CORPORACIÓN ESCUELA PEDAGÓGICA EXPERIMENTAL

Informe Final

SISTEMATIZACIÓN DE UNA EXPERIENCIA DE MATEMÁTICAS CONTEMPORÁNEAS EN EL AULA
(Convenio IDEP 051 - 1996)

INVESTIGADOR: *Ricardo Castañeda Tinoco*
ASESOR: *Dino de J. Segura Robayo.*

Santafé de Bogotá, Julio 22 de 1997

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

En los últimos años las matemáticas han tenido grandes adelantos que han cambiado algunos paradigmas que parecían inamobibles. Uno de estos grandes cambios se propició en el seno mismo de la matemática, la lógica, en donde el concepto de *completitud* (la posibilidad de demostrar toda proposición, con los axiomas existentes en el sistema considerado), se vino a tierra con la obra del lógico Kurt Godel.

Pero si esto pasó en la lógica, otras disciplinas de la matemática no se salvaron de este fenómeno. Algunos cambios se presentaron también en teoria de conjuntos, sistemas dinámicos, y geometría. Además, la idea de demostración espina dorsal de la matemática, se comenzó ha replantear con la *demostración* del teorema de los cuatro colores, y con el uso del ordenador para realizar laboratorios matemáticos.

Las ideas de predicción y de causalidad tomaron un nuevo giro con el estudio de fenómenos como la ecuación logística (ecuación de Verhultz); además, el estudio de dinámicas aparentemente sencillas como la interacción gravitacional de tres cuerpos, (el problema de los tres cuerpos) efectuado por Poincare, hizo que se reformulara la concepción laplaciana de un universo completamente predecible, y que se creara una rama nueva de las matemáticas denominada *Dinámica Caótica*, que en la actualidad permite enfrentar muchos problemas como los fluidos, modelos de renormalización, etc., con herramientas más reales.

Otro nuevo concepto generado en los últimos años y que ha permitido explicar fenómenos como la *percolación* es el de *fractal*. Término acuñado por el matemático Benoit Mandelbrot para denotar figuras geométricas que tienen la propiedad de tener una dimensión fraccionaria, además de ser autosemejantes en pequeña escala. Aunque las ideas fueron establecidas en el siglo XIX por el matemático francés Gaston Julia, el surgimiento de nuevas tecnologías propició su desarrollo y una mejor comprensión del concepto que está detrás de esta nueva geometría (*dimensión fractal*).

Sin embargo, la presentación en algunos textos de secundaria de estos cambios que se han presentado en las matemáticas, no pasa de ser, en la mayoria de los casos, una nota curiosa. Si esto es así en los textos, en la enseñanza secudaria son muy pocas las personas que se la juegan por explotar muchas de las ideas que subyacen en este hermoso universo, algunas veces por desconocimiento o por considerarlas demasiado complejas para ser abordadas por los alumnos y, en muchos casos, por los docentes.

Sin embargo, se pretende mostrar que detrás de estos conceptos se esconde un universo de bellas figuras y resultados fascinantes, que pueden permitir a los estudiantes trabajar problemas relacionados con ellos, en un ambiente de creatividad y entusiasmo de manera que su quehacer se constituya en verdaderas vivencias de conocimiento.

El proyecto *Sistematización de una experiencia de matemáticas contemporáneas en el aula,* plantea una forma de hacer matemáticas con los alumnos desde la contemporaneidad, donde el azar, el caos determinista, la iteración, los sistemas dinámicos, los fractales, las teselaciones y la utlización del ordenador son el centro de la actividad. Además, pretende mostrar posibles actividades que permitan familiarizar a maestros y alumnos en estos nuevos tópicos, así como identificar los logros y dificultades que se puedan dar en el desarrollo de la actividad.

PRIMERA PARTE

La enseñanza de las matemáticas en la concepción clásica

Se reconoce que las matemáticas como objeto de enseñanza y de aprendizaje, han sido un problema para maestros y alumnos. Lo que se *enseña* y lo que se *aprende* no suele coincidir. Pese a que esto es una verdad reconocida, suele ocurrir en mayor proporción con las metodologías clásicas que se utilizan para la enseñanza de las matemáticas. Estas metodologías pueden ser caracterizadas, así:

Con respecto al objeto de estudio

- Tanto el maestro como el alumno se posicionan en actitud pasiva frente a una disciplina ya constituida.
  Para el maestro se trata de exponer los conocimientos ya hechos, para el alumno se trata de memorizar (¿aprender?) lo que el maestro expone.
- Las matemáticas se confunden con algoritmos. En este sentido, se trata de aprender a aplicarlos: mientras los niños pequeños repiten las tablas de multiplicar, los adolescentes realizan derivadas o manipulan las ecuaciones de las cónicas.

Con respecto al maestro:

- Se asume como quien ya sabe lo que enseña, de manera que la actividad de enseñanza no la reconoce como una instancia de aprendizaje.

Con respecto al alumno:

- La repetición y la actividad en clase, por lo genral, están muy distantes de sus intereses y curiosidades, hasta tal punto que las matemáticas mismas solo se consideran como un obstáculo para la vida escolar.

Estas características podrían explicar no sólo por qué las matemáticas son difíciles, sino también por qué son *indeseables*, ya que la clase vista así no permite al alumno maravillarse, situación que es fuente de los procesos de aprendizaje. En otras palabras, no existe ocasión para la búsqueda entendida como un juego de la imaginación y la creatividad[1].

---

[1] Davis/Hersh: *Experiencia matemática*, Editorial Labor, 1993.

Con estas formas de trabajo el estudiante incorpora una serie de saberes inconexos, que aprende por el simple hecho de ser un *prerrequisito* para ingresar a otros grados de educación, y no como una construcción autónoma.

Además, los procedimientos y algoritmos se le presentan a los alumnos totalmente desconectados. Todo parece indicar que la enseñanza de esta clase de matemáticas lo que pretende es *adiestrar* al estudiante para ingresar a la universidad o, en el peor de los casos, responder las pruebas del Icfes del Estado.

A nuestro juicio, la consolidación del pensamiento matemático requiere de mucho más que el simple manejo de algoritmos, se necesita de una conexión de diferentes conocimientos: información, experiencia, percepción, creatividad, búsqueda etc.

Además, esta metodología no muestra a los estudiantes el valor intelectual de las matemáticas, no les ofrece ninguna motivación para su estudio y lo que es más grave, no le da un significado.

Se puede resumir este tipo tradicional de enseñanza de las matemáticas como "la asimilación por los alumnos de los contenidos conceptuales transmitidos por el profesor o los textos y su capacidad para reproducirlos" este es el objetivo primordial de la enseñanza por transmisión de conocimientos elaborados.

Si bien con este tipo de enseñanza los estudiantes pueden enfrentarse a un examen corriente y contestar correctamente algunas de las preguntas, muestran un alto grado de incomprensión en muchos de los conceptos y formas de razonamiento fundamentales. Todas estas dificultades en la enseñanza de las matemáticas, que de ninguna manera son nuevas, han hecho que aparezcan propuestas alternativas.

La enseñanza de las matemáticas. Propuestas alternativas

Las nuevas metodologías tratan de remediar muchas de las deficiencias de las metodologías clásicas. Las propuestas alternativas le dan gran importancia al desarrollo de las habilidades en el pensamiento matemático. Este razonamiento matemático involucra una interacción entre la exploración y la intuición. El pensamiento matemático es pertinente cualquiera que sean los contenidos al cual se aplica; puesto que éste no sólo se suscribe a problemas de naturaleza matemática, aunque éstos puedan revelar de manera más reconocible sus características.

Los procesos de pensamiento matemático sobresalen cuando se encuentra un elemento (juego, paradoja, etc) que produce suficiente sorpresa o curiosidad y que impulsa al estudiante a efectuar una exploración y búsqueda por medio de la manipulación reflexiva, operativa, simbólica, etc. Durante este proceso de exploración es posible que surjan diferencias entre lo que se esperaba de la manipulación y lo que resulta en realidad. Esto puede provocar una tensión que origine un proceso de búsqueda de regularidades, generalidades etc., hasta lograr darle un significado a lo que sucede (ya sea por medio de gráficas, símbolos etc).

El pensamiento matemático no es un fin en sí mismo, es un proceso que puede ayudar a aumentar el entendimiento del mundo. El desarrollo de esta clase de pensamiento no depende sólo de encontrar respuestas a problemas, también requiere efectuar una reflexión sobre ideas claves, de tomar conciencia que el pensamiento matemático conecta diferentes áreas del conocimiento, información, experiencia, percepción y sensaciones. El desarrollo del pensamiento matemático permite descubrir la existencia de procesos para afrontar diversas problemáticas. Sin embargo, los solos procesos no son suficientes y es necesario ser conscientes de los contenidos matemáticos. Estos dos elementos unidos permiten el desarrollo del pensamiento matemático. El razonamiento matemático hace una contribución a la consciencia, puesto que permite estructurarla, le da una dirección y, lo más importante, le da una potencia creativa y reflexiva. En términos generales, se podría decir que el pensamiento matemático es un proceso dinámico que aumenta la complejidad de las ideas que se pueden manejar. Algunos procedimientos utilizados para lograr esto, son: Particularización, generalización, conjetura y convencimiento.

En el desarrollo del pensamiento matemático se tienen en cuenta los siguientes factores principales:

1. La competencia en el uso de los procesos de investigación matemática (particularizar, generalizar, conjeturar, convencer).
2. Confianza en el dominio de los estados emocionales y psicológicos para sacar ventaja de ellos.
3. Conocimiento del contenido de las matemáticas y si es necesario, del área en que se aplica.

Para mejorar el pensamiento matemático se necesita unir la práctica y la reflexión, y para lograrlo se requiere de tiempo; la formulación de preguntas y respuestas rápidas de la clase tradicional, son en este sentido la antítesis para el desarrollo del pensamiento matemático.

En general, se podrían caracterizar esta nuevas metodologías, así:

- La clase de matemáticas debe tener sentido para el alumno.
- El juego se convierte en el centro de la actividad, pero en la resolución del juego, el estudiante aprende lo que *debería aprender curricularmente*.
- Se aprende con gusto.
- El centro de interés no es el algoritmo sino el pensamiento matemático y la búsqueda heurística.
- Se busca eliminar la pasividad del alumno y del maestro, darle sentido a la actividad,

eliminar el trabajo individual y fomentar el trabajo colectivo.

- Las actividades permiten la enseñanza de la matemática tradicional.
- Rechazo a la autoridad como fuente de conocimiento.

En su artículo *Hacer matemáticas*, Francisco Herrán (1992)[2], comenta que es necesario fomentar el pensamiento productivo ya que este crea nuevas respuestas y utiliza nuevas organizaciones. El pensamiento productivo es más difícil de enseñar y requiere un mayor tiempo y mejores relaciones dinámicas de la enseñanza.

La clase de matemáticas puede lograr mejores resultados en la medida en que logre producir alguna satisfacción en los estudiantes, bien sea por el conocimeinto (el simple hecho de hacer matemáticas) o por el uso que esta pueda tener. Esto se puede lograr al hacer que los estudiantes adquieran una confianza en su potencial y, sobre todo, lo más importante, es comenzar cuando se enfrenta una situación problemática.

Algunos factores que pueden ayudar a los estudiantes a lograr mejores resultados en el trabajo de matemáticas son:

1. Fomentar el interés en el trabajo que se hace.
2. Interés por el propio progreso.
3. Significación de la tarea.
4. Atención reflexiva.
5. Ausencia de emoción no pertinente.
6. Perder el miedo al ridículo.

Aunque todo esto es pertinente al proponer diferentes actividades de trabajo a los estudiantes, la mayoría de las actividades producen rompimientos en la clase. Estos rompimientos responden en la mayoría de los casos, a actitudes de lo alumnos ante la problemática propuesta.
Esto puede cambiar si se fomenta una actitud diferente en la resolución de problemas.
Para ver como se desarrolla esta forma de trabajo se muestra un ejemplo tomado de Francisco Herrán.

Alumnos de 8o grado
Trabajo de investigación: 44 es un número feliz porque:

$$44 \Rightarrow 4^2 + 4^2 = 32 \Rightarrow 3^2 + 2^2 = 13 \Rightarrow 1^2 + 3^2 = 10 \Rightarrow 1^2 + 0^2 = 1$$

Investigar sobre los números felices.

---

[2] Francisco Herrán, "Hacer matemáticas" *Aspectos sociales y culturales de la educación matemáticas.en* Rev. Planteamientos en educucación, Grupo Cero, Valencia, España , Febrero, 1992.

Este trabajo se desarrolló en clase sin límites de tiempo y redactando los resultados de la investigación.

En este punto, el autor recalca el hecho de que aunque el enunciado del problema es ambiguo: no se dice de cuántas cifras es el número y no se da una definición precisa de número feliz. Hay que revisar el hecho sobre la conveniencia de eliminar la ambigüedad en la presentación de un problema. "La polivalencia es una característica, por lo general, consustancial a las situaciones ricas en contenidos. Es del estudio de estas situaciones de donde debe venir la supresión de la ambigüedad si ella es posible, precisando las condiciones iniciales y llevando a consideración las diversas opciones".[3] A continuación, se muestran algunos resultados de los estudiantes:

Cosme:

1. Todas las potencias de 10 son números felices $1582 \Rightarrow 1^2 + 5^2 + 8^2 +$

2. Si se tiene un número feliz de dos cifras y se permuta, se obtiene un número feliz.

Emilio:

Los números felices de 1 a 100 son:

1, 7, 10, 13, 19, 23, 28, 31, 44, 49, 68, 70, 79, 82, 86, 91, 94, 100.

Todos los demás van dando sumas parciales que se repiten constantemente y siempre acaban en 4.

Por ejemplo:

$$15 = 1^2 + 5^2 = 26 \Rightarrow 2^2 + 6^2 = 40 \Rightarrow 4^2 = 16 \Rightarrow 1^2 + 6^2 = 37 \Rightarrow 3^2 + 7^2 = 58$$
$$\Rightarrow 5^2 + 8^2 = 89 \Rightarrow 8^2 + 9^2 = 145 \Rightarrow 1^2 + 4^2 + 5^2 = 42 \Rightarrow 4^2 + 2^2 = 20 \Rightarrow 2^2 = 4$$

$$66 \Rightarrow 6^2 + 6^2 = 72 \Rightarrow 7^2 + 2^2 = 53 \Rightarrow 5^2 + 3^2 = 34 \Rightarrow 3^2 + 4^2 = 25 \Rightarrow 2^2 + 5^2 = 29$$
$$\Rightarrow 2^2 + 9^2 = 85 \Rightarrow 8^2 + 5^2 = 89 \Rightarrow 8^2 + 9^2 = 145 \Rightarrow 1^2 + 4^2 + 5^2 = 42 \Rightarrow 4^2 + 2^2 = 20$$
$$\Rightarrow 2^2 + 0^2 = 4$$

Por tanto, se puede decir que si en un número cualquiera se efectúan las primeras sumas y no da alguno de los números felices de 1..100, es que no es feliz.

---
[3] *Ibid*

Por ejemplo

$1582 \Rightarrow 1^2 + 5^2 + 8^2 + 2^2 = 94$ que es feliz ,luego 1582 es feliz.

Para terminar esta forma de trabajo en matemáticas a través de problemas se citan las palabras finales del artículo :"Yo no veo que se pueda desplegar hacia el éxito más que desde dos puntos de partida en que se apoyan mutuamente :

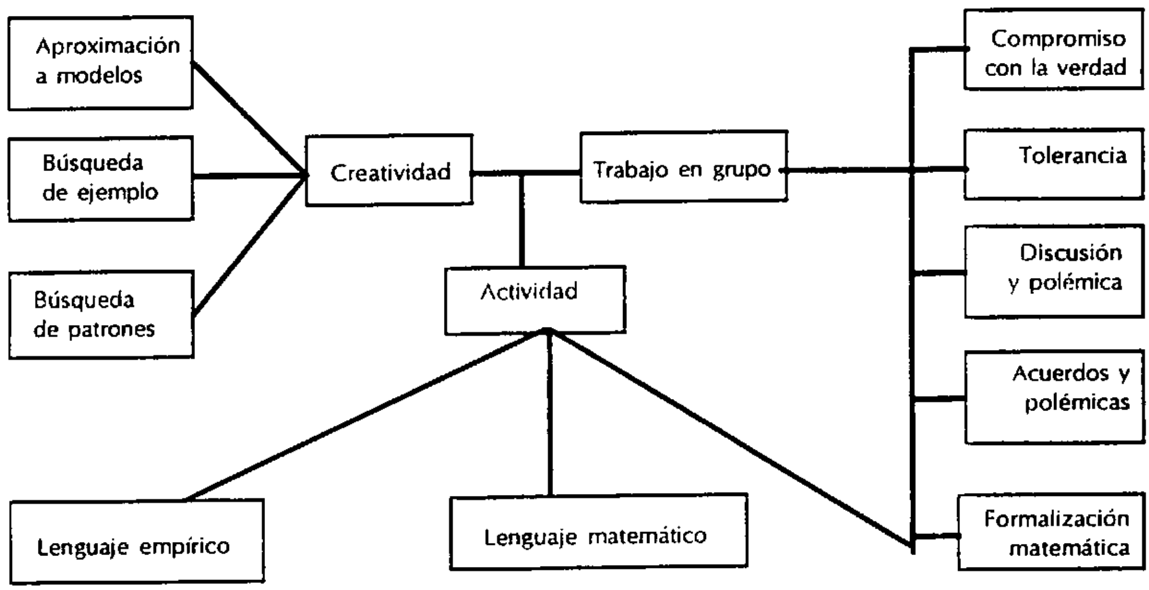
1. Las matemáticas son un modo de conocer y no un modo de observar lo que los otros conocen.
2. Lo que puede haber estimulante en la labor de un profesor proviene menos de una pasión por enseñar que su pasión por aprender, menos de su habilidad para impartir conocimientos que de su capacidad para subordinar éstos a la actividad cognoscitiva de sus alumnos".

En este último punto, la *Escuela Pedagógica Experimental (E.P.E)* afirma que la escuela tradicional se afianza en esta imagen de conocimiento que mantiene la autoridad como fuente de saber y que unida a ella existe un conjunto de valores y actitudes que obstaculizan la formación del espíritu científico.[4] Como afirma el mismo autor, esta imagen de conocimiento trae consigo otras consecuencias: la pasividad del estudiante en los procesos cognoscitivos (el conocimiento originado en la autoridad se caracteriza por la atención y la repetición de verdades). Con esta clase de conocimiento es poco probable que el alumno entre a considerar situaciones de búsqueda e invención. Sobre este mismo asunto, *Bachelard* afirma " Para un espíritu científico todo conocimiento es una respuesta a una pregunta. Si no ha habido pregunta no puede haber conocimiento científico. Nada viene solo, nada es dado. Todo es construido". [5]

Otro de los objetivos esenciales trabajados en la *E.P.E*, en relación con las matemáticas, es la construcción del sentido; o sea, que lo que se enseñe esté cargado de significado, que tenga sentido para el alumno. Al respecto, *G. Brousseau* afirma: "El sentido de un conocimiento matemático se define no sólo por la colección de situaciones donde este conocimiento es realizado como una teoría matemática; no sólo por la colección de situaciones donde el sujeto lo ha encontrado como medio de solución, sino también por el conjunto de concepciones que rechaza, de errores que evita, de economías que procura, de formulaciones que retoma, etc."

[4] Dino de J. Segura R., "Busqueda de una alternativa pedagógica orientada hacia la construcción de una cultura científica" 1991
[5] Gaston Bachelard, "La formación del espíritu científico"

En el siguiente diagrama se pueden ver las características de las formas de trabajo que se hacen en el aula.



Esta forma de trabajar en clase intenta confrontar la idea de que *la matemática es un cúmulo arbitrario de sutilezas que muchas veces no sirve para nada.*

Estas formas nuevas de trabajo que se implantó en la escuela (E.P.E.), tratan de cambiar el trabajo axiomático, algorítmico y memoristico en la enseñanza de las matemáticas. Auque muchas veces el trabajo memorístico deslumbre a los estudiantes, éste carece de sentido y de significado para ellos, porque muchas de las definiciones y algoritmos que manejan no tienen apropiadamente construido el universo platónico de los objetos matemáticos. Al no reconocer la existencia de este universo, no puede reconocer la existencia de los objetos que lo componen y, menos aún, la manera con la cual es posible identificar un objeto y diferenciar otros[6].

Para lograr un cambio de actitud de los estudiantes ante las matemáticas, hay que mostrarles que son ellas, precisamente, las que han permitido tener un dominio sobre la naturaleza. Que no sólo en la ciencia y en la técnica tienen importancia, sino también en el arte, las ciencias sociales, música, etc. Enseñar las matemáticas sin ninguna relación con la realidad es peligroso. En palabras de Morris Kline: " Se requiere un plan de matemáticas culturalmente amplio

[6] Pedro Gómez, "Profesor no entiendo", Relexiones alrededor de una experiencia en docencia de las matemáticas Pag 53.

que buscaría su íntima unión con las principales corrientes de pensamiento y de la herencia cultural. Esto podría proporcionar una motivación, otras serían aplicaciones y otras suministrarían lecturas interesantes y material para las discusiones que darían variedad y vitalidad al contenido de los cursos de matemáticas[7].

La mayoría de estas nuevas alternativas utiliza todos los elementos mencionados anteriormente en la enseñanza de la matemática tradicional: aritmética, geometría, álgebra, trigonometría, cálculo.

Otro enfoque sobre la enseñanza de las matemáticas que se puede mencionar es el constructivismo, que se basa en la psicología genética de Piaget.

Estos estudios demarcaron el estudio de la didáctica de las matemáticas y enfocaron su atención en la construcción de conceptos matemáticos como el principal objeto de estudio. Algunos de estos trabajos en esta línea de investigación que se pueden citar, son: la construcción del concepto de número, la noción de variable, la noción de función etc. Esta corriente constructivista abarca la psicología de las matemáticas, la didáctica y los diseños curriculares. Se podría resumir la posición de este enfoque como "la ventaja de renunciar a una visión eficientista de la enseñanza y, en su lugar, proporcionar la evolución de los sujetos hacia la construcción de los conceptos"[8].

Uno de los principales problemas de este enfoque conceptualista, es la dificultad para hacer coincidir los *tiempos didácticos* con los *tiempos escolares*.

En el campo de la investigación se han elaborado muchos trabajos teóricos clásicos, entre los cuales se pueden mencionar: Kieran (1988), sobre la construcción del número racional; Kuchemannn y Booth, sobre la interpretación de los símbolos literales por parte de los alumnos; Van Hiele, sobre el desarrollo de las nociones geométricas (1987).

Otras formas de investigación orientadas a uniformar la enseñanza de las matemáticas unen elementos de epistemología genética y de la historia de los conceptos matemáticos. Estas investigaciones pretenden identificar las dificultades y obstáculos didácticos en la construcción de conceptos.

A principios de 1980, muchos investigadores adoptaron otra posición a saber: estudiar los aspectos semánticos y sintácticos de la matemática, con el fin de explicar las observaciones que se habían realizado entre los usos e interpretaciónes de los símbolos matemáticos.

---

[7] Morris Kline. "El fracaso de la matemática moderna" ¿Por qué Juanito no sabe sumar?
[8] Rojana T., "La matemática escolar como lenguaje" una visión conceptual, en Rev. Enseñanza de las ciencas, 1994 (12) (1).

"Con este giro, los sujetos son vistos como usuarios potenciales del lenguaje matemático, y la enseñanza como un medio que debe propiciar el aprendizaje de dicho lenguaje. Esta nueva tendencia relaciona el aprendizaje de las metemáticas con los procesos de adquisición y usos de dicho lenguaje, más que con su construcción concepto a concepto, conduce a reformulaciones importantes acerca de los objetos de estudio y de los fenómenos que hay que observar en el campo de la investigación"[9].

Uno de los trabajos representativos en esta línea de investigación es la perspectiva que adopta Vergnaud (1987): "El concocimiento es activamente construido por el sujeto organizador quien, en un proceso adaptativo e interactivo con su medio ambiente organiza su mundo de experiencias".

Esta forma de trabajo que concibe la matemática como un lenguaje que va a ser enseñado, puede afectar el qué y el cómo enseñar matemáticas.

Para terminar esta pequeña incursión por diferentes propuestas en la enseñanza de las matemáticas, se hace una referencia breve al trabajo de George Pólya e Irem Lakatos.

Polya fue un brillante matemático que realizó aportes fundamentales en muchos campos de las matemáticas y se convenció de que existe una técnica del descubrimiento. Creyó con firmeza que la capacidad para descubrir y la capacidad de invención, puede ser reforzada mediante una enseñanza hábil, que ponga al estudiante sobre aviso de los principios en que se funda el descubrimiento y que le dé la oportunidad de practicar y dominar estos principios.

Polya formuló estos principios del descubrimiento y la invención mediante su experiencia. Estos principios aparecieron por primera vez en su libro, *¿Comó resolverlo?* Se citan algunos:

- Comprender el problema.
- Averiguar qué conexiones existen entre los datos y las incógnitas. De no ser posible hallar conexiones inmediatas, puede ser necesario examinar problemas auxiliares. Al final, se debe obtener un plan de resolución.
- Llevar a efecto el plan.
- Examinar la solución obtenida.

Estas ideas se descomponen en otras:

- Si no es posible resolver el problema, buscar un problema similar que si pueda resolver.
- Dar el problema por resuelto y descansar.
- Tratar de avanzar.

---

[9] *Ibid*

- Restringir las condiciones.
- Buscar un contra ejemplo.
- Tantear.
- Dividir y vencer.
- Cambiar el enfoque conceptual.

Algunos investigadores han desarrollado las ideas de Polya. Entre ellos, es bueno nombrar a Lakatos, quien desarrolla un ejemplo tomando como participantes a los humanos y a un profesor y sus alumnos. En lugar de presentar un sistema construido a través de primeros principios, ofrece un choque de opiniones, razonamientos y refutaciones. En lugar de una matemática rígida y anquilosada, presenta el desarrollo de una idea matemática a partir de un problema y una conjetura, al tiempo que ante nuestros ojos va adquiriendo forma una teoría; el debate y el desacuerdo va dando luz a la certeza y la certeza a una duda renovada.

En su libro, *Pruebas y refutaciones,* Lakatos aplica su análisis epistemológico no a las matemáticas formalizadas, sino a las informales, aquellas matemáticas que están en proceso de crecimiento y de descubrimiento. Lakatos afirma que las matemáticas informales son una ciencia que se desarrolla mediante un proceso de crítica y un sucesivo refinamiento de las teorías y del avance de las teorías nuevas que compiten entre sí.

Formas alternativas en la enseñanza de las matemáticas enriquecidas con las matemáticas contemporáneas

Delineamiento del proyecto

Si bien es cierto que las formas alternativas mencionadas anteriormente han contribuido notablemente en la enseñanza de las matemáticas, en la actualidad se sigue enseñando en la escuela aritmética de hace 3000 años, álgebra de hace 1000 años y el cálculo de hace 500 años. Las matemáticas contemporáneas son presentadas (!cuando se presentan!, como apéndices al margen, curiosidades sin ningún valor y, en muchos casos, sin ninguna relación con la matemática tradicional). Muchas veces, estas matemáticas no se presentan por desconocimiento o porque se consideran demasiado complejas para estudiarse en secundaria. Sin embargo, la realidad es que en ellas se esconde todo un universo de bellas figuras y una serie de conceptos e ideas que pueden ayudar al estudiante a estimular las *vivencias de conocimiento en matemáticas* . En este punto es donde se ubica el proyecto por desarrollar, como una alternativa de hacer matemáticas desde la contemporaneidad, en donde el azar, el caos, la iteración, los sistemas dinámicos, los fractales, las teselaciones, la programación y utilización de los ordenadores se convierten en el centro de actividad. Además, las matemáticas tradicionales aparecen como casos particulares, el manejo de algoritmos es una circunstancia que se da en el desarrollo de la optimización de algunos procesos. Lo importante en estas formas de trabajo es llegar a entender conceptos, algunos de vital importancia en los nuevos desarrollos de la ciencia y la tecnología. Por ejemplo, el concepto de una matemática exacta no sigue siendo válida en el mismo sentido, el concepto de predicción y de causalidad han dado un giro inesperado con las nuevas matemáticas . Una pequeña variación en una iteración puede generar resultados inesperados (ver por ejemplo el fecto Mariposa de Lorentz).

El proyecto trata de responder a la necesidad de encontrar nuevas formas de adecuación en la enseñanza de las matemáticas que se adecúe a la evolución y a los nuevos paradigmas originados en esta disciplina. Uno de estos nuevos paradigmas gira en torno al concepto de demostración matemática. Los ordenadores están cambiando la utilización de algoritmos. Un ejemplo es el de *la conjetura de los cuatro colores* que afirma que cualquier mapa planar se puede colorear con cuatro colores, de manera que dos regiones contiguas tengan colores diferentes. Esta demostración fue desarrollada en 1976 por Kenneth Apple y Wolfgan Haken. La descripción que hacen estos dos investigadores resulta interesante porque revela cómo su interacción con el programa de ordenador, les enseñó de forma extraña asuntos sobre el problema que no habían previsto. El ordenador asumió el papel de un colaborador casi humano, más que el de una simple calculadora; según sus palabras fue una extensión de su intuición que les permitió tomar más casos de los que normalmente ellos podrían examinar. "El programa empezó a sorprendernos. Al principio, verificábamos sus argumentos a mano de modo que siempre pudiéramos predecir el curso que seguiría en cualquier situación, pero ahora empezó de repente a actuar como una máquina de jugar ajedrez. Elaboraba estrategias combinadas basadas en todos los *trucos* que se le habían enseñado y, con frecuencia, estos enfoques eran más inteligentes de los que nosotros hubiésemos intentado. De este modo, empezó a enseñarnos cosas sobre el modo de proceder que nosotros nunca habíamos esperado. En cierto sentido, había sobrepasado a sus creadores en ciertos aspectos intelectuales como en las partes mecánicas del cálculo". Tymoczko afirma al respecto: "Si aceptamos el teorema de los cuatro colores como un teorema, entonces estamos obligados a cambiar el sentido de *teorema*, o más exactamente, a cambiar el sentido del concepto subyacente de *demostración*"[10].

La enseñanza de las matemáticas debe responder a los cambios que se generan en ella. Necesita de cambios drásticos, de nuevas ideas y concepciones que respondan a los diferentes avances tecnológicos. La nueva enseñanza de las matemáticas debe dejar los ejercicios con papel y lápiz y en el estudio de las matemáticas contemporáneas utilizar mas tiempo la ayuda de los ordenadores; esta simbiosis puede facilitar el desarrollo de significado de muchos conceptos.

La sencillez de esta se encuentra en muchas de las ideas de las matemáticas contemporáneas: sistemas dinámicos, fractales, caos determinista, teselaciones etc., permite que el estudiante efectúe una "aventura matemática" por estas nuevas temáticas que son importantes en matemáticas, física, economía , biología, climatología, etc.

El proyecto pretende es que el estudiante se adentre en este nuevo universo y lo pueda acometer con elementos de uso común: hojas de papel, lápiz, regla, calculadora gratificadora o un ordenador sencillo. Esto es una ventaja para el investigador y para los alumnos y contradice tajantemente lo que afirman algunos *especialistas* quienes aseguran que estas temáticas, por su complejidad, requieren de una complicada estructura de conocimientos anterior de acuerdo con la imagen de secuencialidad que caracteriza a la matemática tradicional.

El concepto de matemáticas experimentales empieza a tomar un nuevo y aventurado inmterés. Los ordenadores se utilizan para explorar el reino de la verdad matemática en forma sistemáticay al azar.

Con la existencia de programas de manipulación simbólica como *Derive, Mathematica, Matcad, Matlab*, etc, es posible adelantar investigaciones en matemáticas complejas.

Hay quienes temen que el uso incontrolado de las matemáticas experimentales dé lugar, simplemente, a la eventual acumulación de descubrimientos peculiares que no encajarían para crear ninguna forma coherente de conocimiento general. Pero lo que es peor, que podria dar

---

[10] El sueño de Descartes, "El mundo según la matemática", Philip J. Davis, Editorial Labor, 1987.

lugar a un cuerpo de conocimiento poco fiable. No obstante, lo cierto es que este nuevo enfoque de las matemáticas y la simulación de estructuras matemáticas, ha permitido avances significativos en la ciencia moderna.

La experiencia en laEscuela Experimental Pedagógica, E.P.E, ha mostrado que en una clase de matemáticas es posible estudiar estas nuevas temáticas a partir de situaciones problemáticas pero actuales, de las cuales se pueden citar las siguientes:

1. Teselaciones (recubrimiento del plano)
2. Sistemas dinámicos (iteración de funciones de variable real o compleja).
   Fractales (configuraciones autosemejantes irregulares, de dimensión fraccionaria).
3. Laboratorios matemáticos (búsqueda de patrones, visualización de conceptos matemáticos, etc., con ayuda del ordenador.

En el tratamiento de estos temas se ha ilustrado a la vez la posibilidad de comprensión de los alumnos. Pese a lo sencillo del trabajo y de la forma agradable con que se este se realiza por los alumnos, se están trabajando muchos procedimientos, formas de mirar el mundo e ideas matemáticas que presentarían muchos problemas al ser desarrollados con tiza y tablero. El estudio de estas temáticas induce al estudiante a formularse otras preguntas que tal vez no se presentan en el estudio de la matemáticas tradicionales; por ejemplo, ¿el azar tiene su razón?, o de hecho, ¿qué es el azar?, ¿de dónde surge?, ¿hasta qué punto el futuro es predecible o imprevisible? En particular, enfrentar esta clase de preguntas es aproximarse a la moderna teoría del caos. De otra parte, el estudio de estas temáticas puede implicar que la incertidumbre no sólo se da en el mundo cuántico, sino también en los sistemas clásicos. Desde este punto de vista, el azar tiene sus razones y por paradójico que parezca también sus leyes. Lograr que los estudiantes se aproximen al estudio del caos, ya es una ganancia.

SEGUNDA PARTE

DESARROLLO DEL PROYECTO

Generalidades

Los diferentes laboratorios y talleres matemáticos que se presentan más adelante se realizaron en la *Escuela Pedágogica Experimental (E.P.E)*, en los años 1994 -1996, en los niveles 8 a 11, en grupos de 24 alumnos, de ambos sexos, con edades entre los 15 y 18 años. La E.P.E es un colegio privado ubicado en el kilometro 4.5 vía La Calera.

Desde sus inicios la E.P.E. ha privilegiado lo artístico en las actividades escolares con una intensidad de siete horas. "Con respecto a ciencias y matemáticas, el trabajo se ha centrado principalmente en la observación detenida de las formas de explicación de los niños y sus procesos de construcción"[10].La escuela pretende, entre otras cosas, construir un ambiente escolar donde lo importante sea la participación colectiva en la construcción de un conocimiento individual; donde el maestro no sea un *transmisor de conocimiento*, sino un *generador de conocimientos* y para lograr esto el maestro debe ser capaz de propiciar un ambiente adecuado que sirva en la no fácil tarea de construcción de conocimiento colectivo e individual. "Pero, además, es necesario definir las exigencias que hay que tener en cuenta para que una clase cumpla su papel como instancia propiciadora del cambio conceptual"[11]. Por esta razón, para lograr en una clase la apropiación de los problemas por parte de los alumnos es necesario tener en cuenta los siguientes aspectos: ¿qué sabe el estudiante?, ¿qué quiere saber?, ¿qué puede saber el estudiante? En síntesis debe existir un equilibrio entre los intereses y las necesidades de los alumnos: "La conveniencia de convertir las necesidades en intereses, la urgencia (metodológica) por parte del maestro de llegar a las necesidades a través de los intereses y finalmente, a los papeles que juegan la motivación individual y el contagio de intereses en la clase"[12].

En matemáticas, el trabajo se caracteriza por el planteamiento de actividades con el objeto de solucionar problemas abiertos: juegos con dameros y fichas (juegos de estrategias), laboratorios de matemáticas, construcción de teselaciones, problemas de lógica, realización de progra-

---

[11]Segura R. Dino, "Búsqueda de una alternativa pedagógica orientada hacia la construcción de una cultura científica" 1991.
[12]Segura R.Dino, "Actividades totalidad abierta, informe final a Colciencias".
[13]*Ibid.*

mas de ordenador que permitan solucionar un problema o una hipótesis matemática etc., que induzcan al estudiante a buscar soluciones en grupo o a sustentar hipótesis de trabajo. Estas formas de trabajo comprometen al estudiante en la búsqueda de conocimiento.

De estas actividades se desprenden muchas preguntas que surgen en forma colectiva y se tratan de responder sobre la marcha en la solución del problema. Esta forma de trabajo, permite al estudiante efectuar una cobertura temática (con algoritmos) que de todas formas no se obvia, sino que se trata de una manera diferente, haciendo énfasis en la elaboración de modelos matemáticos.

En lo que sigue, se muestran algunas actividades realizadas y los comentarios que a nuestro juicio pueden ser importantes para los maestros que decidan enriquecer su clase con elementos de las matemáticas contemporáneas.

La exposición está organizada en la siguiente forma:

1. Fractales y azar
2. Sistemas dinámicos, caos e iteración de funciones.
3. Teselaciones

Cada uno de estos temas se ilustra con una exposición teórica y el desarrollo de varias actividades.

En cada una de las actividades se tiene en cuenta:

a. Informe general del contexto y necesidades de la actividad.
b. Desarrollo de la actividad, dudas, problemas que surjan etc.
c. Comentarios pedagógicos, ideas y recomendaciones.

Fractales y azar

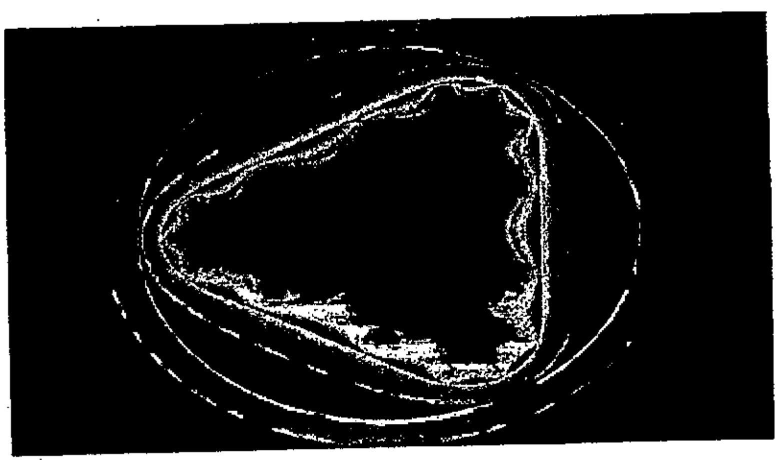
Las estructuras *fractales* son el resultado de una unión entre las matemáticas modernas con los ordenadores y, sin embargo, son un fenómeno tan cercano a nosotros que se pueden encontrar en la rama de un pino, en los poros de la piel, etc. Los *fractales* son bellas estructuras de una alta complejidad matemática.

El término *fractal* fue acuñado por el matemático Benoit Mandelbrot en 1975, estos objetos se obtienen mediante la iteración de una función de variable compleja que tiene la propiedad de la sencillez y la de ser una herramienta que, por su poder creativo, tiene muchas aplicaciones en otras ciencias. La caracteristica fundamental de la geometría fractal consiste en estudiar estructuras geométricas no diferenciales (quebradas) en cualquier escala que se observen, es decir, estudia los aspectos geométricos que son invariantes con el cambio de escala. La simplicidad en la construcción y la complejidad del producto, se puede observar en uno de los fractales típicos con que se comenzó a estudiar estas estructuras, el denominado **Conjunto de Cantor:**

Se toma un segmento y se divide en tres partes iguales. Se elimina la parte central. Con los dos restantes se hace del mismo modo, es decir, se dividen en tres partes... y así infinita veces. *Lo que queda es el Conjunto de Cantor*. Aunque el conjunto de Cantor se genera de una forma sencilla, tiene muchas propiedades sorprendentes.

En 1915, Hausdorff, elabora una teoría fundamental para efectuar una *medida* de estos conjuntos que se conoce como *dimensión de Hausdorff*, no obstante, estos conjuntos ya habían sido estudiados por el matemático francés Gaston Julia. La revolución de los ordenadores ha permitido un avance en su estudio y esto explica el por qué otras teorías muy relacionadas con los fractales como la teoría de la iteración, los sistemas dinámicos, estén experimentando un gran desarrollo. El ordenador por su gran capacidad para efectuar cálculos, y la resolución de los videos han permitido escrudriñar estas estructuras a escalas que hace algunos años parecían imposibles. "El ordenador se va comvirtiendo para el matemático moderno en lo que era el papel y el lápiz para el geómetra clásico"[13]. El ordenador es una potente herramienta que sirve para comprobar teorías y formular hipótesis, e iluminar el camino por recorrer.

Se puede decir que un fractal es un objeto matemático que posee una estructura detallada, independiente de lo cerca o lejos que se observe (ver gráfica). A la pregunta, ¿qué es un fractal?, se puede contestar de diferentes maneras. Lo importante aquí es que los fractales no son abstracciones de un loco matemático, por el contrario, están muy cerca de nosotros. La teoría de los fractales está relacionada con la estructura del universo y con las vibraciones internas del campo subatómico.



[13]Guzmán Miguel, "Estructuras fractales y sus aplicaciones".

Para dar una idea más clara de un fractal ,Mandelbrot, plantea en su libro *The fractal Geometry of Nature*, ¿cuánto mide la costa de Bretaña? Aunque la pregunta parece sencilla, conlleva serios problemas y puede acercarnos a tratar de definir lo que es un fractal.

Supóngase que se va a calcular la longitud de un círculo de radio 1. Como se sabe, la longitud de una círculo es $2\pi r$, como $r=1$ la longitud del círculo es aproximadamente 6.28. Para llegar a este resultado se podría incribir un polígono dentro del círculo e ir subiendo el número de lados hasta que el polígono se vaya acercando al círculo, ver tabla1.

Lados	**Longitud de un lado**	**Circunferencia**
3	1.732	5.20
4	1.414	5.66
16	0.765	6.12
32	0.390	6.24
64	0.196	6.27

Tabla 1

El procedimiento sirve si la curva medida se comporta bien, "es decir, es continua y homogénea".

Ahora, se tratará de aplicar el mismo procedimiento a la pregunta, cuánto mide la costa de Bretaña; para esto, se comienza utilizando ocho reglas de 200 millas. Luego, si se utiliza un instrumento de medida más pequeño la estimación de la costa parece aumentar. El problema está en que la Costa es muy irregular y por esta razón este método no se puede aplicar. *La costa de Bretaña es un fractal.*

Se podría decir entonces que *si la longitud aproximada de una curva se hace arbitrariamente mayor, según disminuye el tamaño del instrumento de medida, entonces la curva se denominará curva fractal.*

Si bien, esta definición se puede aplicar a otras formas, además de curvas, el problema que esta detrás de todo esto es la irregularidad del objeto que se está midiendo.

Como se sabe las líneas y las curvas son unidimensionales, mientras que los planos y las superficies son bidimensionales. Lo maravilloso es que la idea de *dimensión* se puede aplicar de tal forma que estas "curvas" no usuales tengan una dimensión mayor que 1. Se podría decir que *la dimensión fractal de un objeto es la medida de su grado de irregularidad, considerada a todas las* *escalas, y puede ser algo mayor que la dimensión geométrica ecuclidiana de un objeto. La dimensión fractal es afín a lo rápido que aumenta la medida del objeto, según disminuye el tamaño del instrumento de medida. Una dimensión fractal más alta, quiere decir que el fractal es más irregular y que la medición estimada aumenta con mayor rapidez. Para objetos de geometria euclidiana (líneas, curvas), la dimensión del objeto y su dimensión fractal son la misma cosa. Un objeto* fractal es el objeto que posee una dimensión fractal estrictamente mayor que su dimensión euclidiana.

La idea de dimensión fractal amplía el concepto de dimensión normalmente utilizado para hacer una descripción de los objetos cotidianos como puede ser un rectángulo o un cubo. La idea consiste en contar cuántos objetos pequeños o unidades de tamaño p son necesarios para cubrir un objeto más grande P . Para entender mejor esto, supóngase que el objeto a cubrir es un segmento de línea, que puede ser de 6 metros de largo, entonces se necesitan seis unidades de 1 metro para cubrir por completo ese segmento. Pero si la unidad de medida es de 10 centímetros se necesitarán 60 unidades para cubrir por completo dicho segmento. La relación entre estas cantidades (60 y 6) es 10:1 o lo que es lo mismo 10^1, que es la relación entre los medidores 1 metro y 10 centímetros. El exponente 1 equivale a la dimensión de la línea. Si se supone ahora un área de 6 metros cuadrados, un cuadrado de 1 metro por 1 metro cabe 6 veces dentro de un área de seis metros cuadrados, mientras que si la unidad de medida es un cuadrado de 10 cm por 10 cm, cabe en la misma área 600 veces. La relación entre estos resultados (600 y 6) es 10^2 y el exponente 2 hace referencia normalmente a la dimensión.

Sin embargo, el proceso de evaluar la dimensión de un objeto puede representarse utilizando el concepto de logaritmos; por ejemplo, si triplico el ancho de un cuadrado, se crea otro que contiene nueve de los cuadrados originales. La dimensión se puede obtener tomando logaritmos así :

$$\frac{\log 9}{\log 3} = \frac{\log 3^2}{\log 3} = 2.$$

Luego, el cuadrado tiene dimensión 2 . En general, para cualquier objeto fractal de tamaño P, construido de pequeñas unidades p, el número N de unidades que caben en él, es:

$$N = \left(\frac{P}{p}\right)^d \quad o \quad d = \frac{\log N}{\log\left(\frac{P}{p}\right)},$$

el exponente d se conoce como dimensión de *Hausdorff.* Esta forma de determinar dimensiones muestra que los objetos más familiares, como la línea, el cuadrado y el cubo, también son fractales. Tal vez el concepto más difícil es el de *dimensión*, sin embargo, las ideas que están detrás del concepto (recubrimiento) no son tan complejas; además, la fórmula para su cálculo no involucra matemáticas superiores.

Entre los ejemplos de fractales que se encuentran en la naturaleza se pueden nombrar las montañas, las nubes, la superficie de un lago, el sistema circulatorio.

Se puede decir que las propiedades generales de los fractales son :

- Dimensión fraccionaria
- Compleja estructura en todas las escalas
- Bifurcación infinita
- Autosimilitud

Una de las propiedades de los fractales es que puede ilustrar muchos conceptos matemáticos básicos; sus bellas gráficas pueden motivar a los estudiantes a investigar los conceptos abstractos únicos responsables de esta belleza visual.

Se pueden nombrar algunas de disciplinas relacionadas con los fractales: álgebra, geometría, números complejos, cálculo, iteración de funciones. Sus nociones pueden ser desarolladas en el bachillerato. Sin embargo lo más importante es el puro placer de explorar, crear, colorear y diseñar.

Existe una relación entre los *sistemas dinámicos* (un sistema dinámico es una colección de partes que interactuan entre sí y se modifican una a otras a través del tiempo. Un sistema dinámico es caótico, si los pequeños cambios efectuados en las condiciones iniciales del sistema provocan, más tarde, importantes cambios en el sistema.) y los fractales. La sociedad es una complicada relación de muchas partes (economía, salud, educación, etc). Se podria decir que la sociedad es un complejo sistema dinámico, con una serie de partes que interactúan constantemente. Y aunque existen sistemas que pueden presentar gran estabilidad, también pueden presentar *caos*. Los algoritmos, que simulan muchos de estos sistemas se vuelven caóticos y el estudio de los fractales en el sitio donde estos sistemas se vuelven caóticos, pueden ayudar a entender el comportamiento caótico. La teoría de los fractales en un futuro podrá ayudar a predecir el tiempo, pero tambien a que los humanos comprendan mejor la capacidad de predicción que tienen.

Las estructuras fractales son generadas por la iteración de una sencilla fórmula y, en esta iteración, son los números complejos los encargados de generar muchas de las propiedades de estos conjuntos. Uno de los más famosos fractales como lo llama Roger Penrose es *La tierra de Tor´Bled-Nam*, que leído al revés es Mandelbrot. El conjunto de Mandelbrot se obtiene iterando una expresión algebraíca sencilla $z = z^2 + c$, donde c es un número complejo fijo. El número $z^2 + c$ estará representado por algún nuevo punto del plano de *Argand*; si por ejemplo, c fuera 1.634.2y entonces z se aplicará según la fórmula $z \longrightarrow z^2 + 1.63 - 4.2i$; si $z = 3$, este valor será reemplazado por 10.63 - 4.2y. Si el número $c = 3$ la secuencia será 0,-3,6,33,1086,..o para c = 1 - i, la secuencia es 0,-1+i,-1-i,-1+3i,-9-5i,55+91i etc.

El conjunto de Mandelbrot es el conjunto de números complejos c tales que la secuencia $z = z^2 + c$ permanece finito, no importa cuántas iteraciones se realicen.

Para entender mejor esto recuérdese que la distancia entre un número complejo $(a + bi)$ y el origen $(0+ 0y)$ está dado por $|a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$, que se basa en la idea del teoréma de Pitágoras. Para saber si un punto c del plano complejo escapa al infinito cuando se itera un número de veces lo suficientemente grande, la fórmula $z = z^2 + c$ se hace utilizando el teorema del punto de fuga, el cual asegura que si después de la iteración, el punto se encuentra dentro de un círculo de radio 2, centrado en el origen del plano complejo ($|a+bi| \le 2$), entonces el punto pertenece al conjunto de Mandelbrot. Lo que hace el algoritmo que genera el conjunto de Mandelbort es tomar un punto c de prueba y determinar la secuencia de puntos del plano de *Argard*, a esta secuencia de puntos se le suele llamar órbita de puntos c. Si alguno de los puntos de la órbita a la que pertenece el punto que se esta probando, se encuentra por fuera del círculo de radio 2 con respecto al origen, el punto no se halla entonces en el conjunto de Mandelbrot. Pero si todos los puntos de la órbita se encuentran dentro del círculo de radio 2, entonces el punto pertenece al conjunto de Mandelbort.

Se calculará la órbita para un valor particular $c = 0.37 + 0.4$ y $z_0 = 0 + 0y$

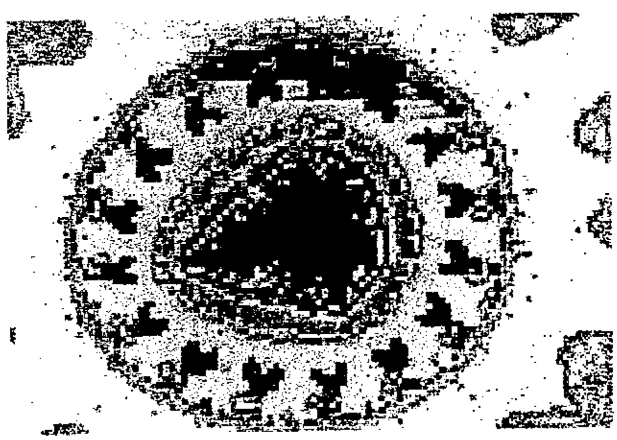
$$z_0 = 0.000 + 0.000i \; |z_0| = 0.000$$
$$z_1 = 0.370 + 0.400i \; |z_1| = 0.545$$
$$z_2 = 0.347 + 0.696i \; |z_2| = 0.778$$
$$z_3 = 0.006 + 0.883i \; |z_3| = 0.883$$
$$z_4 = 0.409 + 0.041i \; |z_4| = 0.580$$
$$z_5 = 0.369 + 0.064i \; |z_5| = 0.375$$
$$z_6 = 0.502 + 0.447i \; |z_6| = 0.672$$
$$z_7 = 0.442 + 0.849i \; |z_7| = 0.948$$
$$z_8 = 0.173 + 1.117i \; |z_8| = 1.130$$
$$z_9 = 0.848 + 0.014i \; |z_9| = 0.848$$
$$z_{10} = 1.089 + 0.376i \; |z_{10}| = 1.152$$
$$z_{11} = 1.145 + 1.219i \; |z_{11}| = 1.868$$
$$z_{12} = 0.885 + 3.850i \; |z_{12}| = 3.950$$

Sin embargo, si se varía un poco la parte imaginaria del número complejo, después de calcular cien iteraciones, las órbitas se encuentran dentro del círculo de radio 2.

$$z_0 = 0.000 + 0.000i \; |z_0| = 0.000$$
$$z_1 = 0.370 + 0.200i \; |z_1| = 0.421$$
$$z_2 = 0.467 + 0.348i \; |z_2| = 0.582$$
$$z_3 = 0.467 + 0.525i \; |z_3| = 0.703$$
$$z_4 = 0.312 + 0.690i \; |z_4| = 0.758$$
$$z_5 = 0.000 + 0.631i \; |z_5| = 0.631$$
$$\ldots\ldots$$
$$z_{96} = 0.352 + 0.479i \; |z_{96}| = 0.594$$
$$z_{97} = 0.264 + 0.537i \; |z_{97}| = 0.598$$
$$z_{98} = 0.152 + 1.347i \; |z_{98}| = 0.507$$
$$z_{99} = 0.159 + 0.347i \; |z_{99}| = 0.382$$
$$z_{100} = 0.275 + 0.310i \; |z_{100}| = 0.415$$

Resulta agradable observar que esta sencilla fórmula puede generar esta imagen (ver figura). El secreto del conjunto de Mandelbrot no está en la fórmula, sino en los procesos de iteración que están detrás de la generación de todos los fractales.

Si bien el conjunto de Mandelbrot es un fractal, se le puede considererar como un *catálogo* de infinitos fractales de la misma familia que se conocen como conjuntos de *Julia,* en honor al matemático francés Gaston Julia, quien junto con Pierre Fatau, estudiaron estas formas a comienzo del siglo XX, y fueron los primeros en argumentar que el entorno, en su totalidad, puede generarse a partir de una pequeña parte del mismo, escogida al azar. La generación de los diferentes conjuntos de Julia se efectúa, así: se toma un punto cualquiera del conjunto de Mandelbrot c y se itera la función $z = z^2 + c$ para varias semillas z_0, ver figura.



Todos estos fractales se pueden estudiar mediante programas de dominio público como el *Fractint v 18.2.* Con este programa es posible encontrar muchos fractales y efectuar un estudio sistemático de ellos. Sin embargo, también existe la posibilidad de generar estos fractales desarrollando los programas respectivos, sencillos de efectuar.

Por lo anterior es conveniente brindar la oportunidad a alumnos y maestros de acercarse a las nociones básicas de caos y fractales. Explorar estos tópicos requiere de un ordenador, calculadora, etc., muy útiles a la hora de constatar las intuiciones.

Es importante introducir el estudio de la geometría fractal en el bachillerato, pues además con su estudio se pueden afrontar tópicos del currículo: límites, simetrias, iteración de funciones, composición de funciones, programación de ordenadores, sucesiones, convergencia, perímetros áreas, etc.

El estudio del azar y de los fractales permite que la idea de determinismo laplaciano que todavía ronda en el siglo xx cambie totalmente. El desarrollo de estas nuevas ramas de la matemática puede acabar con la idea de que el determinismo estricto y el desarrollo aparentemente aleatorios, son mutuamente excluyentes, sino que abundan en la naturaleza.

La relación entre el caos y los fractales apunta en esta dirección. La idea intuitiva de azar hace suponer que se genera aleatoriamente y debe poseer una estructura desordenada. La actividad con que se comenzo el estudio de los fractales y el caos, conocida como el *Juego del caos,* logra poner de manifiesto mediante un procedimiento aleatorio, obtener una figura de estructura determinista *(caos determinista).*

ACTIVIDAD 1

EL JUEGO DEL CAOS

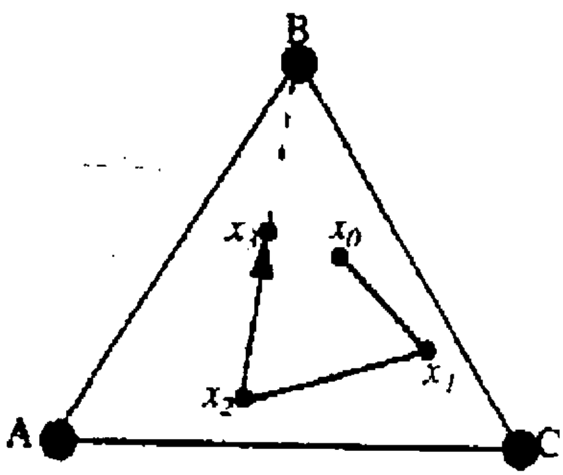
No. de alumnos:	100
Grados escolares:	8 hasta 11
Tiempo:	3 semanas
Materiales:	papel, lápiz, regla y un dado
Prerrequisitos:	manejo del sistema decimal

Planteamientos de la actividad

Esta actividad requiere una hoja de papel, un lapíz y un dado de seis caras. Se marcan tres puntos distintos A,B, y C (vértices de un triángulo) sobre la hoja de papel, y un punto inicial x_0 en el plano. Se arroja un dado y se mueve en dirección de *A* si el dado sale 1 ó 2, en dirección a *B* si el dado sale 3 ó 4 y en dirección a C si el dado sale 5 ó 6. En cualquiera de los casos anteriores, se marca el punto medio entre x_0 y el punto que haya resultado elegido. Esta nueva posición es x_1 y será el nuevo punto de partida. Continuando con el juego " *indefinidamente*" arrojando de nuevo el dado, se consigue una secuencia de puntos $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, a estos puntos se les denominá "futuros" del proceso. La cuestión aquí es que si se juega *infinitamente* el juego, los puntos x_n se colocarían aleatoriamente o, por el contrario, se ubicarán de una manera especial.

Hipótesis de los alumnos

El 100% de los alumnos en su primera aproximación al problema estuvieron de acuerdo con que la figura que se obtendría por este proceso, estaría *contenida* entre los tres puntos, pero que no tendría ninguna forma determinada por ser generada enun proceso aleatorio. Algunas de las gráficas obtenida con cien lanzamientos se pueden ver en el anexo.



Temas con que se relacionó la actividad

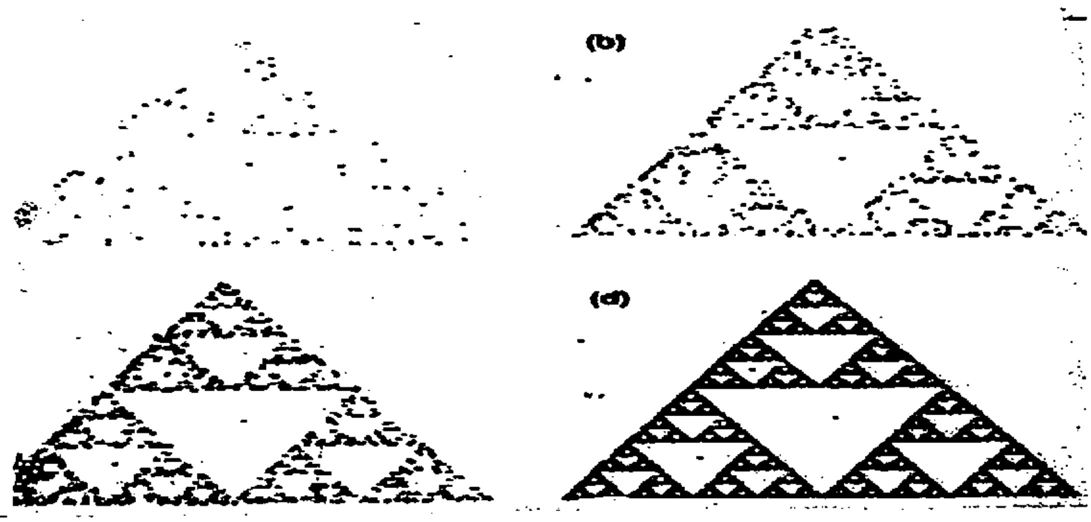
- Idea de azar
- Idea de azar «ordenado»
- Simetría
- Manejo de regla y medición
- División decimal
- Trabajo con calculadora

Preguntas que surgen de la actividad

- ¿Porqué existen partes de la figura en las que no cae ningún punto?
- ¿Cambiará la figura si dejo de jugar y después de cierto tiempo sigo jugando?
- ¿Cómo se calcula el área de la figura?
- ¿Qué pasa si se efectúa el juego con cuatro puntos?

Comentarios

1. La actividad se realiza en forma individual, pero los resultados se confrontan en el grupo, se discuten, se comparan, etc.
2. Algunos alumnos realizaron más de 500 lanzamientos. El número de lanzamientos depende de la persistencia, pero sobre todo del resultado de la actividad. Así, mientras mayor sea el número de lanzamientos más cautivante es la tarea, pues los problemas que aparecen se hacen paulatinamente evidentes.
3. Por otra parte, el número de lanzamientos depende del punto de partida: la distancia entre los tres puntos inciales. Es recomendable para quienes desean emprender la tarea, comenzar con los tres puntos, vértices del triángulo, no tan separados y tampoco tan juntos, (a unos 3 cm).
4. El hecho de que el maestro también realice la actividad, como otro más del grupo, es un factor decisivo para romper la resistencia inicial en una actividad aparentemente repetitiva.



ACTIVIDAD 2

EL PROGRAMA

No. de alumnos:	60
Grados escolares:	10 y 11
Tiempo:	1 mes
Materiales:	computador PC con Qbasic
Prerrequisitos:	programación en Qbasic

Planteamiento de la actividad

El interés por el trabajo que se estaba realizando mejoró con el desarrollo de la actividad. Al comienzo, el lanzamiento de un número grande de veces el dado causó indisposición pero luego la actitud fue cambiando. Con el desarrollo de la actividad los estudiantes creyeron que no era correcto lo que hacían, puesto que la figura que estaba apareciendo en la hoja mostraba un alto grado de simetría.

Mientras se realizaba la labor y se discutía en la clase sobre las posibles causas de aparición de la figura simétrica, surgió la necesidad de efectuar el mismo juego con el ordenador, para respoder a preguntas como ¿qué pasa si se trabaja con cuatro o cinco puntos?, seguirá apareciendo la misma figura? Aunque la figura puede ser obtenida utilizando el *Excel* y realizando una fórmula en un par de *celdas* para luego graficarlas, se decidió solucionar el algoritmo utilizando el *Qbasic*, un lenguaje de programación que los estudiantes manejan.

Hipótesis de los alumnos

Se obtendría la figura que se realizó con lápiz y papel.

Temas con que se relacionó la actividad

- Idea de azar
- Idea de azar «ordenado»
- Simetría
- Simulación de situaciones (modelaje de problemas reales)
- Elaboración de algoritmos
- Escritura del programa en lenguaje Qbasic.

Comentarios

1. La actividad se realiza en grupo.
2. La solución (programa) no es única, pueden aparecer varios programas (ver anexo) dado de 3 caras.
3. Se puede generalizar el problema para más de 3 puntos.
4. Pone a prueba la simulación del modelo.

5. La realización del pograma ponía a prueba el conocimiento del *juego del caos*. La solución final del programa sólo fue propuesta a los alumnos de 10o y 11o, por tener un mejor manejo de la programación. La solución final del programa, aunque sencillo en apariencia, causó problemas sobre todo en el manejo gráfico del programa Qbasic, el algoritmo que se obtuvo fue el siguiente:

- Seleccionar tres puntos en el plano: $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$.
- Seleccionar un punto $P(x_0, y_0)$, con el que se inicia el juego.
- Solicitar al usuario cuántas veces pretende realizar la iteración (N).
- Dibujar los puntos en el plano, según el desarrollo del juego.

Lo que falta por definir del algoritmo es la parte 4. No obstante,se sabe que esta parte del juego es un proceso repetitivo, que se realiza hasta el número de veces que el usuario decidida (*guarda del bucle*)[14]. Dentro del *cuerpo* de este bucle se hace lo siguiente: se *lanza el dado*, si el número que sale es 1 ó 2, muévase hasta la mitad de la distancia entre $\overline{PA}$, dibuje el punto e intercambie los valores del punto $P(x_0, y_0)$, por los valores del nuevo punto. Si el *dado sale* 3 ó 4 repita lo anterior pero esta vez muévase en dirección de B y si el dado sale 5 ó 6 repita lo anterior pero muévase en dirección de C. El programa terminado, escrito en Qbasic, quedaría de la siguiente manera (las frases entre ´ son comentarios sobre los que se está haciendo, pero no es importante en el desarrollo mismo del programa, las palabras reservadas en Qbasic se escriben en negrillas) :

Cls ´limpia la pantalla antes de comenzar la tarea´
Screen 2 ´En este caso se le está diciendo al lenguaje de programación que el adaptador gráfico que se tiene es VGA color , si el computador es monocromático esta línea deberá modificarse adecuadamente´

x1= 150 ´coordenada en x del punto *A*´
y1= 80 ´coordenada en y del punto *A*´
x2 = 250 ´coordenada en x del punto *B*´
y2 = 180 ´coordenada en y del punto *B*´
x3 = 350 ´coordenada en x del punto *C*´
y3 = 260 ´coordenada en y del punto C ´
x0 = 100 ´coordenada en x del punto inicial *P*´
y0 = 100 ´coordenada en y del punto inicial *P*´
Print " por favor deme el valor N del número de iteraciones"

input n ´se almacena el número de veces a iterar el programa´
Ramdomize Timer ´ Función generadora de números aleatorios que utiliza el reloj interno para generar números aleatorios entre (0, 1)´

```
For j=1 to N 'Bucle que ejecuta n veces '
dado= Int (Rnd * 6) 'se ha lanzado el dado'
If (dado = 1 or dado =2 ) then 'Si el dado es igual a 1 o 2'
Pset( (x0+x1)/2,(y0+y1)/2) 'se dibuja un punto a la mitad de la distancia PA '
x0=(x0+x1)/2 'el nuevo valor de x0'
y  = (y0 +y1)/2 'el nuevo valor de y0'
Else
If (dado= 3 or dado= 4) then 'sino si el dado es 3 o 4'
Pset ((x +x2/2),(y +y2)/2) 'dibuja el nuevo punto
x0=(x0+x2)/2 'el nuevo valor de x0'
y0 = (y0+y1)/2 'el nuevo valor de y0'
Else 'si no'
Pset( (x0+x3)/2,(y0+y3)/2) 'dibuja el nuevo punto
x0= (x0+x3)/2  'el nuevo valor de x0'
y0= (y0+y1)/2  'el nuevo valor de y0'
End if ' fin del si'
End If  'fin del si'
Next j ' incrementa el valor de j '
End  'Fin del programa'
```

6. Lo importante de esta parte del ejercicio, es la relación con el proceso puramente algorítmico, que sin embargo permite unir diversos conceptos y procedimientos. En esta fase, surge la necesidad del trabajo en grupo, donde la búsqueda de una solución al problema del algoritmo termina siendo, en la mayoría de los casos, una búsqueda heurística.

7. La actividad enriquece mucho el ambiente de la clase y aunque hay muchas preguntas que surgen de la actividad que quedan abiertas, por ejemplo, ¿Existen juegos del caos que produzcan otros fractales? Pero lo más importante desde el punto de vista pedagógico, es que al alumno se la da la oportunidad de *ver* o de *intuir* que el caos y el determinismo, son caras de una misma moneda.

ACTIVIDAD 3

LA CURVA DE KOCH

No. de alumnos:	100
Grados escolares:	8 y 11
Tiempo:	1 mes
Materiales:	lápiz, papel y transportador
Prerrequisitos:	cálculo de áreas, perímetros y en la etapa final sucesiones y series.

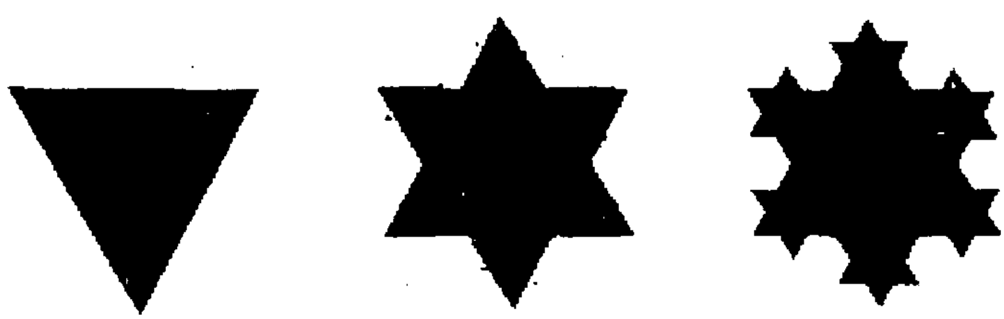
Planteamiento de la actividad

La existencia de las funciones continuas no derivables no son en realidad una rareza de la matemáticas; por el contrario, estas curvas son la regla y no la excepción. La geometría de la naturaleza parece gustar de complicadas formas.

Helge von Koch, en 1904, ideó una curva en donde una longitud infinita encierra un área finita. La idea de la actividad consiste en la construcción manual de la *curva de Koch o copo de nieve* (gráfica), este fractal comienza con un triángulo equilátero; en cada siguiente paso se le agrega un triángulo equilátero a un tercio de su tamaño original, a la mitad de cada lado , esto convierte la figura en una estrella de seis puntas, el contorno de esta estrella tiene 12 segmentos y la longitud de su borde externo es de 4/3 del perímetro original. Continuando el mismo proceso de añadir nuevos triángulos, cada vez más pequeños, se obtiene la curva de Koch.

Lo interesante es que la *construcción* de este fractal puede hacerse con regla, transportador y lápiz. Pero también se puede hacer utilizando el *Logo* (lenguaje de programación estructurado).

Esta actividad intentó comprobar una de las características de los fractales: contener una longitud/superfice infinita y encerrar una superficie/volumen finita.



Hipótesis de los alumnos

El 100% esperaban que el área y el perímetro de la curva que se obtenía iterando infinitamente fueran finitos.

Temas con que se relacionó la actividad

- Idea de azar
- Idea de azar «ordenado»
- Simetría
- Manejo de regla y medición
- División decimal
- Trabajo con calculadora

Comentarios

1. Fue necesario orientar a los alumnos en la escritura de los perímetros y áreas que se iban obteniendo en cada paso de la construcción de la figura, para obtener una fórmula general que nunca se demostró analíticamente.

2.Para observar esto se muestra como se calculó el perímetro P_i del polígono resultante de cada iteración. La estrategia consistió en calcular el número de lados del polígono en cada iteración (n_i) y multiplicarlo por la longitud del lado (l_i).
comenzando $n_0 = 3$, $l_0 = 1$, $P_0 = 3$

primera

$$n_1 = 3 \times 4 \quad l_1 = \frac{1}{3}, \quad P_1 = 3 \times 4 \times \frac{1}{3} = 3 \times \left(\frac{4}{3}\right)$$

Segunda

$$n_2 = 3 \times 4 \times 4 = 3 \times 4^2, \quad l_2 = \frac{1}{3^2}, \quad P_2 = 3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^2$$

Tercera

$$n_3 = \left(3 \times 4^2\right) \times 4 = 3 \times 4^3, \quad l_3 = \left(\frac{1}{27}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3, \quad P_3 = 3 \times 4^3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 = 3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^3$$

i – esima

$$n_i = 3 \times 4^i, \quad l_i = \left(\frac{1}{3}\right)^i, \quad P_i = 3 \times 4^i \times \left(\frac{1}{3}\right)^i = 3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^i$$

A medida que n (número de lados) aumenta, el perímetro P_n se hace cada vez mayor. En términos matemáticos, se dice que la sucesión de los perímetros *diverge*, puesto que el término 4/3 es mayor que 1. Una de las dificultades de esta actividad fue ordenar adecuadamente los términos que aparecen en el cálculo de cada uno de los perímetros, puesto que de esta manera aparece una regularidad que permite encontrar una fórmula general para el perímetro de la curva de Koch.

Después de esta primera parte, se puede investigar lo que sucede con el área en cada una de las iteraciones.

El problema del área se enfrentó de forma parecida a la del perímetro; se calculó el área de la primera iteración, luego la de la segunda etc, tratando de encontrar un patrón general que permitiera a los estudiantes encontrar una fórmula general, para *saber* como sería el área de la *i*-ésima iteración. Después de un trabajo en equipo y discutir las soluciones de los demás, se llegó a la conclusión de que el área de la figura que se obtiene en la iteración $i+1$, se obtiene sumando a la de la iteración *i*-ésima, el área de un triángulo equilatero que tiene un lado que resulta ser $1/3$ del anterior, multiplicado por el número de lados que tenga el polígono:

Inicio

$$No = 3; \quad A_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Primera iteracion

$$No = 3; \quad A_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} + 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4} + 3$$

$$\times \frac{1}{9} \times \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left[1 + \frac{1}{3}\right]$$

Segunda iteracion

$$n_1 = 3 \times 4$$

$$A_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} + 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{\sqrt{3}}{4} + (3 \times 4) \times$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left[\left(\frac{1}{3}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4}\right]$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} + 3 \times \frac{1}{9} \times \frac{\sqrt{3}}{4} + (3 \times 4) \times \left(\frac{1}{9}\right)^2 \times \frac{\sqrt{3}}{4} =$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\left[1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{4}{9}\right]$$

Tercera iteracion

$$n_2 = 3 \times 4^2$$

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left[1 = + \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{4}{9}}\right]$$

$$\left(\frac{1}{9}\right)^2 \times \frac{\sqrt{3}}{4} + \left(3 \times 4^2\right) \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left[\left(\frac{1}{9}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4}\right]$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} + 3 \times \frac{1}{9} \times \frac{\sqrt{3}}{4} + (3 \times 4) \times \left(\frac{1}{9}\right)^2 \times$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4} + \left(3 \times 4^2\right) \times \left(\frac{1}{9}\right)^2 \times \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left[1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{4}{9} + \frac{1}{3} \times \left(\frac{4}{9}\right)^2\right]$$

En general

$$A_i = \frac{\sqrt{3}}{4}\left[1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{4}{9} + \frac{1}{3} \times \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{4}{9}\right)^{i-1}\right]$$

3. Utilizando elementos de sucesiones que surgen como necesidad para encontrar el área, se encuentra que los términos entre paréntesis, menos el primero, es una sucesión geométrica que tiene como primer término $1/3$ y una razón de $4/9$ que es menor que 1, converge y que la suma de los infinitos términos es:

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left[1 + \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{4}{9}}\right]$$

4. Este trabajo que generaliza el cálculo del área se efectuó con alumnos de 11 grado por tener elementos de sucesiones y series.

ACTIVIDAD 4

EL PROGRAMA

No. de alumnos:	100
Grados escolares:	8 y 11
Tiempo:	2 meses
Materiales:	computador PC y programa Logo
Prerrequisitos:	programación en Logo

Planteamiento de la actividad

La actividad consistió en la realización de un programa en Logo que permitió obtener la curva de Koch. La finalidad del programa era obtener una imagen de la curva en cada iteración de una manera rápida y sistemática.

Hipótesis de los alumnos

Se obtendría la curva que se ha realizado manualmente. La obtención de la curva debe ser recursiva, necesita de la anterior para generar la última. Esto fue planteado por alumnos con conocimiento avanzado en la programación Logo.

Temas con que se relacionó la actividad

- Construcción de algoritmos
- Simulación de procesos reales
- Programación en Logo
- Recursividad
- Iteración

Comentarios

1. La actividad se realiza en grupo.
2. La solución (programa) no es única.
3. La realización del programa utilizando la recursividad fue obtenida por 20 alumnos.
4. Existió dificultad para visualizar soluciones recursivas a problemas algorítmicos.
5. Para solucionar el programa fue necesario efectuar una orientación dirigida que parte de la construcción manual pero que los alumnos visualizaron el proceso recursivo. El programa que se obtuvo es:

```
TO COPO :T :N
REPEAT 3[LADO :T :N RT 120]
END

TO LADO :T  :N
IF :N=0 THEN FD :T STOP
LADO :T/3 :N-1
LT 60
LADO :T/3 :N-1
RT 120
LADO :T/3 :N-1
LT 60
LADO :T/3 :N-1
END

TO COPON :T :N
PU BK :T/2 RT 90 BK :T/2 LT 90 PD
COPO :T :N
END
```

Sistemas dinámicos y el surgimiento del Caos

"Yo quiero... insistir que a la gente debería siempre presentársele la ecuación $y = kx(1-x)$ muy al comienzo de su formación matemática. Esta ecuación puede estudiarse fenomenológicamente por iteración, bien con una calculadora, o a mano. En su estudio no se requiere elementos tan conceptualmente elevados como los del cálculo diferencial y, sin embargo, enriquecería mucho la intuición del alumno en lo relativo a los sistemas no-lineales". Robert M. May (biólogo).

En la actualidad existe un creciente interés por estudiar el vínculo de las redes informáticas (redes neuronales, autómatas celulares, robótica) con los sistemas fisiológicos. Esto ha conducido al desarrollo de un nuevo campo de las matemáticas que se conoce como *Dinámica topológica*. Esta rama de las matemáticas tiene como fundamento, la descripción de los sistemas con el paso del tiempo. Este estudio ha mostrado que los sistemas gobernados por leyes físicas pueden sufrir transiciones a formas altamente irregulares de conducta que se concocen hoy como Caos. Aunque la conducta "caótica" parece aleatoria, está regulada por condiciones deterministas. A esto se le ha denominado *Caos determinista*. En este contexto, el "caos" puede ser entendido como orden dentro del desorden.

El procedimiento para obtener un sistema dinámico de un fenómeno es descrito por Carles Simó (1987), así:

1. Identificar variables que describan el fenómeno de la manera más completa posible, de forma que el conocimiento de las mismas, en un cierto instante de tiempo, defina suficientemente fiel el estado del fenómeno observado. Es posible que en muchos fenómenos no se pueda llegar a esto.
2. Efectuar mediciones de esas variables. De nuevo se pueden encontrar dificultades insalvables, pero se tendrá un buen repertorio de problemas con los que será posible llegar a este punto.
3. Al estudiar cómo se comportan esas variables a lo largo del tiempo se puede intentar encontrar fórmulas que expresen la variación instantánea de esas variables.

Si hay éxito en los tres apartados anteriores, se habrá elaborado un modelo matemático (determinista y continuo) del fenómeno estudiado. A un modelo matemático se le denomina también ley física; por ejemplo: la ley de la gravitación de Newton, las ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo, las leyes de la cinética química. Todas estas leyes no son más que una aproximación más o menos útil, dependiendo del contexto.

La labor de la dinámica topológica es tomar el modelo matemático, e intentar sacar consecuencias lógicas del modelo y luego compararlas con la observación directa. Por fortuna, en muchos ejemplos, los experimentos realizados concuerdan con las conclusiones obtenidas usando razonamientos matemáticos (en muchos casos con las conclusiones obtenidas mediante simulación numérica).

Una de las conclusiones más importantes que se genera con el trabajo de los sistemas dinámicos es la siguiente: "En cierto modo la predicibilidad y la imposibilidad de predecir caben juntas en el mismo conjunto de ecuaciones". Esto sugiere que, dependiendo de las condiciones iniciales, ecuaciones simples pueden producir números que no parecen tener una pauta. Si bien es cierto que las ecuaciones expresan por lo general, relaciones de causa-efecto, los resultados numéricos hacen *pronosticar* que los sistemas modelados pueden mostrar comportamientos caóticos. Este tipo de ecuaciones evidencian la dependencia de estas a las condiciones iniciales. La existencia del caos implica nuevos límites fundamentales sobre la predicción. Además, el caos determinista sugiere que fenómenos durante mucho tiempo considerados como aleatorios, son en cierto sentido más previsibles de lo que se pensaba. En este sentido, la afirmación de Laplace en su *Ensayo filosófico sobre las probabilidades* al señalar que: "Un ser inteligente que en un instante conociera todas las fuerzas que animan la naturaleza y las posiciones de los seres que la forman, y que fuera lo suficientemente inmenso como para poder analizar dichos datos, podría condensar en una fórmula el movimiento de los objetos más grandes del universo y de los átomos más ligeros: nada sería incierto para dicho ser; y tanto el pasado como el futuro estarían presentes ante sus ojos", no tiene hoy validez. La predicción no es necesariamente una buena prueba para la teoría. La solución clásica de verificar una teoría es hacer predicciones y verificarlas con los datos experimentales. Pero si los datos son "caóticos, las predicciones a largo plazo resultan imposibles, y esto es importante al juzgar una teoría.

Después de esta introducción, se podría decir que un sistema dinámico es alguna situación sometida a cambio; por ejemplo, un movimiento tan ordenado como el de un planeta o tan errático como las fluctuaciones de las acciones de la bolsa de New York. El objetivo es en últimas prever el comportamiento de un sistema dinámico.

Matemáticamente, el concepto de sistema dinámico, está ligado con lo que se concoce como composición. El proceso de composisición de funciones es básico en matemáticas y uno sobre los cuales se estudia la iteración y se construye el caos. Se puede visualizar la composición de la función g con la función f como se muestra en la figura 1.

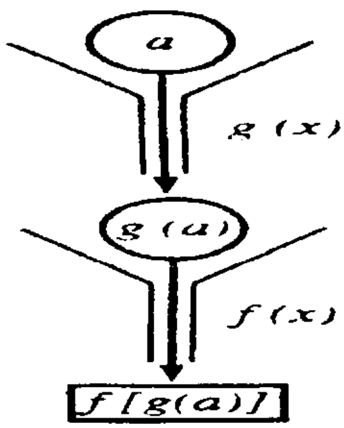


figura 1

La «máquina» $g(x)$ procesa el material a para producir $g(a)$, luego la «máquina» f(x) procesa el material $g(a)$, para obtener el producto $f(g(a))$.

La iteración de una función f, es el proceso en el cual f se compone con ella misma repetidamente; ver figura 2. El producto se vuelve a pasar a través de $f(x)$.

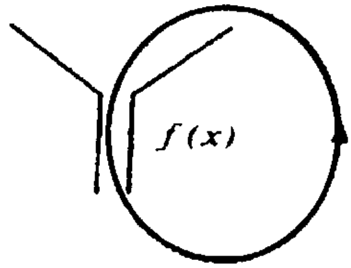


Figura 2

Si x_o es el valor inicial (semilla del iteración), se obtendría la siguiente sucesión de valores:

$$x_1 = f(x_0)$$
$$x_2 = f(x_1)$$
$$x_3 = f(x_2)$$

Esta secuencia es llamada órbita de x_o. Nótese que los términos de la secuencia tienen que ver con iteraciones (repeticiones) sucesivas de f. Para identificar las repeticiones, se escribe:

$$f^2(x_0) = f(f(x_0)), \quad f^3(x_0) = f(f(f(x_0)))$$

y así, el $(n+1)$ término de la órbita de x_o, es: $x_n = f^n(x_0)$; nótese que n indica el número de veces que f es aplicado a x_o.

Ejemplo 1

Tomando como semilla $x_o = 10$, se examinarán los resultados de la iteración para los tres primeros valores:

$$x_0 = 10$$
$$x_1 = \sqrt{10} = 3.16$$
$$x_2 = \sqrt{3.16} = 1.78$$
$$x_3 = \sqrt{1.78} = 1.33$$

Siguiendo esta forma se puede observar que al seguir realizando la iteración, ésta se *acerca o tiende* a 1.

Ejemplo 2

Con una calculadora en modo *radianes*, analizar la órbita de $x_0 = 10$, para iteración de la órbita de la función $f(x) = 2Sin(x)$.

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 10 \\
x_1 &= 2Sin(x_0) \cong 1.683 \\
x_2 &= 2Sin(x_1) \cong 1.987 \\
x_3 &= 2Sin(x_2) \cong 1.828 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

siguiendo esta secuencia se encontrará que ésta tiende a un valor límite aproximado de 1.895.

Después de esta introducción, es posible realizar algunos talleres para hacer un seguimiento del trabajo que realizan los estudiantes en algunos tópicos como: composición de funciones, funciones iteradas, etc. Estos talleres permiten observar la imagen que tienen los estudiantes sobre el concepto de función y composición de funciones

A continuación, se describen algunos talleres para adelantar este trabajo. Durante el desarrollo de los mismos se pueden encontrar variantes para mejorarlos, no se pretende que sean inalterables, incluso el profesor puede establecer cambios para adecuarlos a su trabajo.

Actividad 1

COMPOSICIÓN E ITERACIÓN DE FUNCIONES

No. de alumnos:	100
Grados escolares	8-11
Tiempo	2 horas
Materiales:	Calculadora. lápiz y papel
Prerrequisitos:	Manejo de funciones, Nociones de álgebra y manejo de calculadora

Planteamiento de la actividad

La actividad pretende ser una forma alternativa para presentar los temas de composición e iteración de funciones, diferentes al tratamiento algebraico que se ofrecen en los textos escolares.

Temas con que se relacionó la actividad

- Composición e iteración de funciones
- Recursividad
- Manejo de calculadora
- Sucesiones, límites, convergencia, divergencia.

Comentarios

● Este taller resuló ser una forma agradable de presentar la iteración y composción de funciones a los alumnos.

Si los alumnos manejan la sustitución algebraica para encontrar la compuesta de dos funciones f(g(x)), o (f o g)(x); por ejemplo, si $f(x) = x^2$ y g(x) = sen (x), entonces f (g(x)) = $(\text{sen }(x))^2$, se pueden realizar laboratorios en donde los estudiantes grafiquen cada una de las funciones y la compuesta a izquierda y a derecha para que hagan hipótesis sobre lo que hace la función compuesta a cada una de las funciones.

Los ejercicios de iteración con calculadora son una manera alternativa de presentar los conceptos de límite, sucesiones, etc.

●Esta actividad se realizó con estudiantes después de presentar el concepto de función como una máquina que opera sobre una serie de valores y los transforma. En esta aproximación no se habló con los estudiantes sobre dominio, recorrido, función inyectiva, biyectiva, etc., que por lo gemeral se presentan en los textos de matemáticas.

●Con la actividad los estudiantes «descubren» algunas propiedades de la composición de funciones a saber:

a. La mayoría de los estudiantes observa que dado un valor de x cualquiera no es cierto que f(g(x)) sea igual a g(f(x)), salvo en algunos casos.

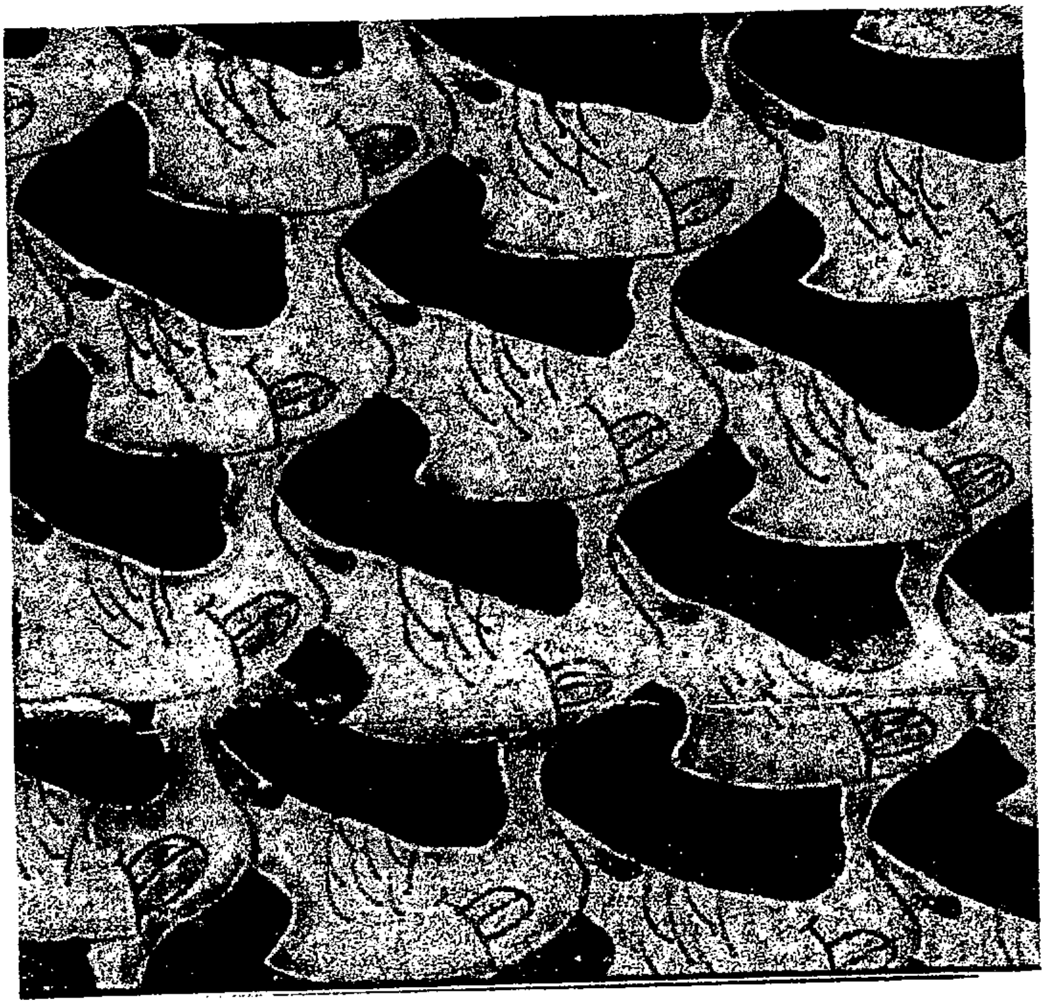
b. En los casos en que esto sucede es porque la función f(x) «desbarata» lo que la función g(x) hace y lo contrario. Esta operación da como resultado simpre x.

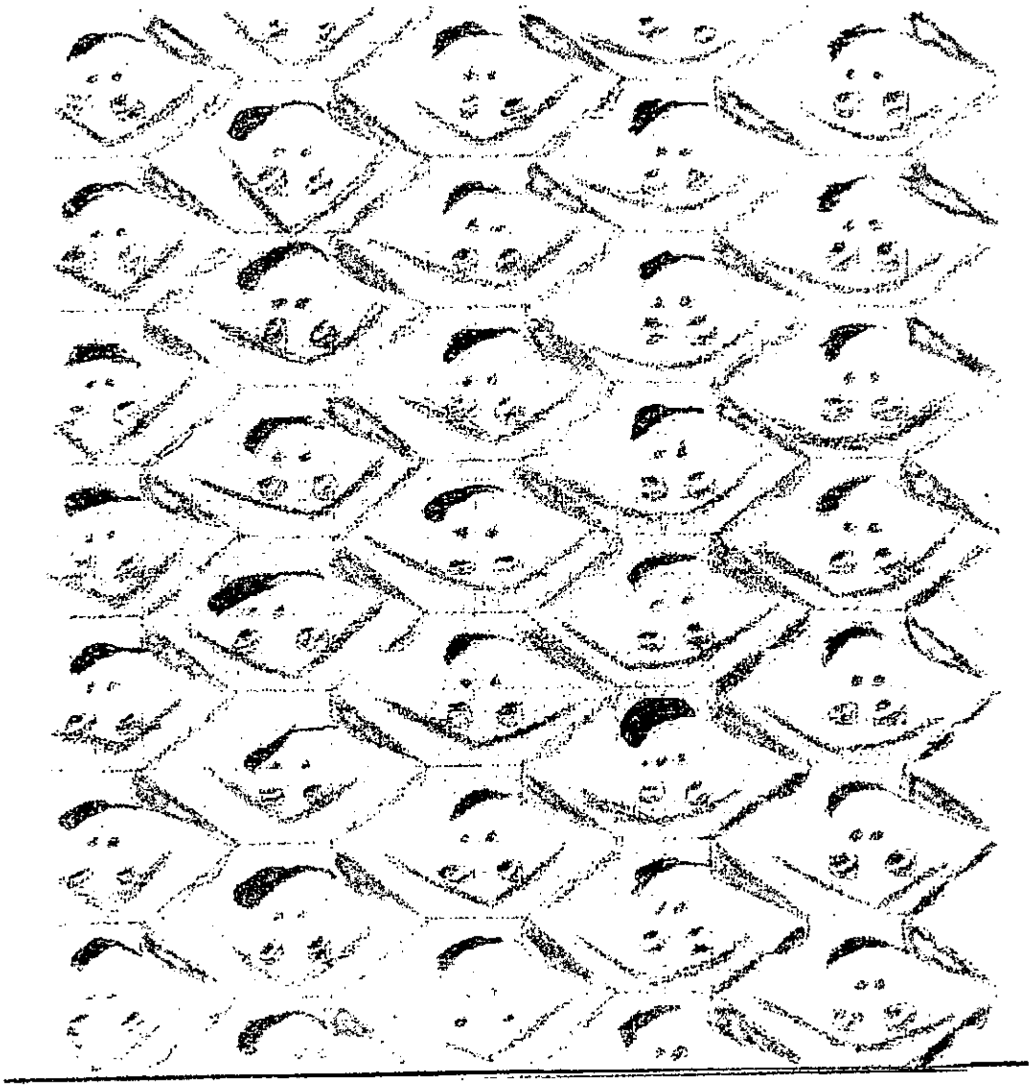
●A la pregunta, dada la función f(x) cómo es posible encontrar una función g(x) que «desbarate» lo que hace la función f(x), para que al componer f(g(x)) sea igual a g(f(x)). Algunas respuestas fueron: 1. Si la regla o función está dada con x teniendo como potencia 1 y sumándole una constante cualquiera, osea, $f(x) = x + c$, la regla g(x) se encuentra dejando la misma x y restando el valor de c, o sea, $g(x) = x - c$.

2. Si la función es de la forma $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3$, etc., la función g(x) que desbarata lo que hace la función f(x) se encuentra sacando la raíz cuadrada, cúbica, etc., o sea, f(x) = $\sqrt{x}, \sqrt[3]{x}, \sqrt[n]{x}$, dependiendo de la potencia a la cual esté elevada x.

3. Si x está multiplicada por algún número, es decir, $f(x) = k * x$, la función g(x) se encuentra dejando la misma x pero dividiendo toda la expresión por k..

4. Para ecuaciones generales de segundo grado, $f(x) = ax^2 + bx + c$, o cúbicas no se logró construir un algoritmo que permitiera encontrar la función g(x).





●En el trabajo de iteración de funciones surgieron preguntas, por ejemplo, ¿por qué al iterar algunas funciones con un valor inicial dado, dicho proceso converge a un valor determinado, y para otros valores iniciales con la misma función la iteración no converge a ningún valor. Algunos estudiantes afirmaron que esta situación dependía de la función que se utilizara y otros que dependía del valor que se utilizara para iterar la función.

1. Use la entrada y determine la salida en cada una de las composiciones que se muestran en la figura 3.

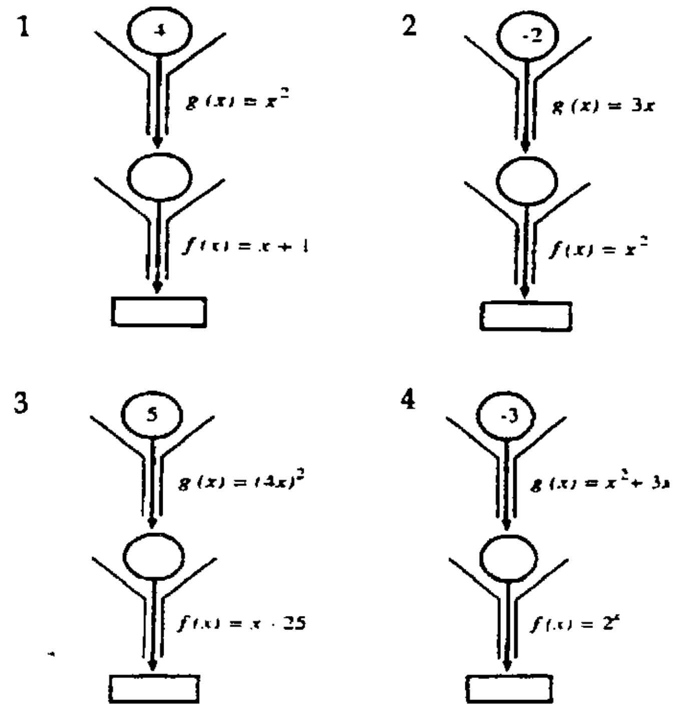


Figura 3

2. Con diagramas como los anteriores, determine el valor de $f(g(x))$, para cada par de funciones. Utilice como valor de entrada, $x = 1$.

a) $g(x) = x + 3$, $f(x) = x^2$ b) $g(x) = x^2$, $f(x) = x + 3$ c) $g(x) = 2x + 5$, $f(x) = 0.5(x - 5)$

3.Con las funciones del ejercicio 2, utilece cada caso como valor inicial $x = -1$, y determine el valor de la función compuesta para cada uno de los casos.

a) $g(f(x))$ b) $g(g(x))$ c) $f(f(x))$ d) $f(g(x))$

4. En las funciones $f(x) = x + 1$ y $g(x) = x^2$, exprese cada una de las composiciones siguientes en términos de un valor inicial *a*.

a) $f(g(a))$ b) $g(f(a))$ c) $g(g(a))$ d) $f(f(a))$

5. Con el argumento inicial x_0, suponga que en cada caso $f(x)=\sqrt{x}$, utilice una calculadora y redondee a tres dígitos y escriba los diez primeros términos de la iteración para cada una de las respectivas semillas.

$x_0 = 1795$	$x_0 = 0.23$	$x_0 = 0.85$
$x_1 =$	$x_1 =$	$x_1 =$
$x_2 =$	$x_2 =$	$x_2 =$
$x_3 =$	$x_3 =$	$x_3 =$
$x_4 =$	$x_4 =$	$x_4 =$
$x_5 =$	$x_5 =$	$x_5 =$
$x_6 =$	$x_6 =$	$x_6 =$
$x_7 =$	$x_7 =$	$x_7 =$
$x_8 =$	$x_8 =$	$x_8 =$
$x_9 =$	$x_9 =$	$x_9 =$
$x_{10} =$	$x_{10} =$	$x_{10} =$

6. Con una calculadora itere la función $f(x)=x^2$. Comience la iteración con el valor x_0 y realice la iteración diez veces. Elabore una tabla como la del ejemplo anterior.

a. $x_0 = 1$ b) $x_0 = 5$ c) $x_0 = 0.3$ d) $x_0 = -3$

describa el comportamiento de iteradas de la función anterior, cuando el argumento inicial es:

a. $x_0 \geq 1$

b. $0 \prec x_0 \prec 1$

c. $-1 \prec x_0 \prec 1$

d. $x_0 \prec -1$

7. Encuentre para cada una de las siguientes situaciones la función que produce la sucesión:

$4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow \ldots$ $f(x)=$

$1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 16 \rightarrow \ldots$ $f(x)=$

$1 \rightarrow 3 \rightarrow 9 \rightarrow 27 \rightarrow 81 \rightarrow \ldots$ $f(x)=$

$-6 \rightarrow -1 \rightarrow 4 \rightarrow 9 \rightarrow 14 \rightarrow ..$ $f(x)=$

$8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow \frac{1}{2} \rightarrow \ldots$ $f(x)=$

la iteración de funciones puede producir sucesiones de iteradas de forma *aritmética o geométrica*. Se dice que una sucesión es aritmética si sus términos son de la forma: *a, a + d, a +* 2*d, a +* 3*d,...*, donde *a* es el primer término y *d* es la diferencia entre los sucesivos términos.

Una sucesión es geométrica si es de la forma: $a, ar, ar^2, ar^3 \ldots$, donde a es el primer término, y r la relación entre los sucesivos términos. Identifique si las sucesiones anteriores son artiméticas o geométricas.

8. Sea $F(x) = x^2 + 1$, calcule los cinco primeros términos de la órbita de $x_0 = 0$.

9. Sea $F(x) = x^2 - 2$, encuentre $F^2(x)$ y $F^3(x)$.

COMPOSICIÓN E ITERACIÓN GRÁFICA

La composición de funciones es básica en el estudio de la iteración y del caos. Se puede explorar este proceso utilizando las gráficas de las funciones en cuestión. En el ejercicio 1, se mostró la evaluación de una función mediante una "máquina" con entrada y salida.

Cuando se tiene la gráfica de la función, para que este proceso sea similar se puede ejecutar el siguiente algoritmo.

a. (Evaluar). Dibuje el segmento vertical con extremo en el valor de entrada a en el eje x y el otro extremo en la gráfica de la función. Marque este punto como A. Este punto tiene ordenada $f(a)$.

b. (Transferir) Dibuje el segmento horizontal con el extremo en A y el otro extremo en la diagonal ($f(x) = x$), marque este punto como B. Este punto tiene abscisa $f(a)$, sus coordenadas son:

$(f(a), f(a))$.

c. (Reflejar) A partir de B, trace una semirrecta vertical en la dirección positiva del eje y. La abscisa de este punto es:

$f(a)$, ver figura 4.

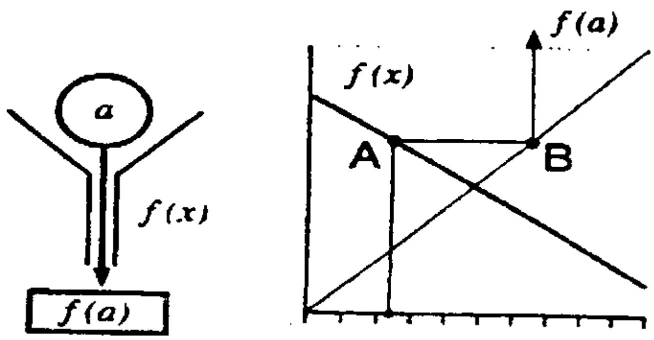


Figura 4

10. Aplique el proceso anterior a las siguientes gráficas:

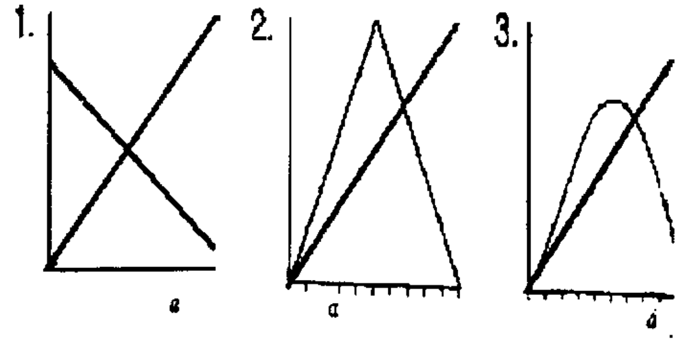


Figura 5

La composición de funciones se ha presentado en el ejercicio 1 por medio de dos "máquinas". Para hallar la composición gráficamente, se puede hacer de manera análoga, si se va a encontrar la función compuesta $f(g(a))$, se coloca la gráfica de la segunda función encima de la primera.

El proceso de evaluación se desarrolla hacia arriba. Es decir, para un valor de entrada a, se encuentra $g(a)$, con la gráfica inferior; la salida $f(g(a))$ se obtendrá en la gráfica superior, donde la entrada es $g(a)$, ver figura 6.

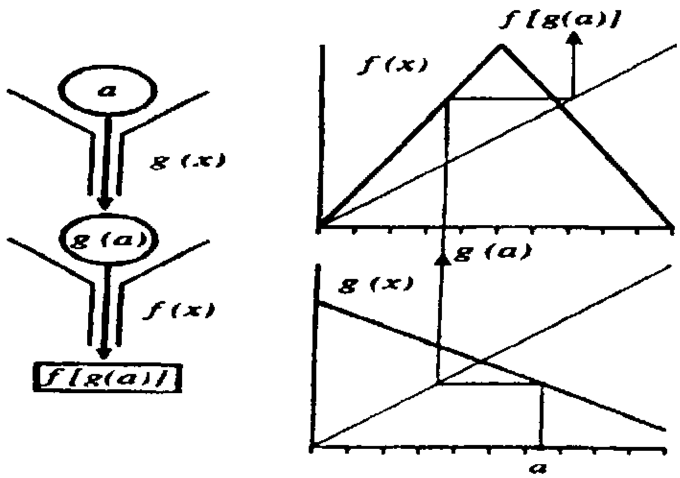


Figura 6

11. Efectúe la composición gráfica de funciones con los diagramas que aparecen en la figura 7.

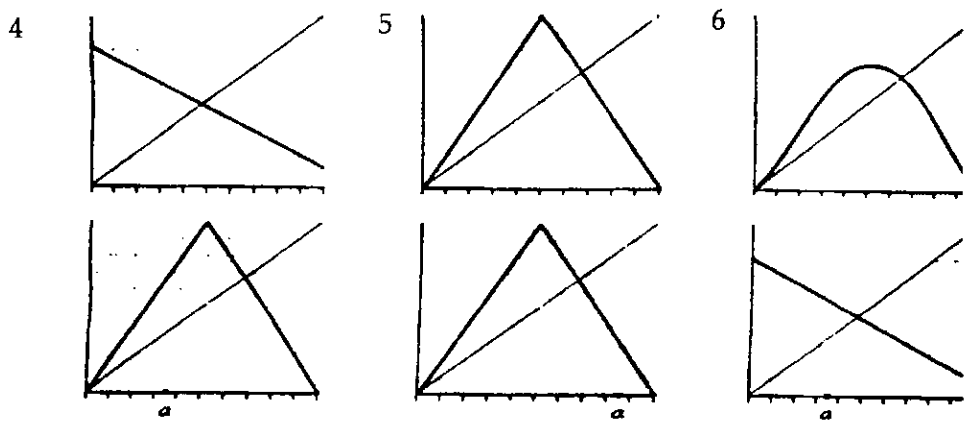


Figura 7

ACTIVIDAD 2

ITERACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES CUADRÁTICAS

No. de alumnos:	100
Grados escolares	8-11
Tiempo	1 mes
Materiales:	hojas de trabajo y programa Mathematica
Prerrequisitos:	Manejo de funciones, nociones de álgebra y manejo del programa Mathematica

Temas con que se relacionó la actividad

- Composición e iteración de funciones
- Recursividad
- Sucesiones, límites, convergencia, divergencia, puntos fijos, puntos periódicos
- Sistemas dinámicos
- Caos determinista

Comentarios

- Este taller muestra a los alumnos que la iteración de funciones en apariencia sencillas pueden producir resultados completamente inesperados.
- Las gráficas que se muestran en la actividad no hacen parte del taller sino que fueron desarrolladas por los estudiantes con el programa *Mathematica*
- La iteración gráfica permite visualizar muchos aspectos importantes que al ser trabajados de manera numérica serían más difíciles de detectar.
- El 90% de los estudiantes llegó a las siguientes conclusiones:

- Para la iteración de $f(x) = x^2 + c$

a. Todas las órbitas tienden a infinito para $c > 1/4$
b. Para $c = 1/4$ existe un punto fijo en $1/2$, este punto fijo es neutral.
c. Para $c < 1/4$ la función tiene dos puntos fijos (P+ y P-), P+ es siempre un punto fijo repulsor.
d. En $c = 2$ la iteración gráfica es muy difícil de seguir «parece seguir todos los caminos».
e. Durante la actividad surgieron estas preguntas:

a. ¿Será que esta es la única función que tiene este comportamiento?
b. ¿A qué se debe que el comportamiento caótico de la función se dé en $c = -2$?
c. ¿Si hay otras funciones que presenten este comportamiento, deben ser funciones cuadráticas?

Planteamiento teórico

De la parte final de la actividad anterior se deduce fácilmente que para componer tres o más funciones, el proceso en esencia es el mismo.

Si se compone reiteradamente la misma función, este proceso recibe el nombre de iteración. Si es una iteración doble, hacen falta dos gráficas de la misma función; si la iteración es triple, harán falta tres gráficas; y si se itera n-veces la función harán falta n-gráficas de la función. Como puede observarse es un proceso demasiado largo. Sin embargo, si se observa el proceso de iteración gráfica se verá que es mucho más sencillo, ver figura 8.

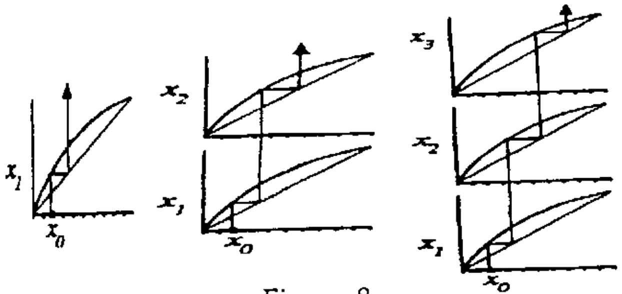


Figura 8

La figura 8 muestra que todas las gráficas se pueden comprimir en una sola, que se puede realizar siguiendo el siguiente algoritmo.

1. Dada la semilla (valor inicial) x_0, dibuje el segmento vertical con extremos en los puntos $(x_0, 0)$ y $(x_0, f(x_0))$

2. Trace el segmento horizontal con extremos $(x_0, f(x_0))$ y $(f(x_0), f(x_0))$ Este punto está en la diagonal. Se marca entonces este punto como x_1.

3. Se aplica el paso 1 para x_1.

Luego, se obtiene la figura 9, que es una síntesis del proceso.

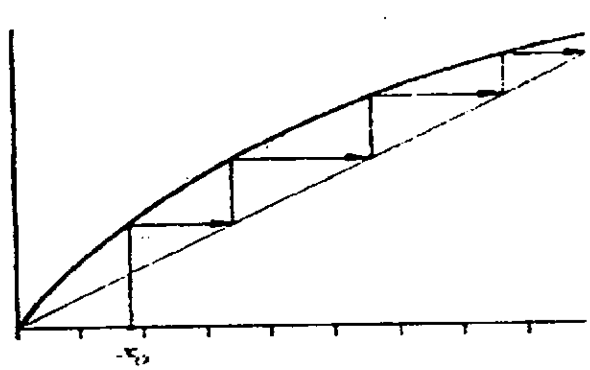


Figura 9

PUNTOS FIJOS

Sea *f* una función, *a* es un punto fijo de *f*, si *f*(*a*) = *a*. Geométricamente esto significa que la gráfica de la función *f* intercepta la gráfica de la recta *y* = *x* en el punto (*a*,*a*).

En este caso, la iteración gráfica puede ser usada para estudiar la naturaleza de *puntos fijos* para funciones lineales y no lienales. Los puntos pueden ser de clases diferentes con respecto a la iteración de la función en cuestión. Cuando la sucesión obtenida por iteración de la función converge a un punto fijo, a este punto se le denomina *punto fijo atractactor*.

Plateamiento de la actividad

Las funciones cuadráticas producen una amplia variedad de comportamientos en la iteración gráfica.

Las características especiales se encuentran alrededor de los puntos fijos, que pueden servir de atractores o repulsores. En esta actividad se investigará el comportamiento de las funciones cuadráticas, presentadas en dos formas diferentes:

$f(x) = ax(1-x)$ y $f(x) = x^2 + c$. En geometría se dice que la función cuadrática tiene forma de parábola. En álgebra la función cuadrática se escribe en términos de los parámetros: *p, q, r* de la siguiente manera: $f(x) = px^2 + qx + r$, cuando *p* = -*a*, *q* = *a* y *r* = 0; la función cuadrática puede ser expresada de la forma $f(x) = ax(1-x)$. El taller que se presenta explora estas expresiones. Las parábolas de esta forma interceptan al eje x en (0,0) y en (1,0). Estas parábolas sufren una elevación en dirección de y, cuando el parámetro *a* se incrementa. En cada caso, el patrón de la iteración gráfica depende del valor del parámetro *a*.

Cuando $1 \leq a \leq 4$, todos los puntos en $0 \leq x_0 \leq 1$ hacen que la función permanezca en los límites de la iteración. Lo más interesante de la dinámica en la iteración gráfica ocurre en este intervalo. Todos los puntos por fuera de este intervalo, escapan en la iteración hacia $-\infty$. Otros resultados ocurren cuando *a*<1 o cuando *a*>4.

1. Describa el desarrollo de la iteración para la función $f(x) = 0.5x(1-x)$, con un valor inical $x_0 = 0.7$. ¿Cúal es apróximadamente el atractor?

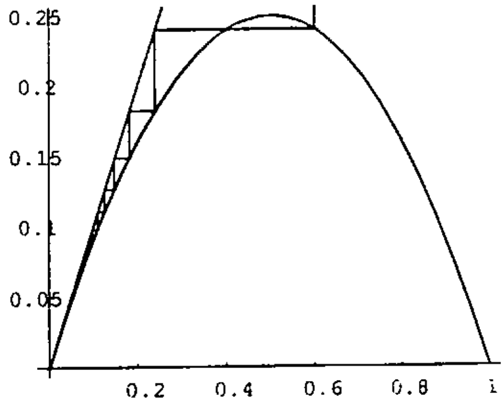


Figura ~~10~~ 8

2. El desarrollo de la iteración para todos los puntos del intervalo $1 < x_0 < 2$, muestra en esencia ¿la misma forma?, ¿qué pasa cuando se itera con $-1 < x_0 < 0$ y $0 < x_0 < 1$?

3. Efectúe la iteración de la función $f(x) = 5x(1-x)$, para x_0 =0.9. Describa el desarrollo de la iteración para varios términos. ¿Cuando se itera para valores $0 \le x_0 \le 1$, converge a un atractor o escapa a $-\infty$?

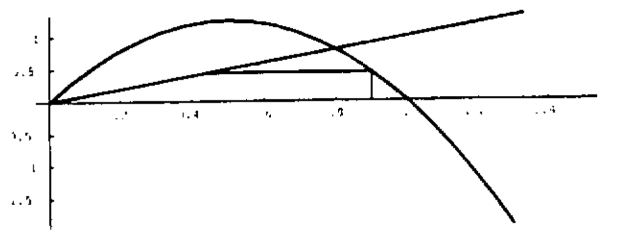


Figura ~~11~~ 9

4. Encuentre un punto en $0 \le x_0 \le 1$, tal que su órbita no escape con $f(x) = 5x(1-x)$

Considere la forma general de la función cuadrática dada por $f(x) = px^2 + qx + r$, donde p=1, q=0, r=0, luego la función se transforma en $f(x) = x^2 + c$. Todas las parábolas de esta forma tienen vértices sobre el eje x en (0,c). Cuando el parámetro c se incrementa, la parábola se incrementa hacia arriba.

5. Sea $f(x) = x^2 - 0.65$, describa el desarrollo de la iteración gráfica cuando se inicia con un valor de 0.1. ¿Es la intersección de la parábola con la diagonal un atractor para esta iteración?

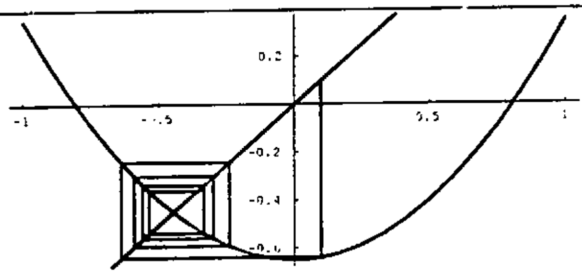


Figura 12

6. ¿Qué otros intervalos con un valor inicial x_0, espera usted que en el desarrollo de la iteración tengan el mismo punto fijo atractor? Estudie el significado de la caja cuadrada que rodea al punto fijo. Escriba su interpretación.

7. Sea $f(x)=x^2-1$, describa la iteración para $x_0=0.5$. ¿Cúal es el atractor y cómo es la aproximación?

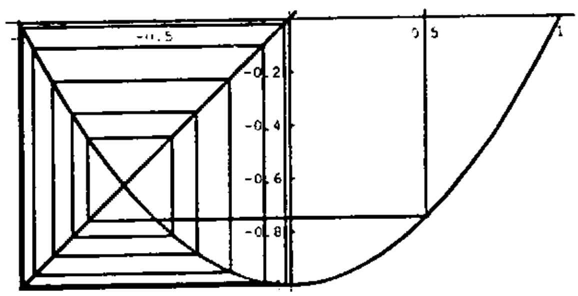


Figura 13

8. ¿Para otros valores de x_0 se puede esperar que en el desarrollo de la iteración se tenga el mismo atractor?.

9. Sea $f(x)=x^2+0.35$, describa la iteración gráfica para un valor inicial de $x_0=0.3$, hay atractores, repulsores en la iteración, puede explicar su respuesta.

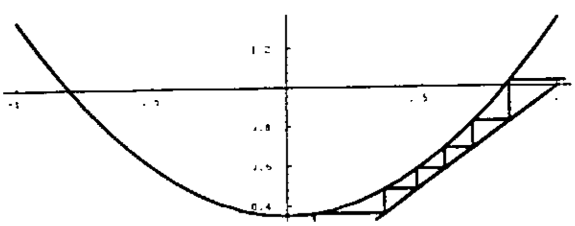


Figura 14

10. Efectúe la iteración numérica para cada uno de los valores de c, en la ecuación $f(x) = x^2 + c$, utilice 6 decimales; c=0.40, 0.35, 0.30, 0.25, $x_0 = 0.2$.

Describa sus observaciones después de efectuar 20 iteradas para cada una de las constantes c. Después de efectuar estos cálculos observe la iteración gráfica para cada uno de los casos.
Explique el comportamiento de la iteración del sistema, teniendo en cuenta los resultados numéricos e iteraciones gráficas.

¿Puede hacer alguna hipótesis con respecto a la constante c, que permita saber si la iteración tiene algún atractor o repulsor?

$c = 0.40$

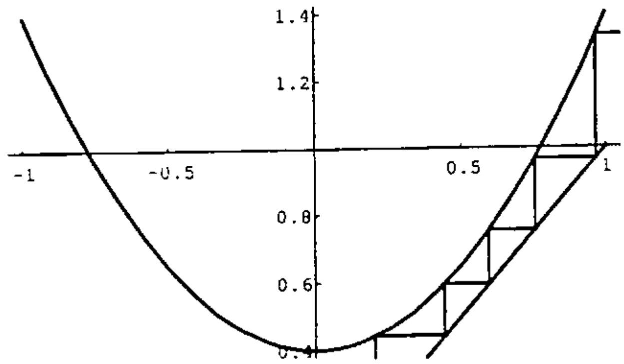


Figura 15

$c = 0.35$

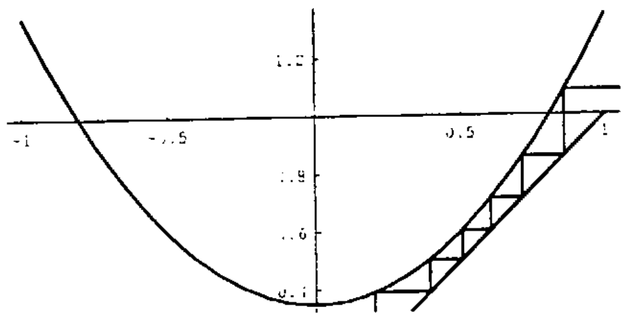


Figura 16

$c = 0.30$

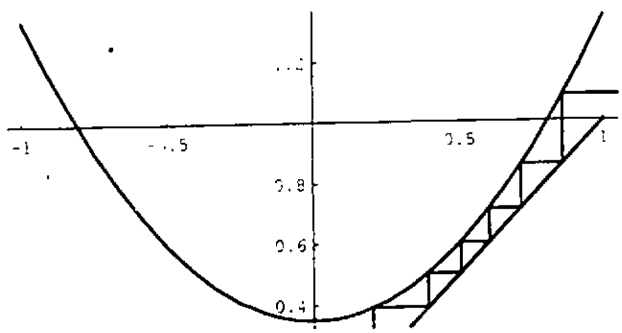


Figura 17

$c = 0.25$

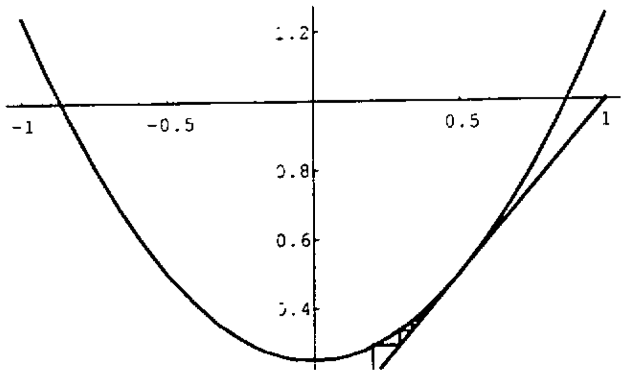


Figura 18

11. Efectúe los mismos pasos del laboratorio 10, pero utilizando los siguientes valores para c: $c = -0.6$, $c = -0.7$, $c = -0.8$, $c = -0.9$, utlizando como valor inicial $x_0 = 03$.

$c = -0.6$

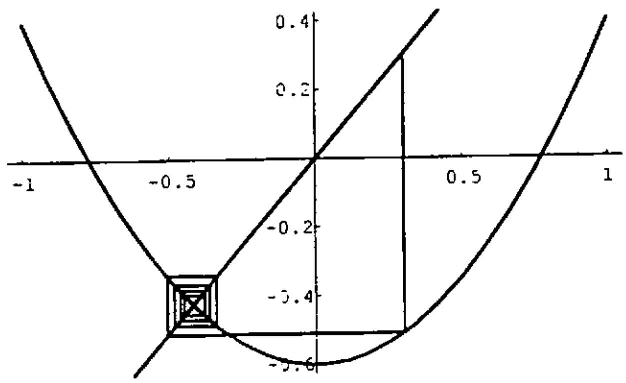


Figura 19

$c = -0.7$

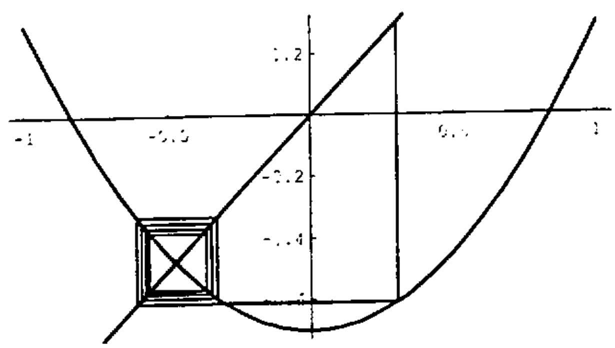


Figura 20

$c = -0.8$

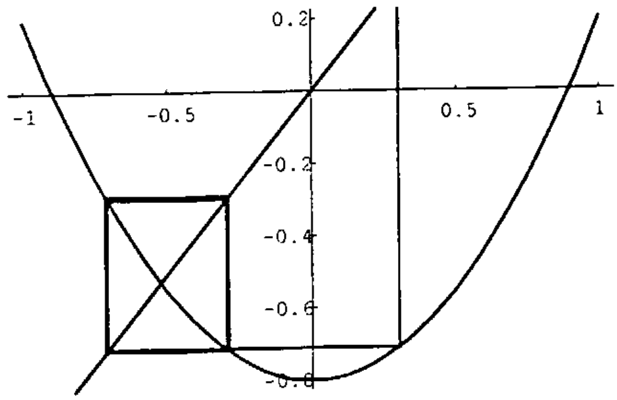


Figura 21

$c = -0.9$

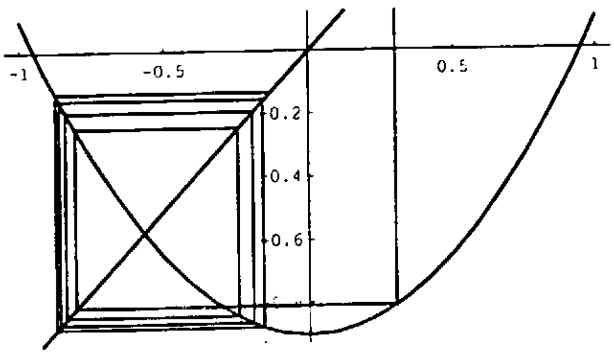


Figura 22

12. Estudie con una calculadora el caso de $c = -2$, para cualquier $0 < x_0 < 1$,describa el comportamineto de la iteración (utilice 6 dígitos). ¿Es diferente de los casos donde c es negativo? ¿Porqué? Observe la iteración gráfica que muestra la figura 23 ¿que puede decir de ella?

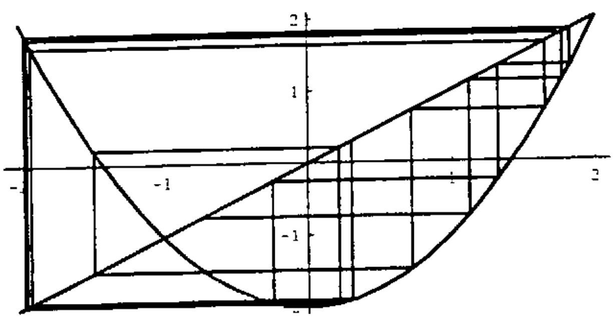


Figura 23

ACTIVIDAD 3

MÁQUINA DE COMPOSICIÓN

No. de alumnos:	100
Grados escolares	8-11
Tiempo	2 semanas
Materiales:	hojas de trabajo, regla y lápiz
Prerrequisitos:	Manejo de funciones y nociones de álgebra

Comentarios

- La actividad se desarrolla con el objeto de que el estudiante adquiera destreza en la construcción de la gráfica de la compuesta de funciones.
- La actividad se convierte en un ayuda para la construcción del concepto de inversa de una función.
- Permite al estudiante preguntarse por las características que debe tener la inversa de una función.
- Con el desarrollo de varias de estas actividades, el estudiante adquiere una destreza que le permite delinear la gráfica de la compuesta sin efectuar la construcción «punto a punto».
- Es conveniente que el maestro participe en la construcción de la gráfica de la función compuesta porque la actividad es tediosa y hay que tener paciencia.
- Las gráficas que se muestran en el taller no fueron realizadas por los estudiantes sino que son un ejemplo de como obtener la gráfica de la función compuesta partiendo de las gráficas de las funciones que se van a componer.
- La actividad mostró que si bien es cierto los estudiantes construyen de forma correcta la sección de la gráfica de la compuesta de los puntos que evalúan gráficamente, la mayoría tiene dificultad de dibujar la gráfica de la compuesta de puntos que no evalúan gráficamente.

Planteamiento teórico

La máquina de composición $g(f(x))$, describe al mismo tiempo el resultado de aplicar la función g(x) en f(x). Una forma de identificar esta composición es mediante la sustitución algebraíca. Por ejemplo, si $f(x)=x^3$ y $g(x)=x+1$, entonces $f(g(x))= (x+1)^3$, a la función $f(x)$ se le aplica la función g(x).

La *máquina de composición* que se describe en este taller es un procedimiento de lapíz y papel, que permite construir $g(f(x))$ o $f(g(x))$ geométricamente. La tecnología de los com-putadores y de las calculadoras gráficas permiten otros métodos de obtener la gráfica de la función compuesta.

El método utiliza cuatro planos cartesianos, P, Q, R, S. La diagonal $f(x) = x$ está siempre en la gráfica Q. Para encontrar $g(f(x))$, dibuje $f(x)$ en el plano cartesiano P y $g(x)$ en R. La composición g(f(x))se construye en el plano S, punto a punto.

Algoritmo:

1. Desde el punto a que está sobre el eje horizontal en la gráfica P, dibuje una línea vertical hasta la gráfica S.
2. Localice el punto $(a,f(a))$, donde esta línea intercepta a $f(x)$, dibuje una línea horizontal desde este punto hasta la diagonal $f(x) = x$ en Q.
3. Refleje este punto desde la línea $f(x)$ = x, verticalmente hacia arriba hasta la gráfica $g(x)$ en R. Localice el punto $(f(a),g(a))$.

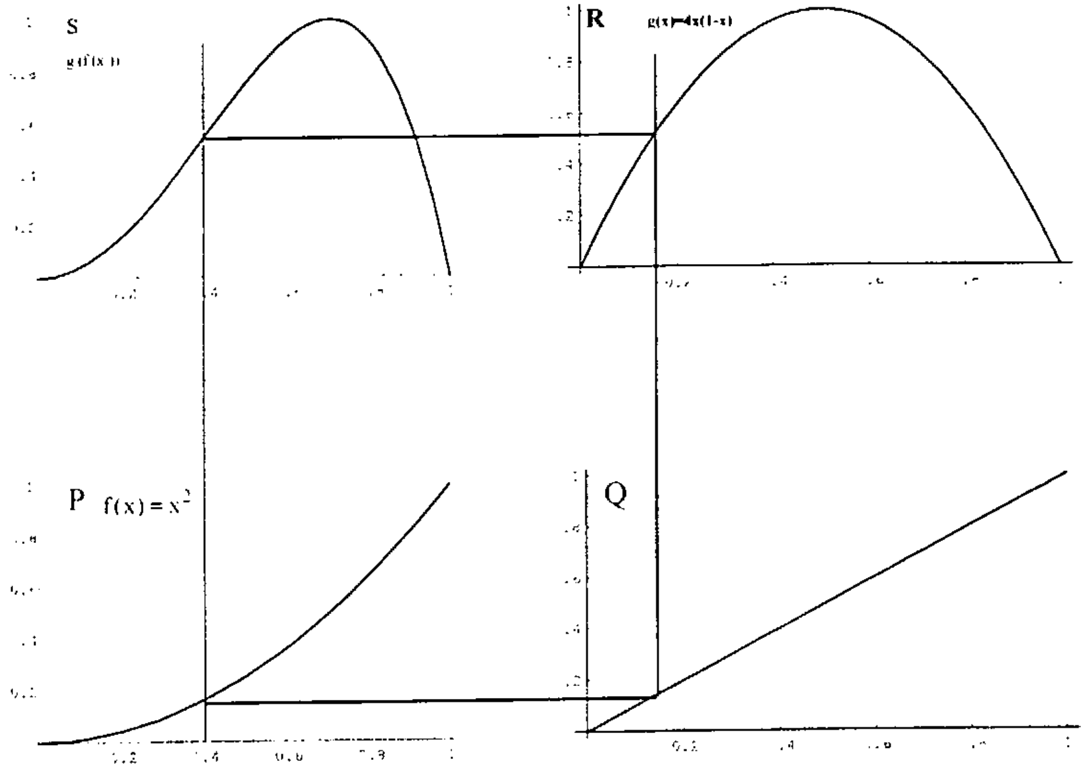


Figura 1

1. Siga los pasos que se dan en el algoritmo y escoja cualquiera de los puntos de *P;* por ejemplo, 0.2, 0.6, 0.8, etc, y repita el procedimiento para encontrar $g(f(0.2))$, $g(f(0.6))$, $g(f(0.8))$ en forma aproximada. Utilice las gráficas del ejemplo del algoritmo.

2. Del ejemplo de la máquina de composición se sabe que $f(x)=x^2$ y $g(x)=4x(1-x)$, encuentre una expresión algebraíca para $g(f(x))$.

3. Encuentre en forma analítica $g(f(0.2))$, $g(f(0.6))$, $g(f(0.8))$, utilizando f(x) y g(x) del ejemplo 2.

4. Si ahora $f(x)=x^2$ y $g(x)=\sqrt{x}$, utilice la máquina de composición con lápiz y regla para construir $g(f(x)$.

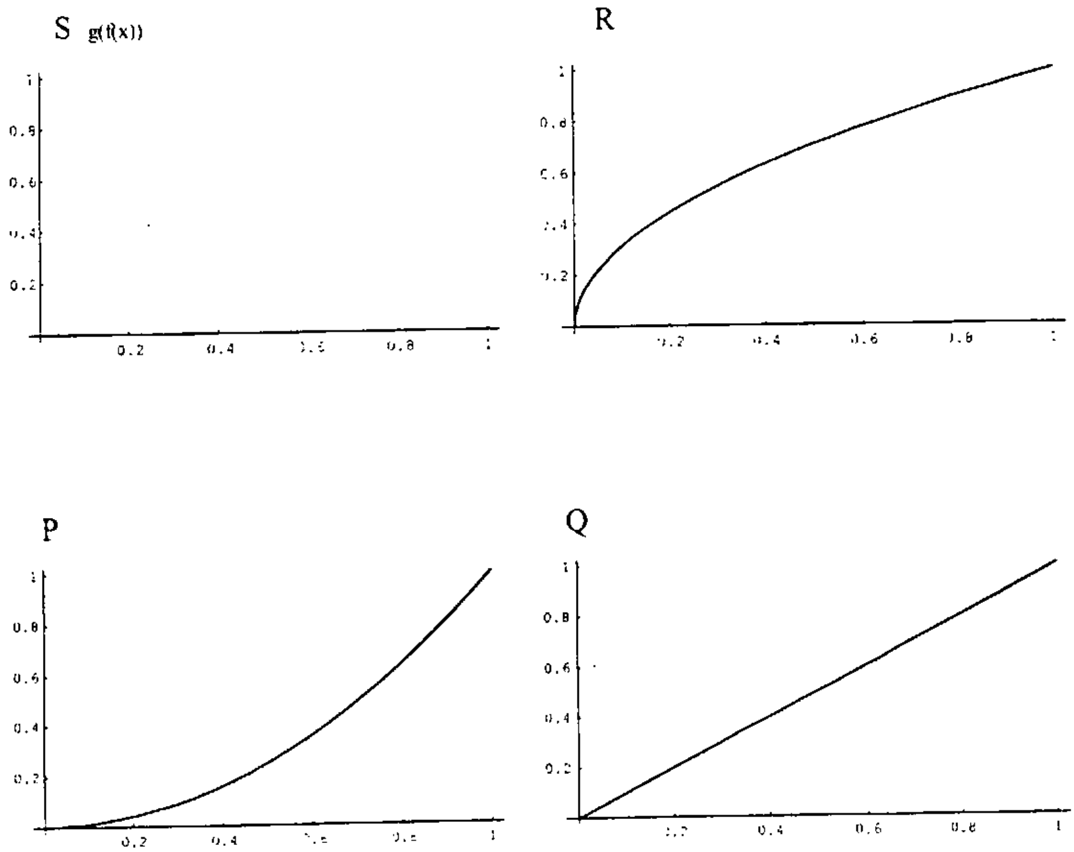


Figura 2

5. Explique, ¿porqué la composición de funciones del ejercicio anterior es extrañamente $g(f(x))=x$?

6. Utilice la máquina de composición para hallar $f(g(x))$.

Utilice el siguiente diagrama para resolver el punto 6.

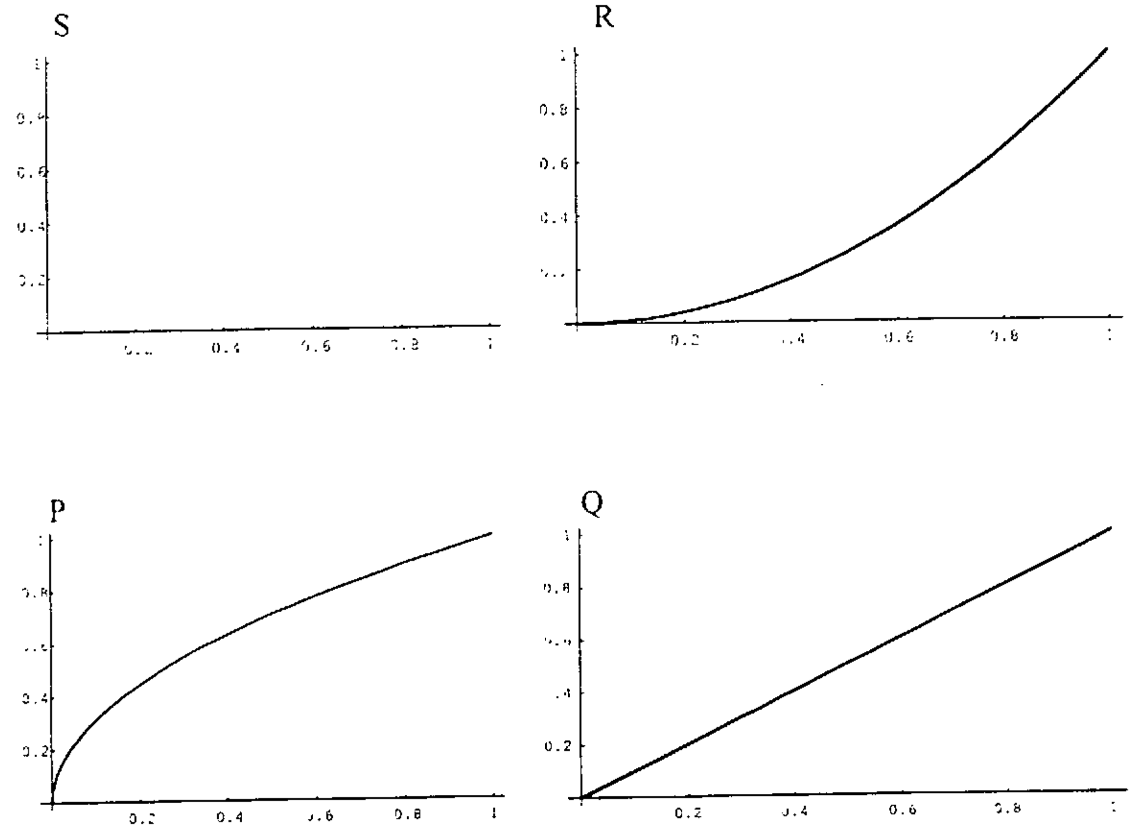


Figura 3

7. La máquina de composición puede servir para hallar $f(f(x))$, utilice los puntos que desee para hallar $f(f(x))$, de acuerdo con la función dada.

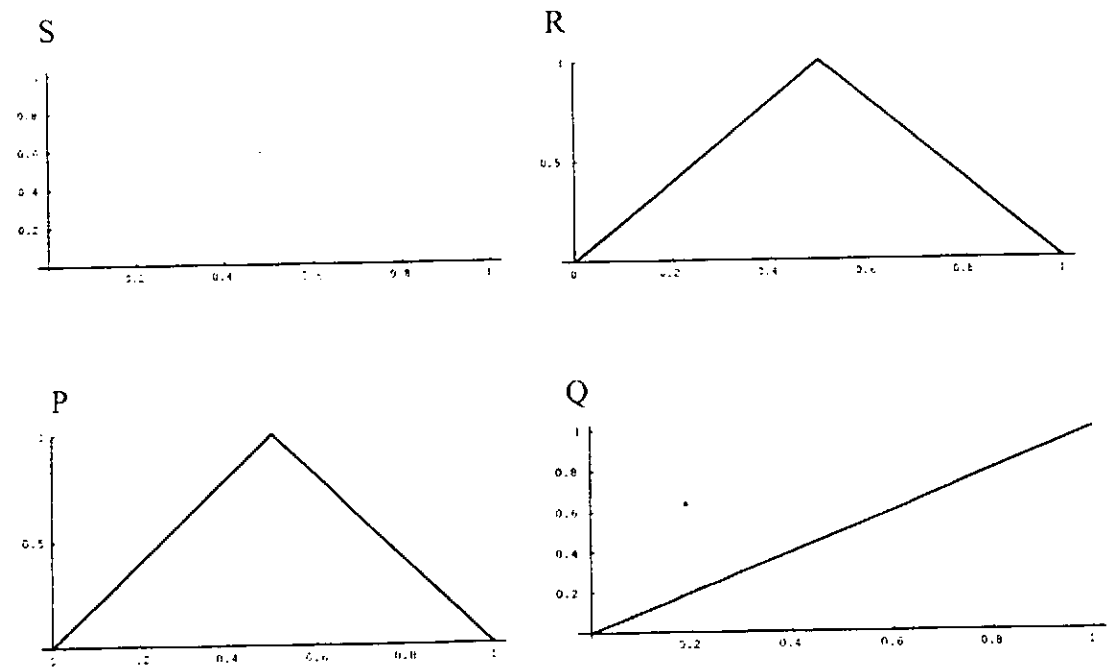
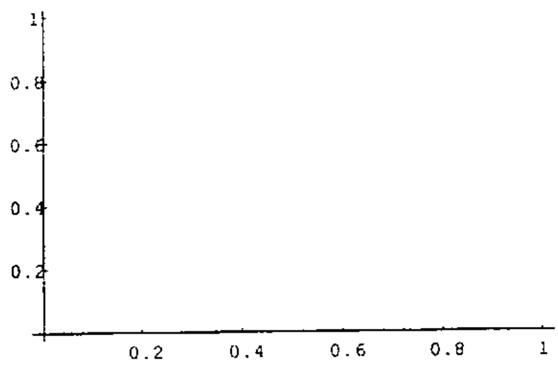


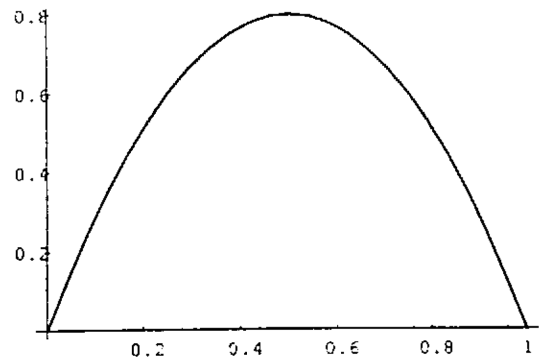
Figura 4

8. La gráfica de la parábola $f(x) = 3.2x(1-x)$ es mostrada en P y R, utilice la máquina de composición para encontrar la gráfica de $f(f(x))$.

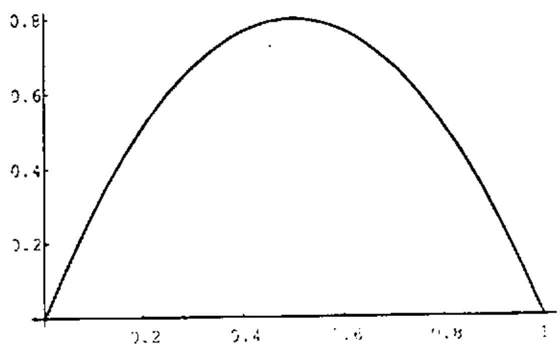
S



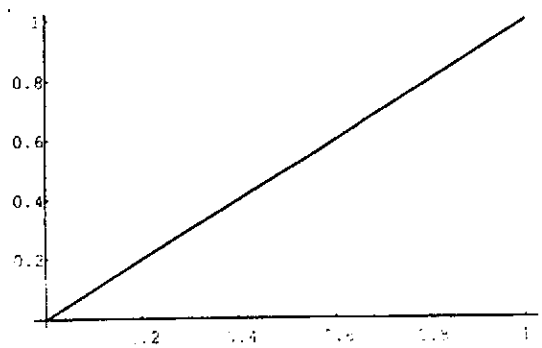
R



P



Q



ACTIVIDAD 4

MATHEMATICA

UNA HERRAMIENTA PARA UN PROBLEMA DE LA EVOLUCIÓN DE ESPECIES

No de alumnos	150
Grados escolares	8-11
Tiempo	45 días
Materiales	Ordenador PC , Programa Mathematica, Derive, Qbasic, calculadora graficadora

Prerrequisitos

Manejo de los programas mencionados arriba, o de la calculadora en cuestión, composición de funciones, nociones básicas de álgebra y para el final de la actividad conocimiento elemental de la derivada.

Hipótesis de los alumnos

La totalidad de los alumnos espera que el comportamiento de la iteración produzca o un comportamiento estable de la población o la muerte de esta. En cuanto al comportamiento estable, si bien es cierto algunos afirma que es posible que la población pueda crecer y luego decrecer en forma cíclica. Al preguntar el por qué de esta afirmación, responden que es el comportamiento de muchas especies de la naturaleza.

Comentarios

1. El trabajo en grupos de más de dos personas en la mayoría de los casos no aportaba nada en la investigación.

2. Es conveniente efectuar al principio el trabajo de obtener la lista de los *n-valores* de la población para un valor de k determinado, de esta manera se logra centrar más la atención en los valores que se obtienen y en la búsqueda de posibles pautas en las listas que se obtienen. Esto es bueno tenerlo en cuenta a la hora de efectuar la actividad. La gráfica de los puntos que se obtienen en la iteración distraen al estudiante por "la belleza de la misma"

3. Una forma alternativa de evitar esto es trabajar simultáneamente con las dos. Sin perder de vista el análisis de los resultados numéricos..

4. La gráfica simultánea de la ecuación logística y la función identidad para cada valor de k ayuda al

estudiante a hacer hipótesis sobre los puntos fijos.

5. De la misma manera se puede alentar al estudiante a que efectúe las gráficas de f(f(x)), f(f(f(x))), f(f(f(f(x)))), etc. para que haga hipótesis sobre lo que hace la compuesta sobre la función. Además se le puede pedir que encuentre los puntos periódicos.

6. El trabajo con la función puede ser explotado con recursos del cálculo diferencial, en la actividad que se realizo se toco muy poco esto por falta de tiempo. Esto podría clarificar mucho el por qué de la aparición del caos.

7. La obtención de la constante de Feigenbaum no se logro, tal vez por falta de una metodología adecuada para su obtención" se pensó que el análisis de los resultados podría ser suficiente para obtenerla.

8. Del trabajo con el *mathematica* surgió la pregunta¿es posible saber entre cuantos puntos oscila la ecuación logística para un valor dado de *k*. Esto se debió a la imposibilidad de saber de ver en la gráfica esta información, para valores 3.5 a 4.

Gráficas y lista de números que obtuvieron los estudiantes en la actividad utilizando el programa *mathematica:*

Para efectuar este trabajo defina la función logística así:

f[x_]:=k*x*(1-x)

luego dele valores a k, por ejemplok=0.9 No olvide digitar la tecla *INS* para que *mathematica* realice la operación, luego digite:

NestList [f, 0.8, 60]. Esto daráuna lista de 60 valores que se obtienen al iterar la función f[x] para un valor inicial de x_0 =0.8 , el valor de *k* dado.

Usted puede cambiar estos valores, por ejemplo si quiere que se listen lo 200 valores de la iteración cambie el valor de 60 por el correspondiente. No olvide que el valor de x_0 es mayor que cero y menor que uno.

Para obtener la gráfica de esta iteración digite en *mathematica*:

ListPlot[%] esto dará la gráfica de la lista de valores que están antes de este comando.

Planteamiento teórico

En 1845 *P.E.Verhulst*, un biólogo preocupado en la matemática del crecimiento demográfico, introdujo una nueva manera de describir la forma como una especie se desarrolla en una zona aislada. La forma como se trataba la evolución de una especie estaba dada por la siguiente fórmula: $x_{n+1} = k x_n$. Esta ecuación funcionaba adecuadamente en poblaciones pequeñas, cuando el alimento era abundante y la especie tenia espacio para expandirse. Sin embargo este crecimiento exponencial no se da en la vida práctica. Para mejorar el modelo *Verhulst* introdujo un nuevo factor a la ecuación anterior así : $x_{n+1} = k x_n(1 - x_n)$. Para poder trabajar mejor esta ecuación se suele normalizar los valores de x para que los cálculo realizados sean más sencillos. La idea de normalizar los valores de x consiste en que esta sólo pueda tomar los valores en 0 y 1. La introducción del nuevo factor, hace que el factor (1-x) y x se comporten como términos rivales. Cuando x crece el término (1-x) disminuye y hace que el término del lado derecho disminuya, ó sea que la tasa de natalidad disminuya. Sin embargo la ecuación de Verhultz tiene también un término *k* en algunos otros textos parece como (λ, κ). Esta constante : tiene que ver con muchos factores que afectan el desarrollo de la evolución de la población a saber: tasa de natalidad, mortalidad, alimentación disponible, espacio con el que cuenta para su desarrollo etc. Para estudiar el comportamiento de esta función se toma un valor de población inicial x_0, que como se dijo anteriormente está normalizado, se le da una valor a *k*, que en este caso va a tomar valores mayores que cero y menores o iguales que cuatro. El resultado que de al realizar los cálculos será el nuevo valor de x. Por ejemplo para un valor inicial de x= 0.8, que quiere decir que la población inicial es de 80% y una constante k=0.5 . Que podría significar que la especie cuenta con un índice de natalidad pequeño, con poco alimento etc. Al iterar la función dará los siguientes resultados:

x_1 =0.5*0.8*(1-0.8) = 0.08
x_2 =0.5*0.08*(1-0.08) = 0.0368
x_3=0.5*0.0368*(1-0.0368)= 0.0177229

Los valores hasta la doceava iteración son:
{0.8, 0.08, 0.0368, 0.0177229, 0.00870439, 0.00431431, 0.00214785, 0.00107162, 0.000535235, 0.000267474, 0.000133701, 0.0000668417, 0.0000334186}.

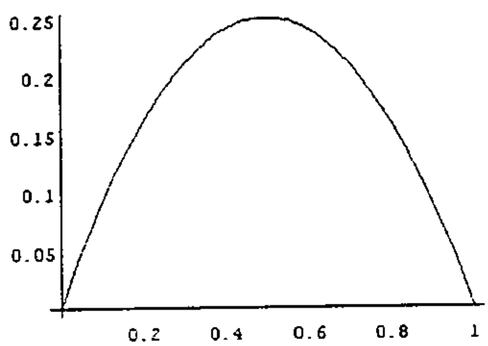
La aplicación de *Verhulst* tiene muchas aplicaciones entre las que se pueden nombrar: en entomología, para calcular el efecto de las plagas en los cultivos, en Biología se utiliza para calibrar la frecuencia de cierto tipo de genes en la población, lo interesante de la aplicación de Verhulst es que en su aplicación ronda la aparición del caos determinista.

En la ecuación logística se puede apreciar que:

- Si la población es muy pequeña y hay recursos para que se produzca un crecimiento de la especie a lo largo de los años la ecuación será simplemente: $x_{n+1} = k x_n$ con k>1.

- Si la población crece muy rápidamente, los recursos se irán agotando hasta que resulten insuficientes para todos, luego se necesita de un termino que se reduzca con el tiempo y que además haga decrecer la siguiente generación de la especie: $x_{n+1} = k * x_n - k x^2_n$.

La gráfica de la ecuación logística es una parábola invertida, que alcanza su máximo en x=0.5 y sube hasta *k/4* corta el eje x en cero y uno como se muestra en la siguiente gráfica(en este caso k=1).



El estudio de la iteración de la ecuación logística, para una semilla x_0 puede ser obtenido de diferentes maneras. Una de ellas es utilizando el programa *Mathematica* o el programa Derive, con la utilización de estos programas el alumno puede obtener una lista de valores para una constante k cualquiera y además ver gráficamente el desarrollo de la iteración. El estudio de este sistema dinámico con la utilización de estos programas, permite resolver muchas preguntas además encontrar pautas e invariantes del comportamiento de la iteración.

Otra forma de atacar el problema es utilizando un pequeño programa en Qbasic que puede ser realizado con pocos conocimientos, esta fue la primera manera con la que se ataco el problema de la evolución de este sistema, de hecho el físico *Michell J. Feigenbaum* estudio el sistema con una calculadora *HP 48*, encontrando una constante universal que esta relacionada con los valores de k para los que la ecuación logística itera entre 2, 4, 8,.. ciclos. Otra forma de estudiar el comportamiento de la ecuación logística al ser iterada es utilizando la técnica de iteración gráfica que fue descrita en el apartado anterior.

El estudio de la iteración para diferentes valores de k muestran órbitas que convergen hacia algún valor concreto, otras hacia adelante y hacia atrás para luego converger a un valor particular. La evolución de la iteración se produce por pautas regulares. Para valores de k mayores que cero y menores que uno la iteración de la ecuación converge a 0. Para $1 \leq k \prec 3$ todas las iteraciones sin importar la semilla con la cual se comienza la iteración convergen a una valor que como se vio en la sección anterior se denomina punto fijo y este se da cuando $f(a)=a$ y que geométricamente es el punto de corte de la ecuación logística con la recta **y = x**:

$$xk - x^2k = x$$

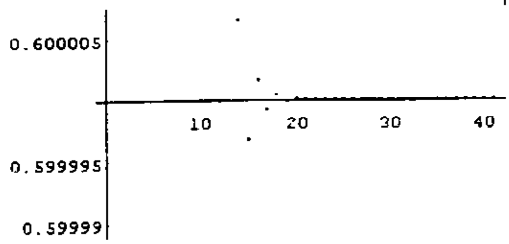
$$xk - x^2k - x = 0, \quad -x^2k + x(k-1) = 0, \quad x(kx - (k-1)) = 0$$

$x(k(x-1)+1) = 0$, que es igual a cero si

$$x = 0 \text{ ó } k(x-1)+1 = 0,\ k(x-1) = -1,\ x = \frac{k-1}{k}$$

A esto se le conoce como un estado de equilibrio estable, para ver esto tomemos **k=2.5**, la siguiente lista muestra el comportamiento de la iteración del sistema:

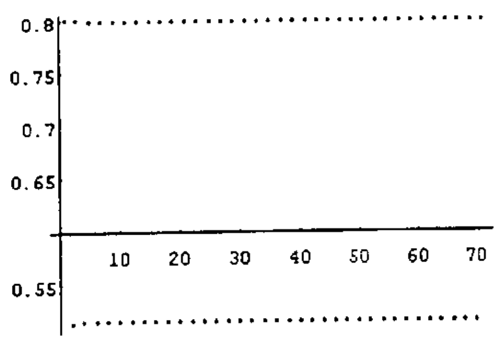
{0.5, 0.625, 0.585937, 0.606537, 0.596625, 0.601659, 0.599164, 0.600416, 0.599791, 0.600104, 0.599948, 0.600026, 0.599987, 0.600007, 0.599997, 0.600002, 0.599999, 0.6,}, la gráfica de esta iteración es:



a partir de este valor la sistema comienza a hacer cosas raras para un valor de k = 3.2 el sistema dinámico comienza a oscilar entre dos valores. A esto se le conoce en teoría de sistemas un ciclo de periodo dos: los 70 primeros valores de la órbita se dan en la siguiente lista:

{0.8, 0.512, 0.799539, 0.512884, 0.799469, 0.513019, 0.799458, 0.51304, 0.799456, 0.513044, 0.799456, 0.513044, 0.799455, 0.513044, 0.799455, 0.513045, 0.799455},

y su respectiva gráfica es:

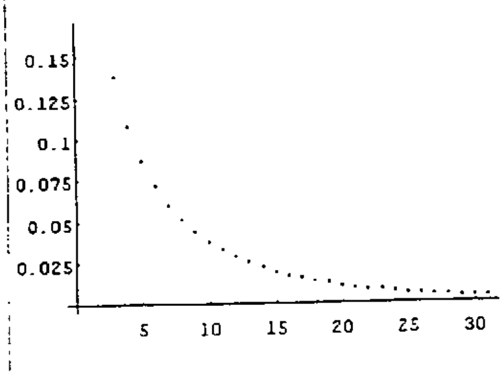


El *objetivo* de la actividad, es que los estudiantes utilicen las diferentes herramientas mencionadas en la ficha, para efectuar una investigación sobre el comportamiento de la iteración de la ecuación logística para diferentes valores de **k**. Con este estudio se pretende poner de relieve el comportamiento caótico de la ecuación a medida que la constante **k** se aproxima a cuatro. La actividad pretende también que los estudiantes reconozcan que ecuaciones simples en apariencia y cuyo comportamiento parece ser completamente determinista pueden ofrecer un alto grado de complejidad. Con la actividad se busca también que el estudiante ofrezca posibles respuestas al comportamiento de la iteración. Sin embargo estas *respuestas* que se pretenden sean formuladas por los estudiantes no se quieren que sean el resultado de una consulta de textos sino el resultado de la interacción racional con el laboratorio y la utilización del software que puede ayudar a visualizar hipótesis.

Algunos listados numéricos para diferentes valores de k obtenidos por los estudiantes y sus gráficas fueron:

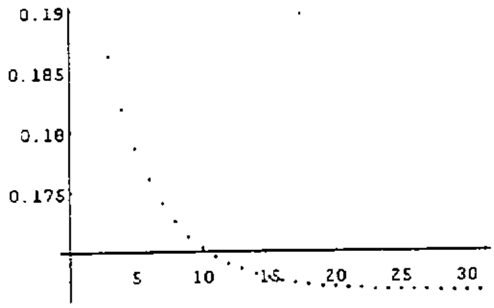
k =0.9

{0.7, 0.189, 0.137951, 0.107029, 0.0860161, 0.0707556, 0.0591743, 0.0501054, 0.0428354, 0.0369005, 0.0319849, 0.0278657, 0.0243803, 0.0214073, 0.0188541, 0.0166488, 0.0147344, 0.0130656, 0.0116054, 0.0103237, 0.00919537, 0.00819973, 0.00731924, 0.00653911, 0.00584671, 0.00523127, 0.00468352, 0.00419542, 0.00376004, 0.00337131, 0.00302395}



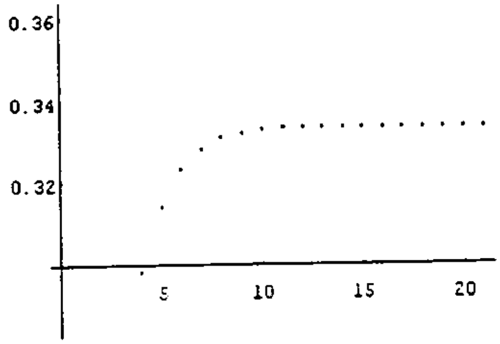
k=1.2

{0.8, 0.192, 0.186163, 0.181808, 0.178504, 0.175969, 0.174004, 0.172472, 0.171271, 0.170324, 0.169577, 0.168985, 0.168515, 0.168141, 0.167843, 0.167606, 0.167417, 0.167267, 0.167146, 0.16705, 0.166973, 0.166912, 0.166863, 0.166823, 0.166792, 0.166767, 0.166747, 0.166731, 0.166718, 0.166708, 0.1667}



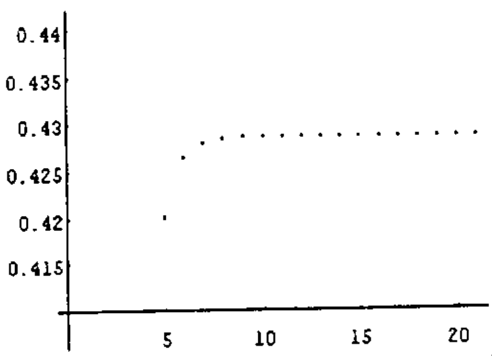
k=1.5

{0.8, 0.24, 0.2736, 0.298115, 0.313863, 0.32303, 0.328022, 0.330636, 0.331974, 0.332651, 0.332991, 0.333162, 0.333248, 0.333291, 0.333312, 0.333323, 0.333328, 0.333331, 0.333332, 0.333333, 0.333333}



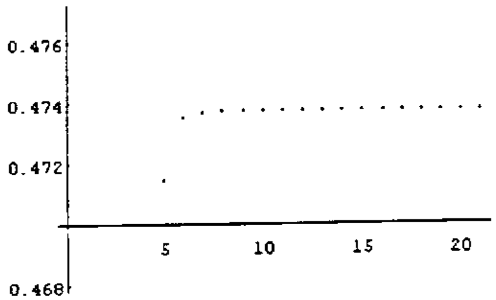
k=1.75

{0.8, 0.28, 0.3528, 0.399581, 0.419853, 0.426259, 0.427984, 0.428424, 0.428535, 0.428562, 0.428569, 0.428571, 0.428571, 0.428571, 0.428571, 0.428571, 0.428571, 0.428571, 0.428571, 0.428571, 0.428571}



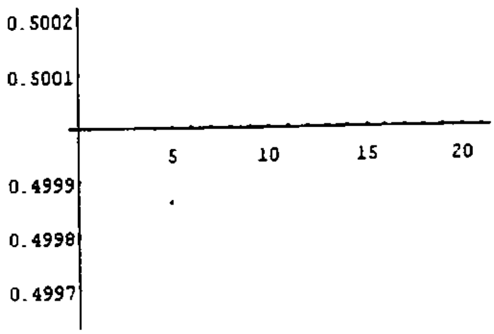
k=1.9

{0.8, 0.304, 0.40201, 0.456756, 0.471447, 0.473451, 0.473661, 0.473682, 0.473684, 0.473684, 0.473684, 0.473684, 0.473684, 0.473684.}



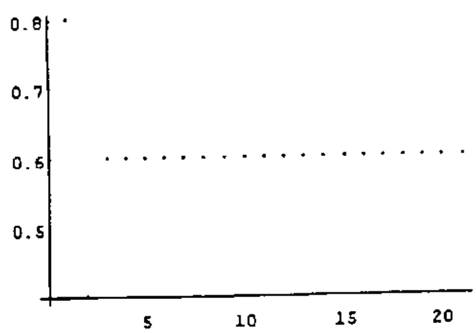
k=2

{0.8, 0.32, 0.4352, 0.491602, 0.499859, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5}



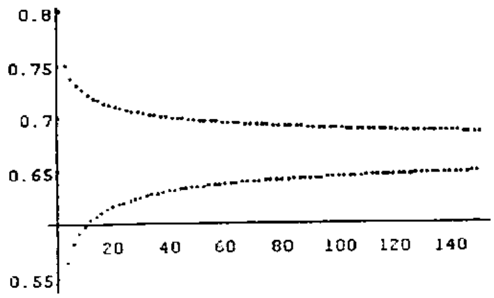
k=2.5

{0.8, 0.4, 0.6, 0.6, 0.6, 0.6, 0.6, 0.6, 0.6, 0.6, 0.6, 0.6, 0.6, 0.6, 0.6, 0.6, 0.6, 0.6, 0.6, 0.6, 0.6}



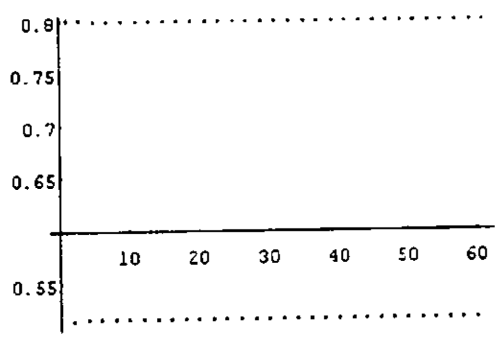
k=3

{0.8, 0.48, 0.7488, 0.564296, 0.737598, 0.580641, 0.730491, 0.590622, 0.725363, 0.597634, 0.721403, 0.602943, 0.718208, 0.607155, 0.715553, 0.61061, 0.713296, 0.613514, 0.711343, 0.616002, 0.709631, 0.618165, 0.708111, 0.620069, 0.70675, 0.621763, 0.705521, 0.623283, 0.704404, 0.624657, 0.703382, 0.625908, 0.702442, 0.627052, 0.701573, 0.628104, 0.700768, 0.629077, 0.700017, 0.629979, 0.699316, 0.630819, 0.698659, 0.631604, 0.698041, 0.632339, 0.697459, 0.633029, 0.69691, 0.63368, 0.696389, 0.634294, 0.695895, 0.634875, 0.695426, 0.635426, 0.69498, 0.635949, 0.694554, 0.636447, 0.694147}



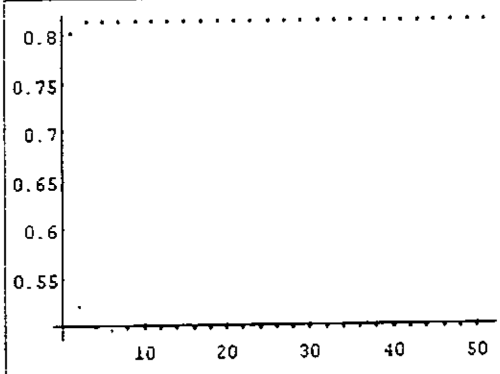
k=3.2

{0.8, 0.512, 0.799539, 0.512884, 0.799469, 0.513019, 0.799458, 0.51304, 0.799456, 0.513044, 0.799456, 0.513044, 0.799455, 0.513044, 0.799455, 0.513045, 0.799455, 0.513045, 0.799455, 0.513045, 0.799455, 0.513045, 0.799455, 0.513045, 0.799455, 0.513045, 0.799455, 0.513045, 0.799455, 0.513045}



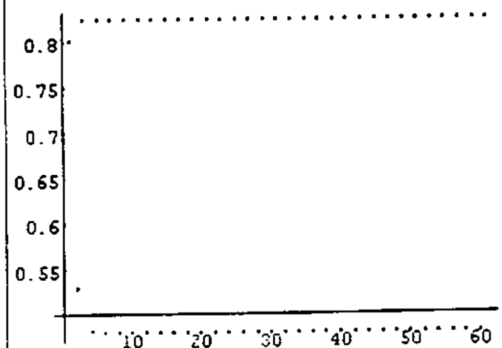
k=3.25

{0.8, 0.52, 0.8112, 0.497752, 0.812484, 0.495151, 0.812424, 0.495272, 0.812427, 0.495265, 0.812427, 0.495265, 0.812427, 0.495265, 0.812427, 0.495265, 0.812427, 0.495265, 0.812427, 0.495265, 0.812427, 0.495265, 0.812427}



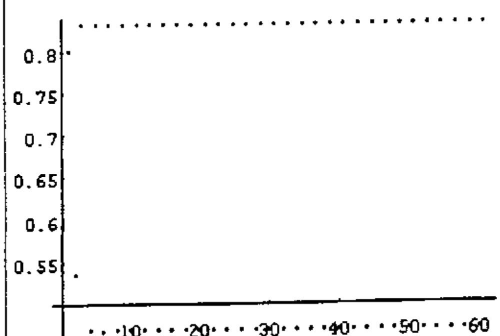
k=3.3

{0.8, 0.528, 0.822413, 0.481965, 0.823927,
0.478736, 0.823508, 0.479631, 0.823631,
0.479368, 0.823595, 0.479444, 0.823606,
0.479422, 0.823603, 0.479428, 0.823603,
0.479427, 0.823603, 0.479427, 0.823603,
0.479427, 0.823603, 0.479427, 0.823603,
0.479427, 0.823603, 0.479427, 0.823603,
0.479427, 0.823603}



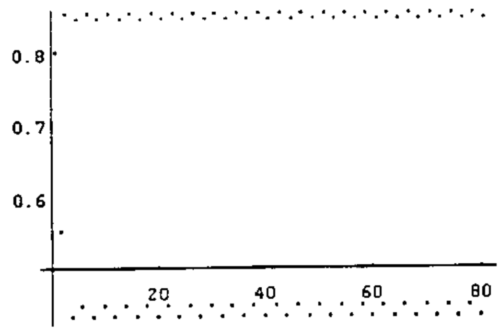
k=3.348

{0.8, 0.5344, 0.831048, 0.468961, 0.831782,
0.467335, 0.831436, 0.468101, 0.831601,
0.467735, 0.831523, 0.467909, 0.83156, 0.467826,
0.831543, 0.467866, 0.831551, 0.467847,
0.831547, 0.467856, 0.831549, 0.467852, 0.831548,
0.467854, 0.831548, 0.467853, 0.831548,
0.467853, 0.831548, 0.467853, 0.831548}



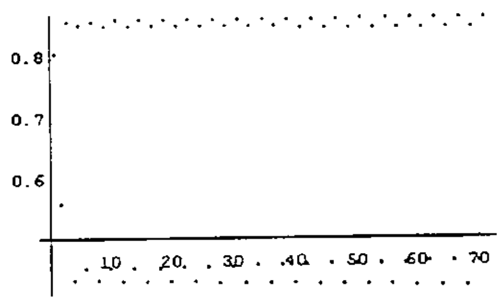
k=3.45

{0.8, 0.552, 0.853171, 0.432182, 0.846632,
0.447969, 0.85316, 0.432209, 0.846645, 0.447938,
0.853149, 0.432236, 0.846658, 0.447908,
0.853138, 0.432263, 0.84667, 0.447878, 0.853127,
0.432288, 0.846682, 0.447849, 0.853117,
0.432314, 0.846694, 0.447821, 0.853107,
0.432338, 0.846706, 0.447794, 0.853097,
0.432363, 0.846717, 0.447766, 0.853087,
0.432387, 0.846728, 0.44774, 0.853078, 0.43241,
0.846739, 0.447714, 0.853068, 0.432433, 0.84675,
0.447688, 0.853059, 0.432455, 0.84676, 0.447663,
0.85305, 0.432477, 0.84677, 0.447639, 0.853041,
0.432499, 0.84678, 0.447615, 0.853032, 0.43252,
0.84679, 0.447591, 0.853024, 0.432541, 0.8468,
0.447568, 0.853015, 0.432561, 0.846809,
0.447545, 0.853007, 0.432581, 0.846819,
0.447523, 0.852999, 0.432601, 0.846828, 0.447501,
0.852991, 0.43262, 0.846837}



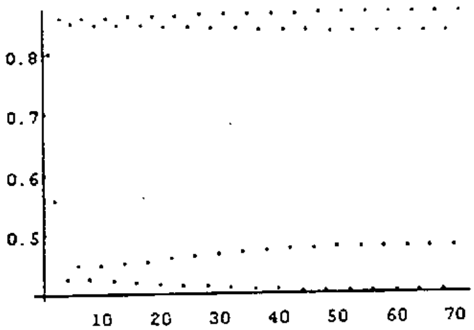
K=3.4578

{0.8, 0.553248, 0.854646, 0.42955, 0.847288,
0.447408, 0.854886, 0.42896, 0.847, 0.4481,
0.855136, 0.428346, 0.846697, 0.448827,
0.855395, 0.42771, 0.84638, 0.449586, 0.855662,
0.427055, 0.846051, 0.450374, 0.855934, 0.426384,
0.845711, 0.451187, 0.856211, 0.425702, 0.845362,
0.45202, 0.85649, 0.425015, 0.845008, 0.452867,
0.856768, 0.424329, 0.84465, 0.45372, 0.857044,
0.423648, 0.844293, 0.454571, 0.857314,
0.422981, 0.843939, 0.455413, 0.857576,
0.422334, 0.843592, 0.456237, 0.857828,
0.421711, 0.843257, 0.457034, 0.858067, 0.421119,
0.842935, 0.457797, 0.858291, 0.420563, 0.84263,
0.45852, 0.858501, 0.420045, 0.842345, 0.459196,
0.858693, 0.419567, 0.84208, 0.459823, 0.858868}



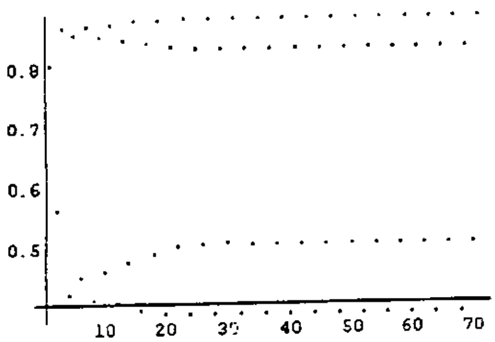
k=3.47

{0.8, 0.5552, 0.856927, 0.425433, 0.848206, 0.446771, 0.857668, 0.423594, 0.847243, 0.449096, 0.858508, 0.421507, 0.846121, 0.451796, 0.859437, 0.419194, 0.844842, 0.454861, 0.86043, 0.416714, 0.84343, 0.458234, 0.861447, 0.414166, 0.841935, 0.46179, 0.862434, 0.411687, 0.840437, 0.465337, 0.863331, 0.409428, 0.839035, 0.468642, 0.864088, 0.407517, 0.837821, 0.471494, 0.86468, 0.406019, 0.836851, 0.473763, 0.865111, 0.404927, 0.836135, 0.475436, 0.865406, 0.40418, 0.83564, 0.47659, 0.865598, 0.403693, 0.835315, 0.477346, 0.865719, 0.403386, 0.83511, 0.477824, 0.865793, 0.403197, 0.834983, 0.478118, 0.865838, 0.403083, 0.834906, 0.478297, 0.865866, 0.403014, 0.83486, 0.478404, 0.865882}



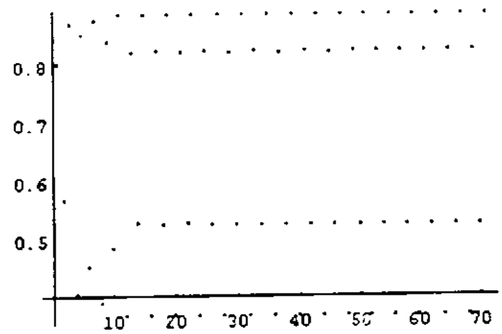
k=3.5

{0.8, 0.56, 0.8624, 0.415332, 0.84991, 0.446472, 0.864971, 0.408785, 0.84588, 0.456285, 0.868312, 0.400213, 0.840149, 0.470046, 0.87186, 0.391022, 0.833433, 0.485879, 0.874302, 0.384643, 0.828425, 0.49748, 0.874978, 0.382871, 0.826983, 0.500788, 0.874998, 0.382818, 0.826939, 0.500887, 0.874997, 0.38282, 0.826941, 0.500884, 0.874997, 0.38282, 0.826941, 0.500884, 0.874997, 0.38282, 0.826941, 0.500884, 0.874997, 0.38282, 0.826941, 0.500884, 0.874997, 0.38282, 0.826941, 0.500884, 0.874997, 0.38282, 0.826941, 0.500884, 0.874997, 0.38282, 0.826941, 0.500884, 0.874997, 0.38282, 0.826941, 0.500884, 0.874997, 0.38282, 0.826941, 0.500884, 0.874997, 0.38282, 0.826941, 0.500884, 0.874997}



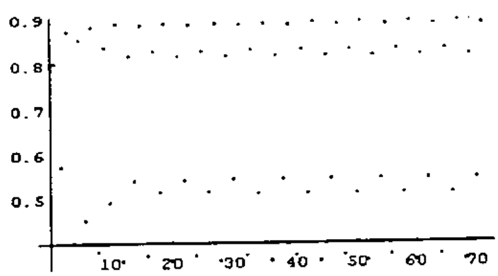
k=3.54

{0.8, 0.5664, 0.869392, 0.401965, 0.850977, 0.448925, 0.875765, 0.385154, 0.838308, 0.479838, 0.883561, 0.364199, 0.819715, 0.523148, 0.883103, 0.365441, 0.820905, 0.520451, 0.883519, 0.364312, 0.819824, 0.522903, 0.883143, 0.365333, 0.820801, 0.520687, 0.883485, 0.364405, 0.819913, 0.5227, 0.883176, 0.365244, 0.820717, 0.520879, 0.883457, 0.364481, 0.819987, 0.522534, 0.883202, 0.365172, 0.820648, 0.521035, 0.883434, 0.364545, 0.820047, 0.522397, 0.883224, 0.365112, 0.820591, 0.521164, 0.883414, 0.364597, 0.820097, 0.522283, 0.883242, 0.365064, 0.820545, 0.521269, 0.883399, 0.36464, 0.820139, 0.52219, 0.883257, 0.365024, 0.820506, 0.521356, 0.883386, 0.364675, 0.820172, 0.522113, 0.883269}



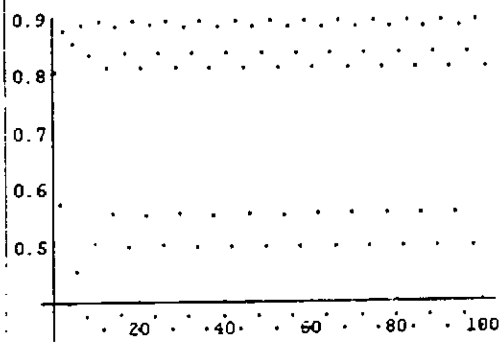
k=3.5489

{0.8, 0.567824, 0.8709, 0.399015, 0.851033, 0.449914, 0.878322, 0.379279, 0.835505, 0.487748, 0.886692, 0.356555, 0.814201, 0.53687, 0.882401, 0.368268, 0.82564, 0.510895, 0.886804, 0.356249, 0.813889, 0.537565, 0.882217, 0.368767, 0.826105, 0.509819, 0.886883, 0.356031, 0.813667, 0.538059, 0.882084, 0.369126, 0.82644, 0.509044, 0.886935, 0.355889, 0.813522, 0.538383, 0.881997, 0.369365, 0.826661, 0.508531, 0.886967, 0.355801, 0.813432, 0.538583, 0.881942, 0.369513, 0.826798, 0.508213, 0.886986, 0.355749, 0.813379, 0.538701, 0.881909, 0.369601, 0.82688, 0.508024, 0.886996, 0.355719, 0.813348, 0.538769, 0.881891, 0.369651, 0.826927, 0.507915, 0.887003, 0.355702, 0.813331, 0.538808, 0.88188}



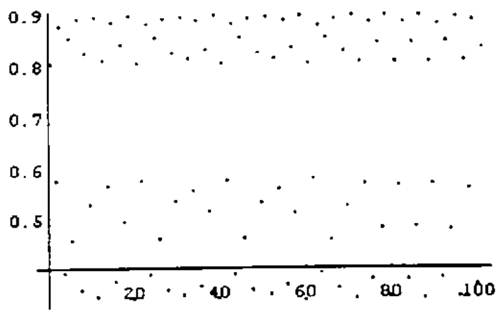
k=3.56

{0.8, 0.5696, 0.872755, 0.395352, 0.851014, 0.451371, 0.881581, 0.371649, 0.831353, 0.499132, 0.889997, 0.348531, 0.808324, 0.551573, 0.880531, 0.374498, 0.833928, 0.493033, 0.889827, 0.349004, 0.808832, 0.550456, 0.880937, 0.373398, 0.83294, 0.495377, 0.889924, 0.348735, 0.808544, 0.551091, 0.880707, 0.37402, 0.8335, 0.494049, 0.889874, 0.348874, 0.808693, 0.550763, 0.880826, 0.373698, 0.83321, 0.494737, 0.889901, 0.348798, 0.808611, 0.550943, 0.880761, 0.373875, 0.833369, 0.49436, 0.889887, 0.348838, 0.808655, 0.550847, 0.880796, 0.37378, 0.833284, 0.494561, 0.889895, 0.348816, 0.808631, 0.550899, 0.880777, 0.373832, 0.83333, 0.494452, 0.88989, 0.348828, 0.808644, 0.550871, 0.880787, 0.373804, 0.833305, 0.494511, 0.889893, 0.348822, 0.808637, 0.550886, 0.880782, 0.373819, 0.833319, 0.494479, 0.889891, 0.348825, 0.808641, 0.550878, 0.880785, 0.373811, 0.833312, 0.494496, 0.889892, 0.348823, 0.808638, 0.550883, 0.880783, 0.373815, 0.833316, 0.494487, 0.889892, 0.348824, 0.80864}



k=3.59

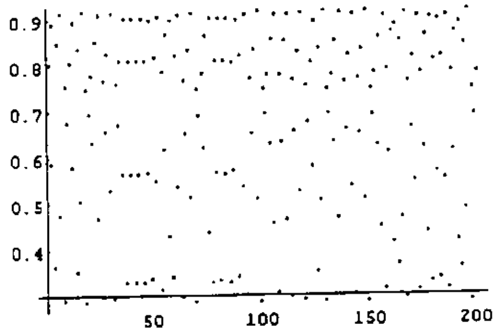
{0.8, 0.5744, 0.877628, 0.385555, 0.85048, 0.456519, 0.890713, 0.349464, 0.816146, 0.538685, 0.892128, 0.345487, 0.811792, 0.548502, 0.889055, 0.354104, 0.821085, 0.527387, 0.894807, 0.337917, 0.803187, 0.567498, 0.881144, 0.375979, 0.842281, 0.476909, 0.895586, 0.335708, 0.800599, 0.573109, 0.878312, 0.3837, 0.848943, 0.460378, 0.891864, 0.346229, 0.812613, 0.546661, 0.889684, 0.352347, 0.819233, 0.531645, 0.893905, 0.340472, 0.806137, 0.561046, 0.884121, 0.367798, 0.834756, 0.495198, 0.897417, 0.330494, 0.794351, 0.586454, 0.870667, 0.404254, 0.86459, 0.420297, 0.874694, 0.393479, 0.856765, 0.44056, 0.884816, 0.365881, 0.832923, 0.499592, 0.897499, 0.330259, 0.794065, 0.587057, 0.870292, 0.405254, 0.865273, 0.418506, 0.873658, 0.396264, 0.858867, 0.435159, 0.882407, 0.372517, 0.839156, 0.484554, 0.896644, 0.332699, 0.797018, 0.580792, 0.874067, 0.395166, 0.858045, 0.437275, 0.883375, 0.369854, 0.836692, 0.490531, 0.897178, 0.331176, 0.795179, 0.5847, 0.871745, 0.401383, 0.862586, 0.425528, 0.877589, 0.38566, 0.850566, 0.456302, 0.890645, 0.349654, 0.816352, 0.538217, 0.892257, 0.345124, 0.811388, 0.549404, 0.888738, 0.35499, 0.82201, 0.525251, 0.895211, 0.336772, 0.80185, 0.570403, 0.879706, 0.379906, 0.845723, 0.468407, 0.893917, 0.340438, 0.806099, 0.561129, 0.884085, 0.367899, 0.834852, 0.494968, 0.897409, 0.330517, 0.794379, 0.586394, 0.870704, 0.404156, 0.864522, 0.420474, 0.874796, 0.393206, 0.856557, 0.441094, 0.885043, 0.365253, 0.832317, 0.501039, 0.897496}



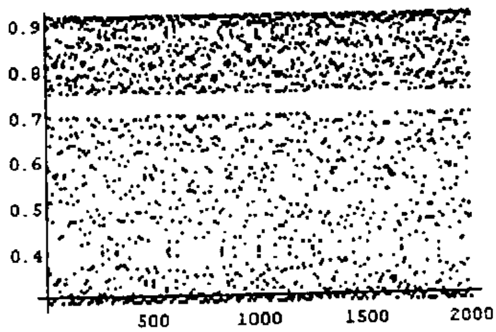
k=3.66

{0.8, 0.5856, 0.888182, 0.363492, 0.846798, 0.474815, 0.912679, 0.291689, 0.75618, 0.674802, 0.803167, 0.578609, 0.892383, 0.35149, 0.834277, 0.506027, 0.914867, 0.28506, 0.745911, 0.693671, 0.777719, 0.632712, 0.850538, 0.465271, 0.910586, 0.297995, 0.76565, 0.656713, 0.825114, 0.528142, 0.912101, 0.293431, 0.758825, 0.669815, 0.809456, 0.564507, 0.89977, 0.330073, 0.809317, 0.564822, 0.899621, 0.330509, 0.809859, 0.563595, 0.900198, 0.328821, 0.807753, 0.568353, 0.8979, 0.335533, 0.815999, 0.549528, 0.906022, 0.311636, 0.785139, 0.617427, 0.864532, 0.428645, 0.896365, 0.339994, 0.821297, 0.537171, 0.909943, 0.299925, 0.76849, 0.651162, 0.831369, 0.513112, 0.914371, 0.286567, 0.748273, 0.6894, 0.783708, 0.620406, 0.861939, 0.435541, 0.899793, 0.330006, 0.809233, 0.565012, 0.899531, 0.330773, 0.810185, 0.562853, 0.900541, 0.327815, 0.806489, 0.571196, 0.896448, 0.339755, 0.821016, 0.537832, 0.909762, 0.300469, 0.769286, 0.649596, 0.833093, 0.508919, 0.914709, 0.285541, 0.746666, 0.69231, 0.779642, 0.62879, 0.854292, 0.455586, 0.90778, 0.306398, 0.777817, 0.632514, 0.850731, 0.464775, 0.910459, 0.298376, 0.766214, 0.655617, 0.826367, 0.525154, 0.912684, 0.291672, 0.756153, 0.674851, 0.803103, 0.57875.

0.892302. 0.351722. 0.83453. 0.505409. 0.914893. 0.284982. 0.745788. 0.693894. 0.777403. 0.633353. 0.849914. 0.466871. 0.910983. 0.2968. 0.763878. 0.660149. 0.82113. 0.537565. 0.909835. 0.300248. 0.768963. 0.650231. 0.832396. 0.510618. 0.914587. 0.285909. 0.747245. 0.691264. 0.78111. 0.625777. 0.857099. 0.448278. 0.905209. 0.314049. 0.788446. 0.610484. 0.870323. 0.41307. 0.887342. 0.365875. 0.849159. 0.468803. 0.911438. 0.295431. 0.761835. 0.66408. 0.816465. 0.548452. 0.906408. 0.310487. 0.783551. 0.620732. 0.861651. 0.436303. 0.90015. 0.32896. 0.807928. 0.567959. 0.898096. 0.33496. 0.815309. 0.69019. 0.78261}

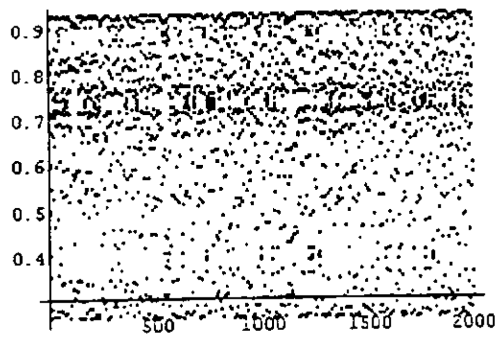


la misma k=3.66 pero con 2000 puntos



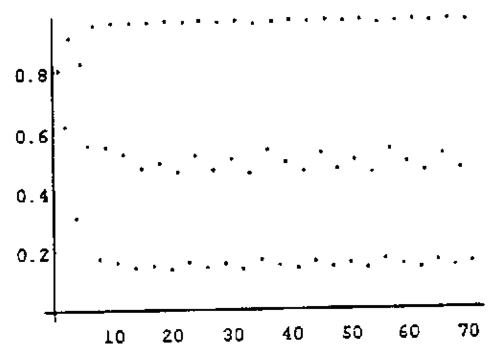
k=3.7

{0.8. 0.592. 0.893683. 0.35155. 0.843462. 0.488526. 0.924513. 0.258219. 0.708704. 0.763837. 0.667443. 0.821262. 0.543125. 0.918119. 0.278153. 0.742901. 0.706697. 0.766923. 0.661383. 0.828635. 0.525396. 0.922614. 0.264172. 0.719224. 0.74718. 0.698937. 0.778569. 0.637877. 0.854663. 0.459593. 0.918959. 0.275552. 0.738606. 0.714349. 0.755001. 0.684406. 0.79918. 0.593818. 0.892433. 0.355186. 0.847406. 0.478442. 0.923281. 0.262084. 0.715566. 0.753066. 0.688043. 0.794168. 0.604822. 0.884346. 0.37843. 0.870316. 0.417603. 0.89988. 0.333356. 0.82225. 0.540774. 0.918849. 0.275894. 0.739172. 0.713347. 0.756587. 0.681404. 0.803243. 0.584762. 0.898417. 0.337676. 0.827508. 0.528132. 0.922072. 0.265865. 0.722169. 0.742372. 0.707647. 0.765466. 0.664252. 0.825178. 0.533759. 0.920783. 0.269883. 0.729071. 0.730848. 0.727825. 0.732955. 0.724209. 0.739002. 0.713648. 0.756111. 0.682306. 0.802029. 0.587481. 0.896684. 0.342773. 0.833535. 0.51339. 0.924337. 0.258772. 0.709694. 0.762305. 0.670425. 0.817534. 0.551937. 0.91502. 0.287707. 0.758248. 0.67824. 0.807453. 0.575248. 0.90405. 0.320952. 0.806385. 0.577674. 0.902677. 0.32505. 0.811753. 0.565398. 0.804548. 0.581827. 0.900226. 0.332331. 0.820983}



k=3.853

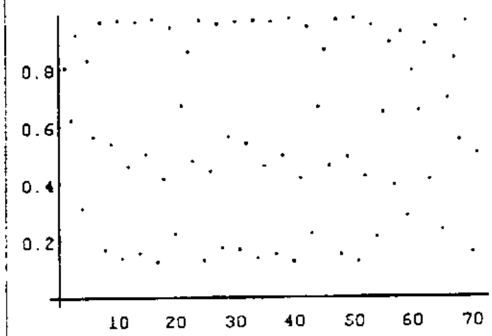
{0.8. 0.61648. 0.910974. 0.312479. 0.827763. 0.549327. 0.953875. 0.169522. 0.542441. 0.95631. 0.160984. 0.520418. 0.961644. 0.142118. 0.46976. 0.959727. 0.148924. 0.488352. 0.962727. 0.138259. 0.45906. 0.956792. 0.159287. 0.515972. 0.962267. 0.139899. 0.463622. 0.958151. 0.154496. 0.503306. 0.963208. 0.136544. 0.454269. 0.955192. 0.164909. 0.530613. 0.959639. 0.149234. 0.489188. 0.9628. 0.138001. 0.458341. 0.956563. 0.160093. 0.518086. 0.96199. 0.140887. 0.466359. 0.958889. 0.151887. 0.496333. 0.963198. 0.136579. 0.454366. 0.955226. 0.16479. 0.530304. 0.959712. 0.148977. 0.488494. 0.96274. 0.138214. 0.458934. 0.956752. 0.159427. 0.51634. 0.962221. 0.140062. 0.464075. 0.958277. 0.154051}



k=3.87

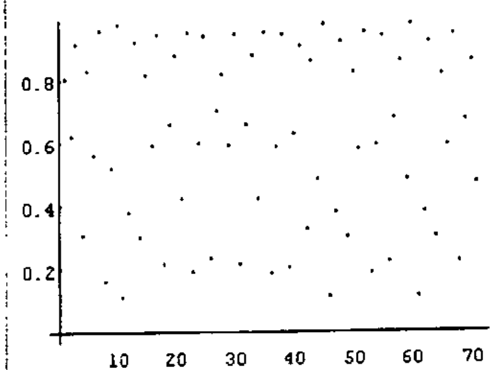
{0.8. 0.6192. 0.912513. 0.308955. 0.826252. 0.555575. 0.955547. 0.164385. 0.531593. 0.963637. 0.135607. 0.453633. 0.95918. 0.151526. 0.49755. 0.967477. 0 121771. 0.41387. 0.938791.

0.22238. 0.669229. 0.856669. 0.475185. 0.965117. 0.130288. 0.438522. 0.952873. 0.173786. 0.555672. 0.955505. 0.164532. 0.531975. 0.963543. 0.135944. 0.454583. 0.959517. 0.150326. 0.494307. 0.967375. 0.122141. 0.414952. 0.939507. 0.219944. 0.663972. 0.863448. 0.456293. 0.960107. 0.148226. 0.488607. 0.966998. 0.123504. 0.41893. 0.942065. 0.211219. 0.644763. 0.886399. 0.389692. 0.920411. 0.283497. 0.786099. 0.65073. 0.879575. 0.409921. 0.936098. 0.231498. 0.688499. 0.829992. 0.546078. 0.959283. 0.151158. 0.496557}



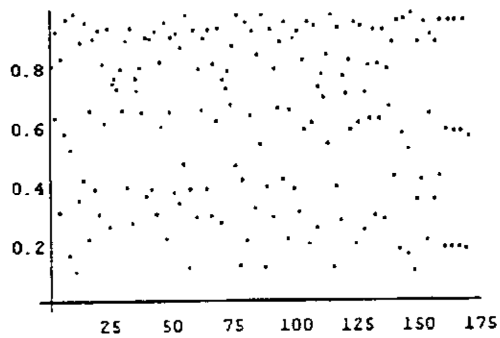
k=3.89

{0.8. 0.6224. 0.914221. 0.305058. 0.82467. 0.562452. 0.957328. 0.158911. 0.51993. 0.970955. 0.109704. 0.379933. 0.916421. 0.297949. 0.813692. 0.589714. 0.941191. 0.215313. 0.657228. 0.876337. 0.421561. 0.948566. 0.189787. 0.598157. 0.935021. 0.236344. 0.702088. 0.813634. 0.589855. 0.941093. 0.215651. 0.657978. 0.875418. 0.42425. 0.950179. 0.184149. 0.584425. 0.944773. 0.202967. 0.629291. 0.907474. 0.326623. 0.855568. 0.480693. 0.97105. 0.109355. 0.378873. 0.915427. 0.301164. 0.818707. 0.577378. 0.949209. 0.187541. 0.592716. 0.939061. 0.222608. 0.673179. 0.855835. 0.479953. 0.970937. 0.10977. 0.380134. 0.916609. 0.29734. 0.812734. 0.592048. 0.939541. 0.220968. 0.669629. 0.860569. 0.466761}



k=3.9

{0.8. 0.624. 0.915034. 0.303214. 0.823973. 0.565661. 0.958185. 0.156258. 0.514181. 0.974216. 0.097966. 0.344638. 0.880864. 0.409276. 0.9429. 0.209975. 0.646953. 0.890778. 0.37944. 0.918314. 0.292551. 0.807164. 0.607036. 0.930319. 0.252821. 0.73672. 0.756458. 0.718494. 0.788815. 0.649684. 0.887619. 0.38903. 0.926974. 0.264003. 0.757791. 0.71582. 0.793345. 0.6394. 0.899213. 0.353452. 0.891242. 0.378025. 0.916976. 0.29691. 0.814142. 0.590127. 0.943321. 0.20852. 0.643655. 0.894517. 0.36799. 0.907036. 0.328854. 0.860765. 0.467411. 0.970858. 0.110342. 0.38285. 0.921476. 0.282197. 0.789991. 0.647031. 0.89069. 0.37971. 0.918568. 0.291722. 0.805819. 0.610251. 0.927594. 0.261936. 0.75397. 0.723447. 0.780278. 0.668633. 0.864096. 0.457994. 0.968118. 0.120375. 0.41295. 0.945447. 0.201151. 0.626688. 0.912406. 0.311694. 0.836709. 0.532845. 0.970793. 0.110581. 0.383577. 0.922138. 0.280018. 0.786271. 0.655391. 0.880829. 0.409379. 0.942973. 0.209723. 0.646383. 0.891431. 0.377449. 0.916427. 0.298697. 0.816961. 0.58319. 0.948009. 0.192221. 0.605562. 0.931541. 0.248712. 0.728733. 0.770957. 0.68867. 0.836174. 0.53425. 0.970425. 0.111931. 0.387669. 0.925789. 0.267946. 0.764988. 0.701147. 0.817205. 0.582585. 0.948401. 0.190852. 0.602268. 0.934211. 0.239696. 0.710744. 0.80179. 0.619799. 0.919028. 0.290221. 0.803373. 0.616064. 0.922464. 0.278945. 0.784425. 0.659499.}



Nota:
Con el desarrollo del trabajo un porcentaje alto de los estudiantes identificaron los sigientes hechos: Para cualquier valor de población inicial con una constante 0<K<1 la población termina extingiendose la rápidez de la muerte de la población depende del valor incial de ésta, a saber si la población inicial es alta, la muerte es mucho más rápida que con una población baja. La "razón de este comportamineto se debe a que la ecuación logistica sólo corta la recta y=x en el punto x=0.
Para un valor de 1<k<3, la iteración termina en un punto fijo diferente de 0. Siendo este el corte de la ecuación logística con y = x.
Para valores mayores a 3 comienza a duplicarse los valores entre los que oscila la ecuación logística. Cuando k toma el valor de 4, los valores entre los que oscila la ecuación son infinitos.

TESELACIONES

Muchas de las paredes y pavimentos de la Alambra de Granada, cubiertas de brillantes mosaicos policromados, nos prueban que los moros fueron maestros en el arte de recubrir un plano con figuras similares entrelazadas, ajustadas entre sí, sin dejar hueco alguno. !Lástima que su religión les haya prohibido hacer imágenes!

M.C. Escher

Se dice que una figura geométrica tesela cuando es posible superponerla o acoplarla entre sí sin dejar huecos o fisuras, de manera que sea posible recubrir el plano. Estas formas particulares de recubrir el plano era conocida por los antiguos como un elemento en la decoración.

Uno de los representantes modernos más conocidos en este arte, fue el pintor holandés M.C.Escher, cuya obra se caracterizó por su gran contenido matemático. En un artículo de 1959, Escher expresó lo que lo motivaba a representar el infinito a través de sus teselaciones:

"Nos resulta imposible imaginar que, más allá de las estrellas más lejanas que vemos en el firmamento, el espacio se acaba, que tiene un límite más allá del cual no hay nada. El término vacío todavía nos dice algo, puesto que un espacio determinado puede estar vacío, por lo menos en nuestra imaginación; pero no estamos en condiciones de imaginar algo que estuviese vacío en el sentido de que el espacio deja de existir. Por esta razón, desde que el hombre existe sobre la tierra, desde que está de pie, sentado o acostado, desde que corre, navega, anda a caballo y vuela, nos aferramos a la idea de un más allá, de un purgatorio, de un cielo y un infierno, de una transmigración y un nirvana, todos lugares de infinita ex-tención en el espacio o estados de infinita duración en el tiempo."

Despues de su visita a la Alambra, Escher, tras largas sesiones de trabajo inventó un método para partir regularmente la superficie plana, que sería admirado por cristalógrafos y matemáticos.

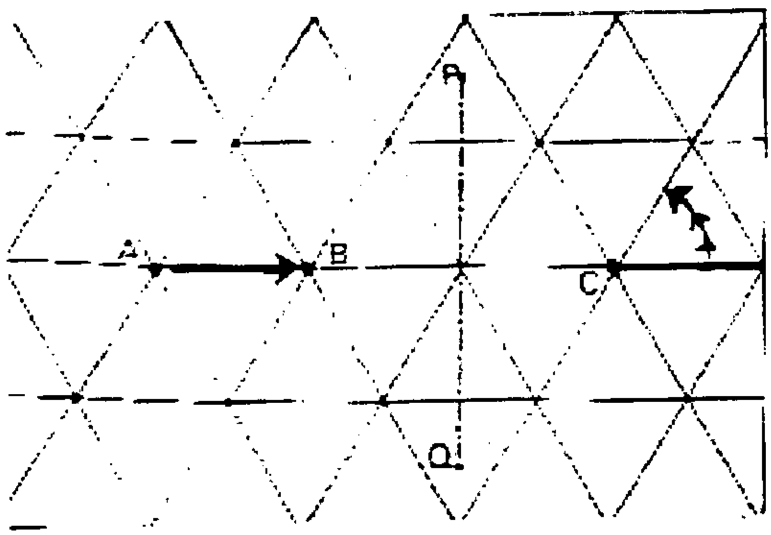
Cobertura de un plano mediante pájaros, Escher, 1942

Uno de los temas sobre los que más trabajó Escher fue sobre la participación periódica de una superficie. Sin embargo, como el mismo confesó: «Con la conciencia tranquila creo poder alegrarme de la perfección de la que doy testimonio, yo no la he inventado yo ni siquiera la he descubierto. Las leyes matemáticas no son ni creaciones ni invenciones del hombre, son sencillamente, y existen en total independencia del espíritu humano».

Mosaico 2, Escher 1957

Durante muchos años Escher estuvo estudiando el problema de la partición de un plano, era tal la obsesión que sentía por este tema que regreso a la Alhambra y se dedicó a copiar muchas de esas teselaciones. Abordó muchos tratados de geometría, en cuya parte teórico-formal no encontró gran ayuda, sólo la representación geométrica de los teoremas le sirvieron para aclarar el problema.

Para analizar un poco más en detalle el problema, cosidérese la siguiente figura.



Como se observa, el plano está recubierto por tiriángulos equiláteros. Para seguir más en detalle la siguiente explicación, es posible calcar uno de los triángulos que aparecen en la figura, y seguir cada una de las siguientes transformaciones (isometrías) que se realizan para recubrir el plano. La primera y la más fácil de las transformaciones que se puede realizar para recubriri el plano es una traslación, la cual se realiza moviendo el triángulo desde el punto **A** hasta el punto **B**. Otra forma de rellenar el plano es realizar una rotación desde el punto C, haciendo un ángulo de 60 grados, de esta manera es posible hacer coincidir el triángulo consigo misma.

Se nota que existen figuras que sólo aceptan traslaciones o rotaciones, todo esto tiene que ver con la simetría de la figura en cuestión.

La intención, ahora, es mostrar cómo es posible encontrar diferentes alternativas de trabajar la geometría con los estudiantes mediante el desarrollo de teselaciones, donde la exploración permite al estudiante observar que la belleza de las matemáticas puede ir más allá del trabajo en la solución de algoritmos y cálculos numéricos.

El trabajo con teselaciones permite combinar matemáticas y arte, y que los estudiantes desarrollen su creatividad artística además de ser un buen ejercicio sobre el sentido espacial.

Una introducción que resulta de gran ayuda en el desarrollo de este trabajo, es mostrar diferentes teselaciones, ya que esto permite una mejor disposición en la clase para el desarrollo del trabajo.

El manejo de figuras geométricas (triángulos, exágonos, cuadrados, rectángulos) puede ayudar a aclarar el concepto de teselación.

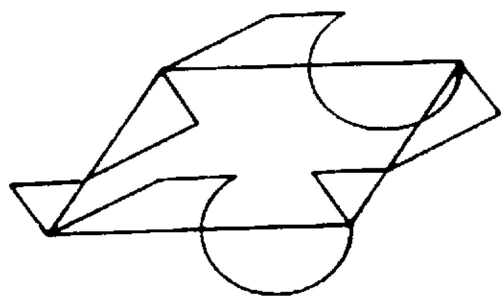
Liberación. Escher 1955.

Después de un trabajo introductorio con los polígonos regulares, los estudiantes observan que las teselaciones logradas no tienen la belleza de las de Escher, en este momento, se puede introducir una de las técnicas que permite la realización de dichas teselaciones.

La técnica del mordisco

Los polígonos regulares que se utilizan para efectuar mosaicos, se pueden transformar de manera que los mosaicos que se generen muestren diferentes grados de irregualaridad. Usando la técnica que se conoce como *mordisco*, es posible crear mosaicos de mayor complejidad.

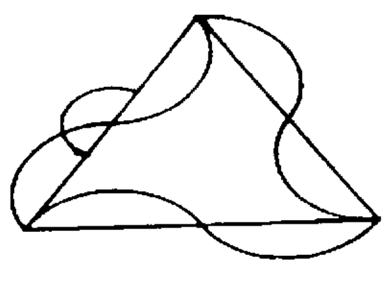
Una de las primeras transformaciones que se puede utilizar es la *traslación*. Como se darán cuenta los estudiantes (después de efectuar algún trabajo), este tipo de transformación sólo se puede efectuar a los polígonos que tienen sus lados opuestos respectivamente paralelos y congruentes. La técnica consiste en cortar en uno de los lados del polígono algún tipo de figura y trasladarlo al lado opuesto, aunque la transformación es sencilla, se pueden lograr bellos efectos como lo muestra la siguiente gráfica.



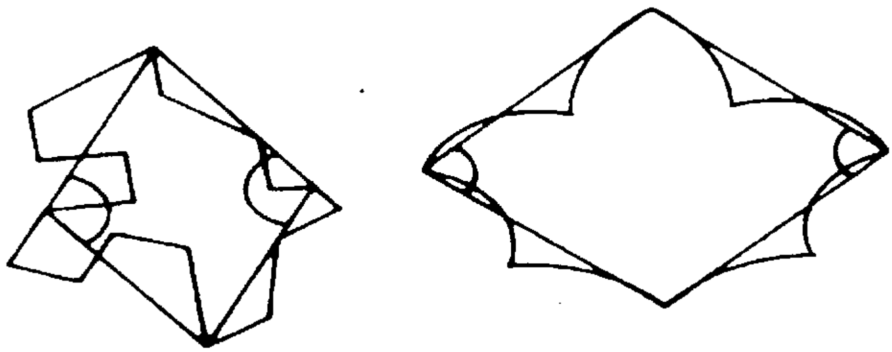
Como se observa en la figura, el corte puede hacerce en dos lados, siempre que el *mordisco* cortado se traslade al lado opuesto. Cuando se haya traslado el *mordisco* y encajen perfectamente los lados rectos y las esquinas, se puede pegar el lado con cinta o pegante para que su reproducción sea más fácil.

Rotaciones: Este tipo de transformación sólo puede realizarse a los polígonos, triángulos, paralelogramos y hexágonos que tengan lados adyacentes congruentes. Esta técnica es más complicada que la anterior, pero también presenta una gan variedad de mosaicos que pueden ser realizados con dicha técnica. Estas rotaciones pueden presentar dos variedades:

Giro a partir de un lado: Cuando se efectúa un corte a uno de los lados de un triángulo o un cuadrilatero, se tiene que añadir el mismo lado mediante un giro de 180 grados, ver la siguiente figura.



Giro a partir de un vertice: Al efectuar un corte a uno de los lados, se añade al otro lado mediante un giro de 60 ó 120 grados con centro en el vértice común de los lados. Los vértices que son centro de giro, no pueden ser consecutivos. Los giros tienen que ser de 90 grados cuando los centros pertenecen a un triángulo, cuadrilátero o pentágono, ver la siguiente figura.



La combinación de todas las técnicas en forma simultánea permite crear teselaciones mucho más complicadas. La creación de teselaciones hermosas es una combinación entre arte y matemáticas, ambas igualmente importantes.

ACTIVIDAD 5

TESELACIONES

Alumnos:	150
Grados escolares:	8 a 11
Tiempo:	un mes
Materiales:	lápiz, papel, compás, colores y escuadras

Prerrequisitos

Nociones elementales de geometría

Temas con que se relacionó la actividad

Homotecias, rotaciones, reflexiones, traslaciones, escalas, simetrías.

Comentarios

● Para ambientar el trabajo a realizar se les mostraron a los estudiantes diferentes teselaciones de la Alambra.

● Se les ofrecieron figuras geométricas que teselaban hechas en cartulina (triángulo equilátero, cuadrado, rombo)

● Se les solicitaron que realizaran otras figuras en cartulina que permitieran teselar.

● Se efectuaron en papel milimetrado teselaciones libres utilizando figuras geométricas.

● Se les ofrecieron a los estudiantes teselaciones realizadas por Escher, donde se manifestaba una mayor complejidad y belleza artística.

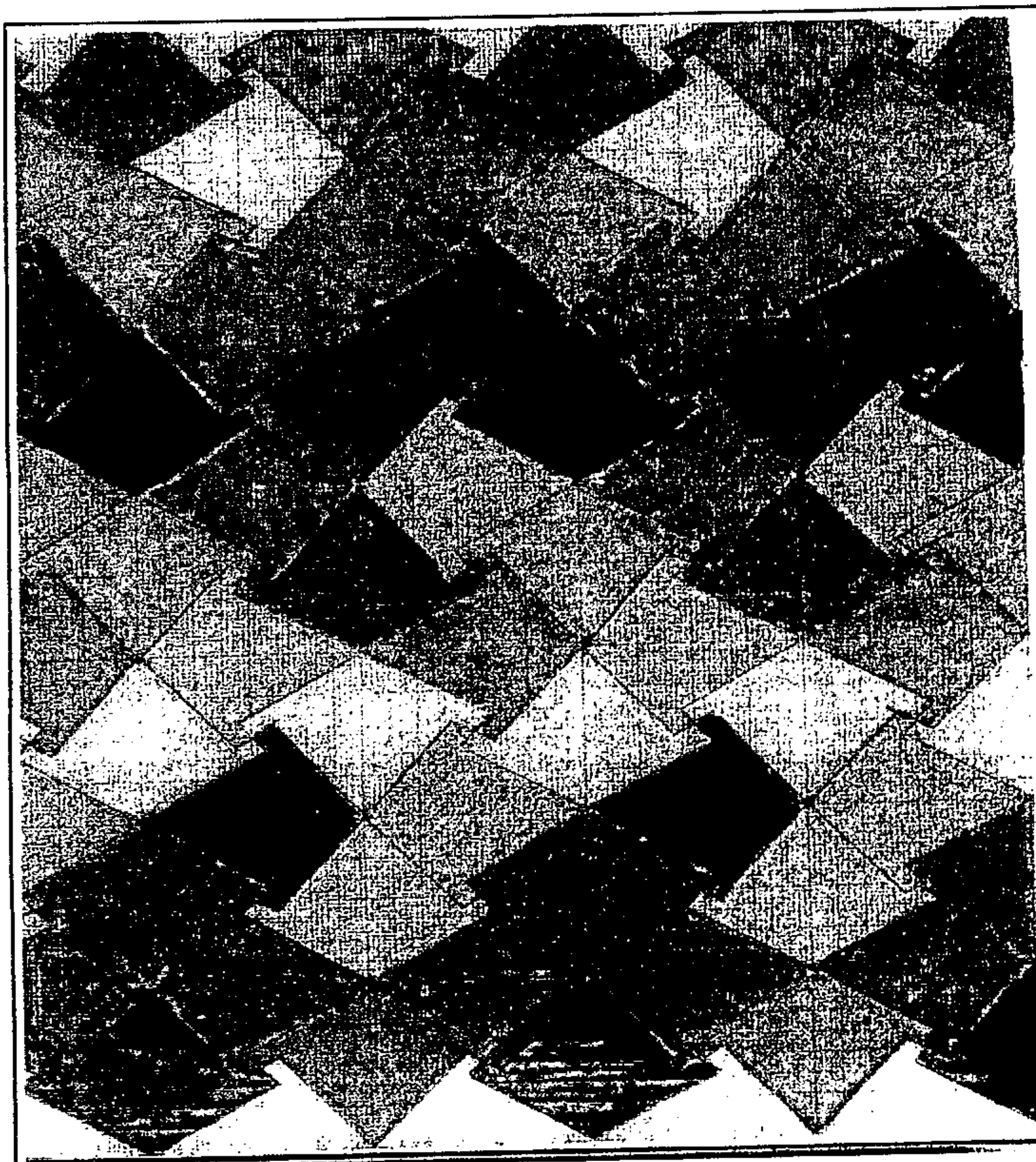
● De la mayor parte de los estudiantes surge la pregunta sobre la forma o técnica de realizar estas teselaciones.

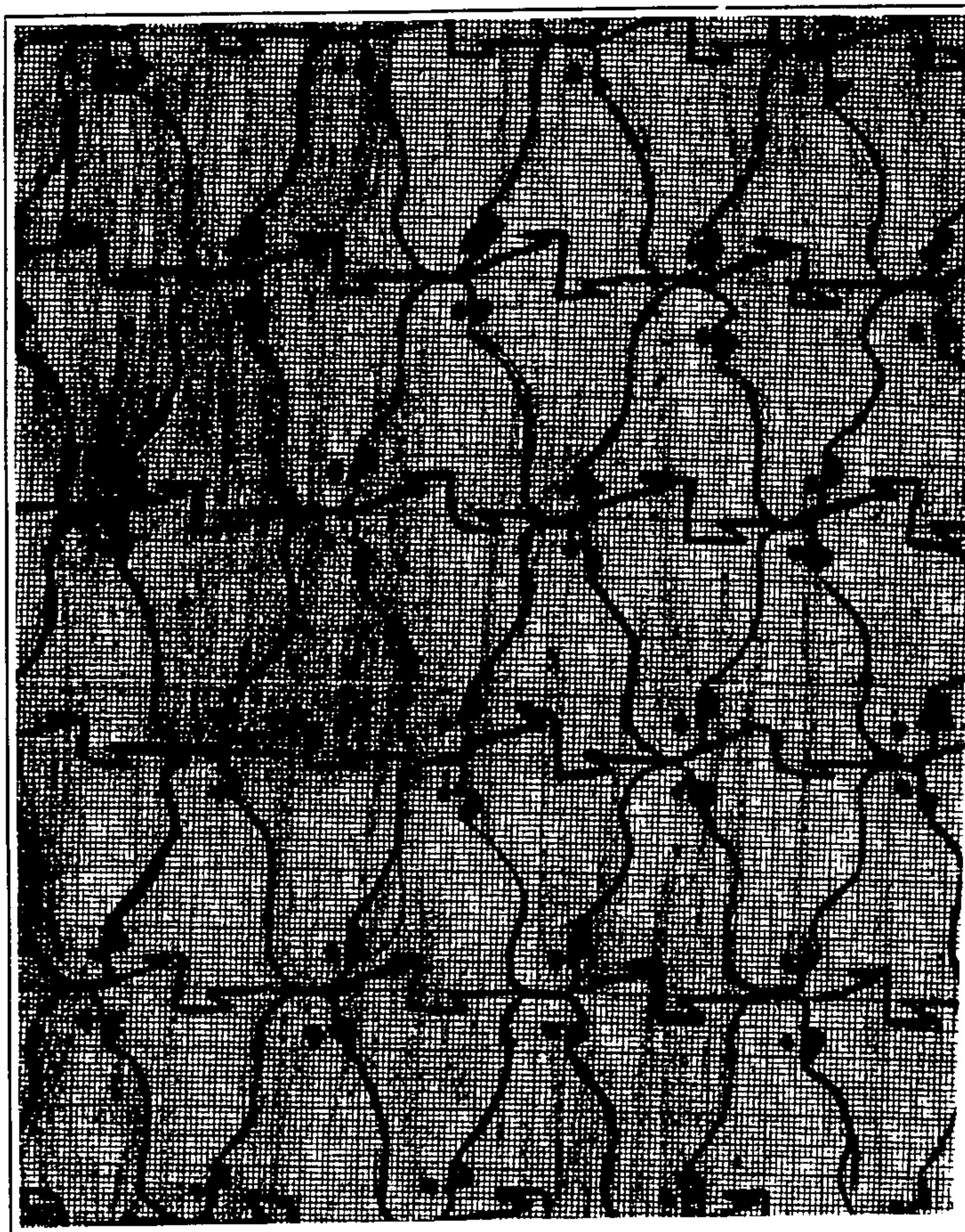
● Se les explica la técnica del mordisco y se comienza el trabajo dirigiendo algunas teselaciones.

● Se realiza un trabajo libre en torno a la técnica del mordisco.

● Esta actividad mostró que muchos de los estudiantes que eran sobresalientes en matemáticas y ciencia, pero con poco entusiamo por el trabajo de arte, lograron excelentes teselaciones
(ver Carolina Rubiano nivel 11, 1995).

Se muestran a continuación algunas de las teselaciones realizadas por los estudiantes.





ANEXO 1

MATHEMATICA

UNA HERRAMIENTA PARA UN PROBLEMA DE LA EVOLUCIÓN DE ESPECIES

Para darle más significado a la importancia de la constante k en el desarrollo de la iteración de la ecuación logística es posible desarrollar la actividad 4 utilizando la técnica de iteración gráfica que fue mencionada en una actividad anterior. Esta técnica permite al estudiante saber si para un valor dado de k la iteración terminará en el punto fijo o por el contrario esta tendrá dos, cuatro, ocho puntos periódicos.

Planteamiento de la actividad

Utilice la iteración gráfica para determinar si dado un valor de 0<k <4 tiene puntos fijos o puntos periódicos en su iteración. Para efectuar esta actividad en Mathematica defina la siguiente función:

```
pintelíneas[x_ ]:= {Line[{{x, x},{x, f[x]}}], Line[{{x, f[x]},{f[x],f[x]}}]}
```

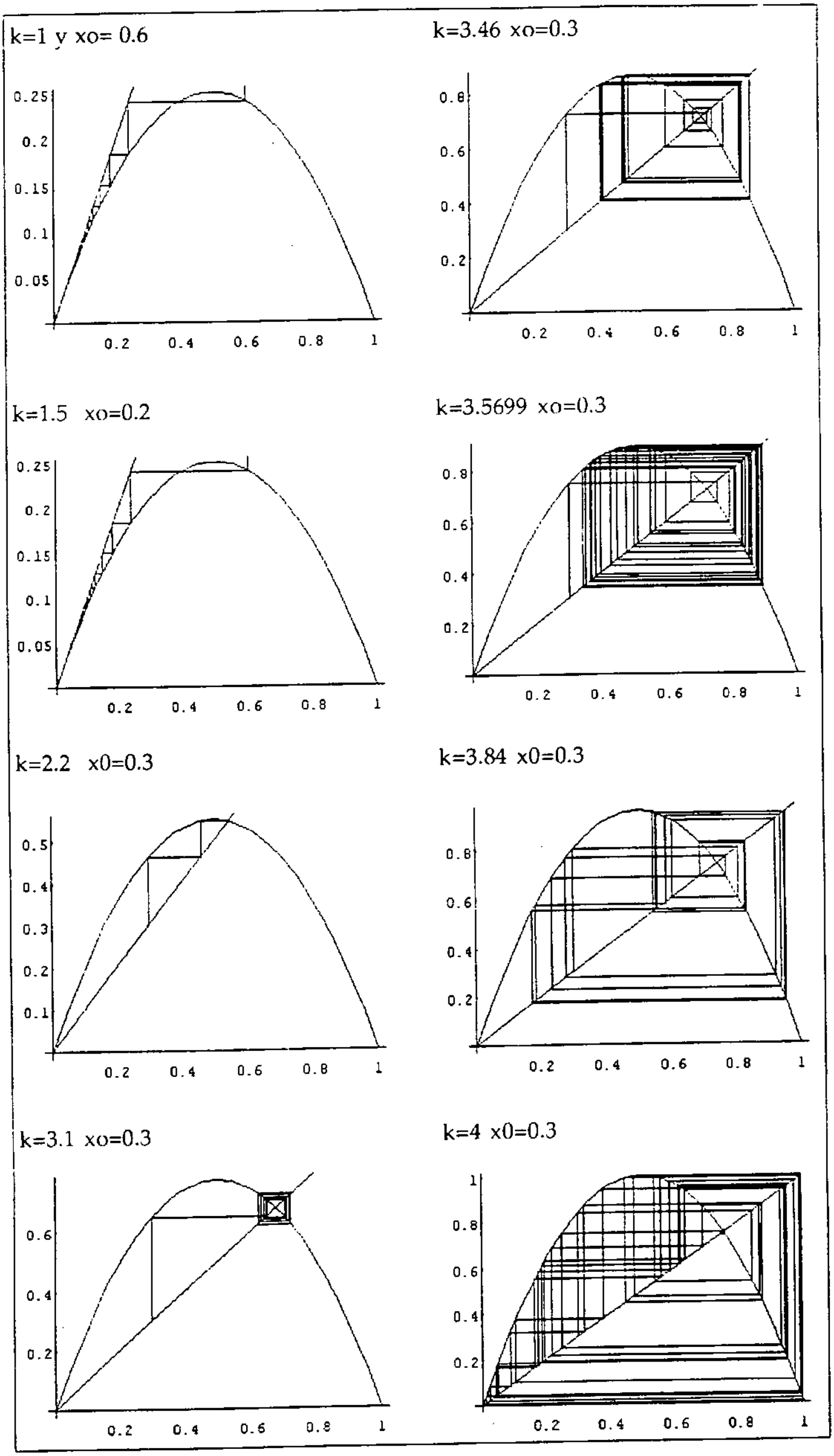
donde la función f[x], es: f[x_]:=k*x*(1-x).

Después de dar un valor a k digite el siguiente comando:

```
Plot [f[x],{x, 0, 1},Epilog->{Line[{{0,0}-{1,1}}],Map[pintelíneas, NestList[f,0.5,20]]}]
```

Al igual que en el caso anterior el valor inicial de la iteración puede ser cambiado, lo mismo el número de iteraciones.

Algunas de las gráficas que se obtienen en este proceso son:


k=1 y xo= 0.6
k=3.46 xo=0.3
k=1.5 xo=0.2
k=3.5699 xo=0.3
k=2.2 x0=0.3
k=3.84 x0=0.3
k=3.1 xo=0.3
k=4 x0=0.3

ANEXO 2

LABORATORIOS EN MATEMÁTICA

PLANTEAMIENTO TEÓRICO

Desde hace poco los programas de álgebra por ordenador han sido una herramienta de gran ayuda en muchas áreas de las ciencias como: la física, química, biología, economía e ingeniería. Estos programas permiten calcular con símbolos o números precisos una serie de operaciones matemáticas que llevarían mucho tiempo efectuarlas manualmente. Para no ir muy lejos el simple cálculo de la inversa de una matiz de 5 x 5; es decir, de cinco filas por cinco columnas es ya de por sí una labor bastante desagradable y propensa a errores por las muchas operaciones que están involucradas. Algunos de ustedes se habrán encontrado con el cálculo de integrales (elípticas) que descorazonan al más experto en la materia. Es aquí donde el ordenador puede ayudar a los alumnos a liberarlos de las operaciones engorrosas y rutinarias para que puedan prestar mayor atención a la comprensión y tiempo a los conceptos y aplicaciones con las matemáticas. Sin embargo, esto exige del profesor un replanteamiento distinto en la clase, por ejemplo, la introducción de la calculadora gráfica en el aula.

Existen muchos ejemplos de programas de álgebra por ordenador, entre los que se pueden mencionar el Derive y el Reduce, estos se fundamentan en reglas de sustitución de términos. Cuando no se cuenta con una buena sala de ordenadores, el manejo del Derive es una buena opción ya que para ser ejecutado se necesita un 386Dx 25 mhz, pantalla monocromática o color.

El programa *Mathematica* ha popularizado el álgebra por ordenador gracias a sus posibilidades gráficas.

Lo que se pretende mostrar en este anexo son ejemplos de laboratorios que se pueden desarrollar sobre diferentes temáticas con ayuda del *mathematica*.

LABORATORIO 1

En este laboratorio se estudiarán las gráficas de la forma A*sin(x) + D con A,D variables.

1. Utilice el programa Mathematica para completar la siguiente tabla. Efectúe cada gráfica aparte. Luego grafique todas las ecuaciones en forma simultánea para observar los efectos de las variables A, B sobre las respectivas gráficas.

Ecuación	Máximo	Mínimo	Amplitud
y = 1*Sin(x)+0			
y = 2*Sin(x)+0			
y = 1*Sin(x)+2			
y = 2*Sin(x)+0.5			
y = -2*Sin(x)-1			
y = -5*Sin(x)-1.5			
y = -0.5*Sin(x)+0.5			
y = -0.3*Sin(x)-2			
y = 4*Sin(x)+3			

2. Utilice los resultados de la tabla anterior para responder a las siguientes preguntas

a. ¿Si la variable D es positiva qué le pasa al gráfico?

b. ¿Si la variable D es negativa qué le pasa al gráfico?

c. ¿Si, la variable D = 0, qué le pasa al gráfico de y = Asin(x)?

d. ¿Qué le pasa al gráfico si la variable A es positiva?

e. ¿Qué le pasa al gráfico si la variable A es negativa?

f. ¿Si D = 0 y A un número positivo se altera el periodo de Sin(x)?

LABORATORIO 2

En este laboratorio se mostrará cómo afecta la variable B a la gráfica de la ecuación y = Sin(Bx)

1. Utilice el programa mathematica para graficar cada una de las ecuaciones que aparecen en la tabla; luego, grafique en forma simultánea todas las ecuaciones para ver el efecto de la variable B.

Ecuación	B	Periodo
y = Sin(x)	1	
y = Sin(2x)		
y = Sin(1/2x)		
y = Sin(4x)		
y = Sin(1/4x)		
y = Sin(px)		
y = Sin(2px)		
y = Sin(p/2x)		
y = Sin(3px)		
y = Sin(8x)		

2. Explique como afecta la variable B el periodo de la función.

3. Si B es postivo y mayor que cero que le pasa a la grafica de la ecuación.

a. Si 0 < B < 1 que le pasa al periodo y al grafica de la función.

b. Encuentre, utilizando los resultados de la tabla, una posible fórmula para el periodo de la función.

LABORATORIO 3

Raíces y coeficientes de ecuaciones polinomicas

El laboratorio pretende que los estudiantes encuentren una justificación que de razón de la relaciones que se presentan; además, darse cuenta de que existe una relación entre los coeficientes y las raíces de los polinomios.

La forma general de una ecuación de tercer grado es: $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$ y una ecuación de grado cuarto se puede escribir así:

$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0$

Es posible probar que si:

A=1 $B = -(r_1 + r_2 + r_3)$ $C = r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3$ $D = -r_1r_2r_3$ use una calculadora de mano para efectuar los cálculos y poder llenar la siguiente tabla, luego grafique cada uno de los polinomios encontrados y compruebe que las raices encontradas son correctas.

Raices r_1	r_2	r_3	r_4	Grado	A	B	C	D	E	Ecuación	R. correctas
-2	1	3		3	1	-2	-5	6		$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$	si
-3	-1	1									
-4	0	1									
-2	2										
1	-2i	2i									
2	3-i	3+i									
-2	2	1	1								
-5	-1	1	5								
-3+i	-3-i	2	4								

2. Construya otros polinomios con sus respectivas raices.

3. Trate de encontrar una justificación a las fórmulas de arriba.

LABORATORIO 4

En este laboratorio lo que se pretende es que el estudiante conociendo la parte teórica del tema específico, utilice el ordenador para evitar realizar cálculos engorrosos y, por otro lado, poder visualizar aspectos del problema difíciles de lograr sin la ayuda del ordenador.

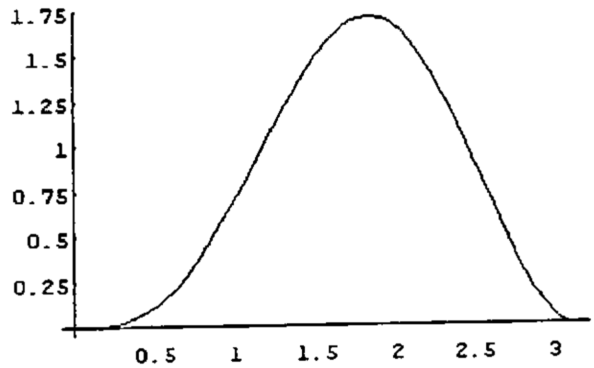
Problema:

Sea g(x)=x*(sin(x))^2, encontrar el volumen del sólido de revolución que se obtiene cuando se hace girar la función y=g(x) entre x=0 y x= p, alrededor del eje y.

Una posible forma de enfrentar el problema utilizando el *mathematica* sería:

In[1]: = g[x_]: = x*Sin[x]^2

Plot[g[x],{x,0,Pi}]



In[1]:= volumenx = Integrate[Pi*g[x]^2,{x,0,Pi}]

$$\frac{-15\,Pi^2}{64} + \frac{Pi^4}{8}$$

In[1]: = N[volumenx]

Out[1]: = 9.86295

In[1]:= volumeny = Integrate[2*Pi*x*g[x],{x,0,Pi}]
Out[1]:=

$$\frac{-Pi^2}{2} + \frac{Pi^4}{3}$$

In [1]:= N[volumeny]

Out[1]:= 27.5349

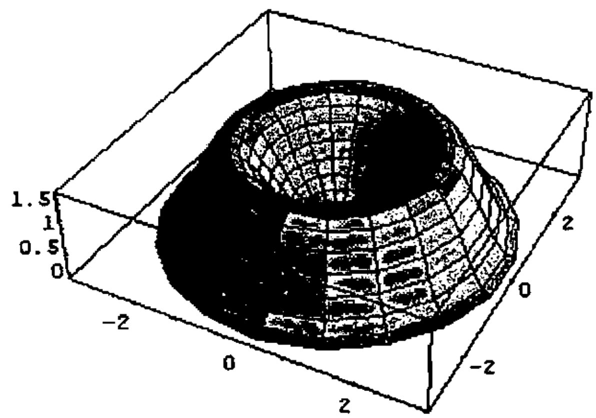
En este momento se va autilizar una parametrización que permita efectuar la gráfica. En este caso la parametrización va utilizar las coordenadas cilíndricas:

In[1]:= x[r_,t_]:=r*Cos[t]

In[2]:= y[r_,t_]:=r*Sin[t]

In[3]:= z[r_,t_]:=g[r]

In[4]:= ParametricPlot3D[{x[r,t],y[r,t],z[r,t]},{r,0,Pi},{t,-Pi,Pi}]

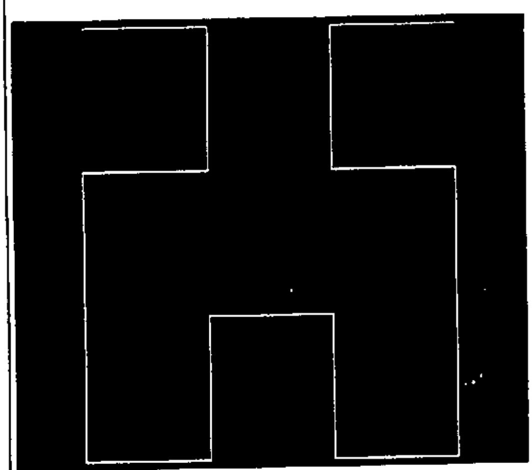


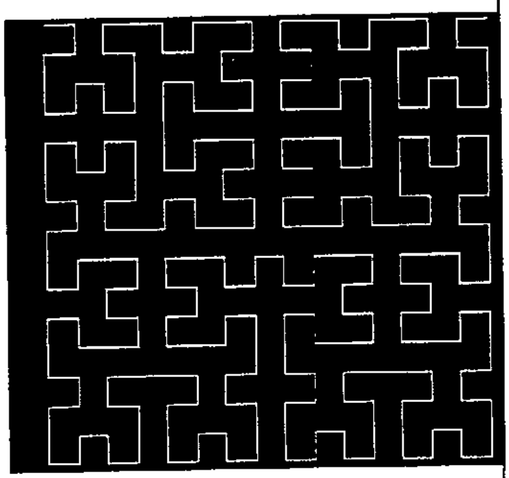
ANEXO 5

FRACTALES Y SISTEMAS FORMALES

Planteamiento teórico

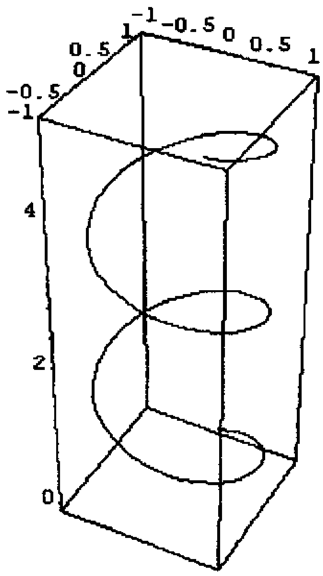
Como se mencionó en la actividad de la curva de Koch, el concepto de curva fue uno de los conceptos que causó más problemas a la intuición en el siglo XIX. En lo que toca al concepto de curva, la mayoría cree tener una idea intuitivamente clara. Sin embargo, en 1890 Giuseppe Peano demostró que si bien es cierto una curva es generada por el movimiento de un punto, los planos también pueden ser generados por el movimiento de un punto. O sea, que es posible que un punto que se mueve de una manera particular pase a través de todos los puntos de un plano en un tiempo finito. Considere el siguiente gráfico.



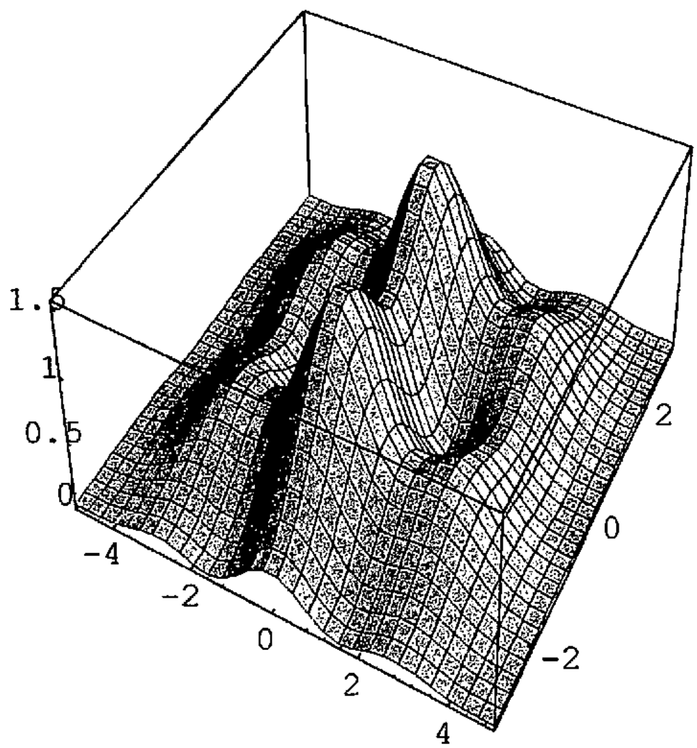


Se divide un cuadrado unidad en cuatro partes iguales y se unen los centros de esos cuadrados por segmentos, como se observa en la gráfica anterior. Luego, cada uno de estos cuadrados se divide en cuatro cuadrados y se conectan sus centros como en el caso anterior, comenzando siempre por por el cuadrado inferior izquierdo y terminado en el cuadrado inferior derecho. Se continúa así de forma indefinida uniendo los centros de los cuadrados que resulta de estos procesos. La curva límite que resulta de estas poligonales "llena el cuadrado unidad". Esta curva de Peano es una curva fractal.

85



In[1]:=Plot3D[Exp[-(x^2+y^2)/8]*(Cos[x]^2+Sin[y]^2),{x,-5,5},{y,-Pi,Pi},PlotPoints->30]

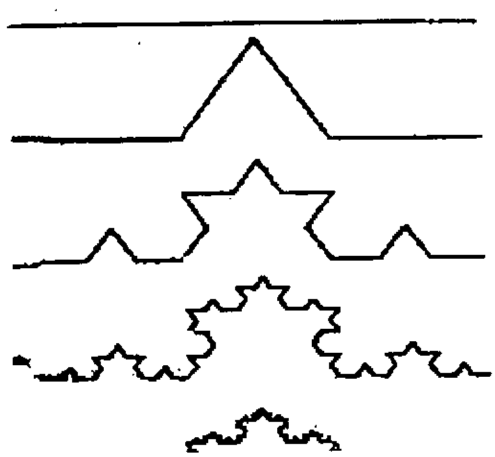


La línea PlotPoints le dice a *mathematica* cuantos puntos utilice para poder efectuar la gráfica.

Debido a que en muchos casos la intuición resultó engañar al sentido común, los matemáticos se volvieron más escépticos sobre la validez de la intuición aunque no la dejaron de lado.

Tanto en la curva de Koch como en la de Peano, la idea de recursión es de gran importancia, entendiendo por procedimiento recursivo aquel que para el cálculo del n-ésimo valor es necesario el (n -1)- ésimo valor. Un ejemplo de función recursiva es el factorial, puesto que $n! = (n-1)!\,n$. En cuanto a la curvas mencionadas se comportan de manera recursiva puesto que para obtener la siguiente gráfica se necesita la anterior.

Considere la siguiente variación de la curva de Koch.



Como se observa cada una de las figuras se obtiene de la anterior aplicando una regla o transformación.

Estos fractales tienen una propiedad en común y es que pueden ser generados utilizando los sistemas formales; es decir, un *lenguaje, axiomas y unas reglas o teoremas.* En el caso anterior, el sistema que permite la generación de la curva en cuestión es la siguiente:

Lenguaje: A,+,-

Axioma: A

Regla: A®A-A+ +A-A

Para obtener los siguientes "teoremas" es necesario aplicar la regla a cada una de las A. Por ejemplo, el segundo teorema sería:

A-A++A-A-A-A++A-A++A-A++A-A-A-A++A-A. En síntesis, el número de A de n-ésimo teorema es igual al número de A de la regla por el número de A de n-1 teorema.

Sin embargo, para que el sistema formal pueda producir el dibujo en cuestión, tiene que ser interpretado, esto es, darle una interpretación a los símbolos de la siguiente manera:

+: giro 45 en el sentido de las agujas del reloj
-: giro de 45 en sentido contrario a las agujas del reloj
A: dibujar una línea de una unidad

De lo anterior se deduce que la interpretación del axioma es muévase una unidad hacia adelante. Y la interpretación del teorema sería:

- muévase una unidad
- gire 45 a la izquierda
- muévase una unidad
- gire 45 a la derecha
- gire 45 a la derecha
- muévase una unidad
- gire 45 a la izquierda muévase una unidad

Es bueno aclarar que cuando se dibujan fractales, cada uno a partir del anterior, aplicando una transformación, los dibujos obtenidos tienen el mismo tamaño en el sentido horizontal.

87

1. Deduzca los tres primeros teoremas de los siguientes sistemas formales y realice el dibujo correspondiente.

Lenguaje: Símbolos A;+,-
Axioma: AA—AA—AA
Regla: A® -AA++AA++AA-
Interpretación del sistema
A dibujar un segmento hacia adelante
+: gire 60 a la derecha
: gire 60 a la izquierda

Lenguaje: A , +, -
Axioma: A
Regla: A® -A+A+A-

interpretación: + giro de 90 a la derecha ,- giro de 90 a la izquierda

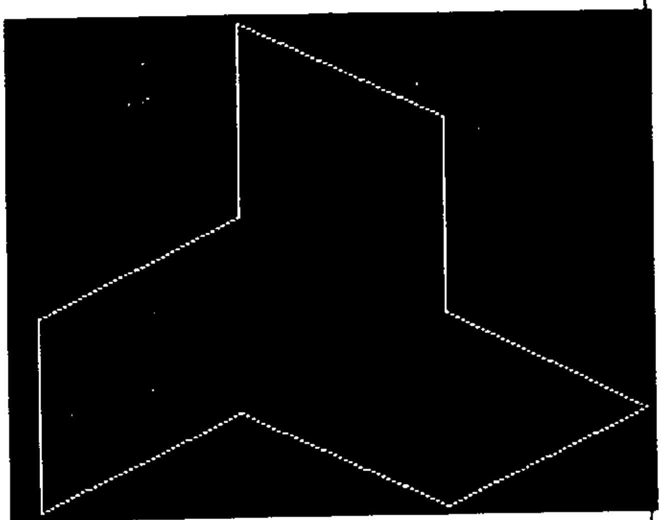
2. Construya fractales utilizando la idea de sistema formal.

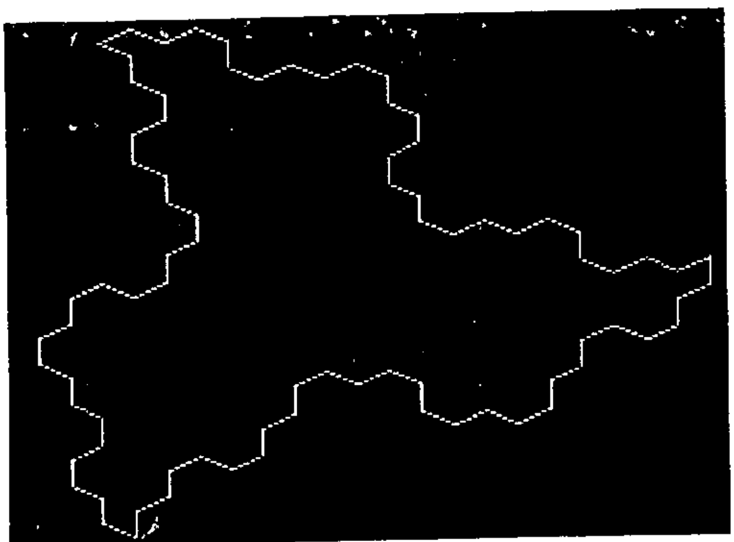
Algunos de los fractales que se pueden lograr se muestran en la grafica inferior:

Axioma f + + + + f + + + + f

Regla f = + f - - f + + f -

Angulo 20 grados

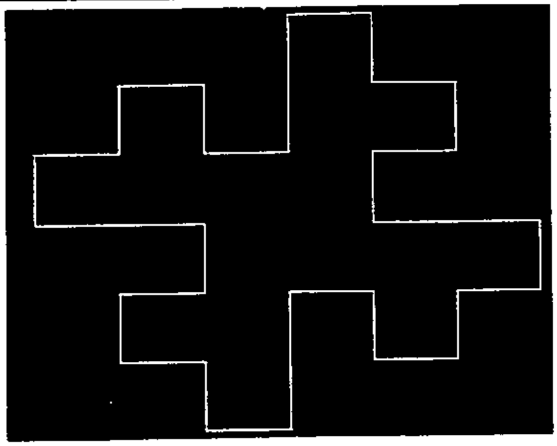


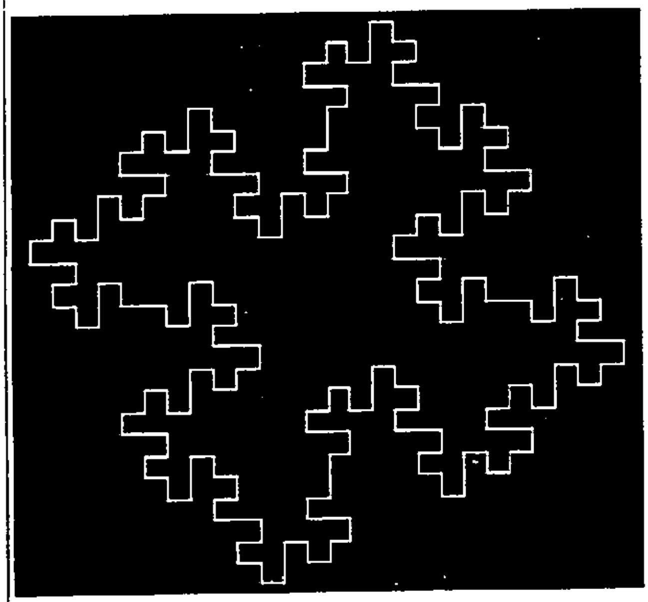


Axioma f - f - f - f

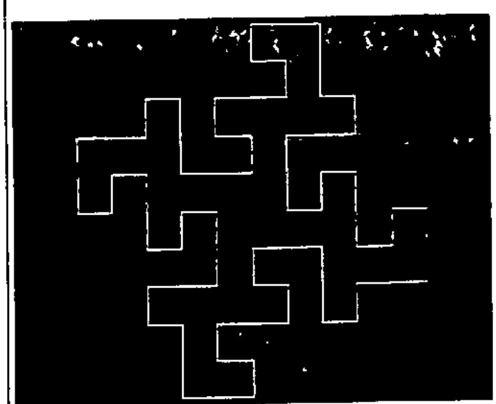
Regla f = f - f + f + f f - f - f + f

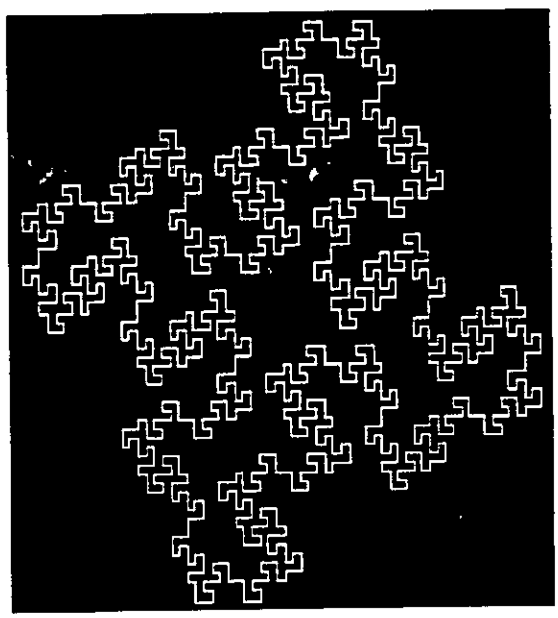
Angulo 45 grados





3 Deducir el axioma la regla y el lenguaje de los siguientes fractales





Comentarios

La actividad es muy bella para ser trabajada con cualquier curso de bachillerato. Al principio, la actividad de la interpretación del sistema formal con el dibujo mismo causa problemas, sin embargo, el trabajo paulatino va mejorando esta situación.

Otro aspecto que causa problemas al comienzo es el trabajo con la regla y transportador (giros a izquierda, giros a derecha).

Efectuar una figura bien terminada es un proceso largo y de paciencia, es mejor no realizar este trabajo si no se cuenta con el tiempo necesario.

Este trabajo potencia el trabajo creativo y reflexivo, aspectos importantes en las nuevas formas de trabajo de la matemática en el aula.

ANEXO 4
EL PROGRAMA MATHEMATICA

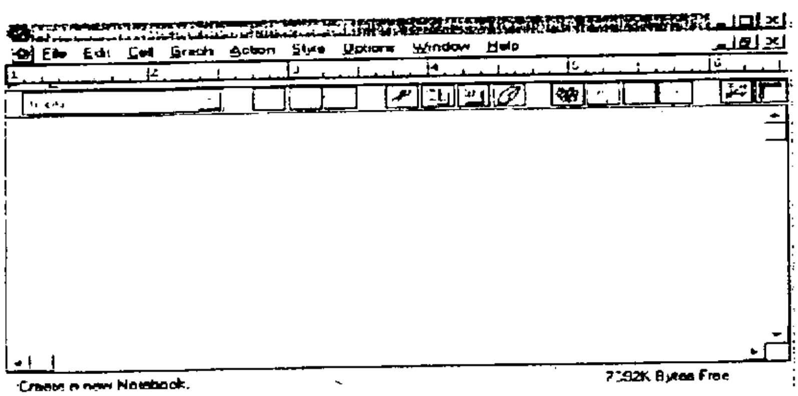
El programa *mathematica* es uno de los mejores softwares de matemática simbólica que existe en la actualidad. Fue desarrollado por Wolfran Research Inc a finales de la década de los 70.

Con el desarrollo de nuevos hardware y lenguajes de programación como el C++, fue posible desarrollar programas en matemáticas que pasaran del simple cálculo matemático al desarrollo simbólico y a la utilización de potentes interfaces gráficas. En síntesis, el programa *mathematica* tiene las siguientes características:

- Cálculo numérico y simbólico
- Un sistema de visualización para funciones y datos
- Un lenguaje de programación estructurado de alto nivel
- Modelaje y análisis de datos
- Un sistema para la representación de conocimiento científico y técnico
- Una plataforma para el desarrollo de software en diferentes aplicaciones

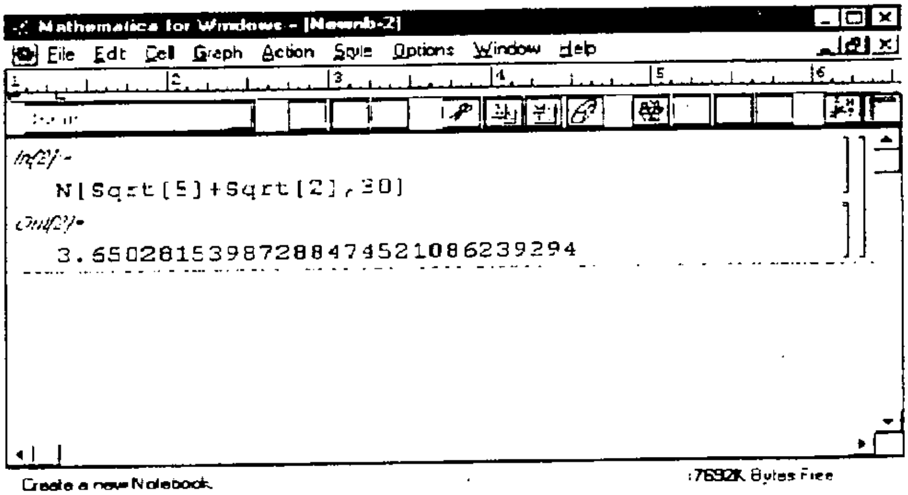
Lo que pretende este anexo es que los usuarios que no tengan ningún conocimiento del programa puedan realizar las diferentes actividades que se han planteado en los talleres. De ninguna manera se trata de hacer un manual de consulta extensivo, solo nombrar algunas de las principales funciones de programa. Para un estudio más sistemático se recomienda consultar *Mathematica A system for doing Matehematics by computer* de *Stephen Wolfran*. La versión utlizada para efectuar los diferentes talleres es la **2.1**, existen otras versiones en el mercado pero los comandos utilizados sirven para cualquier versión. Hay que aclarar que el Mathematica necesita un PC 486Dx 4 con 35 megas de disco duro libre y mínimo 8 megas en RAM; sin embargo, es recomendable 12 megas en RAM.

Para entrar a *Mathematica* se hace doble clic en el icono correspondiente de Windows, al hacer esto la ventana que aparece es la siguiente:



Ahora se describen algunas operaciones básicas en *mathematica*.

Supóngase que se quiere realizar un cálculo matemático con un grado de aproximación decimal. Por ejemplo, hallar la $\sqrt{5}+\sqrt{2}$ con 30 cifras decimales. Para ver como se realiza esto con *mathematica* observe la siguiente gráfica.



La letra mayúscula *N* le dice a *mathematica* que el cálculo que se va efectuar es numérico, *Sqrt* $=\sqrt{x}$, note la coma y el número 20, esto le dice a *mathematica* que la operación que se va a realizar antes de la coma utilizará 20 decimales significativos. Después de digitar esto en el teclado, se digita la tecla *Insert*, que es la tecla que hace que *mathematica* efectúe la operación que se acaba de digitar. Al realizar esto, si es la primera vez que se carga el *mathematica*, el programa cargará un programa llamado el *Kernel* o núcleo del programa. Luego de esto, en la pantalla aparecerá *In*[2] : = *y la respectiva línea de entrada y Out*[2] := *y la respectiva salida. In*[2] : = No es digitada por el usuario sino que es colocada por el programa mathematica.

En este punto hay que resaltar que las funciones propias del *mathematica* tienen siempre la primera letra en mayúscula. Algunas de las funciones del programa *mathematica* son:

Mathematica	función o constante que representa
Exp[x] =	e^x
Log[x] =	$\log_e(x)$
Log[b,x] =	$\mathrm{Log}_b(x)$
Sin[x], Cos[x], Tan [x]	funciones trigonométricas dadas en radianes
ArcSin [x] , ArcCos[x] , ArcTan[x]	inversas de funciones trigonométricas.
n!	Factorial de n
Abs [x]	valor absoluto de x

Existen también definidas algunas constantes:

Pi = $\pi = 3.14159$
E = $e \cong 2.71828$

Ahora se darán algunos ejemplos de cálculo aritméticos que se pueden realizar en *mathematica*:

In[1] : = 10+12

Out[1] : = 22

In[2]: = N[E^Pi/2,50]

Out[2] := 11.570346316389634502864543183974273690133O531213

Int[3]: = FactorInteger[50711317101513]

Out[3] := {{3, 2}, {156833, 1}, {35927329, 1}}

La función *FactorInterger* devuelve los factores primos del número en cuestión, esto quiere decir que en el ejemplo anterior

50711317101513= 3^2 *156833*35397329.

Existen otras funciones numéricas con las cuales se pueden efectuar investigaciones con los alumnos sobre los números primos, estas son: *Prime[x]* que da el siguiente número primos a *x* y *PrimeQ[x]* que dice si el número *x* es primo o no, por ejemplo:

In[4] := Prime[35927329]

Out[4] := 693373531

In[5] := PrimeQ[693373531]

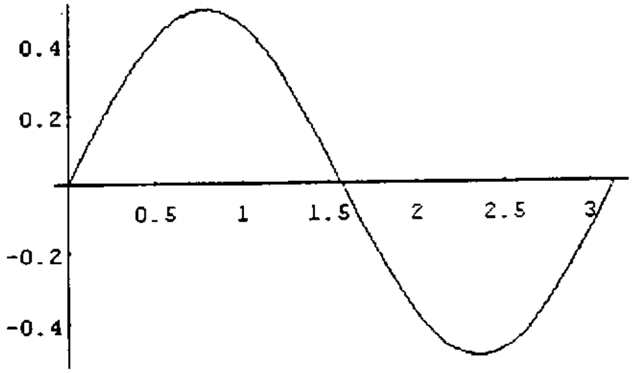
Out[5] := True

La salida número cuatro muestra que el siguiente número primo después de 35927329 es 693373531, la salida número cinco afirma que el número 693373531 es un número primo.

Otra de las grandes ventajas del *mathematica* es su interface gráfica que permite efectuar gráficos sofisticados, que pueden ayudar a visualizar conceptos o ideas a los alumnos para que puedan desarrollar exploraciones sobre diferentes tópicos.

Ahora se mostrarán algunos de los comandos que permiten efectuar gráficas variadas y los resultados de las salidas de estos comandos en *mathematica*.

In[1] := Plot[Sin[x]*Cos[x],{x,0,Pi}]



Out[1] : = - Graphics -

Lo que se le dice a *mathematica* es que grafique la función Sin[x]*Cos[x] en el intervalo 0 y p.

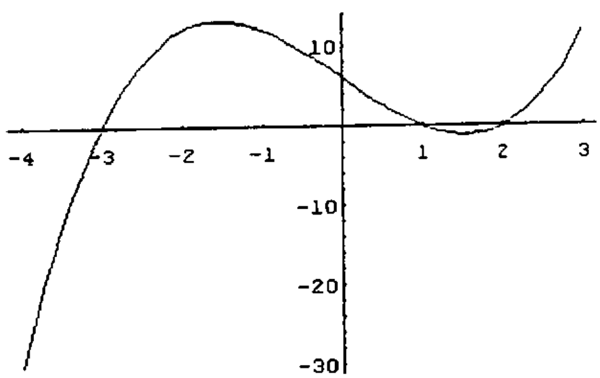
Es posible también en *mathematica* definir una función para luego poder ser utilizada en cualquier parte.

In[2]:= f[x_]:= x^3-7x+6

Out[2]:=

Ahora se le puede decir a *mathematica* que grafique la función

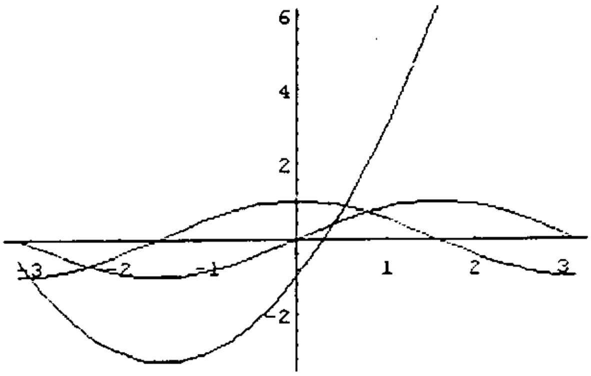
In[3]: = Plot[f[x],{x,-4,3}]



Out [4]: = - Graphics-

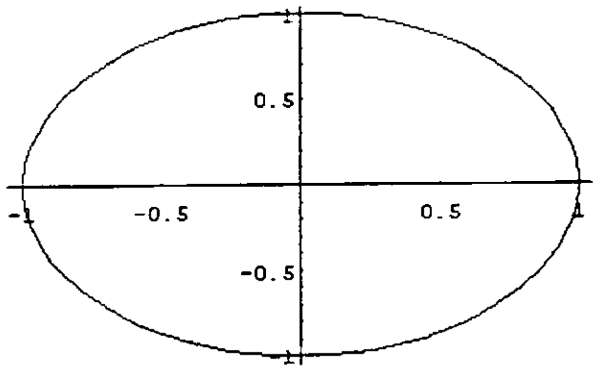
El comando Plot permite efectuar la gráfica de varias funciones en forma simultánea

In[5]:= Plot[{Sin[x],x^2+3*x-1,Cos[x]},{x,-Pi, Pi}]



Out[5]: = - Graphics-

Es posible efectuar gráficas en dos dimensiones en forma paramétrica así:
In[6]:= ParametricPlot[{Sin[t],Cos[t]},{t,0, 2Pi}]



Out[6]:= -Graphics-

El programa *mathematica* permite también efectuar gráficas en variables algunos de los comandos que permiten realizar esto son:

- Plot3D efectúa una gráfica en tres variables.

- ParametricPlot3D efectúa una gráfica en tres variables parametrizándolas.

- Graphics3D permite efectuar gráficas por componentes.

Los siguientes son algunos de los ejemplos:

In[1]:= ParametricPlot3D[{Sin[t],Cos[t],t/3},{t,0,15}]

Otra de las características que posee el *mathematica* es el trabajo algebraico. El programa puede encontrar soluciones exactas a ecuaciones, lo mismo que soluciones numéricas. Puede expandir una expresión algebraica, factorizar una expresión, simplificar etc. Se mostrarán algunos de los comandos que permiten el trabajo algebraico.

Solve[f[x]== número real] este comando permite encontrar la solución de la ecuación.

Ahora se dará un ejemplo de la utilización de este comando.

In [1] : = Solve[3x+7==4]

Out[1] : = {{x -> -1}}

In[2] : = Solve[x^3+x^2+x+1==0]

Out[2]: = {{x -> -1}, {x -> I}, {x -> -I}}

La salida para la ecuación $3x+7=4$, muestra que la solución es $x= -1$, para la segunda ecuación $x^3+x^2+x+1=0$, muestra que las raíces de la ecuación son $x= -1$, $x= i$, $x= -i$

El comando *Solve* se puede utilizar para encontrar la solución de un sistema de ecuaciones, por ejemplo: $2x-3y+4z=2$, $3x-2y+z=0$, $x+y-z= 1$

In[1] := Solve[{2x-3y+4z==2, 3x-2y+z==0,x+y-z==1}]

$$\{x \to \frac{7}{10}, y \to \frac{9}{5}, z \to \frac{3}{2}\}$$

Es posible utilizar este comando para resolver ecuaciones de grado superior, como: $4x^2+y^2= 4$, $x^2+4y^2= 4$

In[1]:= Solve[{4x^2+y^2==4,x^2+4y^2==4}]

Out[1]:=

$$\{\{x \to \frac{2}{\text{Sqrt}[5]}, y \to \frac{2}{\text{Sqrt}[5]}\},$$

$$\{x \to \frac{-2}{\text{Sqrt}[5]}, y \to \frac{2}{\text{Sqrt}[5]}\},$$

$$\{x \to \frac{2}{\text{Sqrt}[5]}, y \to \frac{-2}{\text{Sqrt}[5]}\},$$

$$\{x \to \frac{-2}{\text{Sqrt}[5]}, y \to \frac{-2}{\text{Sqrt}[5]}\}\}$$

El programa también permite encontrar raíces aproximadas de una ecuación, el comando que permite esto es: *NRoots[f[x]==0,x]* la función f[x] es a la que se le encontrarán las raíces y la *x* específica con respecto a qué variable se encontrarán las raíces. Ejemplo:

In[1]:= NRoots[x^5+x^4-4x^3+2x^2-3x-7==0,x]

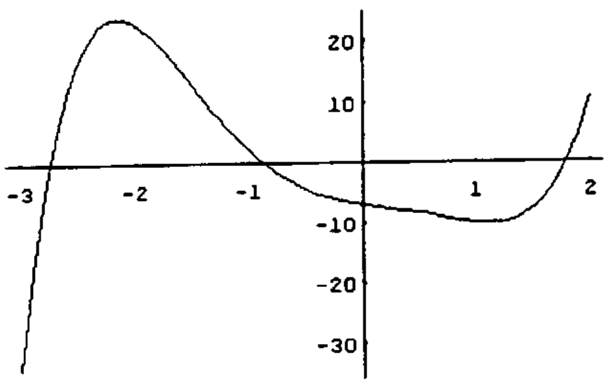
Out[1]:= x == -2.74463 || x == -0.880858 ||

x == 0.41452 - 1.19996 I ||

x == 0.41452 + 1.19996 I || x == 1.79645

Como se observa esta ecuación posee tres raíces reales y dos complejas, que como es de esperarse son conjugadas. Otra forma de encontrar estas raíces sería: primero efectuar la gráfica observar aproximadamente la localización de las raíces, para luego utilizar el comando *FindRoot* que permite encontrar los ceros de una ecuación, pero cerca a un valor dado de x. El siguiente ejemplo aclara esto:

In[1]:= Plot[x^5+x^4-4x^3+2x^2-3x-7,{x,-3,2}] ;



Out[1]:=

In[1]:= FindRoot[x^5+x^4-4x^3+2x^2-3x-7,{x,-1}]

Out[1]:= {x -> -0.880858}

In[2]:= FindRoot[x^5+x^4-4x^3+2x^2-3x-7,{x,-2.5}]

Out[2]:= {x -> -2.74463}

In[3]:= FindRoot[x^5+x^4-4x^3+2x^2-3x-7,{x,2}]

Out[3]:= {x -> 1.79645}

Las otras raíces se encuentran de la misma manera.

Como se observa, tratar de hallar estas raíces en forma manual, aunque se conozca la teoría, puede ser una labor bastante tediosa.

Otros de los comandos de gran ayuda para el manejo de expresiones algebraicas son los comandos *Factor, Expand, Simplify.*

In[1]:= Expand[(1+x)^3]

Out[1]:=

$1 + 3x + 3x^2 + x^3$

In[1]:=Expand[(1+x+3y)^4]

Out[1]:=

$1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4 + 12y + 36xy + 36x^2y + 12x^3y + 54y^2 + 108xy^2$

$+54x^2y^2+108y^3+108xy^3+81y^4$

In[1]:= Factor[%]

Out[1]:= $(1 + x + 3y)^4$

El símbolo de % ,dentro de la orden *Factor,* le dice a *mathematica* que utilice el resultado de la línea anterior. Si se hubiera utilizado la orden *Simplify*[%] se obtendría el mismo resultado.

Otro de los módulos que posee el *mathematica* es el trabajo estadístico de datos: este modulo permite trabajar con estadística descriptiva, distribuciones continuas, distribuciones discretas, test de hipótesis, intervalos de confianza, regresión lineal.

Para trabajar con este módulo (Paquete) se debe cargar el módulo, esto se realiza de la siguiente forma:

In[1]:= <<Statistics 'DescriptiveStatistics'

Se presenta un ejemplo de trabajo estadístico para los siguientes datos:

In[2]:= data= {4.3, 7.2, 8.4, 5.8, 9.2, 3.9}

Out[2]:= {4.3, 7.2, 8.4, 5.8, 9.2, 3.9}

In[3]:= Mean[data]

Out[3] := 6.46667

In[4]:=Variance[data]

Out[4] := 4.69467

In[5]:= DispersionReport[data]

Out[5]:=

{Variance -> 4.69467,

StandardDeviation -> 2.16672,

SampleRange -> 5.3, MeanDeviation -> 1.8,

MedianDeviation -> 2.05,

QuartileDeviation -> 2.05}

Existen otros módulos en estadística, se recomienda consultar el manual del usuario.

El *mathematica* tiene una serie de funciones para el manejo del cálculo en una y en varias variables, además de permitir la resolución de ecuaciones diferenciales, el trabajo con sucesiones y series, transformada de Laplace, transformada de Fourier, polinomios de Legendre, polinomios de Bessel, función delta de Dirac, etc. Reiteramos que esto no es un manual de consulta, sino una referencia rápida para permitir a los maestros y alumnos utilizar el programa para realizar los talleres en los que se utilizó el programa. Por esto, se dan algunos ejemplos de la funciones que pueden ser de ayuda.

La función *Limit[expresion,x->a]* permite encontrar el límite de la expresión cuando x tiende hacia a.

In[1]: =Limit[Sin[3x]/x,x->0]

Out[1]:= 3

In[2]: =Limit[2x^2+25x+72/(72-47x-14x^2),x->9/2]

Out[2]:= $\frac{7183}{7}$

In[2]: =Limit[(50x^2+95x+24)/(20x^2+77x+72),x->Infinity]

Out[2]:= 5/2

El programa también permite calcular derivadas : $f'(x) = lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

el comando para calcular las derivadas es *D[expresion,x]*.

In[1]:= D[x^4-5x+6,x]

Out[1]:= -5 + 4 x^3

El comando para calcular integrales es *Integrate[expresion,{x,a,b}]* esto permite el cálculo de integrales definidas.

In[1]:= Integrate[x^2,{x,a,b}]

Out[1]:= $\dfrac{-a^3}{3}+\dfrac{b^3}{3}$

In[1]:= Integrate[Sin[x]*Cos[x],x]

Out[1]:= $-\dfrac{Cos(x)^2}{2}$

Además de límites, integrales y derivadas, es posible trabajar con series de potencia, esto es, aproximar una función *n*-veces derivable por un polinomio con coeficientes enteros.

In[1]:= Series[Exp[x],{x,0, 5}]

Out[1]:= $1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^4}{24}+o[x]^5$

Otras de la comandos que se utilizaron en los talleres fue *Nest[f[x],x, número de veces]*
Este comando compone la función consigo misma un número determinado de veces.

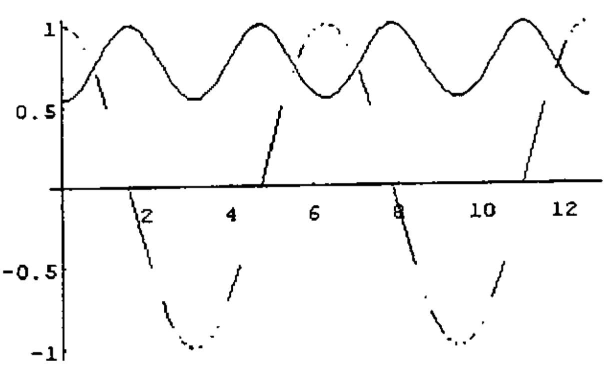
In[1]:= Nest[Cos[x],x,2]

Out[1]:= Cos[Cos[x]]

Determinar el comportamiento de la compuesta en una clase de tiza y tablero puede ser complicado, sin embargo, con *mathematica* se puede efectuar la gráfica de la función Cos[x] y Cos[Cos[x]] para observar el efecto gráfico de la compuesta

In[1]:= r[x_]:=Nest[Cos,x,2] en la función r[x] se almacena la segunda compuesta

In[1]:= Plot[{Cos[x],r[x]},{x,0,4*Pi},PlotStyle->{Dashing[{.01}],GrayLevel[0]}]



La gráfica punteada es la función Cos[x] y la otra la compuesta.

Existen muchos otros comandos y propiedades del *mathematica* que sería muy dispendioso nombrarlos. Esto sin contar la programación en mathematica, sin embargo con los comandos vistos hasta ahora es posible aventurarse al trabajo matemático con *mathematica*. En la bibliografía se darán otros textos que pueden ser consultados para adquirir mas destreza con el mathematica.

Conclusiones

El trabajo realizado con los estudiantes utilizando el ordenador como herramienta en la realización de laboratorios de matemáticas mostró que despierta el interés en la mayoría de los estudiantes. Aunque al principio del trabajo se presentó resistencia por la lectura (en inglés algunas veces) de los manuales de *mathematica*, la actitud fue cambiando cuando se dieron cuenta que el programa podía realizar una serie de operaciones (factorización, cálculos complejos, límites, gráficas etc.) que en la mayoría de los casos son operaciones rutinarias que causan problemas a los alumnos. El trabajo de los alumnos después de esta motivación se aceleró de tal forma que utilizaban las horas de descanso para dominar el programa (debido al poco tiempo que tienen en la clase de ordenadores: dos horas semanales). En este punto quiero recalcar que esta fue una de las dificultades que no permitió un mejor trabajo, puesto que no todos estaban dispuestos a trabajar en las horas de descanso para tener un mejor dominio del programa.

El desarrollo del trabajo mostró que en la planeación de los laboratorios se debe tener presente que no tiene sentido efectuar talleres en los que se les pida a los estudiantes que copien una respuesta que da el programa, por ejemplo: graficar una ecuación, solucionar un sistema de ecuaciones, factorizar una expresión algebraica etc., ya que esta clase de trabajo no aporta mucho al estudiante. En los talleres hay que recalcar que uno de los objetivos principales es lograr que los estudiantes tengan vivencias de conocimiento, que no se trata de dar una orden al computador para que este realice una factorización, por ejemplo, sino realizar un taller para que el estudiante a través de una búsqueda pueda encontrar o visualizar que existe una relación entre los coeficientes y la factorización. Si bien es cierto que cuando se comienza el trabajo, este es el tipo de actividades que se utilizan para que los estudiantes se familiaricen con el manejo del programa, es necesario mostrarles que la respuestas del ordenador no poseen valor si no se les da un significado.

Es necesario que después de la realización de un laboratorio, se creen espacios para que los estudiantes socialicen y argumenten sus diferentes conclusiones; estos debates enriquecen mucho la actividad, puesto que en este espacio es donde el trabajo con el ordenador adquiere sentido.

Una de las dificultades alrededor de este punto tuvo que ver con los pocos equipos (ocho), con que contaba la escuela, que tenían los requerimientos de hardware que el programa necesitaba, por esta razón, era necesario que trabajaran tres personas por ordenador y, en algunos casos cuatro, esto mostró que dos de los estudiantes trabajan y los otros eran espectadores de la actividad; por tanto, en las discusiones no participaba la totalidad de la clase. Lo ideal para desarrollar el trabajo es que trabajen dos personas por ordenador, ya que esto facilita el trabajo y da mejores resultados. Además, una estrategia que se utilizó en el trabajo fue el nombramiento de un monitor que ayudara a sus compañeros en el manejo del programa, mientras que el profesor orientaba el trabajo, esto colaboró en el desarrollo de la actividad.

Si bien es cierto, el trabajo con el ordenador cambio mucho la actitud de la clase frente al trabajo en matemáticas, existió también un grupo de alumnos que se mostraron reacios para realizar el trabajo con el ordenador. En muchos casos, estos alumnos tenían la imagen de que el ordenador es simplemente una máquina para jugar y efectuar trabajos escritos de gran calidad. Por esta razón, su trabajo en los talleres se convertía en una tortura y aunque trabajan en los talleres, la respuestas del computador parecían no tener significado para ellos.

Con algunos estudiantes sucedió algo paradójico, puesto que su actitud cambió cuando se trabajó programación en BASIC. Aunque este trabajo exige más compromiso y creación por parte del estudiante, debido a que no se trata de dar comandos para que el programa dé una serie de respuestas, algunos estudiantes lograron mejorar significativamente su trabajo. Se podría pensar que cuando se presenta el trabajo con ciertos nivels de programación, los estudiantes cambian la idea de ver el ordenador como una máquina para jugar y efectuar trabajos, y que también es posible interactuar para modelar, experimentar, hacer hipótesis etc.

Otra faceta que mostró el trabajo con experimentos matemáticos, es que si bien se diseñan una serie de laboratorios sobre algunos tópicos de matemáticas contemporáneas, cuando se realizan estos talleres, en la gran mayoría de los casos, los estudiantes realizan preguntas que involucran otra serie de temas que no estaban contemplados en la actividad. Esto hace que la clase sea dinámica y diferente a la clase tradicional, donde el maestro llega con un texto, abre una de las páginas y recita lo que hay que ver en esa clase. Este tipo de prácticas son las que han convertido la clase de matemáticas en una dictadura, donde la creatividad, la autonomía, parecen estar prohibidas.

La presentación de temas como fractales, sistemas dinámicos, caos determinista etc, que son considerados complicados para ser presentados a los estudiantes, se tuvieron en cuenta para el trabajo de muchos temas del currículum (límites. convergencia, divergencia, perímetro, área, pendiente etc.),

El hecho de realizar la actividades como el juego del caos, permite que los estudiantes se hagan preguntas tales como: ¿Por qué es posible que sucesos azarosos generen estructuras ordenas?, ¿por qué la iteración de una ecuación para unos valores tiene un comportamiento determinista y para otros caóticos? ¿Cómo es posible que una figura geométrica posea un perímetro finito y encierre un área infinita? Esto, por si sólo, es ya una ganancia en la clase de matemáticas.

El poder introducir estos tópicos de matemáticas contemporáneas con elementos sencillos que existen en la mayoría de colegios es una ventaja. Además, el afrontar la misma actividad de formas diferentes (lápiz y papel, con ordenador, con elementos de geometría, de cálculo etc.), hace que una misma actividad sea un reto en diferentes niveles de complejidad.

Las actividades sobre el juego del caos y fractales, no se explotaron como podría haberse hecho; uno de los factores fue falta de tiempo y otro el desconocimiento de formas para profundizar de manera sencilla con los alumnos en el estudio de estos temas. Por ejemplo, en el juego del caos, las preguntas y la actitud de asombro de los estudiantes no se aprovecharon para afrontar el problema de la dimensión de la figura obtenida, utilizando *recubrimientos por cajas*. También faltó responder preguntas de los alumnos, como: ¿Por qué la figura que surge posee esas simetría particular?, ¿el triángulo que surge se debe a que se toman tres puntos para realizar el juego?, ¿por qué aparecen triángulos dentro de triángulos etc.? Sugiero que quien realice la actividad del juego del caos le de una mayor importancia y consulte la bibliografía que se dio para profundizar en la actividad, ya que de ella se pueden desprender muchas actividades.

Otro de los puntos que pudo enriquecer la actividad de fractales y que no se realizó fue el desarrollo de programas que generan, por ejemplo, el conjunto de Mandelbrot o conjuntos de Julia. Estos programas son sencillos de realizar con un mínimo de conocimientos en programación en Basic; además, si se desconoce el manejo de la parte gráfica, es posible que los alumnos a los que se les enseña Visual Basic los realicen más fácilmente.

Si los alumnos no conocen algo de programación, se podría hacer que manejen algunos de los programas de fractales como por ejemplo el Fractint, que es un programa potente y didáctico que no posee derechos de autor y puede ser copiado sin ningún problema. El programa permite obtener diferentes fractales y las imágenes que se obtienen son hermosas. Con este programa se puede investigar la autosimilitud de los fractales a pequeña escala.

En general, el trabajo sobre tópicos de matemáticas contemporáneas y la utilización del ordenador para efectuar laboratorios matemáticos, fue una experiencia enriquecedora para los alumnos como para el maestro. Quedan muchas cosas por hacer alrededor de esta experiencia, es necesario que se pongan en práctica por otros maestros para que así se puedan recoger diferentes puntos de vista e ir mejorando la presentación de estos temas en la educación media. Además, ir incorporando el ordenador como una herramienta en la clase de matemáticas.

Este proceso necesita, sin embargo, maestros que estén dispuestos a jugársela por un cambio de actitud en la enseñanza de matemáticas.

BIBLIOGRAFÍA

BARSNEY , M " Fractals Everywhere" Boston Academy Presss 1988.

BENOIT MANDELBROT, "Los Objetos Fractales" Editorial TusQuest 1984.

J. BRIGGS, "Espejo y Reflejo" Editoria Gedisa 1990.

HEINZ OTTO PEITGEN - HARTMUT JURGENS, "Fractals for the classroom" Editorial Springer-Verlag 1991.

IAN STERWART "Juega Dios a los dados" la nueva matemáticas del caos, Editorial Grijalbo, 1991.

JAMES P CRUTCHFIELD Y OTROS, "Caos" Investigación y Ciencia, marzo 1988.

LORING COES LLL, "Building Fractal Model with Maniputatives" The mathematics teacher Vol 86, No 8 November 1993.

MARTHA L. ABELL - JAMES P. BRASELTON, "Mathematica by Example" Editorial AP Professional, 1993.

MIGEL GUZMÁN -MIGEL ANGEL MARTÍN, "Estructuras fractales y sus aplicaciones" Editorial Labor, 1993.

PEDRO GÓMEZ, " Matemática Básica" una empresa docente, Universidad de Los Andes.

PETERSON IVARS, "El turista matemático" Alianza editorial 1992.

PHILIP J.DAVES - REUBEN HERSH, "El sueño de Descartes" El mundo según las matemáticas, Editorial Labor 1989.

RENÉ THOM, "Parábolas y Catastrofes" Editorial TusQuets 1993.

ROBERT L. DEVANEY, "A first course in chaotic dynamical system" Editorial Addison- Wesley, 1992.

STEPHEN WOLFRAM, "Mathematica A system for doing mathematics by computer" Editorial, Addison-Wesley 1991.

THEODORE W. GRAY JERRY GLYNN, " Exploring Mathematics with Mathematica" Editorial Addsion-Wesley 1991.

TIM WEGNER - BERT TYLER, " El Mundo de los Fractales". Editorial Anaya 1993.