpendicular, hasta el ángulo obtuso.

#### **PROPOSICION 13 "LIBRO SEGUNDO"**

En los triángulos acutángulos, el cuadrado del lado que subtiende al ángulo agudo es menor que los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo agudo en dos veces el rectángulo comprendido por uno de los lados del ángulo agudo sobre el que cae la perpendicular y la (recta) interior cortada por la perpendicular hasta el ángulo agudo.

#### **PROPOSICION 31 "LIBRO SEXTO"**

En los triángulos rectángulos la figura construida a partir del lado que subtiende el ángulo recto es igual a las figuras semejantes construidas de manera semejante a partir de los lados que comprenden el ángulo recto.

Estas cuatro proposiciones, aunque mantienen como invariante para la generalización de la relación pitagórica al triángulo y el sentido de ser una relación

dada para operar la magnitud área, difieren significativamente en los enfoques desde los que se formulan. Veamos con más detalle este aspecto. En primer lugar, las tres proposiciones, 47 del Libro Primero (I, 47), 12 y 13 del Libro Segundo (II, 13 y II, 14), están formuladas de tal manera que las relaciones aditivas que se establecen para las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados del triángulo, se justifican desde la posibilidad de hablar de la igualdad de áreas, elemento que sólo es posible como lo evidencia (León, 2000), si se cuenta con el ángulo recto y el quinto postulado. Es decir, que en esas tres proposiciones el ángulo recto permite establecer condiciones para la igualdad de las áreas, criterio fundamental en las demostraciones de (I, 47 II, 13 y II, 14).

## DOS TRAMAS ARGUMENTATIVAS PARA UN MISMO SENTIDO

El caso del ángulo recto y las condiciones de paralelismo y la oportunidad de las áreas. Consideremos las demostraciones de estas tres proposiciones: en primer lugar, la demostración de la proposición 47<sup>2</sup>, establece la relación pitagórica tomando como elementos fundamentales, la igualdad de las áreas derivada del criterio del paralelismo. Veamos el proceso:

En primera instancia, se considera un triángulo rectángulo y se consideran los cuadrados construidos sobre los lados<sup>3</sup>

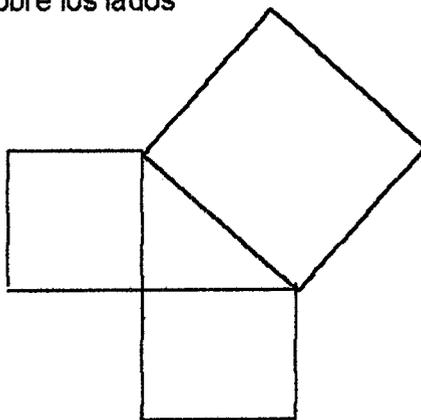


Figura 1

En segundo momento, se traza una paralela a los lados CG y BF desde el punto A y divide en dos rectángulos el cuadrado construido sobre el segmento que subtiende el ángulo recto. De ahora en adelante, el proceso que resta es precisamente,

<sup>2</sup> En su obra: *Axiomática y Geometría desde Euclides hasta Hilberth y Bourbaki (1994)* Alberto Campos, hace un análisis detallado de los requerimientos para la realización de la demostración del Teorema de Pitágoras, en el Libro Primero.

<sup>3</sup> En adelante cuando se establezcan comparaciones entre cuadrados, rectángulos o triángulos; se estará considerando que la comparación se realiza para la magnitud área, comprendida por las figuras rectilíneas.

probar que el área de cada cuadrado construido sobre los lados que forman el ángulo recto se corresponde con uno de los rectángulos que componen el cuadrado. (Figura 2)

El tercer momento se consideran los triángulos EBC y ABF, los cuales resultan ser congruentes por tener iguales los lados BE y BC con AB y BF y el ángulo comprendido por los mismos lados. (Figura 2)

En un cuarto momento se asegura la igualdad del triángulo EBC con la mitad del cuadrado ADEB, y la igualdad del triángulo ABF con la mitad del rectángulo BFHI; pero como los triángulos son congruentes, queda manifiesto que bajo la noción común uno, que establece que las cosas iguales a una misma cosa son también iguales entre sí, que la mitad del cuadrado ADEB es igual a la mitad del rectángulo BFHI. La igualdad para todo el cuadrado ADEB con el rectángulo BFHI se garantiza con la noción común dos, que establece, que si se añaden cosas iguales a cosas iguales los totales son también iguales. (Figura 2)

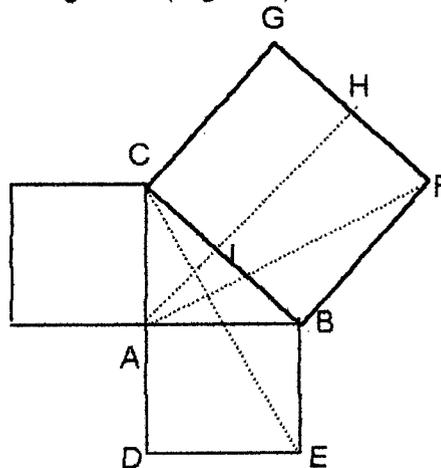


Figura 2

Con el anterior proceso y el respaldo de:

1. La proposición 46, que garantiza la construcción de un cuadrado, dado un segmento (para el momento 1).
2. La proposición 31, que garantiza la construcción de una paralela a una recta por un punto dado (momento 2).
3. La proposición 4, que garantiza que si dos triángulos tienen dos lados del uno iguales a dos lados del otro y tienen iguales los ángulos comprendidos por las rectas iguales, entonces los triángulos son iguales (congruentes). Esta proposición es usada en el momento 3.
4. La proposición 41, que garantiza que si un paralelogramo tiene la misma base que un triángulo y está entre las mismas paralelas, el paralelogramo es el doble del triángulo (usada en el cuarto momento).

Se hace posible garantizar la igualdad del cuadrado ADEB con el rectángulo BFHI. Utilizando los momentos 1 y 2, y las garantías para los momentos 3 y 4, se realiza ahora los momentos cinco y seis de la demostración.

En el momento cinco se construyen los triángulos JBC y CAG, que tienen iguales dos de sus lados, los lados JC y BC del triángulo JBC con los lados CA y CG del triángulo CAG, y además el ángulo comprendido por los lados iguales, también es igual.

En el momento seis, se prueba que el cuadrado ACJK es el doble del triángulo JCB y que el rectángulo CIHG, es el doble del triángulo CAG, como los triángulos son congruentes, y con la garantía de la noción común uno, el cuadrado ACJK y el rectángulo CIHG resultan ser iguales. (Figura 3)

Luego con el resultado del momento cuatro y el resultado del momento seis tenemos que el cuadrado construido sobre el lado que subtiende el ángulo recto, es igual a los cuadrados construidos sobre los lados que forman el ángulo recto. (Figura 3)

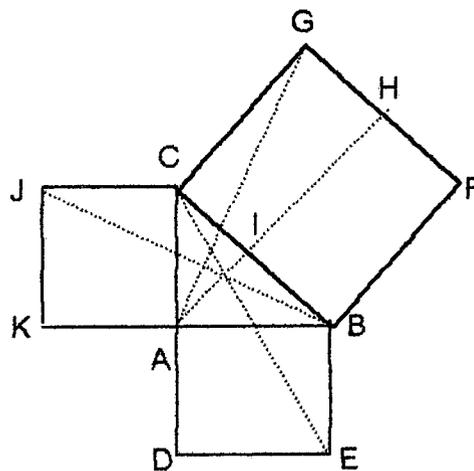


Figura 3

Revisando los diferentes momentos por los que pasa la demostración y considerando las garantías que hacen posible los resultados de estos momentos, aparecen como fundamentales los criterios de igualdad de áreas, el papel que juega el ángulo recto y el quinto postulado, en la determinación de la igualdad de áreas.

En primer lugar, el criterio de igualdad de áreas que se manejó en el momento tres y cinco es el de igualdad por coincidencia en la superposición, mientras que el criterio usado en cuatro y seis es el de igualdad por cantidad de magnitud área presente en las figuras rectilíneas, independiente de su forma. Pero la posibilidad de comparar

la cantidad de magnitud de esa manera, está determinada por condiciones de paralelismo, las que a su vez se encuentran caracterizadas en relación con el ángulo recto. El mismo quinto postulado establece que si dos rectas al ser cortadas por una transversal forman con ella ángulos menores que dos rectos, las rectas se cortarán.

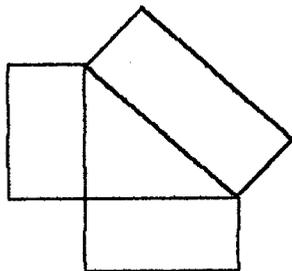
Así, el ángulo recto permite establecer las condiciones de paralelismo, las que a su vez establecen condiciones para la comparación de las áreas, generando otro criterio de igualdad para la cantidad de área determinada por una figura rectilínea.

Al revisar con cuidado las demostraciones de las proposiciones 12 y 13 del Libro Segundo, vuelven a tomar un papel importante en ellas el ángulo recto, el quinto postulado y los criterios de igualdad de áreas, el de la superposición y el de las paralelas.

El caso del ángulo recto, la semejanza de las figuras y la igualdad de las áreas:

Lo que no ocurre con la proposición 31 del Libro Seis, que aunque también establece la relación sobre las áreas de las figuras construidas sobre los lados que forman el ángulo recto y la figura semejante construida sobre el lado que subtiende el ángulo recto, en este caso el argumento de la igualdad de áreas será el derivado de la semejanza entre las figuras y la proporcionalidad entre los segmentos. Consideremos la demostración del Libro Seis.

En primer lugar construye figuras semejantes sobre los lados de un triángulo rectángulo. (Figura 4)



**Figura 4**

En un segundo momento traza la perpendicular AK. (Figura 5)

En un tercer momento se prueba que los triángulos AKB, y AKC son semejantes entre sí y semejantes al triángulo ABC. (Figura 5)

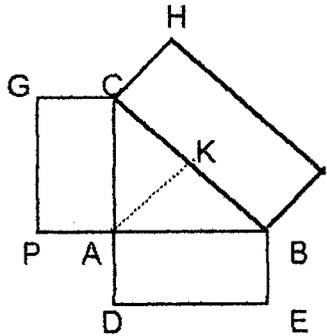


Figura 5

En un cuarto momento, a partir de la semejanza entre los triángulos ABC y AKB y la semejanza entre las figuras ADEB y CBIH, es posible establecer con el uso de resultados previos que:

1. El segmento BC es al segmento KB como la figura construida sobre el segmento BC es a la figura construida sobre el segmento AB.

En un quinto momento establece, a partir de la semejanza entre los triángulos ABC y AKC, y la semejanza entre las figuras ACGF y CBIH, es posible establecer con el uso de resultados previos que:

2. El segmento BC es al segmento KC como la figura construida sobre el segmento BC es a la figura construida sobre el segmento AC.

Finalmente, en un sexto momento con los resultados 1 y 2 de los momentos cuarto y quinto, establece que el segmento BC es a los segmentos BK y KC como la figura construida sobre el segmento BC es a las figuras construidas sobre los segmentos BA y AC; pero como el segmento BC es igual a los segmentos BK y KC, entonces la figura construida sobre el lado BC resulta ser igual a las figuras construidas sobre los lados AB y BC.

Cuando las figuras construidas sobre los lados del triángulo rectángulo son cuadrados, el resultado que se obtiene es precisamente la relación pitagórica.

Un mismo sentido, dos tramas argumentativas, relaciones a considerar:

Las dos tramas argumentativas establecen el mismo sentido para la relación pitagórica y es el de permitir adicionar áreas. Pero por el recorrido realizado a través de las mismas se hace evidente que las tramas argumentativas que soportan tal sentido son diferentes. En ambos casos el ángulo recto, y por ende el quinto postulado, juegan un papel importante, pero en la primera trama estos dos elementos son los que permiten hablar de igualdad de áreas, a partir de las

propiedades del paralelogramo, mientras que en la segunda trama no se privilegia ninguna figura en particular para determinar la igualdad de las áreas. Se enfatiza, en cambio, en relaciones que se pueden establecer entre las figuras a partir de relaciones que se establecen entre las magnitudes como la longitud; es decir, se habla de la relación de semejanza entre las figuras, a partir de la relación de proporcionalidad entre los segmentos y de igualdad entre los ángulos.

Si se observa el proceso de demostración de I, 47 y VI, 31, se notará que se procede con la semejanza en el Libro Sexto como se procede con la igualdad en el Libro Primero. En ambas tramas argumentativas la relación pitagórica aparece cuando se necesita hablar de igualdad en las figuras.

La mayor parte del Libro Sexto se ocupa de las propiedades de la semejanza por medio del triángulo. Es posible desarrollar una teoría de proporciones para los segmentos y en general se está tratando de desarrollar una teoría de medida para las magnitudes. La noción de semejanza vuelve a dar la caracterización de cantidad a las áreas; la relación de semejanza es una condición para hablar de proporcionalidad entre áreas.

Surgen entonces, dos elementos que parecen articular la relación pitagórica en ambos contextos:

- ♦ El papel del triángulo en la expresión y tratamiento cuantitativo de las áreas.
- ♦ El desarrollo de una noción de igualdad para las áreas, generándose desde dos tramas argumentativas diferentes: 1) desde la congruencia y 2) desde la semejanza.

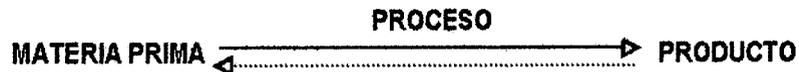
Vistas así las cosas, la relación de semejanza pareciera estar estableciendo una generalización para la igualdad; y por otra, parte la teoría de la semejanza es la condición para que la teoría de las proporciones llegue a las áreas. Es en estos dos aspectos donde la relación pitagórica adquiere su rol protagónico.

## **B. Requerimientos Cognitivos**

En este Proyecto, los procesos cognitivos para el desarrollo de competencias argumentativas en Matemáticas en el aula, tienen que ver con acciones mentales, necesarias para la producción, reconocimiento y aplicación de sentidos y tramas. A continuación, primero se presentarán características generales de cada uno de los procesos que en esta fase del proyecto se considera dan cuenta de las elaboraciones de los estudiantes, luego una tabla de resumen general y, finalmente unos referentes teóricos para cada uno de los procesos seleccionados.

La elaboración de sentido, trama argumentativa y trama de encadenamiento exigen el concurso de procesos inferenciales, semióticos, semánticos, didácticos y sociales.

Mediante el siguiente diagrama vamos a sugerir algunas de sus diferencias, semejanzas y posibles líneas de precisión o discusión.



- 1) **Los Procesos Inferenciales:** Se realizan, actúan o despliegan en general, digamos sobre datos. En este proceso y para el proyecto, inicialmente se prefiere esta ambigüedad en el punto de partida. Es decir, no se optará por nociones como *hipótesis, premisas, proposiciones o antecedentes*; categorías que, sin las correspondientes aclaraciones, se podrían asociar con inferencias determinadas y de uso establecido. Por ejemplo, considerar que las inferencias con proposiciones son las deducciones o que las inferencias deductivas sólo son posibles si en el punto de partida se cuenta con proposiciones. Una licencia que nos permite esta ambigüedad es disponer de una amplia gama de objetos para que hagan parte de las actividades a proponer a los estudiantes. Que los estudiantes aborden los problemas, a partir de sus propios objetos y relaciones, que cuenten con información suficiente, en calidad y cantidad, para apreciar mejor regularidades, como bloqueos, desbloqueos, cambios o permanencias en la elaboración o aplicación de sentido y tramas.

Manteniendo la ambigüedad ya señalada, digamos que los productos de los procesos inferenciales son soluciones. Para el punto de llegada de este proceso, también hay otras nociones como *tesis, conclusión, teorema, consecuente, respuesta, conjetura, etc.*; nociones para las cuales se les suele asociar no sólo determinados datos sino determinados procesos inferenciales. Por ejemplo, *decir respuesta*, se puede entender como solución numérica única, ejercicio o problema y ausencia de inferencia deductiva. En cambio, *decir teorema* se puede entender como *demostración* y presencia inexorable y excluyente de una inferencia deductiva (Demostración: secuencia finita de proposiciones de las cuales unas son hipótesis (punto de partida: proposiciones dadas en el Teorema a demostrar, Teoremas previos, Axiomas y Reglas de inferencia permitidas), otras son premisas (proposiciones obtenidas de las hipótesis por la aplicación de las Reglas de Inferencia) y la última proposición de la lista es la que hay que demostrar).

Para este Proyecto, no pedir siempre a los estudiantes una solución determinada tiene la ventaja de que cada uno puede proponer al menos un punto de llegada: el que a su juicio le parezca "más sencillo, fácil, obvio" y con esta solución ya se cuenta con información inicial para hacer preguntas a los estudiantes sobre, por ejemplo, el sentido que le asignan a los datos (o sobre lo que para ellos es "una solución" a una actividad: siempre la primera solución es ¿"la mejor"?, ¿"la única"?): cómo leyó, cómo entendió, que le dicen los datos de la actividad?

La siguiente tabla recuerda y recoge parte de las ideas anteriores.

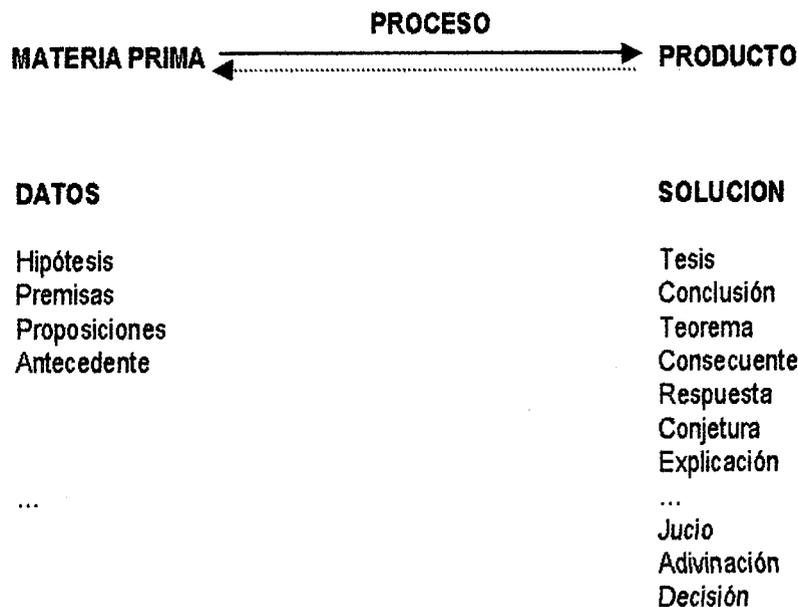


Tabla 1

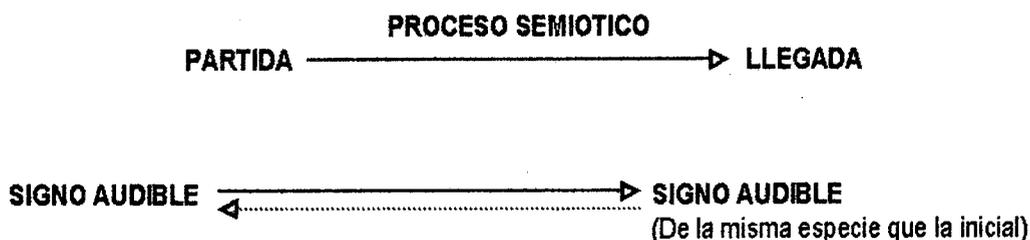
- 2) **Los Procesos Semióticos:** Se realizan o actúan en general, digamos, sobre signos perceptibles, sensibles como: auditivos (palabras habladas, sonidos musicales, ruidos, etc.), visibles (palabras escritas, dibujos (en papel o pantalla, etc.), colores, modelos tridimensionales, gestos, movimientos de dibujos, de modelos, de personas, de imágenes en pantalla, etc.), táctiles (como las que producen al tacto las superficies lisas y llanas, las esquinas o puntas, las curvas, etc.); signos perceptibles mentales (imágenes mentales); y, signos perceptibles afectivos.

Según la actividad y el contexto social en donde se usen los signos, estos pueden adquirir propósitos y características específicas. Por ejemplo, de duración en el tiempo, de permanencia en el espacio (tri, bi o unidimensional), de significado y de grado de abstracción. "Habla" de modos distintos, se "lee" de manera distinta, no "significa" lo mismo, "dice" cosas distintas, "envía" mensajes diferentes. Por ejemplo, el color rojo de un semáforo, el color rojo de una bandera nacional, el color rojo en un espectroscopio de un laboratorio de astrofísica, el color rojo del papel tornasol en un laboratorio de química y el color rojo que rellena el interior de un cubo en un libro de Geometría de 9º grado.

El producto de estos procesos también es una signo. Pero un proceso semiótico puede ser tal que, por ejemplo, en el punto de llegada el signo sea de la misma

o distinta especie que el de partida; que aparezcan signos que no fueron dados o sugeridos como materia prima o que a signos en el punto de llegada se dificulte reconocerles o asociarles uno correspondiente en el punto de partida. La siguiente ilustración dará una idea de las potencialidades, diversidad y complejidad de estos procesos.

A un estudiante de música en un conservatorio uno de sus profesores le tararea una parte de una pieza musical folclórica para que él también la tararee. En esta actividad el estudiante tiene como punto de partida un signo audible y se le pide, también, un signo audible. El siguiente diagrama esquematiza esta actividad.

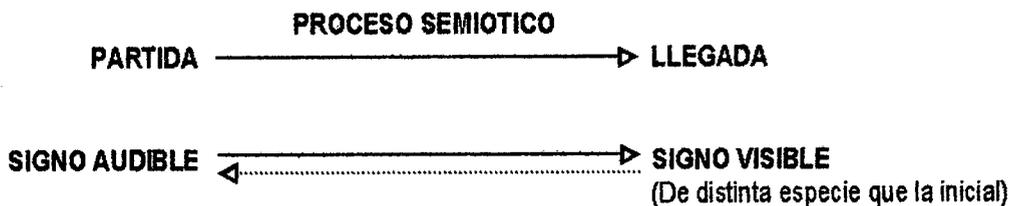


La línea punteada “en reserva” indica la actividad del estudiante tarareando “su canción” para saber si corresponde con la de su profesor. El profesor, como guía y experto, le indicará si es el mismo signo de partida que él propuso.

Tratándose de un aprendizaje, no hay que descartar que las dos signos en la partida y en la llegada no coincidan y que a continuación el profesor repita o proponga nuevas actividades hasta lograr “comprensión musical” (que en este alumno y en su momento puede ser coincidencia de signos). En el avance de la comprensión musical puede aparecer una actividad como la siguiente:

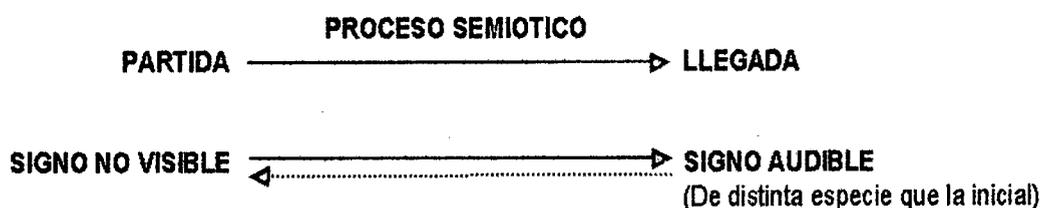
El mismo profesor vuelve a tararear la misma pieza musical y ahora solicita a su estudiante que elabore su correspondiente partitura. En este caso el estudiante sigue teniendo en el punto de partida un signo audible pero en el de llegada se le solicita uno visible.

El siguiente diagrama representa la nueva actividad:



La línea punteada "en reversa" indica la actividad de tarareo del estudiante teniendo en frente "su partitura". A medida que "aumente su comprensión musical" el signo de llegada irá coincidiendo con el de partida.

Pasadas dos semanas, el mismo profesor propone al mismo alumno la siguiente actividad: tararear la pieza musical estudiada quince días atrás. Digamos que ahora en el punto de partida se tienen signos no visibles (imágenes, asociaciones, sensaciones, emociones, recuerdos, etc.), y en la llegada se solicita un signo audible. En un diagrama la actividad quedaría como:



La siguiente Tabla completa las ideas de la anterior ilustración:

Signo de llegada Signo de partida	PERCEPTIBLE SENSIBLE VISIBLE	AUDIBLE	PERCEPTIBLE MENTAL O AFECTIVO NO VISIBLE
PERCEPTIBLE SENSIBLE VISIBLE (Partitura)	Partitura	Tarareo, canto	Imágenes, emociones, recuerdos, ideas,...
Audible (Tararero)	Partitura	Tarareo, canto	Imágenes, emociones, recuerdos, ideas,...
PERCEPTIBLE MENTAL O AFECTIVO NO VISIBLE (Imágenes, emociones, recuerdos, ideas,...)	Partitura	Tarareo, canto	Imágenes, emociones, recuerdos, ideas,...

Tabla 2

- 3) **Los Procesos Semánticos:** Se realizan o actúan, en general, digamos, sobre un saber, que para este Proyecto es un saber escolar, un saber matemático escolar, un saber geométrico o, más exactamente, un saber sobre "la relación pitagórica".

Como de este saber hacen parte signos visibles (por ejemplo, triángulos trazados en una hoja de papel, en una pantalla o contruidos con cartulina como fichas; elementos, propiedades o relaciones de un triángulo escritos en una hoja de papel o en una pantalla; gestos corporales para indicar un elemento o el

resultado de una operación en uno o más triángulos), signos audibles (como en la presentación oral que hace un estudiante de una de las dificultades que tuvo en la resolución de una actividad vinculada con "la relación pitagórica") y signos no visibles (como las imágenes, emociones, recuerdos o ideas asociadas a los distintos momentos escolares y extraescolares, de la resolución de una actividad sobre "la relación pitagórica"), entonces sobre este saber geométrico, en el punto de partida, actúan procesos semióticos y como sobre este saber de partida se pueden proponer actividades para explotar soluciones, entonces también sobre él actúan procesos inferenciales.

Como en cualquier otro saber, también existen significados y organizaciones; significados, por ejemplo, para signos, grupos de signos u organizaciones y organización de signos o de organizaciones. Estos significados pueden ir desde los etimológicos, hasta los específicos, unívocos o definidos por cada disciplina y la organización puede ir desde listados, pasando por tramas más o menos sistemáticas, hasta las organizaciones axiomáticas como en Matemáticas.

Así, en el punto de llegada también se tiene un saber, con signos, significados y organizaciones, pero afectados, entre otros procesos, en mayor o menor medida, con más o menos intensidad por las potencialidades, variedad y complejidad ya sugerida para los procesos inferenciales y semióticos.

La siguiente tabla ilustra parte de la potencialidad, diversidad y complejidad de estos procesos semánticos. Es parecida a la Tabla 2, pero para este Proyecto los signos, las organizaciones, los significados, las actividades y las soluciones (SOSAS) en los puntos de partida y de llegada tienen que ver con actividades sobre "la relación pitagórica".

Punto de partida \ Punto de llegada		SGINOS	ORGANIZACIONES	SIGNIFICADOS	ACTIVIDADES	SOLUCIONES
		SEÑALES	Triángulos			
ORGANIZACIONES						
SIGNIFICADOS						
ACTIVIDADES						
SOLUCIONES						

Tabla 3

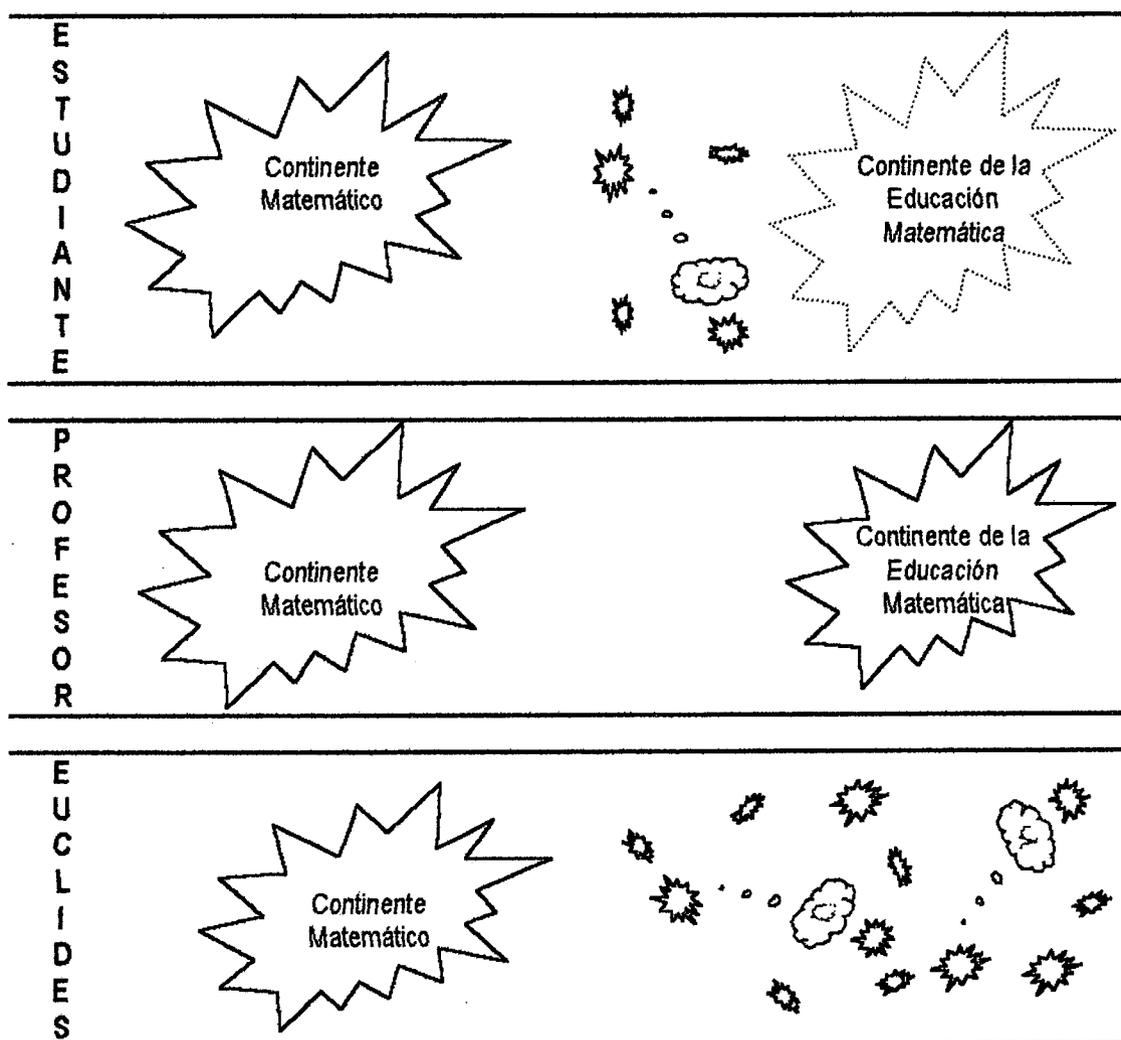
En el punto de partida, un profesor da una guía de trabajo que propone una actividad sobre "la relación pitagórica", en la que hay involucrados triángulos rectángulos y rectángulos (signos), proponiendo que, si se necesita, los triángulos rectángulos y los rectángulos se pueden entender o tomar como

figuras que representan áreas (significados) y que las afirmaciones que apoyen la solución de llegada se pueden justificar apelando a casos particulares numéricos o por medición (organización inductiva). Un estudiante puede proponer una primera solución (solución de partida) que al ponerse a prueba o debatirse en el trabajo por grupos o en su presentación a toda la clase, se puede modificar (o mantener) quedando, al menos individualmente, como solución de llegada.

- 4) **Los Procesos Didácticos:** Se realizan o actúan, en general, sobre un saber pero los signos, organizaciones, significados, actividades y soluciones de los procesos didácticos son signos, organizaciones, significados, actividades y soluciones para enseñar y aprender un saber escolar. Por ejemplo, "la relación pitagórica" en un estudiante de tercer semestre de Licenciatura en Matemáticas puede estar organizada en forma de un Archipiélago, con varias "islas" como la de los casos particulares de temas pitagóricos, la de las fórmulas para despejar catetos e hipotenusas, la de triángulos rectángulos especiales, la de instrumentos como la regla y el compás, la de los problemas, la de las (re) soluciones, la de la bibliografía sobre "la relación pitagórica", etc. Y, "vías de comunicación" más o menos seguras, más o menos conscientes y más o menos elaboradas entre cada una de estas islas. Para un profesor de tercer semestre de Licenciatura en Matemáticas, su "Archipiélago Pitagórico" tendrá más o menos islas que el de sus alumnos y todo lo de sus alumnos se podrá encontrar o tendrá un lugar adecuado en alguna de sus islas (porque, por ejemplo, el profesor también fue bachiller como sus alumnos), pero casi todo lo que existe en el archipiélago del profesor, incluidas las "vías de comunicación" se ha construido para responder a preguntas sobre cómo se enseña y cómo se aprende "la relación pitagórica" en un curso para estudiantes de Licenciatura en Matemáticas. Para Euclides, su "Archipiélago pitagórico" hace parte de un "Archipiélago geométrico" de trece islas (los 13 Libros de sus Elementos) y, por lo menos 4 islas (por ejemplo, Libros I ((47,48) II (12,13), VI (31) y XII (2)) constituyen su "Archipiélago pitagórico". "La Organización Social" en cada una de estas islas es la axiomática-deductiva que, generalmente, no es la forma de organización ni en las islas de los estudiantes, ni en las de los profesores.

En el punto de llegada también hay un saber que, como consecuencia, no sólo de procesos inferenciales, semánticos y didácticos, sino también sociales (de estos procesos en el aula de clase nos ocuparemos a continuación). Se modifican (o permanecen inalterables) algunos de sus componentes básicos (signos, organización, significados, actividades y soluciones).

Los siguientes diagramas ayudan a sugerir parecidos y diferencias entre una Organización en forma de Archipiélago de un estudiante de Licenciatura en Matemáticas, de un profesor de Licenciatura en Matemáticas y de un Matemático.



5) **Los Procesos Sociales:** Actúan sobre normas socio-educativas. Dentro de estas normas se encuentran aquellas que, poco a poco, se manera tácita regulan la interacción en cualquier aula y en cualquier clase, por ejemplo:

- a) No hablar todos al mismo tiempo
- b) Pedir la palabra
- c) Escuchar a quien tiene la palabra

En el punto de llegada también hay normas que pueden ser iguales o distintas a las de partida. Un factor que puede contribuir a establecer diferencias entre las normas de partida y de llegada tienen que ver con la capacidad de cada estudiante para tener en cuenta, para “tomar en serio” las elaboraciones de sus

compañeros. Como consecuencia de estos procesos y de los didácticos, es posible tener en un punto de llegada normas como:

- a) Hablar (escribir) para hacerse entender
- b) Aceptar "la mejor" elaboración
- c) Tratar de entender al expositor.

La siguiente tabla contiene tipos de procesos correspondientes a los generales ya mencionados:

<b>PROCESOS</b>	<b>TIPOS</b>
Inferenciales	Abducir Inducir Deducir
Semióticos	Formar Tratar Convertir
Semánticos	Significar
Didácticos	Concluir Significar Textualizar Institucionalizar Argumentar
Sociales	Debatir Consensuar Concluir

Tabla 4

A los anteriores tipos de procesos se les puede asignar significados, dotarlos de componentes, de relaciones y determinar la clase de materia prima en el punto de partida y el producto en el de llegada según sean el significado, componentes y relaciones que actúen en el proceso.

Los procesos inferenciales se están fundamentando en la obra del lógico, filósofo, matemático, y semiólogo norteamericano Charles Sanders Peirce (1839-1914) y en los desarrollos que en, particular, se han realizado sobre su terna deducir, inducir, abducir.

A continuación se presentarán aportes teóricos que permitirán construir las categorías cognitivas que en el Proyecto se han identificado hasta el momento. Así, en Saénz-Ludlow (1998. p. 3-4) con respecto a los procesos inferenciales se menciona lo siguiente:

“Para Peirce una inferencia deductiva es un proceso analítico mediante el cual lo particular se sigue de premisas generales; es decir, en el proceso no se produce nuevo conocimiento puesto que no hay nada en los casos particulares que no estuviera implicado por las premisas. En contraste, él argumentó que el nuevo conocimiento se obtiene “a través de los mecanismos de inducción que funcionan con la lógica de probabilidad. (...) La inducción trabaja tomando una muestra aleatoria de una clase de cosas, de manera que se pueda sacar alguna conclusión aplicable a la clase acerca de aspectos que tienen en común todos los miembros de la clase” (Peirce citado en Corrington, 1993, p. 43). Esto significa que a través de la inferencia inductiva se generan nuevos principios generales o leyes a partir de instancias particulares.”

“(Peirce, 1903) clarificó que “el inicio de una hipótesis y el interés por ella ya sea como una simple pregunta o con algún grado de confianza, es un paso inferencial que propongo llama *abducción* (o *retroducción*) (...) Llamo esa tal inferencia con el nombre peculiar de *abducción* porque su legitimidad depende de diferentes principios juntos a partir de otros tipos de inferencia” (p. 151). Para Pierce (1878<sup>a</sup>, 1878<sup>b</sup>, 1903), la deducción y la inducción solas, sin la abducción, no pueden dar cuenta de la introducción de nuevo conocimiento. Él sostuvo que la abducción proporciona a quien razona una hipótesis que da cuenta de los hechos observados. “En contraste con la inferencia inductiva, que se mueve desde muestras aleatorias hacia una conclusión acerca de una clase de objetos, las hipótesis van en la dirección opuesta, procediendo de una regla general o teoría hacia un caso particular dado” (Peirce citado Corrington, 1993, p. 46). La generación de una hipótesis es un acto creativo que puede llegar a nosotros “en un destello” o a través de un período extendido de fantasía o trabajo. Para Merrell (1995) una abducción o una conjetura abductiva o hipótesis, con frecuencia es una adivinación, pero una adivinación educada “que idealmente prosigue a mucha vida, mucho estudio, y mucha contemplación de la vida en general y de un problema particular que uno tiene a la mano” (p. 56).”

“La generación de una hipótesis es sólo un aspecto del proceso de abducción; la abducción involucra aplicación además de creación. Una hipótesis debe ser aplicada al caso que se tiene a mano y debe competir con otras hipótesis que pueden posiblemente explicar los hechos observados (Corrington, 1993).”

Además de Saenz-Ludlow (1998), también se tendrá en cuenta la interpretación que Pérez (2000) hace de la “trilogía Peirciana” y su aplicación en apartes del Cálculo de Tom M. Apóstol, vol. 1. Pérez presenta significados como los siguientes:

“Deducir: Manejo de reglas  
Inducción: Individuación (Existencia ó Existencia y Unicidad)  
Abducción: Inferencia estadística (Formulación de hipótesis)”

En lo atinente a los procesos semióticos de formación, tratamiento y conversión se tendrá en cuenta a Duval (1999). A propósito de estas nociones en Duval (1999, p. 29 y 40-41) se hacen las siguientes precisiones:

“Considerados desde este punto de vista, los sistemas semióticos, en efecto, deben permitir cumplir las tres actividades cognitivas inherentes a toda representación. En

primer lugar, constituir una marca o un conjunto de marcas perceptibles que sean identificables como *una representación de alguna cosa* en un sistema determinado. Luego, transformar las representaciones de acuerdo con las únicas reglas propias al sistema, de modo que se obtengan otras representaciones que puedan constituir una ganancia de conocimiento en comparación con las representaciones iniciales. Por último, convertir las representaciones producidas en un sistema de representaciones en otro sistema, de manera tal que éstas últimas permitan explicitar otras significaciones relativas a aquello que es representado. No todos los sistemas semióticos permiten estas tres actividades cognitivas fundamentales, como por ejemplo, el lenguaje morse o la codificación de tránsito. Pero el lenguaje natural, las lenguas simbólicas, los gráficos, las figuras geométricas, etc., sí las permiten. Hablaremos entonces de **registros de representación semiótica**. Estos registros constituyen los grados de libertad de los que puede disponer un sujeto para objetivarse él mismo una idea aún confusa, un sentimiento latente, para explorar las informaciones o, simplemente, para comunicarlas a un interlocutor.”

“Hay tres actividades cognitivas de representación inherentes a la semiosis. La primera es, evidentemente, la **formación** de representaciones en un registro semiótico particular, ya sea para “expresar” una representación mental, o bien para “evocar” un objeto real. Esta formación implica siempre una selección en el conjunto de los caracteres y de las determinaciones que constituyen lo se “quiere” representar. Las otras dos actividades están directamente ligadas a *la propiedad fundamental de las representaciones semióticas: su transformabilidad en otras representaciones que conservan ya sea todo el contenido de la representación inicial, o bien solo una parte de ese contenido*. Ahora, esta transformación no corresponde a la misma actividad cognitiva según consista en un cambio de registro. Hablaremos de **“tratamiento”** cuando la transformación produce otra representación en el mismo registro. Y hablaremos de **“conversión”** cuando la transformación produce una representación en un registro distinto al de la representación inicial. Un hermoso ejemplo de conversión, de una gran eficacia técnica, es la transformación analógica/numérica de la información sonora: la frecuencia y la amplitud de las ondas pueden ser transformadas en una serie de varios bloques formados de 0 y de 1, y pueden reconstituirse de nuevo a través de la conversión inversa. Veremos que la conversión puede ser de una gran fecundidad epistémica. Formación, tratamiento y conversión son las actividades cognitivas fundamentales de la semiosis.”

Los elementos de Euclides, al menos los Libros I-VI y Campos (1994) son el saber de partida para los procesos semánticos. Dentro de los referentes teóricos para los procesos didácticos se encuentran Duval (1999) y Brousseau (1998), Perelman (1989) y Pereda (1994). Los procesos sociales se apoyan en Perelman (1989) y Pereda (1994).

### C. Requerimientos Comunicativos

La dimensión comunicativa, asumida en el marco de las relaciones didácticas, se convierte en el **dispositivo**<sup>4</sup> que da razón de la estructuración del contexto del aula y en el espacio para la producción de formas discursivas particulares que dan vida a la relación didáctica. Esto, en tanto que una situación didáctica es en sí misma una situación de comunicación. Los elementos que la estructuran (estudiantes – docente – saber escolar) (Documento general del Proyecto) se ven relacionados por un principio generador de las situaciones sociales: la comunicación (Calderón, 2000). De ahí que, emprender un análisis de los requerimientos de orden comunicativo para el desarrollo de competencias argumentativas en matemáticas, implique realizar una mirada del componente comunicativo como el marco de relaciones y condiciones discursivas e interactivas que estructuran una situación de comunicación argumentativa en el aula.

Como se ha expuesto anteriormente, el proyecto ha identificado, hasta el momento, como componentes de la competencia argumentativa en matemáticas cuatro factores fundamentales: i) la identificación, interpretación y producción de sentidos en textos matemáticos; ii) el uso de registros semióticos en matemáticas; iii) la interpretación y producción de tramas argumentativas; y iv) la internalización y uso de reglas socio-culturales, socio-matemáticas y matemáticas. Si bien los cuatro factores son fundamentales en los procesos de comunicación de lo matemático en el aula, el componente comunicativo se ha identificado como el espacio privilegiado para la manifestación y producción de sentidos y de tramas argumentativas. Esto, en tanto que la realización de los procesos discursivos se convierten en la manifestación de los procesos comunicativos.

Así pues, el análisis de los requerimientos comunicativos para el desarrollo de competencia argumentativa en matemáticas, será asumido desde la perspectiva de las condiciones para la interpretación y producción de sentidos y de tramas argumentativas en matemáticas, en el aula. Para efectos de consolidar las relaciones teóricas que se vienen desarrollando, se explicitará a continuación una *noción de trama argumentativa y los elementos que intervienen en su estructuración y producción*. Hasta el momento se han identificado dos elementos que determinan la producción de tramas argumentativas, a saber: la situación argumentativa y el texto argumentativo.

#### 1. Sobre la trama argumentativa:

Apoyados en la teoría de la argumentación (Perelman y Olbrecht – Tyteca, 1989; Gómez, 1991, 1993, 1999; entre otros), consideraremos como trama argumentativa, al tejido de relaciones discursivas que construye un sujeto argumentador con el propósito de convencer o persuadir a un auditorio, del sentido particular expuesto y

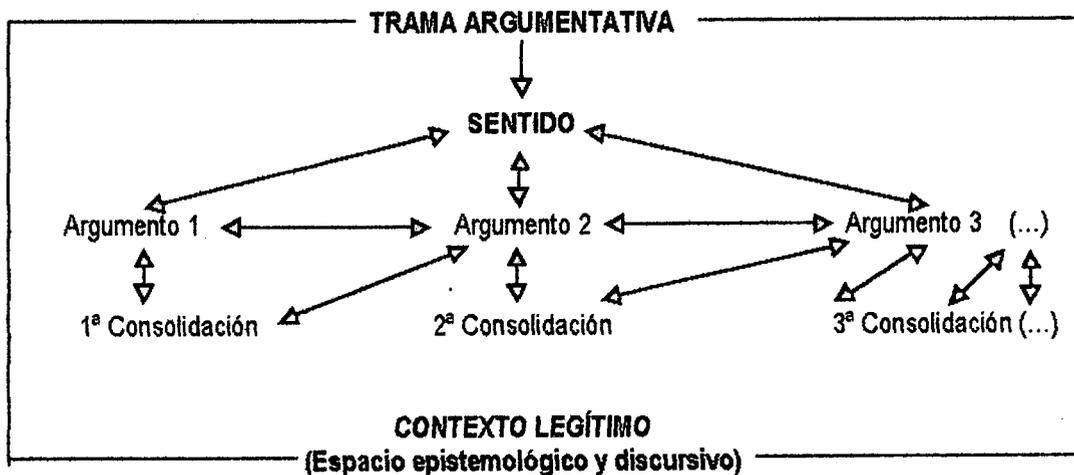
---

<sup>4</sup> El aula como instancia de materialización simbólica, definida por condiciones espacio-temporales y por las rutinas escolares.

consolidado a lo largo de la trama argumentativa. La trama argumentativa es análoga a lo que la teoría de la argumentación ha denominado *la argumentación*; es decir al producto discursivo que se realiza en un contexto argumentativo y que se concreta en un texto argumentativo. Sin embargo, se destaca aquí que la perspectiva de trama argumentativa prioriza el carácter discursivo<sup>5</sup> de la argumentación; esto es, la dimensión semiótica y pragmática de la producción argumentativa, el reconocimiento de sentidos implicados, la contextualización de tales sentidos y la configuración de roles discursivos y, el dominio de criterios gramaticales para la producción de textos argumentativos.

La interpretación y producción de tramas argumentativas se consideró como la actividad discursiva de los estudiantes en el proceso argumentativo. Tal actividad, se caracterizó por: el reconocimiento de una situación argumentativa; la asunción de una actitud argumentativa; la producción de argumentos para la defensa de soluciones a problemas; la interpretación activa de los argumentos contrarios; la elaboración de consensos.

Particularmente, la trama argumentativa se constituye como trama en tanto que, en un contexto de comunicación particular, teje relaciones entre argumentos parciales, a propósito de un sentido que se pretende configurar y consolidar. Así, cada producción de argumentos contribuye, de cierta manera, a construir significados y relaciones semióticas entre ellos, que van conformando el marco argumentativo (teórico y epistemológico) del sentido en construcción. El siguiente esquema visualiza la estructura de la trama argumentativa que hasta ahora se ha construido en el proyecto y que se convierte en un criterio para el análisis de la producción de tramas argumentativas por parte de los estudiantes.



<sup>5</sup> Ver la noción de discursividad en Calderon, Dora (2000) "Género discursivo, discursividad y argumentación". Ponencia presentada para la defensa de Candidatura a Doctor. Doctorado en Lenguaje y Educación. Universidad del Valle.

Del esquema anterior puede inferirse que la trama argumentativa es una categoría de orden discursivo que privilegia las instancias semántica y semiótica, en tanto que es el espacio de construcción del sentido que se argumenta. No obstante, opera efectivamente en la instancia pragmática, en tanto que es puesta en escena a propósito de unos interlocutores, en una situación de comunicación particular y con un objetivo definido. Así, de manera dialéctica, el sentido argumentado es el que orienta la producción de argumentos y de las relaciones que se generan entre ellos; a la vez, los argumentos que se producen y las relaciones de fuerza que se tejen entre ellos, contribuyen paulatinamente a desarrollar diferentes aspectos del sentido, consolidando un campo de significación particular en el que el sentido es legítimo. Este campo de significación se constituye en parte de un marco referencial más amplio (teórico, histórico, filosófico, etc.), que estructura el contexto general en el que un sentido y una trama argumentativa son válidos, tanto desde el punto de su pertinencia semántica-semiótica como desde su nivel de aceptabilidad para el auditorio universal construido en ese contexto.

De esta manera, una trama argumentativa resultará del esfuerzo cognitivo-discursivo de un sujeto argumentador por: a) identificar un sentido particular en un texto matemático y en un contexto específico (he ahí el dominio en la dimensión epistemológica); b) construir una postura personal frente al sentido particular establecido (afectando las concepciones personales sobre el tópico implicado) y producir argumentos de tipo heurístico; y c) construir un contexto argumentativo para la puesta en escena de su argumentación (un auditorio y un discurso argumentativo eficaz, en un contexto dado).

Particularmente nos ocuparemos en este apartado de los elementos de tipo comunicativo que constituye la trama argumentativa, dado que los elementos de tipo epistemológico y cognitivo fueron expuestos anteriormente.

## **2. Construcción discursiva de la situación argumentativa**

- a) **El contexto de producción argumentativa.** La producción de una trama argumentativa exige, en primera instancia, un contexto de producción o una situación de producción. En concordancia con la situación, exige, en segunda instancia, la construcción discursiva de los roles comunicativos asociados a la situación; y, en tercera instancia, la producción de un discurso argumentativo; estos dos últimos aspectos serán explicitados en los siguientes apartados. Una situación de comunicación, cualquiera que sea, es una elaboración parcial de los interlocutores, en un espacio y en un tiempo determinados. Está definida por el reconocimiento de *un contexto de comunicación* (espacio social y legítimo de diálogo), por un *objeto de la comunicación* (temática: tópico, situación, etc.) y por *unos propósitos de la comunicación* (para qué se realiza la comunicación).

El contexto de comunicación argumentativa se corresponde con el contexto discursivo de la interacción. Es decir, que se reconoce, en este sentido, la existencia de un espacio social institucionalizado, que produce y legitima cierto

discurso y ciertas formas de interacción discursiva como la argumentación. El espacio de la argumentación está definido por un criterio pragmático, por uno semántico y por uno textual: En el primer caso, por la naturaleza socio-cultural del contexto discursivo (tradicionalmente es un espacio para la comunicación argumentada; por ejemplo, el campo jurídico, el científico, el político, el educativo). En el segundo caso, por la necesidad de debatir un asunto para aclarar y tomar la decisión más adecuada con respecto al tema. En el tercer caso, por "el lugar textual" (Lo Cascio, 1991) propio de la argumentación: la discusión, el debate científico, la demostración filosófica o matemática, el mitin político, el texto publicitario, entre otros.

Desde este punto de vista, los hablantes involucrados en la situación argumentativa, habrán de identificar no sólo las condiciones generales de producción discursiva en un contexto dado, sino la pertinencia del uso de la comunicación argumentativa en ese contexto y sus formas particulares de argumentar y de textualizar lo argumentado. Bajo estas condiciones, la producción de la trama argumentativa tendrá ciertas características que obedecen al contexto: tipo de argumentos que se eligen, enfoque para el tema de la argumentación, recursos argumentativos empleados, estructuras textuales construídas, etc..

El objeto de la comunicación argumentativa, corresponde al tema, al tópic o al asunto tratado en una situación argumentativa. Este aspecto, de orden semántico permite objetivar el proceso argumentativo en la situación argumentativa: ¿qué o sobre qué asunto se va a argumentar?. Si bien este aspecto se desarrolla en la producción de la argumentación, convirtiéndose en un componente textual, en el contexto de la comunicación argumentativa constituye uno de los elementos generadores de la situación de argumentación, en tanto que se reconoce como un tema polémico, susceptible de ser debatido y cuyo debate contribuirá a la consolidación de un saber propio del contexto discursivo implicado.

El objeto de la argumentación construye, en un momento dado, al argumentador, en tanto que pone al sujeto que argumenta en situación discursiva frente a ese objeto y le obliga a asumir una posición epistémica y social frente a él. Así, la producción de una trama argumentativa, exige fundamentalmente la existencia de un sentido con respecto a un tema o tópic o, que es el que se pretende argumentar en todo el desarrollo de la trama. Para el interlocutor, será necesario, entonces la identificación del sentido argumentado, su valoración y la toma de decisiones con respecto a este sentido: aceptación o rechazo.

Los propósitos de la comunicación argumentativa, corresponden al para qué de la argumentación. Este aspecto se determina desde dos criterios: pragmático y semántico. El primer criterio, obedece a la pretensión de lograr la adhesión de un interlocutor (individual o colectivo) a la tesis que se argumenta; en este sentido se pretende incidir en las convicciones, en las creencias o en las

decisiones de ese interlocutor con respecto al tema en cuestión, para lograr un marco de validez y de pertinencia socio-cultural de la tesis. El segundo criterio, expresa la necesidad de validar un esquema de relaciones semánticas construidas para dar razón de un saber, con el fin de aumentar las posibilidades de confiabilidad de la tesis puesta en cuestión.

Desde este punto de vista, la trama argumentativa exige un desarrollo claro de los propósitos que orientan su producción. De ahí que la generación de argumentos y las conexiones que se establezcan entre ellos, obedecerá fundamentalmente a los propósitos de la argumentación, y consecuentemente, dará vida a estructuraciones particulares de la trama argumentativa.

Para el caso del presente análisis el contexto de la argumentación es el aula y se define por: las condiciones y propósitos de la carrera (la licenciatura en Matemáticas, segundo semestre), por: los propósitos y estructura de la asignatura (Estilos de razonamiento en matemáticas), por el tema objeto de reflexión en la asignatura (la relación pitagórica y sus posibles contextos) y, por la tarea concreta en un momento dado (resolver un problema, defender una solución, preparar una respuesta para el grupo, entregar un trabajo, etc.).

- b) Construcción discursiva de los interlocutores:** En el contexto de una situación de comunicación, los interlocutores construyen y ponen en escena roles discursivos que permitan el desarrollo de tal situación. En el caso específico de la comunicación argumentativa, existen, de manera predeterminada ciertos roles comunicativos que estructuran la interacción argumentativa. Canónicamente tales roles son los de argumentador y de auditorio (Perelman y Olbrecht-Tyteca, 1989). El primero se construye como el hablante-oyente que se postula epistémica y pragmáticamente como un sujeto a favor y en defensa de una tesis que puede ser discutida. El segundo, se construye como el oyente-hablante que se postula epistémica y pragmáticamente como un sujeto que estudia, valora y decide sobre una tesis puesta en cuestión.

Pero más allá de la estructura canónica de los roles argumentativos, es evidente que en la construcción discursiva de los interlocutores de una situación argumentativa, influye, de manera definitiva, "la naturaleza, el comportamiento, el contexto cultural, la posición social, el prestigio y la postura personal" (Lo Cascio, 1991) de los participantes en la comunicación argumentativa. Desde este punto de vista, en una situación argumentativa la construcción de los roles estará determinada estructuralmente y matizada por condiciones particulares de tipo personal. Además, incidirá, de manera definitiva, las condiciones mencionadas en el contexto de la argumentación.

Desde un punto de vista estructural, Lo Cascio (1991) determina cuatro fases del acto argumentativo. En estas fases se configura el rol de los interlocutores que argumentan, en función del proceso argumentativo. Vale la pena considerar

estas fases, en la perspectiva de la identificación de los desempeños argumentativos de los interlocutores.

- ◆ Fase de expresión: manifestación de la aserción (opinión) bajo una posición determinada, respecto al tema. Esta fase es responsabilidad del argumentador.
- ◆ Fase de toma de posiciones (positivas o negativas) en relación con la opinión o tesis. Esta fase es responsabilidad del auditorio y en ella se define el rol de antagonista o de colaborador del auditorio en el proceso argumentativo.
- ◆ Fase de desarrollo del antagonismo o de la cooperación. Es una fase intermedia en la que evoluciona fuertemente el proceso argumentativo y en la que se define la posición de cada uno de los interlocutores, mediante la justificación (por parte del auditorio). Esta fase es responsabilidad de ambos interlocutores.
- ◆ Fase de conclusión. En esta fase se consolida alguna de las posiciones o se realiza un acuerdo común. Es resultado de la estrategia argumentativa y en ella suelen incidir también factores externos al proceso argumentativo propiamente dicho (p.e. emociones, prestigio, etc.). Esta fase es responsabilidad de ambos interlocutores.

Desde una perspectiva pragmática, se pueden identificar condiciones para la postulación de un sujeto argumentativo, en función del buen cumplimiento del acto argumentativo, a saber: la honestidad (compromiso ético con el proceso argumentativo) y la buena ejecución del acto argumentativo (procedimientos adecuados, en concordancia con las exigencias del contexto argumentativo). Desde el punto de vista de la primera condición, los sujetos que argumentan estarán en condiciones de asumir sinceramente una actitud argumentativa y de manifestar una actitud crítica frente al tema polémico. Estarán dispuestos a establecer el "contacto intelectual" (Perelman y Olbrecht – Tyteca, 1989) y a propender por una decisión razonable y/o razonada sobre el tema en cuestión. Consecuentemente, realizarán un proceso discursivo de: expresión o reconocimiento de la tesis; exposición o identificación de los argumentos; defensa o valoración de los mismos; producción y sostenimiento de contraargumentos o de argumentos de cooperación; formulación de conclusiones y/o acuerdos.

La construcción discursiva de los interlocutores que argumentan, según lo manifestado anteriormente, implica que en la producción de la trama argumentativa sea manifestada la puesta en escena de un locutor que desempeña, de cierta manera su rol y que por ello produce una trama particular.

La comunicación en el aula prefigura roles discursivos generales (profesor, estudiante) que, desde el punto de vista filosófico (Perelman y Olbrecht – Tyteca, 1989) son connaturales al contexto educativo que es un contexto argumentativo de tipo epidíctico. Es decir, que los roles de profesor y estudiante que están prefigurados por la estructura de la comunicación del aula, se

matizan, según las situaciones particulares de comunicación; en este caso por la interacción argumentativa. Es evidente, entonces, que la situación argumentativa en el aula exige a los interlocutores escenificar no sólo el rol preconcebido sino también, construir y realizar el rol de argumentador o de auditorio, según las decisiones de la actividad argumentativa y las condiciones del contrato didáctico puesto en marcha.

### **3. Construcción del texto argumentativo**

El texto argumentativo es el producto de la actividad discursiva de argumentar. Según Van Dijk (1982), el texto es una unidad de naturaleza semántica compuesta por secuencias de proposiciones y que posee una macroestructura o estructura global de significado. En este sentido, el texto ha de poseer una coherencia global y lineal; es decir, que todas sus oraciones y proposiciones desarrollarán el tema y, a la vez, cada proposición tendrá una relación semántica adecuada con la antecedente y con la consecuente, en la secuencia proposicional.

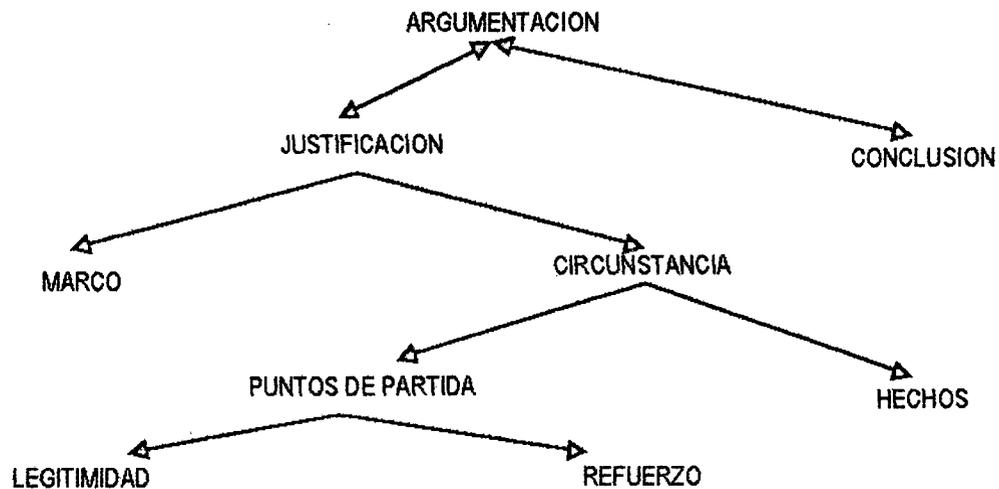
- a) **La construcción de la estructura argumentativa.** Para el estudio de la estructura del texto argumentativo, tendremos en cuenta dos posiciones teóricas: la clásica de Toulmin (1975) y la pragmática de Teun A. Van Dijk (1983) y Lo Cascio (1991). Ambas teorías coinciden en considerar fundamentalmente, como función de la argumentación, la justificación bajo una petición implícita de obtener consenso. Derivada de la función, la intención de la argumentación es convencer o persuadir, de la legitimidad de una tesis a un interlocutor. En ese sentido, la estructura de la argumentación obedece a esta función y a esta intención, tan sólo que se concibe más canónicamente o más flexiblemente, de acuerdo con contextos argumentativos particulares.

La estructura argumentativa de Toulmin (1975) considera básicamente tres elementos constitutivos: la opinión (tesis), la regla general (garantía) y la argumentación (hechos o pruebas). No obstante, su estructura considera realmente cinco elementos, los tres anteriores y los calificadores modales (elementos que relativizan la tesis o los argumentos) y la reserva (datos sobre los que se está prevenido en relación con la tesis) (Lo Cascio, 1991). Por su parte Van Dijk y Lo Cascio proponen una estructura mínima de la argumentación compuesta por dos elementos: la hipótesis (premisa) y la conclusión (tesis) y consideran que otros elementos pueden aparecer implícitos en las producciones argumentativas. La estructura de la argumentación subyace fundamentalmente una estructura de conexión de tres tipos: sintáctica (principios de derivabilidad), semántica (implicaciones semánticas y semióticas entre los significados) y pragmática (relación entre hipótesis y conclusión).

En la estructura argumentativa, las relaciones entre hipótesis y conclusión pueden ser del orden de la posibilidad, la credibilidad, la probabilidad, entre otras. Según Van Dijk (1983: 159), la estructura de la argumentación exige una base para la relación pragmática y semántica. Esta base la constituye la

GARANTÍA o “legitimidad” que autoriza a alguien a llegar a una conclusión determinada. Para Toulmin (1975) este componente de la estructura es vital y lo denomina “garante” o warrant. Eventualmente asumiremos el término de Van Dijk “*legitimidad*”, en tanto que se convierte en el elemento que permite deducir o dar fuerza a la conclusión, al indicar qué y cómo funciona legítimamente la tesis defendida.

De la estructura pragmática simple de la argumentación, se deriva una complejización de tal estructura por el recurso al argumento. En este sentido, un proceso argumentativo puede desencadenar múltiples relaciones entre argumentos, pero a propósito de la relación justificativa del sentido argumentado y, por supuesto, de la consolidación de la conclusión. Para efectos didácticos y para conformar una base teórica para el análisis de datos, se tomará aquí la superestructura del texto argumentativo propuesta por Van Dijk (1983).



Como se observa en el esquema anterior, la producción de la estructura de una trama argumentativa estará soportada fundamentalmente por la relación justificativa entre sus componentes, a propósito de la conclusión o del sentido argumentado. Sin embargo, es un hecho que la estructura canónica de la argumentación puede modificarse sobre la base de transformaciones necesarias, según el contexto argumentativo y las condiciones de argumentación de los interlocutores. Por ejemplo, determinados componentes pueden estar implícitos, dependiendo de los punto de partida del acto argumentativo y del contexto.

- b) **La producción de argumentos.** Es la actividad propia de la producción discursiva en un contexto argumentativo. Desde el punto de vista discursivo, la producción de argumentos se refiere a una particular forma de enunciar, a una particular forma de significar y de asumir a un interlocutor, en un contexto específico. Dado que ya se han explicitado aspectos concernientes al contexto,

en este momento nos ocuparemos tan solo de la naturaleza de la categoría argumento.

El argumento como categoría discursiva puede definirse como un acto de habla que se inscribe en una estructura textual de tipo argumentativo, que posee alguna fuerza en relación con EL SENTIDO de la argumentación y que de esta manera define su función. Lo Cascio (1991) considera que el argumento, como acto de habla, define la posición de un hablante respecto de un problema y sirve como procedimiento heurístico, para relacionar, de cierta manera, datos, juicios, opiniones, etc.; además, que trata de comunicar a otro(s) un juicio personal, provisto de argumentos que pueden probar su validez. En este sentido, el argumento es un macroacto de habla, cuya intención es comunicar una opinión para convencer o persuadir a otro de su validez o legitimidad y cuya función se define en la relación de probabilidad, de pertinencia, de posibilidad, etc., con respecto a la conclusión. Es en esta relación semántico-discursiva que un enunciado adquiere el status de argumento y se desarrolla como tal.

Desde esta perspectiva, habría que tener en cuenta que, dependiendo del contexto argumentativo y del sentido en cuestión, los argumentos pueden tomar diversas formas y distintas estrategias de encadenamiento, generando, de manera particular, tramas argumentativas. Desde del punto de vista del desarrollo de competencia argumentativa, se tendrá en cuenta que el sujeto argumentador estará en posibilidad de identificar e interpretar argumentos en textos argumentativos y de producir argumentos en el marco de la elaboración de tramas argumentativas.

**ANEXO 2**

## Anexo No. 3

UNIVERSIDAD DISTRITAL "FRANCISCO JOSE DE CÁLDAS"  
MODOS DE RAZONAMIENTO EN MATEMÁTICAS  
ELECTIVA PRIMER SEMESTRE 2000

Profesor: Olga Lucía León  
Profesores asistentes: Dora Inés Calderón  
Santiago González

### ACTIVIDAD No. 1

#### Objetivos:

1. Identificar las características del razonamiento abductivo.
2. Identificar características de la interacción argumentativa en un proceso de validación de conjeturas.

#### Trabajo individual:

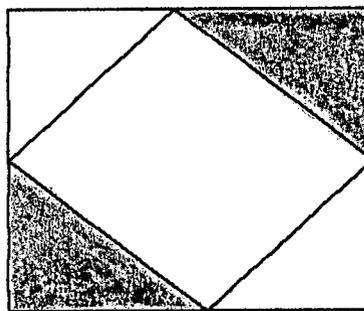
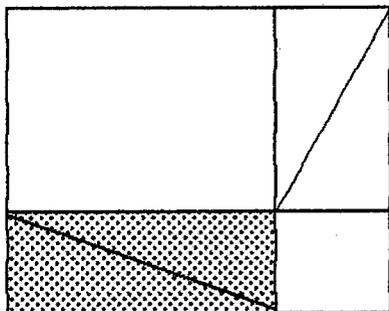
1. Estudie el gráfico presentado con este taller y formule la relación matemática que se muestra con el gráfico.
2. Formule por lo menos tres razones que le hacen a usted concluir esa relación.

#### Trabajo en pareja:

1. Elaborar una sola relación matemática a partir de las relaciones formuladas por los dos integrantes.
2. Proporcionar por lo menos tres razones que le hacen a la pareja concluir que esa es la relación mostrada.
3. Preparar una presentación para convencer a las demás parejas de que la relación elaborada por la pareja es la más adecuada y, de que las razones que las soportan son las más acertadas.

#### Trabajo colectivo:

1. A partir de la presentación de una de las parejas elaborar la relación matemática más adecuada para la gráfica proporcionada.



ANNEXO 3

## Análisis de la Actividad 1

Manifestación de los estudiantes		Conjeturas formuladas
<p>Procesos cognitivo observado</p> <p>Procesos semánticos</p>	<p>Se manifestaron las siguientes relaciones:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>◆ Global: "La relación es geométrica" (una pareja)</li> <li>◆ Especifica no pitagórica: "Los dos cuadrados son congruentes" (6 parejas)</li> <li>◆ Especifica pitagórica: "La hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los catetos al cuadrado" (una pareja)</li> </ul> <p>1. Tipos de interpretación de signos con respecto al registro figural presentado:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>◆ Interpretación global. Se concibe cada figura como una unidad, "Hay dos cuadrados que tienen igual área" (3 parejas)</li> <li>◆ Interpretación configural de los cuadrados a los triángulos. Se concibe a los cuadrados como figuras fundamentales. "hay dos cuadrados con triángulos colocados diferentes" (4 parejas)</li> <li>◆ Interpretación configural de los triángulos a los cuadrados. Se concibe al triángulo como la figura fundamental. "Sin los triángulos quedan dos cuadrados iguales a un tercer cuadrado" (1 pareja)</li> <li>◆ Identificación de unidades significantes</li> </ul> <p>2.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>◆ Los cuadrados (3 parejas)</li> <li>◆ Los cuadrados y los triángulos (4 parejas)</li> <li>◆ Sombreados y blancos (3 parejas)</li> <li>◆ El grosor de las líneas no fue identificado como unidad significante</li> </ul> <p>3.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>◆ Acciones de tratamiento de registro.</li> <li>◆ Acciones de composición y descomposición: entre figuras o al interior de una figura.</li> <li>◆ Acciones de translación y rotación de figuras</li> </ul>	<p>Bloqueo identificado: lectura de la relación como "parecido a"</p> <p>Conjetura: El gráfico no manifiesta de manera evidente la relación pitagórica</p> <p>Bloqueo identificado: Interpretación global y aislada de los registros figurales.</p> <p>Conjetura: La forma figural global (el cuadrado) está determinando el proceso relacional</p>
<p>Procesos inferenciales</p>	<p>Fundamentalmente se privilegió el uso de la abducción como forma de inferencia en el proceso de solución. Se identificaron los siguientes comportamientos:</p> <p>a) Tipo 1 Dato: dos cuadrados Estrategia: Comparación perceptual Solución: Cuadrados externos iguales</p> <p>b) Tipo 2 Dato: dos rectángulos Estrategia: Medida de los cuatro lados Solución: Cuadrados iguales</p> <p>c) Tipo 3 Dato: dos cuadrados compuestos por triángulos y cuadrados Estrategia: Relacionar los triángulos de las figuras y los cuadrados de las dos figuras. Solución: Cuadrados externos iguales</p> <p>d) Tipo 4 Dato: dos cuadrados, cuatro triángulos al interior de cada cuadrado y cuadrados al interior de cada cuadrado. Estrategia: Relacionar triángulos y asegurar igualdad de las partes sobranes. Solución: dos cuadrados internos de una figura son iguales al cuadrado interno de la otra figura.</p>	<p>Bloqueo identificado: Lectura figural restringida.</p> <p>Conjetura: La lectura de los datos figurales privilegia más los aspectos perceptuales que los relacionales.</p>

UNIVERSITY OF CALIFORNIA  
LIBRARY

**INFORME FINAL FINANCIERO  
DEL CONTRATO No. 091 DE FECHA DICIEMBRE 10 DE 1999**

**CELEBRADO ENTRE EL "INSTITUTO PARA LA INVESTIGACION  
EDUCATIVA Y EL DESARROLLO PEDAGOGICO" – IDEP – Y OLGA LUCIA  
LEON CORREDOR Y DORA INES CALDERON**

**FECHA DE ENTREGA  
NOVIEMBRE 17, 2000**

## CONTENIDO DEL INFORME FINANCIERO

- I. OBJETO
- II. CONSTANCIA DEL CONTADOR
- III. FOTOCOPIA TARJETA PROFESIONAL Y CERTIFICACION DE VIGENCIA
- IV. DECIMO INFORME CONSOLIDADO 100% (anticipo 80% más 20% por desembolsar – IDEP) A NOVIEMBRE 16 DE 2000 (1 hoja)
- V. CUADRO DE DISCRIMINACION DE GASTOS CONTRATO IDEP A NOVIEMBRE 16 DE 2000
- VI. DESCRIPCION DE GASTOS 100% (IDEP) A NOVIEMBRE 16 (2 hojas)
- VII. EJECUCION PRESUPUESTAL CONTRAPARTIDAS: COLCIENCIAS Y OTRAS A NOVIEMBRE 16 DE 2000 (2 hojas)
- VIII. DECIMO INFORME CONSOLIDADO PRESUPUESTO CONTRATO IDEP Y CONTRAPARTIDAS COLCIENCIAS Y OTRAS A NOVIEMBRE 16 DE 2000 (5 hojas)

**JUAN PABLO BARRERA RODRÍGUEZ**  
**CONTADOR PUBLICO TITULADO**  
**ESPECIALISTA EN DERECHO TRIBUTARIO**

---

**EL SUSCRITO CONTADOR PUBLICO**

**CERTIFICA:**

1. Que en lo relacionado con las Obligaciones de los Contratistas, contenidas en la Cláusula Décima Primera del Contrato celebrado entre el Instituto para la Investigación Educativa y el Desarrollo Pedagógico "IDEP" Nit 830.007.738-1 y OLGA LUCIA LEÓN CORREDOR, cédula de ciudadanía No. 51.577.649 de Bogotá, y DORA INÉS CALDERÓN, cédula de ciudadanía No. 51.694.974 de Bogotá, asignado con el número 91 de fecha 10 de diciembre de 1999, en lo concerniente a las obligaciones contenidas en los numerales 1, 2, 5, y 8, se han cumplido conforme a los siguientes procedimientos:

**Numeral 1.**

Según lo expresado en los comprobantes de pago y sus respectivos soportes, los recursos financieros se han aplicado exclusivamente a los rubros aprobados en el proyecto objeto del contrato.

**Numeral 2.**

Los bienes adquiridos, se han destinado a la ejecución del proyecto.

**Numeral 5.**

Todos los comprobantes de egreso están debidamente soportados y numerados y registrados en su respectivo rubro presupuestal en orden cronológico y se encuentran debidamente archivados

**Numeral 8.**

Los dineros recibidos con destino a la ejecución del contrato se han manejado en la Cuenta de Ahorros No. 0070 - 0033441 - 2 de Davivienda a nombre de las contratistas, según los extractos.

2. Que los informes que se adjunta a la presente, son veraces y sus partidas están debidamente soportadas en un libro auxiliar de presupuesto con sus respectivos extractos, los cuales se relacionan como sigue:

**JUAN PABLO BARRERA RODRÍGUEZ**  
**CONTADOR PUBLICO TITULADO**  
**ESPECIALISTA EN DERECHO TRIBUTARIO**

- a. Décimo informe consolidado de ejecución presupuestal del "IDEP" y contrapartidas Colciencias y otras a noviembre 16 de 2000
- b. Décimo informe anticipo 80% más 20% por desembolsar Contrato "IDEP" a noviembre 16 de 2000.
- c. Cuadro de discriminación de Gastos "IDEP" a noviembre 16 de 2000.
- d. Descripción de gastos por rubros presupuestales 100% contrato "IDEP" a noviembre 16 de 2000; y
- e. Ejecución Presupuestal de contrapartidas Colciencias y otros a noviembre 16 de 2000.

3. Que en resumen la ejecución financiera del Contrato Número 91 a noviembre 16 de 2000, se efectuó de la siguiente manera:

	Presupuesto	Ejecución	Por Ejecutar
Recursos "IDEP" (1)	\$49.985.000	50.373.694	(388.694)
Otros Contrapartida Colciencias	22.160.000	21.709.685	450.315
Otros Contrapartida	2.300.000	2.300.000	- 0 -
Rendimientos Cuenta Davivienda (2)	386.343	229.388	156.955
<b>TOTALES</b>	<u>74.831.343</u> =====	<u>74.612.767</u> =====	<u>218.576</u> =====

(1) Del presupuesto aprobado "IDEP", según contrato, solamente se ha recibido el 80%, faltando por desembolsar el 20% final equivalente a \$9.997.000.00.

En la ejecución presupuestal de "IDEP" se incluyeron partidas comprometidas por servicios de actividades pendientes de ejecutar, como quiera que estos eventos se van a realizar durante la última semana de noviembre del año en curso y la publicación del Proyecto

**JUAN PABLO BARRERA RODRÍGUEZ**  
**CONTADOR PUBLICO TITULADO**  
**ESPECIALISTA EN DERECHO TRIBUTARIO**

---

una vez se obtenga la aprobación de "IDEP", por consiguiente los conceptos aludidos se discriminan así:

Materiales - Software	266.000
Eventos de Socialización - Encuentros de grupo	641.000
Eventos de Socialización - Encuentro con estudiantes	474.000
Bibliografía	283.000
Publicación Proyecto	3.460.000
TOTAL	<u>5.124.000</u> =====

(2) Los rendimientos de Davivienda no están contemplados en el Contrato.

Se expide en Bogotá, D.C., a los dieciséis (16) días del mes de noviembre del año dos mil (2000) con destino a "IDEP" para la presentación del último informe financiero, para efecto de la legalización total del contrato.



**JUAN PABLO BARRERA RODRIGUEZ**  
**C.C. No. 79.277.826 de Bogotá**  
**TARJETA PROFESIONAL 17541 T**

2000/06/20



REPUBLICA DE COLOMBIA  
MINISTERIO DE EDUCACION NACIONAL  
LA JUNTA CENTRAL DE CONTADORES  
CERTIFICA

CERTIFICADO DE  
VIGENCIA No. 0083485

Que el Contador Público JUAN PABLO BARRERA RODRIGUEZ \*\*\*\*\*  
identificado con cédula de ciudadanía No. 79,277,826 de BOGOTA y Tarjeta Profesional No. 17,541 -T  
tiene vigente su inscripción en la Junta Central de Contadores y a la fecha \*\*\*\*SE ENCUENTRA HABILITADO PARA EJERCER  
LA PROFESION \*\*\*\*\*  
Dado en Santa Fe de Bogotá a los 20 días del mes de Junio de 2000 con vigencia de tres (3) meses.

NOTA :  
Este certificado no sirve para acreditar la calidad del Contador Público.  
(Art. 3 Ley 43 de 1990)  
Si el número de cédula de ciudadanía no corresponde al de la  
persona inscrita, este certificado carece de validez.

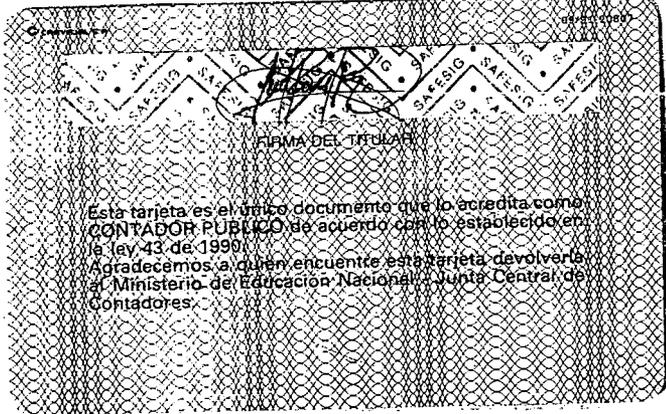
DE CONFORMIDAD CON EL ARTICULO 12 DEL DECRETO 2150 DE 1995, LA FIRMA  
MECANICA INCORPORADA EN EL PRESENTE DOCUMENTO TIENE PLENA VALIDEZ

ENTRE CALLE DE LA  
DEPARTAMENTO DE  
CALLE DE LA  
DIRECTOR  
MARIA DEL PILAR CUELLAR FORERO

CONTRATO No. 091.

PARA PRESUPUESTAL  
Y A OLGA  
CON DES  
CERIFICACION

IP 17541 T  
Noviembre 16 de 2000.



**Décimo Informe Consolidado 100%**  
**(Anticipo 80% más 20% por desembolsar - IDEP)**  
**Noviembre 16, 2000**

CONCEPTO	100% PRESUPUESTO	ACUMULADO EJECUTADO	SALDO POR EJECUTAR
Personal Investigador del Proyecto	32,600,000.00	32,944,894.00	-344,894.00
Asesorías o Consultorías	5,826,977.00	5,826,954.00	23.00
Materiales	2,063,351.00	2,096,968.60	-33,617.60
Servicios Técnicos	1,021,649.00	1,021,234.00	415.00
Eventos de Socialización	3,000,000.00	3,000,143.00	-143.00
Bibliografía	1,000,000.00	999,653.00	347.00
Administración	1,000,000.00	1,000,915.00	-915.00
Otros: Publicaciones	3,473,023.00	3,482,932.00	-9,909.00
<b>Sub-Total</b>	<b>49,985,000.00</b>	<b>50,373,693.60</b>	<b>-388,693.60</b>
Otros Financieros	386,343.15	229,387.58	156,955.57
<b>TOTAL GENERAL</b>	<b>50,371,343.15</b>	<b>50,603,081.18</b>	<b>-231,738.03</b>

  
**OLGA LUCÍA LEÓN**

c.c. 51.577.649 de Bogotá

  
**DORA INÉS CALBERÓN**

c.c. 51.694.974 de Bogotá

**Cuadro de Discriminación de Gastos Contrato Idep a Noviembre 16, 2000**

<b>CONCEPTO</b>	<b>100% PRESUPUESTO</b>	<b>EJECUTADO</b>	<b>SALDOS</b>
<b>Personal Investigador del Proyecto</b>			
Investigador Principal Matemáticas	10,000,000.00	10,000,000.00	
Impuesto de Timbre e ICA asumidos		114,648.00	
Investigador Principal Lingüística	10,000,000.00	10,000,000.00	
Impuesto de Timbre e ICA asumidos		114,648.00	
Co-Investigador Matemáticas	10,000,000.00	10,000,000.00	
Impuesto de Timbre e ICA asumidos		114,648.00	
Auxiliar Profesional Básica	2,600,000.00	2,600,950.00	
<b>Sub-total Gastos Idep</b>	<b>32,600,000.00</b>	<b>32,944,894.00</b>	<b>-344,894.00</b>
Retenciones Cuentas Investigadores		-3,187,168.00	
Retención Anticipo Idep		2,583,542.00	
<b>TOTAL SEGUN AUXILIAR</b>	<b>32,600,000.00</b>	<b>32,341,268.00</b>	<b>258,732.00</b>
<b>Asesorías y Consultorías</b>			
Asesor Area de Matemáticas	2,862,251.00	2,827,700.00	
Impuesto de Timbre e ICA asumidos		34,394.00	
Asesor Area de Lenguaje	2,964,726.00	2,915,562.00	
Impuesto de Timbre e ICA asumidos		49,298.00	
<b>Sub-total Gastos Idep</b>	<b>5,826,977.00</b>	<b>5,826,954.00</b>	<b>23.00</b>
Retenciones Cuentas Asesores		-202,000.00	
<b>TOTAL SEGUN AUXILIAR</b>	<b>5,826,977.00</b>	<b>5,624,954.00</b>	<b>202,023.00</b>
<b>Materiales</b>			
Grabadora Video VHS+A14	299,018.00	293,400.00	
Impuesto de Timbre e ICA asumidos		5,618.00	
Impresora	215,885.00	211,300.00	
Impuesto de Timbre e ICA asumidos		4,585.00	
Tinta Impresora	418,209.00	416,361.00	
Impuesto de Timbre e ICA asumidos		3,440.00	
Papelería Impresión Documentos	459.00	0.00	
Impuesto de Timbre e ICA asumidos		459.00	
Diskettes	12,429.00	12,200.00	
Impuesto de Timbre e ICA asumidos		229.00	
Cassette de Audio	55,046.00	53,900.00	
Impuesto de Timbre e ICA asumidos		1,146.00	
Cassette de Video	157,650.00	156,400.00	
Impuesto de Timbre e ICA asumidos		975.00	
Fotocopias y Utiles de Oficina	536,355.00	532,294.00	
Impuesto de Timbre e ICA asumidos		4,012.00	
Software	368,300.00	130,063.60	
Partidas comprometidas		266,000.00	
Impuesto de Timbre e ICA asumidos		4,586.00	
<b>Sub-total Gastos Idep</b>	<b>2,063,351.00</b>	<b>2,096,968.60</b>	<b>-33,617.60</b>
Retenciones Prácticas Contrato		51,512.00	
<b>TOTAL SEGUN AUXILIAR</b>	<b>2,063,351.00</b>	<b>2,148,480.60</b>	<b>-85,129.60</b>

CONCEPTO	100% PRESUPUESTO	EJECUTADO	SALDOS
<b>Servicios Técnicos</b>			
Apoyo y sistematización de datos	1,021,649.00	1,010,916.00	
Impuesto de Timbre e ICA asumidos		10,318.00	
<b>Sub-total Gastos Idep</b>	1,021,649.00	1,021,234.00	415.00
Retenciones Cuentas de Servicios		-86,992.00	
Retefuente Contrato Idep		71,325.00	
<b>TOTAL SEGUN AUXILIAR</b>	1,021,649.00	1,005,567.00	16,082.00
<b>Eventos de Socialización</b>			
Tres encuentros de grupo	2,500,000.00	1,830,750.00	
Impuesto de Timbre e ICA asumidos		28,622.00	
Partidas Comprometidas Eventos		641,000.00	
Encuentro con estudiantes	500,000.00	20,000.00	
Impuesto de Timbre e ICA asumidos		5,731.00	
Partidas Comprometidas Eventos		474,000.00	
<b>Sub-Total Gastos Idep</b>	3,000,000.00	3,000,143.00	-143.00
Retenciones Contrato Idep		237,750.00	
<b>TOTAL SEGUN AUXILIAR</b>	3,000,000.00	3,237,893.00	-237,893.00
<b>Bibliografía</b>	1,000,000.00	705,188.00	
Impuesto de Timbre e ICA asumidos		11,465.00	
Partidas Comprometidas Bibliografía		283,000.00	
<b>Sub-total Gastos Idep</b>	1,000,000.00	999,653.00	347.00
Retención Contrato Idep		79,250.00	
<b>TOTAL SEGUN AUXILIAR</b>	1,000,000.00	1,078,903.00	-78,903.00
<b>Administración</b>	1,000,000.00	989,450.00	
Impuesto de Timbre e ICA asumidos		11,465.00	
<b>Sub-total Gastos Idep</b>	1,000,000.00	1,000,915.00	-915.00
Retención Cuentas Servicios		-91,250.00	
Retención Contrato Idep		79,250.00	
<b>TOTAL SEGUN AUXILIAR</b>	1,000,000.00	988,915.00	11,085.00
<b>Publicaciones</b>	3,473,023.00	0.00	
Impuesto de Timbre e ICA asumidos		22,932.00	
Partidas Comprometidas Publicación		3,460,000.00	
<b>Sub-total Gastos Idep</b>	3,473,023.00	3,482,932.00	-9,909.00
Retefuente Contrato Idep		158,499.00	
<b>TOTAL SEGUN AUXILIAR</b>	3,473,023.00	3,641,431.00	-168,408.00

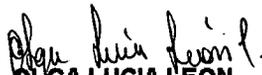
  
**OLGA LUCÍA LEÓN**  
 c.c. 51.577.649 de Bogotá

  
**DORA INÉS CALDERÓN**  
 c.c. 51.694.974 de Bogotá

**Descripción de Gastos 100% Contrato Idep a Noviembre 16, 2000**

<b>CONCEPTO</b>	<b>100% PRESUPUESTO</b>	<b>ACUMULADO EJECUTADO</b>	<b>SALDO POR EJECUTAR</b>
<b>Personal Investigador del Proyecto</b>			
Investigador Principal Matemáticas	10,000,000.00	10,907,145.00	-907,145.00
Investigador Principal Lingüística	10,000,000.00	10,907,145.00	-907,145.00
Co-Investigador Matemáticas	10,000,000.00	10,907,146.00	-907,146.00
Auxiliar Profesional Básica	2,600,000.00	2,807,000.00	-207,000.00
Retenciones Deducidas	0.00	-3,187,168.00	3,187,168.00
<b>Sub-total</b>	<b>32,600,000.00</b>	<b>32,341,268.00</b>	<b>258,732.00</b>
<b>Asesorías y Consultorías</b>			
Asesor Area de Matemáticas	2,862,251.00	2,862,094.00	157.00
Asesor de Lenguaje	2,964,726.00	2,964,860.00	-134.00
Retenciones Deducidas	0.00	-202,000.00	202,000.00
<b>Sub-total</b>	<b>5,826,977.00</b>	<b>5,624,954.00</b>	<b>202,023.00</b>
<b>Materiales</b>			
Grabadora Video VHS+A14	299,018.00	299,018.00	0.00
Impresora	215,885.00	215,885.00	0.00
Tinta Impresora	418,209.00	443,576.00	-25,367.00
Papelería Impresión Documentos	459.00	459.00	0.00
Diskettes	12,429.00	12,429.00	0.00
Cassette de Audio	55,046.00	55,046.00	0.00
Cassette de Video	157,650.00	157,375.00	275.00
Fotocopias y Utiles de Oficina	536,355.00	564,043.00	-27,688.00
Software	368,300.00	134,649.60	233,650.40
Software - Partidas comprometidas	0.00	266,000.00	-266,000.00
<b>Sub-Total</b>	<b>2,063,351.00</b>	<b>2,148,480.60</b>	<b>-85,129.60</b>
<b>Servicios Técnicos</b>			
Apoyo y sistematización de datos	1,021,649.00	1,092,559.00	-70,910.00
Retenciones Deducidas	0.00	-86,992.00	86,992.00
<b>Sub-Total</b>	<b>1,021,649.00</b>	<b>1,005,567.00</b>	<b>16,082.00</b>
<b>Eventos de Socialización</b>			
Tres encuentros de grupo	2,500,000.00	2,057,537.00	442,463.00
Tres encuentros de grupo - Part. Comp.	0.00	641,000.00	-641,000.00
Encuentro con estudiantes	500,000.00	65,356.00	434,644.00
Encuentro con estudiantes - Part. Comp.	0.00	474,000.00	-474,000.00
<b>Sub-Total</b>	<b>3,000,000.00</b>	<b>3,237,893.00</b>	<b>-237,893.00</b>

CONCEPTO	100% PRESUPUESTO	ACUMULADO EJECUTADO	SALDO POR EJECUTAR
<b>Otros Rubros</b>			
Bibliografía	1,000,000.00	795,903.00	204,097.00
Bibliografía - Partidas comprometidas	0.00	283,000.00	-283,000.00
<b>Sub-Total</b>	1,000,000.00	1,078,903.00	-78,903.00
Administración	1,000,000.00	1,080,165.00	-80,165.00
Retenciones Deducidas	0.00	-91,250.00	-91,250.00
<b>Sub-Total</b>	1,000,000.00	988,915.00	11,085.00
Publicaciones	3,473,023.00	181,431.00	3,291,592.00
Publicaciones - Partidas comprometidas	0.00	3,460,000.00	-3,460,000.00
<b>Sub-Total</b>	3,473,023.00	3,641,431.00	-168,408.00
<b>SUB-TOTALES</b>	49,985,000.00	50,067,411.60	-82,411.60
<b>Otros: Financieros</b>	386,343.15	229,387.58	156,955.57
<b>TOTAL GENERAL</b>	50,371,343.15	50,296,799.18	74,543.97

  
**OLGA LUCIA LEÓN**

c.c. 51.577.649 de Bogotá

  
**DORA INES CALDERON**

c.c. 51.694.974 de Bogotá

Ejecución Presupuestal Contrapartidas: Colciencias y Otras, Noviembre 16, 2000

RUBROS	TOTAL PRESUPUESTO	ACUMULADO EJECUTADO	SALDO POR EJECUTAR
<b>Personal Investigador del Proyecto</b>			
Investigador Ppal. Matemáticas	5,000,000.00	5,000,000.00	0.00
Investigador Ppal. Lingüística	5,000,000.00	5,000,000.00	0.00
Auxiliar Profesional Básica	400,000.00	400,000.00	0.00
<b>Asesorías o Consultorías</b>			
Asesor Area de Matemáticas	1,800,000.00	1,800,000.00	0.00
Asesor Area de Lenguaje	1,200,000.00	990,400.00	209,600.00
<b>Materiales</b>			
Grabadora de audio y vídeoVHS	1,510,000.00	1,587,000.00	-77,000.00
Computador	2,800,000.00	2,830,656.00	-30,656.00
Tinta Impresora	50,000.00	94,799.00	-44,799.00
Software	800,000.00	913,963.62	-113,963.62
Papelería y Útiles de Oficina	0.00	-107,688.00	0.00
<b>Servicios Técnicos</b>			
Apoyo sistematización de datos	600,000.00	600,000.00	0.00
<b>Bibliografía</b>			
Textos y documentos	1,000,000.00	600,554.00	399,446.00
<b>Otros</b>			
Publicaciones	2,000,000.00	0.00	2,000,000.00
Provisión Publicación Texto	0.00	2,000,000.00	-2,000,000.00
<b>Sub-total</b>	22,160,000.00	21,709,684.62	450,315.38
Otras Contrapartidas	2,300,000.00	2,300,000.00	0.00
<b>TOTAL</b>	24,460,000.00	24,009,684.62	450,315.38

**Nota:**

Total ejecutado presupuesto Colciencias 21,709,684.62

**Saldos por Reintegrar de Colciencias (Universidad del Valle)**

Comp. Eg. # 078 - Software	913,963.62
Comp. Eg. # 062 - Bibliografía	57,600.00
Comp. Eg. # 085 - Bibliografía	103,680.00
Comp. Eg. # 091 - Tiquete Aereo Valledupar	230,400.00
Nota Contable No. 051 - Olga Lucía León - Inv. Ppal. Mat. - Honorarios	1,000,000.00
Nota Contable No. 052 - Dora Inés Calderón - Inv. Ppal. Lenguaje - Hon.	1,000,000.00
Nota Contable No. 053 - Provisión Publicaciones	2,000,000.00
	<u>5,305,643.62</u>

**Total Neto Girado por Universidad del Valle (Colciencias) 16,404,041.00**

**OLGA LUCIA LEON**  
c.c. 51.577.649 de Bogotá

  
**DORA INÉS CALDERÓN**  
c.c. 51.694.974 de Bogotá

**DECIMO INFORME CONSOLIDADO PRESUPUESTO CONTRATO IDEP A NOVIEMBRE 16, 2000**  
**Incluye Ejecución Contrapartida Colciencias**

RUBROS	PRESUPUESTO IDEP	CONTRAPARTIDA COLCIENCIAS	CONTRAPARTIDA OTRAS	TOTAL PRESUPUESTO	EJECUCION DEL PERIODO	ACUMULADO EJECUTADO	SALDO POR EJECUTAR
Personal Investigador del Proyecto	32,600,000.00	10,400,000.00	0.00	43,000,000.00	5,156,300.00	42,741,268.00	258,732.00
Asesorías o Consultorías	5,826,977.00	3,000,000.00	0.00	8,826,977.00	61,877.00	8,415,354.00	411,623.00
Materiales	2,063,351.00	5,160,000.00	0.00	7,223,351.00	377,256.00	7,467,211.22	-243,860.22
Servicios Técnicos	1,021,649.00	600,000.00	0.00	1,621,649.00	471,000.00	1,605,567.00	16,082.00
Eventos de Socialización	3,000,000.00	0.00	2,300,000.00	5,300,000.00	2,915,000.00	5,537,893.00	-237,893.00
Bibliografía	1,000,000.00	1,000,000.00	0.00	2,000,000.00	453,700.00	1,679,457.00	320,543.00
Administración	1,000,000.00	0.00	0.00	1,000,000.00	512,900.00	988,915.00	11,085.00
Otros Publicaciones	2,000,000.00	2,000,000.00	0.00	4,000,000.00	5,460,000.00	5,641,431.00	-1,641,431.00
Otros Financieros	0.00	0.00	386,343.15	386,343.15	4,350.00	229,387.58	156,955.57
<b>TOTAL</b>	<b>48,511,977.00</b>	<b>22,160,000.00</b>	<b>2,686,343.15</b>	<b>73,358,320.15</b>	<b>15,412,383.00</b>	<b>74,306,483.80</b>	<b>-948,163.65</b>

**Descripción de Gastos**

RUBROS	PRESUPUESTO IDEP	CONTRAPARTIDA COLCIENCIAS	CONTRAPARTIDA OTRAS	TOTAL PRESUPUESTO	EJECUCION DEL PERIODO	ACUMULADO EJECUTADO	SALDO POR EJECUTAR
Investigador Ppal. Matemáticas	10,000,000.00	5,000,000.00	0.00	15,000,000.00	2,000,000.00	15,907,145.00	-907,145.00
Investigador Ppal. Lingüística	10,000,000.00	5,000,000.00	0.00	15,000,000.00	2,000,000.00	15,907,145.00	-907,145.00
Co-investigador Matemáticas	10,000,000.00	0.00	0.00	10,000,000.00	1,300,000.00	10,907,146.00	-907,146.00
Auxiliar Prof. Básica	2,600,000.00	400,000.00	0.00	3,000,000.00	207,000.00	3,207,000.00	-207,000.00
Retenciones Deducidas					-350,700.00	-3,187,168.00	-3,187,168.00
<b>TOTAL</b>	<b>32,600,000.00</b>	<b>10,400,000.00</b>	<b>0.00</b>	<b>43,000,000.00</b>	<b>5,156,300.00</b>	<b>42,741,268.00</b>	<b>258,732.00</b>

RUBROS	PRESUPUESTO IDEP	CONTRAPARTIDA COLCIENCIAS	CONTRAPARTIDA OTRAS	TOTAL PRESUPUESTO	EJECUCION DEL PERIODO	ACUMULADO EJECUTADO	SALDO POR EJECUTAR
<b>ASESORIAS O CONSULTORIAS</b>							
Asesor Area de Matemáticas	2,862,251.00	1,800,000.00	0.00	4,662,251.00	-237,749.00	4,662,094.00	157.00
Asesor Area de Lenguaje	2,964,726.00	1,200,000.00	0.00	4,164,726.00	299,626.00	3,955,260.00	209,466.00
Retenciones Deducidas					0.00	-202,000.00	202,000.00
<b>TOTAL</b>	5,826,977.00	3,000,000.00	0.00	8,826,977.00	61,877.00	8,415,354.00	411,623.00

RUBROS	PRESUPUESTO IDEP	CONTRAPARTIDA COLCIENCIAS	CONTRAPARTIDA OTRAS	TOTAL PRESUPUESTO	EJECUCION DEL PERIODO	ACUMULADO EJECUTADO	SALDO POR EJECUTAR
<b>MATERIALES</b>							
Grabadora Video VHS+A14	299,018.00	1,510,000.00	0.00	1,809,018.00	-38,833.00	1,886,018.00	-77,000.00
Impresora	215,885.00	0.00	0.00	215,885.00	-31,700.00	215,885.00	0.00
Computador	0.00	2,800,000.00	0.00	2,800,000.00	0.00	2,830,656.00	-30,656.00
Tinta de Impresora	418,209.00	50,000.00	0.00	468,209.00	208,967.00	538,375.00	-70,166.00
Papelaría - Impresión documentos	459.00	0.00	0.00	459.00	-3,170.00	459.00	0.00
Diskettes	12,429.00	0.00	0.00	12,429.00	-1,585.00	12,429.00	0.00
Cassettes de Audio	55,046.00	0.00	0.00	55,046.00	-7,925.00	55,046.00	0.00
Cassettes de Video	157,650.00	0.00	0.00	157,650.00	-6,736.00	157,375.00	275.00
Fotocopias y Utiles de Oficina	536,355.00	0.00	0.00	536,355.00	23,938.00	456,355.00	80,000.00
Software	368,300.00	800,000.00	0.00	1,168,300.00	234,300.00	1,314,613.22	-146,313.22
<b>TOTAL</b>	2,063,351.00	5,160,000.00	0.00	7,223,351.00	377,256.00	7,467,211.22	-243,860.22

RUBROS	PRESUPUESTO IDEP	CONTRAPARTIDA COLCIENCIAS	CONTRAPARTIDA OTRAS	TOTAL PRESUPUESTO	EJECUCION DEL PERIODO	ACUMULADO EJECUTADO	SALDO POR EJECUTAR
<b>SERVICIOS TECNICOS</b>							
Apoyo y Sistematización de Datos	1,021,649.00	600,000.00	0.00	1,621,649.00	511,000.00	1,692,559.00	-70,910.00
Retenciones Deducidas					-40,000.00	-86,992.00	-86,992.00
<b>TOTAL</b>	1,021,649.00	600,000.00	0.00	1,621,649.00	471,000.00	1,605,567.00	16,082.00

RUBROS	PRESUPUESTO IDEP	CONTRAPARTIDA COLCIENCIAS	CONTRAPARTIDA OTRAS	TOTAL PRESUPUESTO	EJECUCION DEL PERIODO	ACUMULADO EJECUTADO	SALDO POR EJECUTAR
<b>EVENTOS DE SOCIALIZACION</b>							
Tres encuentros con el grupo...	2,500,000.00	0.00	2,000,000.00	4,500,000.00	2,141,000.00	4,698,537.00	-198,537.00
Participación de Eventos	0.00	0.00	300,000.00	300,000.00	300,000.00	300,000.00	0.00
Encuentros con Estudiantes	500,000.00	0.00	0.00	500,000.00	474,000.00	539,356.00	-39,356.00
<b>TOTAL</b>	3,000,000.00	0.00	2,300,000.00	5,300,000.00	2,915,000.00	5,537,893.00	-237,893.00

RUBROS	PRESUPUESTO IDEP	CONTRAPARTIDA COLCIENCIAS	CONTRAPARTIDA OTRAS	TOTAL PRESUPUESTO	EJECUCION DEL PERIODO	ACUMULADO EJECUTADO	SALDO POR EJECUTAR
<b>BIBLIOGRAFIA</b>							
Textos y documentos	1,000,000.00	1,000,000.00	0.00	2,000,000.00	453,700.00	1,679,457.00	320,543.00
<b>TOTAL</b>	1,000,000.00	1,000,000.00	0.00	2,000,000.00	453,700.00	1,679,457.00	320,543.00

RUBROS	PRESUPUESTO IDEP	CONTRAPARTIDA COLCIENCIAS	CONTRAPARTIDA OTRAS	TOTAL PRESUPUESTO	EJECUCION DEL PERIODO	ACUMULADO EJECUTADO	SALDO POR EJECUTAR
ADMINISTRACION							
Manejo de Cuentas	1,000,000.00	0.00	0.00	1,000,000.00	512,900.00	988,915.00	11,085.00
<b>TOTAL</b>	1,000,000.00	0.00	0.00	1,000,000.00	512,900.00	988,915.00	11,085.00

RUBROS	PRESUPUESTO IDEP	CONTRAPARTIDA COLCIENCIAS	CONTRAPARTIDA OTRAS	TOTAL PRESUPUESTO	EJECUCION DEL PERIODO	ACUMULADO EJECUTADO	SALDO POR EJECUTAR
OTROS: Publicaciones							
Publicaciones	2,000,000.00	2,000,000.00	0.00	4,000,000.00	5,460,000.00	5,641,431.00	-1,641,431.00
<b>TOTAL</b>	2,000,000.00	2,000,000.00	0.00	4,000,000.00	5,460,000.00	5,641,431.00	-1,641,431.00

RUBROS	PRESUPUESTO IDEP	CONTRAPARTIDA COLCIENCIAS	CONTRAPARTIDA OTRAS	TOTAL PRESUPUESTO	EJECUCION DEL PERIODO	ACUMULADO EJECUTADO	SALDO POR EJECUTAR
OTROS: Financieros							
Financieros	0.00	0.00	386,343.15	386,343.15	4,350.00	229,387.58	156,955.57
<b>TOTAL</b>	0.00	0.00	386,343.15	386,343.15	4,350.00	229,387.58	156,955.57

RUBROS	PRESUPUESTO IDEP	CONTRAPARTIDA COLCIENCIAS	CONTRAPARTIDA OTRAS	TOTAL PRESUPUESTO	EJECUCION DEL PERIODO	ACUMULADO EJECUTADO	SALDO POR EJECUTAR
OTROS: Varios	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
<b>TOTAL</b>	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

RUBROS	PRESUPUESTO IDEP	CONTRAPARTIDA COLCIENCIAS	CONTRAPARTIDA OTRAS	TOTAL PRESUPUESTO	EJECUCION DEL PERIODO	ACUMULADO EJECUTADO	SALDO POR EJECUTAR
<b>GRAN TOTAL GASTOS DETALLADOS</b>	48,511,977.00	22,160,000.00	2,686,343.15	73,358,320.15	15,412,383.00	74,306,483.80	-948,163.65

  
**OLGA LUCIA LEON**  
 c.c. 51.577.649 de Bogotá

  
**DORA INES CALDERON**  
 c.c. 51.694.974 de Bogotá