"RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MEDIANTE LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES EN BÁSICA SECUNDARIA"

Informe final

Contrato No 23 de 2002

Nivia Yela, Luis Fernando Alméciga, y Germán Montezuma
Institución Educativa Distrital Carlos Arango Vélez
Bogotá, noviembre de 2003

TABLA DE CONTENIDO

PRESENTACIÓN

En este documento se presenta el informe final del proyecto de investigación "RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MEDIANTE LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES EN BÁSICA SECUNDARIA" de la Institución Educativa Distrital Carlos Arango Vélez.

El trabajo realizado durante los meses transcurridos desde septiembre de 2002 hasta octubre 31 de 2003, estuvo centrado en el diseño de los talleres para los cuatro grados 6° a 9°, en la planeación de la implementación y observación de los resultados según las categorías de análisis que se propusieron para establecer la validez y pertinencia de la propuesta didáctica.. Inicialmente se describen las ideas que se tuvieron en cuenta para el diseño de los talleres y el proceso seguido en su elaboración. Luego se presentan los talleres diseñados para los cuatro grados de básica secundaria. Para finalizar se da cuenta de los resultados observados en los grupos de estudiantes, teniendo en cuenta los modelos que fueron propuestos y los objetivos del proyecto. Tanto los formatos de los talleres como algunos trabajos realizados por los estudiantes constituyen los anexos del documento.

1. DESCRIPCIÓN GENERAL DEL PROYECTO

Los profesores de matemáticas de la Institución Educativa Distrital Carlos Arango Vélez nos involucramos a comienzos del año 2002 en la adaptación de una propuesta para trabajar las ecuaciones lineales, que se implementó con los estudiantes de grado noveno. La propuesta estaba basada en la secuencia de tareas que Socas, Camacho, Palarea y Hernández (1989) proponen, y que utiliza distintos modelos gráficos (balanza, diagramas, esquemas) como ayudas intermedias para llegar a la representación algebraica de las ecuaciones.

Los resultados obtenidos mostraron que la propuesta fue muy elemental para los estudiantes de ese grado y no aportó gran cosa a la comprensión del tema. Se pensó entonces en revisarla y tomarla como base para el diseño de una nueva propuesta dirigida a estudiantes de grados inferiores.

En la revisión de esta propuesta se miraron las preguntas y las respuestas de los estudiantes a cada una de ellas, y se contemplaron otras posibles respuestas. Se tuvieron en cuenta aspectos de forma, que incluyeron la identificación de las palabras empleadas, la coherencia y claridad de la redacción y los términos faltantes o sobrantes en los enunciados. También se consideraron aspectos del contenido, como la posible intención de la pregunta y su pertinencia para alcanzar tal intención; las posibilidades de trabajo y razonamiento que propicia; el contenido que moviliza y el sentido de su ubicación en la secuencia de tareas.

Como consecuencia de ese análisis se diseñó el proyecto "RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MEDIANTE LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES EN BÁSICA SECUNDARIA" cuyo informe final se detalla a continuación.

1.1 PLANTEAMIENTO DE LA INNOVACIÓN

Concretamente la innovación consistió en considerar estrategias no usuales al entorno escolar para la solución de ecuaciones con modelos, y enmarcar este proceso de solución en la metodología de resolución de problemas.

Para esto los profesores participantes con el apoyo del asesor realizaron una reflexión y análisis permanentes, y una reconstrucción de la propuesta que sobre solución de ecuaciones se había desarrollado a mediados del año anterior en el colegio. A la nueva propuesta se le implementó una graduación en la complejidad en cuanto se refiere al enunciado mismo de los problemas (los cuales se intentó en lo posible que estuvieran relacionados con situaciones familiares a los estudiantes y a sus contextos cotidianos); a las condiciones allí indicadas; a los sistemas numéricos involucrados (naturales, enteros, fraccionarios, reales); a las representaciones utilizadas; a las estrategias posibles de solución y al uso de los modelos implicados en la solución. A medida que los estudiantes fueron avanzando en el proceso se fue incrementando el nivel de dificultad con respecto a los aspectos mencionados.

La propuesta estuvo entonces constituida por guías y talleres para ser desarrollados por los estudiantes y por tareas de socialización intercaladas con la ejecución de las guías a medida que las diversas partes de cada una se iban desarrollando durante la implementación de la propuesta.

El objetivo central de la propuesta consistió en que los estudiantes, a través del uso de herramientas para la resolución de problemas ya trabajadas en otras temáticas de las matemáticas y la física en el colegio, construyeran y desarrollaran estrategias de solución de ecuaciones de primer grado con una incógnita en contextos de problemas. Además se buscaba alcanzar logros en el estudiante en distintos niveles de complejización según el grado escolar, con respecto a:

- La comprensión del significado de ecuación e incógnita.
- La argumentación con respecto a los procedimientos desarrollados y las ecuaciones mismas.
- El manejo del lenguaje simbólico.

Lo anterior se buscó mediante la realización de actividades como las siguientes:

- Analizar enunciados verbales de problemas de forma que pudieran contextualizarlos, es decir ubicarlos dentro de una situación ya conocida o que debía consultar.
- Interpretar y transformar el problema mediante uno o varios modelos existentes para solucionar ecuaciones en el álgebra, como las reglas formales, la búsqueda experimental, la balanza, el tablero con fichas, y la inversión del diagrama.
- Escribir su respectiva expresión simbólica.
- Resolver la ecuación resultante con los distintos métodos usados.
- Verificar la respuesta obtenida
- Interpretar la respuesta con respecto a la situación planteada.
- Argumentar acerca del significado de los términos de una ecuación que se perciben al utilizar los diferentes métodos.

Después de la l
me quedan
las últim
no las dos p

La evaluación de los procesos de los estudiantes se hizo de acuerdo con las evidencias que se percibían como resultado de la realización de las acciones anteriores, reflejado en sus producciones escritas y eventualmente en sus explicaciones orales. Adicionalmente se realizó un seguimiento cuidadoso de la implementación de las guías, lo cual posibilitó dar cuenta de la pertinencia o de las dificultades del diseño mismo. Esta evaluación fue producto del trabajo en la fase de análisis e interpretación que los profesores llevaron a cabo con la ayuda del asesor.

Dame una v
de la evaluaci
¿Cómo es la e
dencia?

Se esperaba que en los profesores participantes se dieran procesos de reflexión que aportaran a su conocimiento no sólo con respecto al tema matemático mismo de la solución de ecuaciones, sino también con referencia a la didáctica de dicho tema. En particular, se esperaba ampliar el repertorio de problemas que involucren ecuaciones de primer grado, determinar su nivel de complejidad para ubicarlos en los distintos grados escolares, mirar su pertinencia para promover los logros deseados en los estudiantes. Igualmente se esperaba contar con una idea más precisa acerca de las producciones de los estudiantes y de las dificultades que surgieran en esta nueva propuesta.

Desde otra parte, se pretendía que el trabajo en el proyecto aportara al desarrollo profesional de los docentes participantes en el sentido de aumentar su conocimiento y experiencia en relación con el diseño y desarrollo curricular para el aula. Específicamente se esperaba una mayor conciencia relativa a los aspectos a considerar en el diseño y en la observación y análisis de los resultados.

1.2 OBJETIVO GENERAL DEL PROYECTO

Validar y aplicar una estrategia didáctica que permita mostrar el nivel de apropiación conceptual de las ecuaciones lineales a través de la resolución de problemas

2. REFERENTES TEÓRICOS

2.1 REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA

A continuación se presentan los resúmenes de algunas de las lecturas realizadas y discutidas por los participantes en las reuniones de trabajo. Varios de los planteamientos consignados aquí han sido la fuente de ideas que se tuvieron en cuenta para el diseño que se está empezando a elaborar.

a) Promoción del pensamiento algebraico en la escuela primaria: una propuesta que cobra sentido de acuerdo con nuestras concepciones sobre el conocimiento matemático. Agudelo C. Aula Urbana No. 37. Bogotá. 2002

En este artículo se recomienda empezar el estudio del álgebra en la primaria puesto que en el bachillerato los estudiantes presentan muchas dificultades en el estudio de la misma, ya que tradicionalmente, en grado octavo se inicia el estudio de las expresiones algebraicas como una colección de definiciones formales y algorítmicas organizadas en un listado de temas, en donde la función del profesor es presentar las definiciones y explicar en forma eficiente los procesos a seguir en los ejercicios, y el papel del alumno es poner atención a las explicaciones y procedimientos seguidos en un ejercicio modelo para luego mecanizar con un listado de ejercicios del mismo tipo explicados en clase.

En este contexto, las dificultades del aprendizaje más comunes observadas en el aula de clase son:

1) Dificultad en dar significado correcto al uso de las letras en el álgebra, en especial la letra como variable.
2) El estudiante establece la separación entre la aplicación del algoritmo para manipular expresiones dadas y la solución de problemas.

Para solucionar en cierto grado estas dificultades el autor sugiere retomar la historia del desarrollo algebraico, ya que el álgebra tiene su origen en la búsqueda de métodos generales para solucionar problemas, en especial de tipo algebraico.

Las etapas de la evolución del pensamiento algebraico que deben considerarse en una propuesta para la enseñanza del álgebra, según el autor, son las siguientes:

1) Inicialmente, en el desarrollo de problemas se usó el lenguaje natural. La falta de lenguaje adecuado para expresar los procedimientos usados en diferentes problemas no permitía aplicar estos procedimientos en forma generalizada.
2) Posteriormente surgió el uso de abreviaciones de las palabras, en especial para representar incógnitas o igualdades (representación sincopada)

3) A mediados del siglo XVI se introdujo el uso de letras para expresar números, lográndose así crear un lenguaje específico y autónomo con el cual se pudieron expresar problemas, pasos de su solución y teoremas.

b) *Iniciación al álgebra*. 1989. M. Socas, M. Camacho, M. Palarea y J. Hernández. Madrid. Editorial Síntesis

Para iniciar el estudio del álgebra se debe partir de un trabajo desde la aritmética y la geometría donde se utilicen conceptos de diferentes contextos partiendo de la experiencia del estudiante, donde se le permita verificar la utilidad del lenguaje simbólico, construir el significado a partir de la diversidad de representaciones: gráficas, tablas, esquemas, etc., y utilizar con cierta flexibilidad en la descripción de los fenómenos físicos o eventos del mundo.
También es necesaria cierta verbalización que dé significado al simbolismo que gradualmente el estudiante ha desarrollado.
Las formas de iniciar el estudio del álgebra se pueden sintetizar en: la generalización de patrones numéricos y geométricos de las leyes que gobiernan las relaciones numéricas y la modelación de situaciones matemáticas y de situaciones concretas; lo anterior apoyado en la solución de problemas aritméticos, geométricos y algebraicos, y también en la historia de las ideas algebraicas.

Según los autores, el álgebra es un lenguaje, una forma de decir y comunicar algo con sus propias reglas que posibilita expresar generalización de situaciones, y permite hacer transferencias a situaciones más complejas.
Por otra parte, el libro plantea que los modelos en la iniciación del álgebra escolar son herramientas que posibilitan pasar de una situación problemática a un sistema simbólico, permitiendo al estudiante una elaboración de significado de los objetos algebraicos antes de aprender una regla para manipular los símbolos. De igual manera, permiten visualizar ese objeto algebraico con muchos enfoques a través de los diferentes lenguajes como son: el natural, el gráfico, el geométrico, y el algebraico.

Según Socas, la modelación es un instrumento de traducción de lenguajes antes que un proceso de modelación.
El uso de modelos puede, por lo tanto, llevar a potenciar en los estudiantes la apropiación y manejo de diferentes aspectos del pensamiento matemático:

- El sistema simbólico.
- La resolución de problemas.
- La traducción de diferentes tipos de lenguajes.
- El significado del concepto de ecuación.
- El concretar algo abstracto.
- El dar sentido a las operaciones algebraicas.
- Facilitar la acción de transponer términos.
- El concepto de igualdad.

- La solución de ecuaciones.
- Expresiones equivalentes.

c) *Estándares curriculares. y de evaluación para la educación matemática.* 1991. NCTM. Sevilla, España: Sociedad Andaluza de Educación Matemática.

El documento establece como características del currículo para los grados 5° – 8° las siguientes:

- Como contexto para las matemáticas en estos grados han de usarse situaciones de problemas que establezcan la necesidad de ideas nuevas y motiven a los estudiantes.
- Aunque pueda olvidarse una idea especifica, puede recordarse el contexto en el que se aprende y así re-crear la idea.
- El currículo 5° - 8° debe estar impregnado de comunicación a través de las matemáticas, sobre las matemáticas y razonamiento matemático.
- Debe enseñarse una amplia gama de temas, incluyendo conceptos numéricos, operaciones, estimación, funciones, álgebra, estadística, probabilidad, geometría y medición. La tecnología, incluyendo calculadoras, ordenadores y videos, debe usarse cuando sea apropiado. Estos recursos y formatos liberan a los estudiantes de tediosos cálculos y les permite concentrarse en la resolución de problemas y demás contenidos importantes.

Contenidos que merecen más atención en los grados 5° - 8°:

Algebra

Desarrollar estructuras conceptuales para variables, incógnitas, expresiones y ecuaciones. Utilizar toda una gama de métodos para resolver ecuaciones lineales e investigar de manera informal inecuaciones y ecuaciones no lineales.

Resolución de problemas

Dedicarse a problemas abiertos y tareas ampliadas de resolución de problemas
Investigar y formular preguntas a partir de situaciones problema
Representar situaciones de forma verbal, numérica, gráfica, geométrica o algebraica.

Ejemplos de problemas que se pueden trabajar:

Piensa un número, añádele 5. Multiplica el resultado por 2. Réstale 4. Divídelo por 2. Réstale el número que habías pensado al principio. Verás cómo te adivino el pensamiento: el resultado es 3.

Este ejemplo ilustra el papel que cumplen los símbolos escritos en la representación de ideas. Los estudiantes aprenden a usar un lenguaje preciso en conjunción con los sistemas simbólicos especiales de las matemáticas, como la notación algebraica.

El número que se piensa	n
Añade cinco	$n + 5$
Multiplica por dos	$2n + 10$
Resta cuatro	$2n + 6$
Divide por dos	$n + 3$
Réstale el número que habías pensado	3

Contenidos que merecen menos atención en los grados 5° - 8°:

Algebra
Manipular símbolos. Memorizar procedimientos y hacer práctica de repetición sobre resolución de ecuaciones.

Resolución de problemas
Practicar con problemas rutinarios de un solo paso. Practicar con problemas categorizados por tipos: problemas con monedas, problemas sobre la edad. (p. 68, 69)

d) *Situaciones de generalización y uso de modelos en la iniciación al álgebra escolar.* 2000. I. Torres, E. Valoyes y R. Malagón. *Revista EMA, 7* (1), 227-246.

El documento sustenta la necesidad de trabajar con diversas aproximaciones al concepto de ecuación para que los estudiantes las puedan significar; esto conlleva a poner a los estudiantes en situaciones en las que a partir de varias representaciones (gráficas, tablas, etc.) construyan el significado de ecuación y lo usen con flexibilidad para describir fenómenos físicos o eventos del mundo. En este proceso de modelización se requiere cierta verbalización que dé significado al simbolismo desarrollado gradualmente. La modelización en la iniciación del álgebra debe permitir el desarrollo de la noción de variable en los estudiantes. El punto crucial en este proceso es la fase de formulación que resulta en la creación del modelo (lineal). El uso de modelos en la formulación de ecuaciones y en su solución realmente se redimensiona en este trabajo. Modelo (balanza, máquina, geométrico, etc.) es el modo de crear significado, de construir objetos matemáticos y de producir justificaciones de lo que son tales objetos y lo que es posible hacer con ellos. El modelo en el que se enmarque una ecuación determina las justificaciones de las distintas transformaciones que se efectúen para resolverla. El tipo de ecuación determina el campo donde se puede solucionar y el modelo que se puede usar.
A partir del uso de modelos como herramientas de traducción entre distintos lenguajes (natural, gráfico, geométrico, etc.) se espera llegar a una construcción paulatina de la sintaxis algebraica.
El informe da cuenta del uso de modelos como la balanza, parte-todo, máquina, modelo geométrico, etc., como herramientas que al ser usadas permiten dotar de significado a las ecuaciones lineales en las que la incógnita aparece en ambos miembros, es decir ecuaciones de la forma $Ax \pm B = Cx$; $Ax \pm B = Cx \pm D$. Se adopta la idea de modelaje en la cual se conjugan dos componentes: la traducción de distintos lenguajes al algebraico, que da significado en un contexto más concreto a los objetos y operaciones; la separación de estos objetos y operaciones de los significados más concretos, es decir el acceso a un nivel puramente simbólico.

e) *Resolución de problemas en los albores del siglo XXI: una visión internacional desde múltiples perspectivas y niveles educativos.* Nunokawa, K. Heuristic strategies and problem situations. En J. Carillo y L. C. Contreras (Eds.), Hueva, España: Hergué, Editora Andaluza.
En los procesos de resolución de problemas se usan con frecuencia estrategias heurísticas bien conocidas que parecen presentar controversia sobre cómo hacer dibujos o diagramas,

o cómo solucionar problemas más simples que den luces sobre el que se está resolviendo, aunque estos procedimientos no necesariamente hagan parte de la solución final.
Algunos autores clasifican las estrategias heurísticas como habilidades de pensamiento en dominios específicos; las describen, por ejemplo, en términos de "traducir frases de un problema en un diagrama basado en una recta numérica", "dividir el problema en partes", o "encontrar un problema relacionado".
En contraste, otros investigadores señalan la inefectividad de la instrucción de estrategias heurísticas y, entre otros planteamientos, afirman que la enseñanza de estrategias de resolución de problemas y heurísticas aporta muy poco a mejorar la habilidad de los estudiantes para resolver problemas en general.
La discusión anterior parece implicar una aproximación a aclarar el papel de las estrategias heurísticas en la resolución de problemas con el fin de no esperar que tengan una naturaleza algorítmica. Esto lleva a liberar las estrategias heurísticas de tipos de problemas restringidos a los que pueden ser aplicadas. Si no se trata de procedimientos algorítmicos y las estrategias heurísticas no pueden producir respuestas por ellas mismas, se necesita verificar su relación con los recursos matemáticos, que parecen tener un papel central.
Una visión alternativa al proceso de resolución de problemas es aquella donde los solucionadores tratan los problemas exitosamente con aproximaciones informales basadas en la modelación directa de la situación problema, expresión que hace referencia a lo que las preguntas plantean.
Si se supone que el solucionador intenta combinar su propio conocimiento matemático con las situaciones problema se verá que una forma de encontrar esta combinación es cambiar la manera en que los solucionadores ven las situaciones problema; esto significa que traten de encontrar un punto de contacto entre las situaciones y su conocimiento, buscando nuevos aspectos o apariencias de la situación. De esta manera se introdujo la noción de "estructuras de una situación problema del solucionador" que son estructuras dadas por el solucionador a la situación problema y maneras de verla y consisten de elementos que el solucionador reconoce en la situación, relaciones que establece entre esos elementos, y sentidos que le da a elementos y relaciones. Algunas veces se incluyen elementos que se derivan lógicamente de la situación y que juegan un papel importante en su solución. De todos modos, se trata de estructuras que cambian durante el proceso de solución.
Los modelos recientes de resolución de problemas matemáticos no son simplemente modelos secuenciales que consisten de varias fases incluyendo entender el problema. Más bien los modelos enfatizan la transición entre las fases y la misma fase, por ejemplo entender el problema, aparece varias veces en el proceso. Aun en problemas sencillos, cuando el solucionador usa aproximaciones informales y no se separan claramente las fases, las soluciones se reducen a darle sentido a las situaciones problema. Esto sugiere que darle sentido al problema o entender el problema es una fase que permea todo el proceso y que a medida que se avanza cambia o se amplía la comprensión de la situación; precisamente uno de los resultados obtenidos al solucionar la situación problema es esta comprensión.
Distintos investigadores incorporan conocimiento adicional para desarrollar nuevas representaciones del problema que permite ver la situación de una manera diferente. Por ejemplo en el problema "un niño da 6 canicas a un amigo", la idea es reversar la acción, es decir mirar la situación que ocurre cuando "el amigo le devuelve las canicas al niño", lo que puede ayudar a relacionar el problema con el conocimiento matemático previo, producto de otras situaciones similares.

Una visión alternativa de las estrategias heurísticas es la que espera que éstas jueguen un papel en ayudar a los solucionadores a cambiar sus estructuras de la situación problema o su forma de verla. Las estrategias heurísticas deben ayudar al solucionador a explorar la situación problema y entenderla más profundamente, especialmente cuando los solucionadores están atascados. Cómo se usan para facilitar la exploración, no garantiza que se llegue a la solución final, pues al usar estrategias heurísticas el solucionador obtiene nueva información sobre la situación problema a partir de la que ya conoce y empieza nuevas exploraciones que facilitan las actividades de darle sentido a la situación.
Dibujar diagramas desde un punto de vista flexible acerca de lo que el estudiante puede hacer, facilita el proceso de solución pues permite que el estudiante al observar el diagrama vea sus errores y lo reelabore de manera que se acerque a la solución.

2.2 ANTECEDENTES ACADÉMICOS DEL PROYECTO

Los docentes vinculados al proyecto llevamos a cabo una indagación en la institución, para recoger información sobre cómo y cuándo es que allí se enseña el tema de ecuaciones de primer grado con una incógnita, es decir para conocer algo de las rutas pedagógicas al respecto. Para esto hablamos con otros profesores de matemáticas y consultamos los libros de texto que se utilizan en los grados de básica secundaria. A continuación presentamos un resumen de lo encontrado.

Enseñanza de las ecuaciones de primer grado con una incógnita

Este tema empieza a tratarse desde el grado sexto de educación básica secundaria, iniciando con ecuaciones cuya solución pertenece al conjunto de los números naturales. En séptimo grado se estudian ecuaciones en los números enteros, y en octavo en los números reales.

En general se observó que hay dos secuencias de tareas a través de las cuales los profesores abordamos el tema. Una secuencia A en la que se empieza por tratar la igualdad, y sus propiedades, para llegar a solución de ecuaciones y problemas; y una secuencia B, en la cual antes de iniciar el estudio de ecuaciones se precisan algunos términos tales como álgebra, notación algebraica, fórmula algebraica, signos de operación, signos de relación y de agrupación, coeficiente, signos para indicar la relación que existe entre dos cantidades, valor absoluto, entre otros. Veamos cada una de las secuencias mencionadas.

Secuencia A

La igualdad
Cuando se adopta esta ruta pedagógica se empieza definiendo lo que es una igualdad, con base en ejemplos tales como: "Adriana tiene la misma edad que Luis", para concluir que la edad de Adriana es igual a la edad de Luis, lo cual se puede escribir como:

Edad de Adriana = Edad de Luis.

Se indica, a continuación, que la expresión "Edad de Adriana" se define como el miembro de la izquierda de la igualdad y la expresión "Edad de Luis" como el miembro de la derecha. Se explicita que el signo "=" se lee "igual a". Se expresa la definición de igualdad como “una expresión en donde dos cantidades algebraicas tienen el mismo valor”, y se presenta como ejemplo a = b + c .

Luego se exponen ejemplos de problemas contextualizados y su solución; por ejemplo:

> “Tengo ahorrados $3000 y me regalan $2000. ¿Cuánto dinero tengo?”
>
> Solución.
> Para saber cuánto dinero tengo, reúno las cantidades en una sola:
> $3000 + $2000 = $5000
> El resultado es una igualdad donde $3000 + $2000 es el miembro de la izquierda y $5000 es el miembro de la derecha.

Después de realizada esta exposición por parte del profesor, se plantean ejercicios para que los estudiantes los desarrollen, y afiancen el concepto y manejo de la igualdad.

Propiedades de la igualdad

Una vez tratado el concepto de igualdad se pasa a enunciar las propiedades de uniformidad, para las diferentes operaciones, desde la adición hasta la radicación, ilustrando con algunos ejemplos, en cada caso.

Propiedad uniforme para la adición y la sustracción

Si a una igualdad le sumamos o restamos la misma cantidad a ambos miembros, la igualdad no se altera. Ejemplo:

$8 + 3 = 11$
$8 + 3 - 5 = 11 - 5$
$11 - 5 = 6$
$6 = 6$
Se obtiene una nueva igualdad

Propiedad de la multiplicación y división

Si en una igualdad se multiplica o divide ambos miembros por un mismo número, la igualdad no se altera.

Propiedad de la potenciación y radicación

Si en una igualdad cualquiera elevamos ambos miembros a un mismo exponente, o extraemos la misma raíz, la igualdad no se altera.

Solución de ecuaciones y resolución de problemas

Como aplicación de los conceptos de igualdad, ecuación y sus propiedades, se continúa con el desarrollo de problemas que dan origen a ecuaciones de primer grado las cuales deben ser solucionadas. Se indica expresamente que las ecuaciones se resuelven aplicando las propiedades de las igualdades, y esto se ilustra con ejemplos como el siguiente:

> En un depósito hay 420 canecas de combustible, 130 son de gasolina corriente y las demás son de gasolina extra. ¿Cuántas canecas de gasolina extra hay?
> Solución:

Se plantea la igualdad $130 + x = 420$.
Aplicando la propiedad uniforme de la sustracción:
$130 + x - 130 = 420 - 130$
$x = 290$

Enseguida se plantean ejercicios para que los estudiantes practiquen la solución de ecuaciones, como:

Resuelve las siguientes ecuaciones.
$y - 8 = 13$
$2 x 2 = 32$
$4 x 3 = 108$
$9m - 2 = 34$

Secuencia B

En esta ruta pedagógica, antes de iniciar el estudio de ecuaciones, se precisan algunos términos y el significado de símbolos y signos que el estudiante puede encontrar en las ecuaciones que se le propondrán para que las resuelva. Entre otros:

Álgebra: es la rama de la matemática que estudia la cantidad considerada del modo más general posible.
Notación algebraica: los símbolos usados en álgebra para representar las cantidades son los números y las letras.
Fórmula algebraica: es la representación por medio de letras de una regla o de un principio general.
Los signos del álgebra son de tres clases: signos de operación, signos de relación y signos de agrupación.
Signos de operación: son: +, -, x, ÷, a^n, √, Log_b
Coeficiente: en el producto de dos factores, cualquiera de los dos factores es llamado coeficiente del otro factor.
Signos de agrupación: se emplean estos signos para indicar la relación que existe entre dos cantidades.. Los principales son:
=, que se lee: igual a
>, que se lee: mayor que
<, que se lee: menor que.
Los signos de agrupación son: el paréntesis ordinario ( ), el paréntesis angular o corchete [ ], y la barra o vínculo sobre la expresión _______.
Valor absoluto: es el número que representa la cantidad prescindiendo del signo o sentido de la cantidad y valor relativo es el sentido de la cantidad representado por el signo.
Cantidades aritméticas: son las que expresan solamente el valor absoluto de las cantidades representado por números, pero no nos dicen el sentido o valor relativo de las cantidades.

Cantidades algebraicas son las que expresan el valor absoluto de las cantidades y además su sentido o valor relativo por medio del signo. Los signos + y - tienen en álgebra dos

aplicaciones: una, indicar las operaciones de suma y resta, y otra, indicar el sentido o condición de las cantidades.
Expresión algebraica: es la representación de un símbolo algebraico o de una o más operaciones algebraicas.
Término es una expresión algebraica que consta de un solo símbolo o de varios símbolos no separados entre sí por el signo + o -.
Términos semejantes: Dos o más términos son semejantes cuando tienen la misma parte literal , o sea, cuando tienen iguales letras afectadas de iguales exponentes.
Reducción de términos semejantes: consiste en convertir en un solo término dos o más términos semejantes.

Además de lo anterior se indica que los números se emplean para representar cantidades conocidas y determinadas; las letras para representar toda clase de cantidades, ya sean conocidas o desconocidas; las cantidades conocidas se expresan por las primeras letras del alfabeto: a, b, c, d, ..., y las cantidades desconocidas se representan por las últimas letras del alfabeto: u, v, w, x, y, z.

Una vez hechas las precisiones anteriores en cuanto a significados de términos y símbolos se procede al estudio de las ecuaciones, de sus propiedades y la forma de resolverlas.

Ecuaciones enteras de primer grado con una incógnita:

Esta parte del proceso se desarrolla a partir de unas definiciones básicas ilustradas con sus respectivos ejemplos, de la siguiente manera:

Igualdad: es la expresión de que dos cantidades o expresiones algebraicas tienen el mismo valor.

Ejemplos: $a = b + c$. $3x^2 = 4x + 8$

Ecuación: es una igualdad en la que hay una o varias cantidades desconocidas llamadas incógnitas y que solo verifica o es verdadera para determinados valores de las incógnitas. Las incógnitas se representan por las últimas letras del alfabeto: x, y, z, w, v.

Ejemplo: $6x + 3 = 27$
Miembros: se llama primer miembro de una ecuación a la expresión que está a la izquierda del signo de la igualdad y segundo miembro, a la expresión que está a la derecha.
Así, en la ecuación $3x - 5 = 2x - 3$ la expresión $3x - 5$ es el miembro de la izquierda y $2x - 3$ es el miembro derecho de la igualdad.
Resolver una ecuación es hallar sus raíces, o sea el valor o los valores de las incógnitas que satisfacen la ecuación.

Axioma fundamental de las ecuaciones: Si con cantidades iguales se verifican operaciones iguales los resultados serán iguales. De aquí se derivan la siguientes reglas:

1) Si a los dos miembros de una ecuación se suma una misma cantidad, positiva o negativa, la igualdad subsiste.

2) Si a los dos miembros de una ecuación se resta una misma cantidad, positiva o negativa, la igualdad subsiste.
3) Si los dos miembros de una ecuación se multiplican por una misma cantidad, positiva o negativa, la igualdad subsiste.
4) Si los dos miembros de una ecuación se dividen por una misma cantidad, positiva o negativa, la igualdad subsiste.
5) Si los dos miembros de una ecuación se elevan a una misma potencia o si a los dos miembros se extrae una misma raíz, la igualdad subsiste.

Transposición de términos: consiste en cambiar los términos de una ecuación de un miembro a otro.

Regla: cualquier término de una ecuación se puede pasar de un miembro a otro, cambiándole el signo.

Ejemplo: $5x = 2a - b$ equivale a $5x + b = 2a$

Regla: términos iguales con signos iguales en distinto miembro de una ecuación, pueden suprimirse.

$x + b = 2a + b$ equivale a $x = 2a$

Cambio de signos: los signos de todos los términos de una ecuación se pueden cambiar sin que la ecuación varíe, porque equivale a multiplicar los dos miembros de la ecuación por -1.

Así, la ecuación $-2x + 3 = x - 15$ equivale a $2x - 3 = x - 15$

Resolución de ecuaciones enteras de primer grado con una incógnita

Regla general:

1) Se efectúan las operaciones indicadas si las hay
2) Se hace transposición de términos, reuniendo en un miembro todos los términos que contengan la incógnita y en el otro todas las cantidades conocidas.
3) Se reducen términos semejantes en cada miembro
4) Se despeja la incógnita dividiendo ambos miembros de la ecuación por el coeficiente de la incógnita.

Ejemplo: resolver la ecuación $3x - 5 = x + 3$
Pasando x al primer miembro y -5 al segundo, cambiándoles los signos, tenemos, $3x - x = 3 + 5$
Reduciendo términos semejantes: $2x = 8$
Despejando x para lo cual dividimos los dos miembros de la ecuación por 2, tenemos: $2x/2 = 8/2$

Simplificando $x = 4$

Verificación:

La verificación es la prueba de que el valor obtenido de la incógnita es correcto.

La verificación se realiza sustituyendo en los dos miembros de la ecuación dada la incógnita por el valor obtenido, y si es correcto, la ecuación dada se convertirá en identidad.

Así, en el caso anterior, haciendo $x = 4$ en la ecuación dada tenemos:

$$3(4) - 5 = 4 + 3$$
$$12 - 5 = 4 + 3$$
$$7 = 7$$

Finalmente, como aplicación, se presentan problemas que deben ser resueltos mediante el planteamiento y solución de una ecuación.

2.3 REFERENTES CONCEPTUALES BASICOS

2.3.1 Los modelos

Dado que la palabra "modelo" se usa en diversas situaciones con significados que, aunque en general pueden aproximarse, puntualmente pueden diferir, y teniendo en cuenta que en los talleres se pensaba usar la balanza de brazos como un modelo, fue necesario estudiar algunas de las definiciones del término y empleos de dicha palabra en la enseñanza de las matemáticas, para establecer un significado preciso de "modelo" en este proyecto. De acuerdo con Burkhardt (1981, citado en Janvier, 1996) y con De Lange (1987, citado en Janvier, 1996) *modelar* involucra una fase de formulación, durante la cual un fenómeno o situación es examinado con el fin de establecer algunas relaciones claves entre las variables implicadas, que se completa con una fase de validación donde se verifica el modelo. En la fase de formulación se requiere un proceso de deducción que lleva a una regla obtenida de acuerdo con cálculos realizados o de acuerdo con un razonamiento matemático particular, que es precisamente el modelo. Así para Janvier (1996), un modelo puede estar formulado en forma de una expresión simbólica en la que una variable se expresa en términos de otras, en forma de gráfica o como una tabla de números producida por un computador después de una simulación. En consecuencia, este autor define modelar como el doble proceso de crear o diseñar un modelo con base en supuestos, y verificarlo; el modelo tiene por lo tanto un estado doble: se establece en términos matemáticos y es independiente de la realidad de la que emergió, y representa objetos o relaciones concretas que pueden ser medidas; a los elementos del modelo (parámetros de la fórmula, características de la gráfica y de la tabla) que no tenían significado previamente, se les da un significado según el contexto de la situación que se investiga, ya que un modelo puede considerarse al mismo tiempo abstracto y concreto.

Según Filloy y Sutherland (1996), hay dos posiciones extremas sobre el uso de recursos didácticos para la enseñanza del álgebra. La primera posición propone modelar las nuevas operaciones y objetos en algún contexto concreto familiar a los estudiantes, para llenarlos de significado; en ese caso el primer elemento de la sintaxis algebraica es construido con base en el comportamiento del modelo, por ejemplo una balanza de brazos iguales, o el modelo geométrico. La otra posición propone aprender las reglas sintácticas apropiadas y aplicarlas luego en la resolución de problemas y ecuaciones. Esta es la aproximación tradicional de enseñanza basada en el modelo de Viéte (transposición de términos de una lado de la ecuación al otro) o el modelo de Euler (operar en ambos lados de la ecuación con los inversos aditivos y multiplicativos).

En general, los modelos desarrollados para la enseñanza de las matemáticas tienen dos componentes fundamentales. Uno es la traducción, por medio de la cual a los objetos y las operaciones en situaciones abstractas se les asigna significado y sentido al proporcionar manifestaciones más concretas; de esta manera, el estado de cosas en el nivel concreto representa otro estado de cosas en un nivel más abstracto y la traducción se convierte en un proceso de doble sentido que permite identificar operaciones del nivel abstracto con operaciones en el nivel concreto. El segundo componente es la separación de los nuevos objetos y operaciones, introducidos por medio del modelo, de los detalles de significado apropiados al contexto concreto; esta situación conlleva a desprenderse de la semántica del modelo concreto, dado que lo que se busca no es la solución de un problema que el estudiante ya sabe cómo solucionar, sino la manera de solucionar situaciones más abstractas por medio de operaciones más abstractas; por lo tanto, este componente es el que dirige la construcción de sistemas de signos más abstractos.

Los estudiantes desarrollan una tendencia a quedarse y progresar en el contexto concreto y la fijación en el modelo puede demorar la construcción de una sintaxis algebraica que requiere un rompimiento de la semántica del modelo concreto. En el caso de estudiantes con una tendencia más sintáctica, algunos autores han observado obstáculos generados en el transcurso de abreviar las acciones y producir códigos intermedios entre el nivel concreto y el nivel algebraico sintáctico, que inhiben la abstracción de las operaciones realizadas. Por lo tanto, la dialéctica de los dos componentes de la modelización debe ser tomada en consideración por los diseñadores de currículo para que no se obstruyan una a la otra. El rompimiento que se requiere es un proceso que niega parte de la semántica del modelo, que tiene lugar durante la transferencia del modelo de una situación problema a otra, pero cuando la generalización del modelo se deja al desarrollo espontáneo de los estudiantes, es usual que nieguen partes esenciales del modelo mismo, como la presencia de lo desconocido o la operación sobre éste; en tal caso es necesaria la intervención del profesor para desarrollar el proceso y llevar a los estudiantes la construcción de nuevas nociones.

Los planteamientos anteriores están de acuerdo con nuestras percepciones previas acerca del trabajo de los estudiantes con diagramas numéricos como modelo, lo cual les permite pasar fácilmente de la representación gráfica a la algebraica y solucionar las ecuaciones, pues siguen el diagrama en sentido contrario a las flechas y realizan las operaciones inversas a las indicadas. Sin embargo luego se les dificulta despojarse de los diagramas para resolver ecuaciones y en general no pueden resolverlas sin ellos. Algo similar fue observado por Torres, Valoyes y Malagón (2002) con otros modelos para plantear y resolver ecuaciones.

Fundamentados en todas estas ideas y las de otros autores como Gómez (2002) que distingue el término modelo de la expresión "modelo matemático" para referirse a la fórmula matemática, para el presente proyecto asumimos que un modelo permite representar situaciones, simularlas, simplificarlas y predecir comportamientos; es decir, el modelo posibilita mejorar la comprensión de la situación y resolver problemas. Se optó por usar la palabra "modelo" para nombrar no sólo modelos matemáticos, pero usarla junto con un adjetivo que indique de qué tipo de modelo se habla al referirse a dicho término; es así como la balanza de brazos iguales se podría denominar como recurso para modelar o como "modelo físico", el dibujo de la balanza como "modelo gráfico" y la expresión algebraica general de una ecuación lineal como "modelo matemático".

2.3.2 Resolución de problemas y pensamiento algebraico

En el intento de definir el pensamiento algebraico y por consiguiente, el trabajo implicado en su desarrollo, Masón, Burton y Stacey (1992) hacen una diferencia entre aritmética y álgebra, cuando afirman que en la primera el trabajo se centra en manejar y operar números, mientras que en el álgebra el foco del trabajo son las relaciones entre ellos. Por su parte Bell (1996) indica que el término algebraico añadido a la palabra pensamiento, puede adscribirse al trabajo en aspectos como los siguientes: a) la resolución de problemas complejos aritméticos, paso a paso desde los datos conocidos a los desconocidos o por una percepción global de múltiples relaciones aritméticas y su utilización; b) la codificación y el uso de métodos generales sistemáticos para resolver diferentes tipos de problemas; c) el hallazgo y la prueba de generalizaciones numéricas y geométricas y d) el reconocimiento y empleo de propiedades generales del sistema numérico y sus operaciones.
Otros autores como Lins (1992, citado en Bell, 1996) definen el pensamiento algebraico como la percepción global de múltiples relaciones aritméticas y su utilización, independiente del uso del simbolismo algebraico; es decir, pensar algebraicamente es pensar aritmética, interna y analíticamente. También Janvier (1996) plantea un punto de vista sobre pensamiento algebraico cuando describe cuatro formas en que los estudiantes resuelven problemas, las cuales se distinguen por los grados de cercanía a un método algebraico riguroso: a) resolución de problemas aritméticos paso a paso; b) prueba y error; c) momento intermedio entre la resolución paso y paso y la detección de una estructura global del problema; d) reconocimiento de la estructura global del problema y por lo tanto de la relaciones involucradas.

Para abordar el enfoque de resolución de problemas como aproximación al álgebra se consultó la propuesta de estos autores, quienes identificaron en un estudio tres grandes clases de problemas basados en la naturaleza de las cantidades involucradas y en la relaciones entre ellas:

- problemas de compartir no equitativamente,
- problemas que involucran transformación de magnitudes, y
- problemas que involucran magnitudes no homogéneas y ratas de cambio.

Una clase de problemas bien definida que se encuentra generalmente en el álgebra introductoria es la de los problemas cuya estructura revela las cantidades conocidas y las desconocidas, la relación entre unas y otras, y el tipo de relación involucrado. Estas relaciones son dadas más o menos explícitamente en el enunciado del problema y deben ser reconstruidas por el estudiante con la ayuda de las cantidades conocidas, o de otro conocimiento matemático o contextual, antes de solucionar el problema.

Por ejemplo: "380 estudiantes están registrados en las actividades deportivas ofrecidas durante la temporada. En baloncesto hay tres veces más estudiantes que en patinaje, y en natación hay 114 más estudiantes que en baloncesto. ¿Cuántos estudiantes están registrados en cada actividad?". Un análisis de las relaciones incluidas en el problema señala, por una parte, una relación de comparación aditiva (114 más) entre cantidades desconocidas y, por otra, una relación multiplicativa (3 veces más). También hay otro tipo de relación explícita en este problema: la cantidad total conocida, con sus partes, por lo que se hacen evidentes dificultades al solucionarlo, pues no es fácil establecer un puente entre las cantidades conocidas (entre 380 y 3 veces más o 114 más).

Dado que los procedimientos aritméticos se organizan a través del procesamiento de la cantidades conocidas para establecer conexiones entre ellas y operarlas, esta cantidad es el punto de entrada de los estudiantes, y esta es una de las principales diferencias entre los problemas aritméticos y los algebraicos. En los primeros puede establecerse fácilmente una relación entre cantidades conocidas, mientras que en los segundos no es así.

Otros problemas que se consideran en el presente análisis son aquellos en los que la formulación y la solución de las ecuaciones tienen grados diferentes de dificultad y problemas que contienen cantidades que están intrínsecamente interrelacionadas, aditiva o multiplicativamente. Un problema sencillo donde las ecuaciones son fáciles de plantear y fáciles de solucionar es por ejemplo: "Una libreta de notas cuesta cuatro veces más que un esfero; el esfero es 30 pesos más barato que la libreta de notas. ¿Cuáles son los precios de la libreta de notas y del esfero?".

En el siguiente problema la ecuación es fácil de plantear pero difícil de solucionar por sustitución; aun más difícil es plantear una sola ecuación con dos de las incógnitas en términos de la otra; las cantidades están relacionadas aditivamente: "Una madre con su hijo e hija gastan una cierta cantidad e dinero; la madre gasta un total de $220, el hijo y la hija juntos gastan $150, y la madre y la hija juntas gastan $200. ¿Cuánto dinero gastó cada uno de ellos por separado?".

El problema enunciado a continuación es un problema difícil que se soluciona casi siempre identificando inicialmente varias incógnitas, y como dice Rojano (1996), no es claro que una vez que un problema es formulado algebraicamente sea automáticamente solucionado en el lenguaje algebraico: "La cola de un pescado pesa 4 kg La cabeza pesa tanto como la cola y la mitad del cuerpo. El cuerpo pesa tanto como la cabeza y la cola juntas.¿Cuánto pesa todo el pescado?".

El siguiente es un ejemplo de problema con cantidades intrínsecamente interrelacionadas (distancia, velocidad y tiempo) en forma multiplicativa; en este caso una de las dificultades es saber qué cantidad se usa como base de la conexión que lleva a las ecuaciones: "Un bote navega de un extremo de un lago a otro a 3 km/h; para por una hora y vuelve a navegar a 4 km/h. El tiempo total gastado en atravesar el lago es 7 horas. ¿Cuál es la longitud del lago?".

Los estudiantes usualmente intentan resolver los problemas algebraicos por aritmética o por métodos de deshacer de atrás para adelante, es decir, inversos. Según Bell (1996) muchos de los problemas que se proponen para solucionar en álgebra son también solucionables por razonamiento aritmético. Filloy (1996) ha enfatizado que los problemas que pueden ser representados por ecuaciones como $x + a = b$; $ax = b$; $ax + b = c$ pueden ser resueltos fácilmente por métodos aritméticos. Alegan que se produce un rompimiento didáctico con los problemas representados por $nx+b = cx+il$, ya que los estudiantes normalmente no los pueden solucionar por métodos aritméticos.

Mason, Burton y Stacey (1992) plantean una serie de ideas claves que pueden constituir tanto las raíces del álgebra como rutas posibles para una mejor comprensión de esta asignatura por parte de los estudiantes de educación básica. Estas ideas son:

- expresar generalidades, que tiene que ver con el reconocimiento de patrones,
- ver generalidades: identificar factores claves y combinar estos factores para producir una regla,
- decir generalidades;
- registrar o escribir generalidades que se refiere a reconocer un amplio rango de formas disponibles para expresar la generalidad,
- aceptar cualquier forma cómo legítima,
- dar tiempo par que el estudiante registre en forma pictórica o en cualquiera que escoja,
- promover el movimiento hacia una notación más sucinta, las ventajas de la forma sucinta de las expresiones simbólicas se hace evidente solamente cuando es necesario manipular dichas expresiones;
- resolver problemas de la vida cotidiana para expresar generalidad;
- construir expresiones y deshacerlas, manipular y reordenar expresiones con una meta fija en mente;
- proponer actividades con un amplio rango de posibilidades y no simplemente respuestas correctas o erradas.;

Si se quiere que las expresiones simbólicas tengan algún significado para quien aprende, las etapas preliminares del proceso de registrar son esenciales.

2.3.3 El proceso de generalización en álgebra

De acuerdo con Radford (1996) el propósito de la generalización en álgebra es encontrar una expresión que represente la conclusión, y el propósito de la resolución de problemas de palabra no es encontrar una fórmula sino un número (la incógnita) mediante una ecuación. Esta diferencia no es sólo a nivel de palabras, lo que nos llevaría a creer que la incógnita es una variable y la ecuación una fórmula. La diferencia de hecho es fundamental, vale decir conceptual, y con frecuencia pasa inadvertida. La base lógica que subyace a la generalización es justificar la conclusión por un proceso de prueba que se mueve del conocimiento empírico relacionado con los hechos al conocimiento abstracto. La base lógica de la resolución algebraica de problemas es de naturaleza analítica, pues al resolver el problema se hace la suposición de que conocemos el número que se está buscando y se maneja como si fuera conocido para revelar su identidad al final. Estas dos maneras de pensar son formas independientes, estructuradas y esencialmente irreductibles del pensamiento algebraico. Lo anterior sugiere que los conceptos algebraicos de incógnitas y ecuaciones aparecen ligados intrínsecamente a la aproximación de resolución de problemas, y que los conceptos de variable y fórmula aparecen intrínsecamente vinculados a la aproximación por generalización. Así, estas dos aproximaciones parecen campos complementarios en la enseñanza del álgebra.

Una aproximación funcional al álgebra no significa necesariamente el estudio de funciones, pues ello conlleva el uso de letras como variables en oposición a las incógnitas. La expresión 3x + 5, por ejemplo, puede ser vista como variable cuando puede tomar un rango de valores. También comprende ver una función desde una perspectiva de la relación entre los valores de x y los valores funcionales correspondientes, es decir desde el punto de vista de cómo un cambio en x produce una variación particular en los valores de la función. Una aproximación funcional a la resolución de problemas implica establecer una relación funcional entre los datos dados del problema y ver las letras de los nombres de entrada y salida como variables. Igualmente el uso de varias representaciones es parte integral de una aproximación funcional al álgebra de resolución de problemas.

Es fácil observar que para resolver un problema como "cuando se añade 3 a 5 veces un cierto número, la suma da 40, ¿cuál es el número?", los estudiantes tienden a sustraer 3 y dividir por 5, es decir a usar las operaciones inversas, mientras que la forma algebraica 5y + 3 = 40, involucra multiplicar por 5 y añadir 3, es decir las operaciones contrarias. Para plantear la ecuación se debe pensar precisamente en la manera opuesta que se usaría para resolverlo en aritmética.

Teniendo en cuenta que el proceso algorítmico de pares de variables de entrada y salida es una caracterización de un enfoque puntual (o de puntos de la función), en el cual la función es básicamente una relación que involucra pares binarios, por lo que un enfoque variacional a la función se enfoca en describir cómo varía una cantidad en términos de otra. Esta distinción punto a punto y variacional para las funciones, no es la misma distinción ya mencionada de proceso y objeto. Por ejemplo, al pedirle a un estudiante que produzca una gráfica en "V" con un detector de movimiento en un plano cartesiano, tiempo versus distancia, dice que el objeto en movimiento debe ir más cerca y luego ir más lejos. El estudiante no está viendo la "V" como un objeto o una entidad que existe de una; está viendo que representa un proceso de acercarse y alejarse. El proceso que anticipa no es notacional o algorítmico, es kinestésico; por lo tanto, su comprensión de la "V" tampoco es punto a punto, pues, en este caso, no estría basando su análisis en pares tiempo-distancia ni en el algoritmo para calcular esos pares. Su comprensión es variacional: la "V" describe cómo tiene que variar su distancia al sensor de movimiento.

2.3.4 Principios generales que guiaron el diseño de los talleres

No obstante que el propósito del proyecto en todos los grados de básica secundaria donde se trabajaron los talleres, fue propender por el desarrollo de habilidades en la resolución de problemas mediante el manejo de ecuaciones, se consideraron diferencias en cada taller acordes con el nivel de los estudiantes. No sólo se hicieron distinciones en el conjunto de números que se trataron en cada nivel, sino también en relación con el tipo de tareas, el contenido matemático necesario para el manejo de ecuaciones, la complejidad de las tareas relacionadas, por ejemplo, con el uso del lenguaje algebraico formal, el número de incógnitas involucrado, las cantidades y las relaciones entre ellas, los métodos de solucionar ecuaciones, los contextos propuestos, la redacción de los enunciados de los problemas y el enfoque funcional para las ecuaciones.

Al intentar determinar qué características hacen que un taller sea de instrucción y no sólo de evaluación, donde no se requiere que el estudiante al contestar conozca de antemano la respuesta o la forma de solucionar el problema, surgieron varias ideas, que después de discutidas, se concretaron y se vieron reflejadas en las tareas propuestas en los talleres. Se puede decir por lo tanto que esas ideas dirigieron la construcción de los talleres y les sirvieron de fundamento.

En primer lugar, la decisión de promover la gradualidad en el nivel de complejidad de las tareas, llevó a proponer inicialmente tareas sencillas y luego a plantear tareas donde se aumentaba la complejidad. La intención era que el estudiante por un lado, pudiera al principio hacer algo y se motivara así para continuar el trabajo; por otro lado, para que lo realizado pudiera contribuir en el desarrollo de las tareas siguientes. En segundo lugar y ligado con lo anterior, se buscó organizar la secuencia de las tareas de modo que implicara primero un trabajo con lo particular y luego con lo general; aunque no en todas las tareas propuestas se requirió expresamente de una generalización y ello se propuso cuando se vio que el proceso podía orientarse en ese sentido. En tercer lugar, propiciar el uso de modelos físicos y de modelos gráficos como representaciones de aquellos, donde la manipulación de materiales tiene unas intenciones matemáticas precisas, y podía ayudar a ilustrar y por tanto a la comprensión matemática.

En cuarto lugar, abrir posibilidades de trabajar lo mismo a través de varias y diferentes tareas para contribuir a extender la comprensión sobre un tema y a ver aspectos no reconocidos en una de las tareas. En quinto lugar, fomentar la utilización de varios sistemas de representación y la necesidad de 'traducción' entre ellos, para proveer varias perspectivas del objeto matemático y en consecuencia, ayudar a ampliar la conceptualización del mismo. Y en sexto lugar, generar espacios frecuentes para socializar y discutir el trabajo realizado, donde el profesor pudiera intervenir para dirigir el debate; todo ello, enfatizando en la expresión verbal y en la argumentación del trabajo llevado a cabo en la resolución de los problemas.

3. DESCRIPCIÓN DE LA ESTRATEGIA DIDÁCTICA

Las diferentes estrategias contienen actividades que involucran los siguientes conceptos y estructuras:

- La incógnita
- La igualdad
- Estructura aditiva: x + a
- Estructura multiplicativa: x.a

3.1 EL MODELO DE LA BALANZA

De acuerdo con lo que se plantea en los fundamentos teóricos sobre modelos, las actividades con el modelo de la balanza tienen la finalidad de lograr que los estudiantes le den un significado a la igualdad como equivalencia, utilicen incógnitas para cantidades desconocidas, utilicen la propiedad uniforme y planteen y resuelvan ecuaciones de la forma:

$x \pm a = b$ $\qquad$ $ax \pm b = c$

La propuesta didáctica se inició con la construcción de la balanza de brazos iguales, la cual lleva unos recipientes a los lados como platos.

Para empezar los estudiantes argumentaron y escribieron sobre el significado del equilibrio en la balanza, se escucharon varias opiniones y luego se sacaron conclusiones en forma colectiva.

Posteriormente se realizaron tareas como las siguientes:

- Equilibrar la balanza física de diferentes maneras, realizar una representación gráfica de la situación y colocar en frente de la representación gráfica la expresión aritmética.

Ejemplo:

5 = 5

- Agregar o quitar la misma cantidad de monedas de igual peso a ambos platos de la balanza

 Ejemplo:
 4 = 4 cantidad inicial
 3 = 3 cantidad final

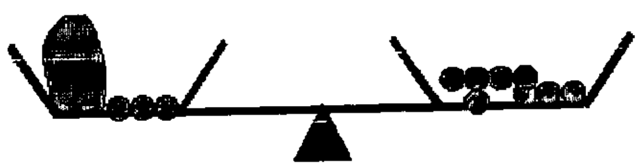
- Colocar cierta cantidad de monedas dentro de una bolsita oscura, en uno de los platos de la balanza y en el otro ir colocando monedas hasta lograr el equilibrio de la balanza.

Situación inicial

Situación final

Los estudiantes debían escribir matemáticamente las situaciones presentadas en la balanza. La situación inicial y la situación final.
Por ejemplo para la primera situación : $X = ?$
Y para la segunda situación: $X = 7$

- Colocar monedas al lado de la bolsita oscura (fuera de la bolsa), en uno de los platos de la balanza; estimar el número de monedas que pueden equilibrar la balanza, y en el otro plato colocar monedas hasta lograr el equilibrio de la balanza; escribir matemáticamente la situación: en forma aritmética la situación final y en forma algebraica la situación inicial.
Ejemplo:



$x + 3 = 8$
$5 + 3 = 8$

El modelo se fue complejizando de acuerdo con el grado escolar (6° - 9°) de la siguiente manera:

- Colocar bolsitas en ambos platos de la balanza
- Cambiar la ubicación de la bolsita al lado izquierdo o derecho de la balanza

En la sección de anexos se presenta una muestra de los formatos de los talleres realizados en clase. (Anexo 1)
Una muestra de uno de los formatos es el siguiente:

DISEÑO DE ESTRATEGIA DIDÁTICA PARA LA ENSEÑANZA DE ECUACIONES EN LA EDUCACIÓN BÁSICA SECUNDARIA

I.E.D. CARLOS ARANGO VÉLEZ – JORNADA TARDE – AGOSTO _____ / 2003

ACCIONES	REPRESENTACIÓN DE LA SITUACIÓN EN LA BALANZA	REPRESENTACIÓN MATEMATICA	CONCLUSIONES
1) Equilibrar la balanza con diferente cantidad de monedas en cada plato			
2) Agregar o quitar la misma cantidad de monedas de igual peso a (o de) ambos platos de la balanza		¿Qué ocurre con una igualdad al sumar una misma cantidad o número a ambos lados de la misma?	¿Qué ocurre con el equilibrio de una balanza al agregar la misma cantidad de monedas a ambos platos de una balanza en equilibrio?
3) Colocar cierta cantidad de monedas dentro de una bolsita oscura, en uno de los lados de la balanza y en el oto plato ir colocando monedas hasta lograr el equilibrio de la balanza			
4) Colocar cierta cantidad de monedas dentro de una bolsita oscura, en uno de los lados de la balanza, y al lado, en el mismo plato una cantidad conocida de monedas; en el otro plato ir colocando monedas hasta lograr el equilibrio de la balanza.			

5) Colocar la misma cantidad de monedas dentro de dos o más bolsitas oscuras, en uno de los lados de la balanza y en el oto plato ir colocando monedas hasta lograr el equilibrio de la balanza			
6) Colocar la misma cantidad de monedas dentro de dos o más bolsitas oscuras, en uno de los lados de la balanza, y al lado, en el mismo plato, una cantidad conocida de monedas de igual peso; en el oto plato ir colocando monedas hasta lograr el equilibrio de la balanza. Resolver la ecuación.			
7) Colocar la misma cantidad de monedas dentro de dos o más bolsitas oscuras, en uno de los lados de la balanza, y al lado, en el mismo plato, una cantidad conocida de monedas; y en el oto plato colocar cierto número de bolsas con igual número de monedas que las del lado contrario; ir colocando monedas fuera de las bolsas, hasta lograr el equilibrio. Resuelva la ecuación			

	8) Dada una representación gráfica de la balanza escribir la ecuación correspondiente y resolverla 		
		9) Resolver la ecuación: $x + 5 = 7$	
10) En una bolsita hay cierto número de monedas y al lado, en el mismo plato, 3 monedas. La balanza se equilibra con 7 monedas colocadas en el otro plato. ¿Cuántas monedas contiene la bolsita			
11) En tres bolsitas hay igual número de monedas en cada una; y al lado, en el mismo plato, 5 monedas. La balanza se equilibra con 17 monedas colocadas en el otro plato.			
12) En tres bolsitas hay igual número de monedas en cada una; y al lado de las bolsitas, en el mismo plato, 2 monedas. La balanza se equilibra con dos bolsitas iguales en su contenido a las del primer lado y 7 monedas adicionales.			

		Se da la ecuación $2X + 5 = 27$	
		Se da la ecuación $3X - 15 = 45$	

3.2 EL MODELO DE LOS DIAGRAMAS

Con estas actividades se pretende que los estudiantes escriban ecuaciones a partir del enunciado de un problema, representen la ecuación por medio del diagrama y resuelvan la ecuación y el problema.

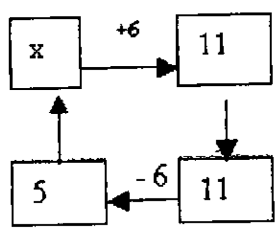
Se inicia con el planteamiento y escritura de los símbolos y signos utilizados en los diagramas de la siguiente manera:

- Las flechas indican las órdenes de cálculo, por ejemplo, $\xrightarrow{x\ 3}$ indica el operador multiplicativo 3

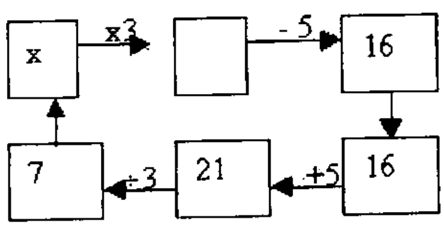
  $\xrightarrow{+3}$ Indica el operador aditivo 3

A continuación se sugirió la representación de ecuaciones mediante diagramas, por ejemplo:

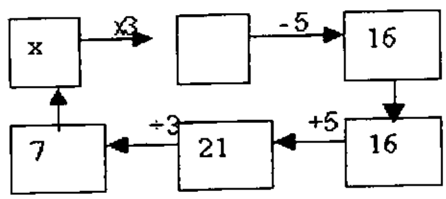
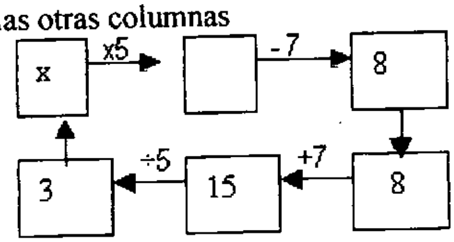
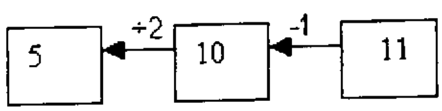
Dada la ecuación $x + 6 = 11$, representarla con un diagrama y solucionarla. Los estudiantes realizaban el siguiente diagrama:



Otro ejemplo: Representar mediante un diagrama la ecuación $3x - 5 = 16$

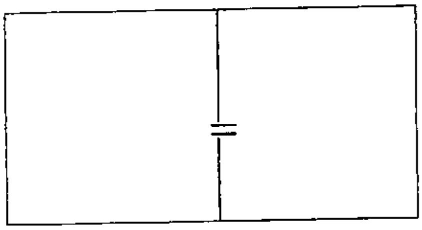


Una vez que los estudiantes habían manejado la representación de ecuaciones mediante diagramas, se elaboró un diseño que pretendía que los estudiantes relacionaran la representación en diagramas con la representación simbólica. El diseño tenía la siguiente estructura: una tabla de tres columnas, en cada una de las cuales se debía realizar una descripción verbal de la ecuación, la representación en el diagrama de la ecuación y el procedimiento simbólico de la solución.
Ejemplo: Complete la tabla representando la ecuación y resuélvala mediante un diagrama y simbólicamente. (En el diseño se planteaba el problema de diferentes maneras: dada la ecuación realizar el diagrama y resolverla, dado el diagrama plantear la ecuación y resolverla).

<table>
<tr><th>DESCRIPCIÓN VERBAL</th><th>DIAGRAMA</th><th>EXPRESIÓN MATEMATICA</th></tr>
<tr><td>A tres veces x se le restas cinco y se obtiene 16
¿Cuánto vale x?
Otra forma :
A tres veces un número se le resta cinco y se obtiene como resultado 16.
¿cuál es el número?</td><td>
</td><td>$3x - 5 = 16$
$3x - 5 + 5 = 16 + 5$
$3x = 21$
$x = 7$
otra forma
con el diagrama en reversa
$16 + 5 = 21$
$21 \div 3 = 7$</td></tr>
<tr><td></td><td>Dado el siguiente diagrama complete las otras columnas

</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Dado el diagrama en reversa completar el resto y llenar las columnas:

</td><td></td></tr>
</table>

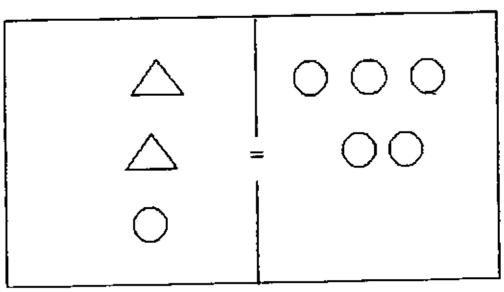
3.3 MODELO "TABLERO DE FICHAS DE COLORES"

Esta actividad se inicia con la construcción del tablero y las fichas de colores.
El tablero consta de un rectángulo de madera o cartulina, dividido por una línea vertical y un signo de igualdad en el centro.



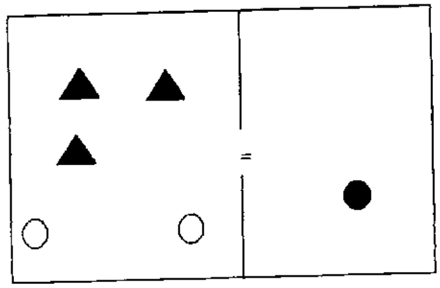
Las fichas se construyen en cartulina y están conformadas por:
20 triángulos negros que representan las incógnitas con coeficiente negativo
20 triángulos blancos que representan las incógnitas con coeficiente positivo
20 Círculos negros para números negativos,
20 círculos blancos que representan los números positivos.

La única **regla de eliminación** es: parejas de fichas de la misma forma y distinto color en un mismo lado del tablero, se neutralizan y eliminan.
Para jugar se colocan las fichas que representan la ecuación sobre el tablero y se expresa matemáticamente las transformaciones realizadas, utilizando la regla de eliminación.
Ejemplo: la ecuación: $2X + 1 = 5$ queda representada de la siguiente manera:



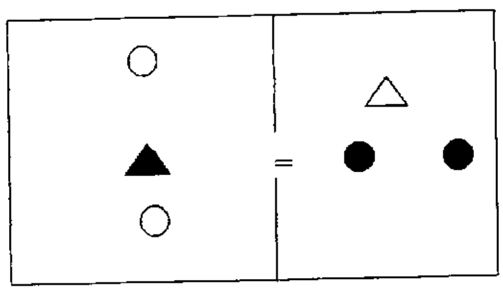
En el lado izquierdo del tablero hay dos triángulos blancos que representan dos veces la incógnita y un círculo blanco que representa el número 1; en el lado derecho del tablero hay 5 círculos blancos que representan el número cinco al otro lado de la ecuación.

En el siguiente ejemplo vemos la representación de la ecuación **$- 3X + 2 = - 1$** en el tablero de fichas. Los tres triángulos negros representan tres veces la incógnita negativa y el círculo negro representa al número negativo del lado derecho de la ecuación

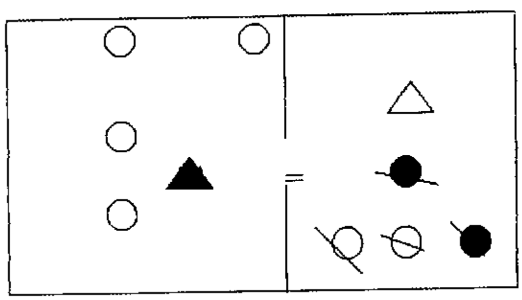


Una vez que los estudiantes sean capaces de representar matemáticamente cualquier ecuación en el tablero, se les solicita dejar los triángulos blancos en un mismo lado del tablero lo cual se logra aumentando o quitando fichas de acuerdo con la regla de eliminación del juego.

Ejemplo:

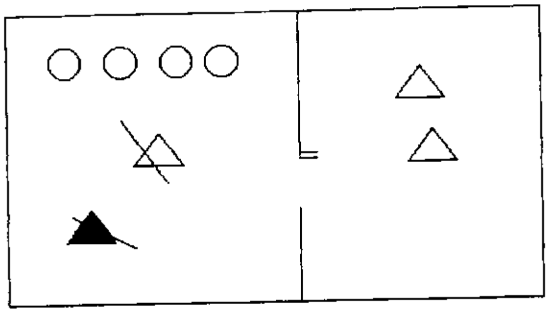


Para eliminar las dos unidades negativas del lado derecho se aumentan dos unidades positivas a ambos lados (dos círculos blancos a ambos lados), y se obtiene:



$-X + 4 = X - 2 + 2$, equivalente a $-X + 4 = X$

Para eliminar el triángulo negro del lado izquierdo se coloca a ambos lados un triángulo blanco y se obtiene:



$4 = X + X$ es decir $4 = 2X$ de donde se concluye que un triángulo blanco equivale a dos círculos blancos lo cual matemáticamente se expresa como $X = 2$ solución de la ecuación original $-X + 2 = X - 2$

3.4 ACTIVIDADES DE INTEGRACIÓN DE LOS TRES MODELOS

Posteriormente se diseñaron talleres que involucraron actividades con los tres modelos: la balanza, los diagramas y el tablero, con la finalidad de que los estudiantes hicieran transferencia de un modelo a otro y además que al hacer la transferencia pusieran en juego los conceptos y procedimientos aprendidos hasta el momento. Al final se presenta un modelo de estos talleres ya desarrollado por los estudiantes. (Anexo 2).

Los talleres contenían tareas como las siguientes:

1. Utilice diferentes modelos para resolver las siguientes ecuaciones lineales:

a $m + 7 = 23$

a. $3x + 5 = 2x$

b. $5t - 8 = 4t$

c. $m - 6 = 8$

d. $4x - 5 = 20$

e. $3x + 8 = 5x - 6$

2. Resuelva los siguientes problemas utilizando el modelo o estrategia que usted desee :

- En un corral hay entre vacas y caballos 56 animales, si los caballo suman 12 menos que las vacas, ¿cuántos hay de cada especie?
- La edad del padre es tres veces la del hijo, si ambas sumas 64 años, ¿Cuál es la edad de cada uno?
- ¿Cuánto tardan dos grifos en llenar una piscina si uno de ellos solo, la llena en seis horas y el otro solo, la llena en nueve horas?.
- Dos hermanos tienen hoy 8 y 12 años de edad; ¿Dentro de cuántos años la edad del menor será la tercera parte de la edad del mayor?
- El perímetro de un rectángulo es de 80 metros; si a la altura se le suman 3 metros y a la base se le restan 3 quedan en una relación de 3 a 5; buscar dichas dimensiones.

4. ANÁLISIS DE RESULTADOS

Para la presentación de resultados se han considerado los siguientes ámbitos de análisis:

- Nivel de apropiación de los modelos propuestos: balanza, diagramas y tablero de fichas.
- Planteamiento y solución de ecuaciones
- Resolución de problemas

4.1 NIVEL DE APROPIACIÓN DE LOS MODELOS PROPUESTOS: BALANZA, DIAGRAMAS Y TABLERO DE FICHAS.

Para el análisis de este ámbito se tuvieron en cuenta las siguientes categorías de análisis:

- Manejo de la propiedad uniforme
- Transformación de situaciones físicas a situaciones simbólicas
- Manejo de la reversibilidad

4.1.1 Manejo de la propiedad uniforme

La propiedad uniforme y las demás propiedades de la igualdad fueron comprendidas y asimiladas por la gran mayoría de los estudiantes; ello se puso de manifiesto en la facilidad y destreza que desarrollaron para equilibrar la balanza y hacerle transformaciones manteniendo el equilibrio, actividad que era cumplida tanto con material concreto como en forma simbólica; igualmente se notó una gran solvencia en el manejo del lenguaje utilizado para describir situaciones de equilibrio o desequilibrio de la balanza y de la forma simbólica.
Debido a las limitaciones del material empleado, en el modelo de la balanza, se presentó alguna dificultad en la representación de cantidades negativas, ya que los pesos de las monedas que se utilizaron no pueden ser una cantidad negativa. Esta dificultad se atendió en el ámbito del lenguaje simbólico, y al efectuar el proceso de reversibilidad. El signo menos se manejó como la acción inversa de aumentar monedas o sea quitar monedas de los platos de la balanza.

4.1.2 Trasformaciones de situaciones concretas a situaciones simbólicas.

Los estudiantes desarrollaron poco a poco un buen nivel de capacidad para representar de diversas formas una misma situación problema de manera coherente y completa. Este aspecto se logró principalmente con la aplicación en el aula del modelo "diagramas" en el cual como ya se describió en la página (33) se estimulaba en los alumnos el empleo de distintas formas de representación de una situación problema tales como: enunciado verbal, representación gráfica y representación matemática.
La capacidad desarrollada por los estudiantes para transformar situaciones concretas a situaciones simbólicas se evidenció cuando se les propuso resolver problemas que

involucraban situaciones de este tipo y los estudiantes mostraron un buen nivel de destreza cuando lo representaron y resolvieron empleando lenguaje simbólico.(ver anexo 2).

Las dificultades en este aspecto fueron:

- Manejo de la letra como cantidad desconocida en diferentes posiciones o términos de la ecuación. Por ejemplo: $X + 7 = 2X - 1$
  La dificultad fue menor cuando la incógnita aparecía una sola vez en la ecuación.
  Por ejemplo: $X + 3 = 8$
  Por esto fue necesario acudir a un subdiagrama de apoyo que explicara la situación presentada y también reforzara este procedimiento mostrando varias situaciones similares.

- Identificación de cantidades desconocidas diferentes a la "cantidad de monedas".

  Esta dificultad se atendió realizando actividades variadas que involucraban magnitudes diferentes a la cantidad de monedas y en diferentes contextos. Por ejemplo: "el profesor piensa un número", el saldo de una cuenta de ahorros, pérdida y ganancia en juegos infantiles, edades etc.

4.1.3 Manejo de la reversibilidad.

Los resultados de la aplicación de la reversibilidad se evidenciaron en diferentes aspectos:

- La capacidad que desarrollaron los estudiantes para describir en reversa los enunciados verbales.
  Ejemplo: El enunciado "Juan tiene cierta cantidad de dinero en su cuenta de ahorros y consigna 300000. Solicita el saldo y le informan que es de $ 850000. ¿qué cantidad de dinero tenía en su cuenta de ahorros inicialmente?" es revertido en la siguiente forma: "Juan tiene en su cuenta de ahorros un total de $ 850000de la cual retira $300000. ¿Cuál es su nuevo saldo?"
- La solvencia al utilizar las operaciones inversas al diagramar en reversa. Ejemplo: dada la representación inicial de una situación en diagrama, realizar el diagrama inverso.

Diagrama inicial $\boxed{x} \xrightarrow{x2} \boxed{} \xrightarrow{+8} \boxed{30}$

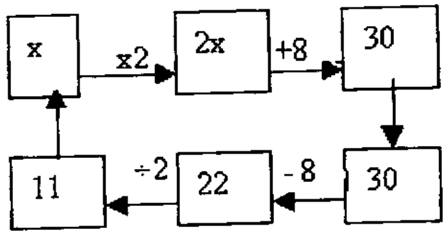
Diagrama en reversa $\boxed{11} \xleftarrow{\div 2} \boxed{22} \xleftarrow{-8} \boxed{30}$

- La realización simultánea de las representaciones con balanza y diagramas, y la representación simbólica ayudaron a la elaboración de procesos de reversibilidad en el análisis de las situaciones propuestas.
  Ejemplo: Al analizar y resolver la situación simbólica $2x + 8 = 30$, los estudiantes procedieron así:
  Solución con balanza: colocaron en uno de los platos de la balanza 2 bolsitas oscuras con igual cantidad desconocida de monedas de la misma denominación. Al

lado de las bolsitas, en el mismo plato, colocaron 8 monedas y equilibraron la balanza con 30 monedas en el otro plato.
Aplicando reversibilidad: Retiraron 8 monedas de cada uno de los platos, con lo cual quedaban 2 bolsitas a un lado y 22 monedas en el otro. Las 22 monedas las repartían en dos grupos de 11, un grupo para cada bolsita, y se concluía que la cantidad desconocida de monedas era 11.
Solución simbólica basada en el diagrama y la aplicación de la propiedad uniforme:

$2x + 8 = 30.$
$2x + 8 - 8 = 30 - 8; \quad 2x = 22.$ Restando 8 a ambos lados.
$2x \div 2 = 22 \div 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 11$ Dividiendo entre 2 a ambos lados.

Solución con diagrama



Solución simbólica con base en el diagrama anterior:

$2x + 8 = 30$
$30 - 8 = 22 = 2x$
$22 \div 2 = 11 = x$

- Uso de la reversibilidad como medio de comprensión del enunciado de problemas. En esta actividad se les presentó a los estudiantes el enunciado verbal de un problema en forma escrita. El diseño del taller les solicitaba describir la misma situación "al revés", en lo cual se percibió un buen nivel de comprensión del enunciado cuando encontraban las palabras apropiadas para describir las acciones contrarias sin perder la coherencia y el significado de la situación inicial. Por la extensión de esta actividad el ejemplo se presenta en el Anexo 3

4.2 PLANTEAMIENTO Y SOLUCIÓN DE ECUACIONES

Categorías de análisis.

- Reconocimiento de los elementos que conforman la ecuación
- Aplicación de la propiedad uniforme
- Verificación de resultados

4.2.1 Reconocimiento de los elementos que conforman la ecuación

La ecuación como objeto algebraico era un elemento suficientemente conocido por los estudiantes cuando se cumplió la actividad con los diferentes modelos. En esta etapa se intentó que los estudiantes se desprendieran del referente concreto y avanzaran en el manejo de expresiones simbólicas.

Los resultados en este aspecto fueron los siguientes: los estudiantes reconocieron el significado de las distintas operaciones, diferenciaron las cantidades conocidas de las desconocidas y también los dos miembros de la igualdad. Y lo más importante: sabían que el objetivo del ejercicio era hallar el valor de la cantidad desconocida, es decir, resolver la ecuación. (Ver anexo 4)

4.2.2 Aplicación de la propiedad uniforme

Para cumplir con el objetivo de resolver la ecuación, como resultado de las actividades cumplidas tanto en la balanza como en los diagramas, los estudiantes empezaban por sumar o restar a ambos lados la cantidad necesaria para eliminar la o las constante(s) que aparecía(n) en la ecuación e ir así despejando la incógnita. De igual manera multiplicaban o dividían a ambos lados de la igualdad para encontrar el valor de la incógnita.

Ejemplo: Resolver la ecuación $5x - 8 = 42$.
$5x - 8 + 8 = 42 + 8; \quad 5x = 50$ sumando 8 a ambos lados.
$5x \div 5 = 50 \div 5 \Leftrightarrow x = 10$ Dividiendo entre 5 a ambos lados.

4.2.3 Comprobación de la solución

Como resultado de todas las actividades cumplidas durante el presente proyecto se observó una buena disposición de los estudiantes para la verificación de las respuestas que obtenían. Esto lo hacían sustituyendo la solución encontrada en la ecuación original y verificando que se cumpliera la igualdad. En el caso de que esto no sucediera la mayoría repetían el proceso o revisaban y corregían el que habían realizado.

4.3 RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Categorías de análisis.

- Análisis de enunciados: transformar el enunciado y ampliar su comprensión por medio de preguntas. Identificación de la incógnita.
- Traducción entre distintas representaciones de una misma situación
- Empleo de diferentes estrategias de resolución
- Verificación de resultados

4.3.1 Análisis de enunciados.

Para los objetivos del presente proyecto el análisis de enunciados verbales constituye una actividad de gran importancia por cuanto de ella se derivan: la comprensión de la situación planteada, la identificación de los elementos que la constituyen, la relación entre esos elementos y los requerimientos que hace el problema. Como se explicó en el

marco teórico con el análisis de enunciados se apunta a responder tres preguntas: ¿de qué se habla?, ¿qué se dice? y ¿qué pide el problema?
Esta actividad permitió el cumplimiento de tres etapas:

- Transformación de enunciados, que consistió principalmente en describir la misma situación empleando el lenguaje propio de los estudiantes, lo cual significaba la mayoría de las veces, complementar la información que estaba recogida en el enunciado inicial.
- Ampliación del enunciado por medio de preguntas. En este caso se trataba de que los estudiantes plantearan y contestaran preguntas que ayudaran a mejorar la comprensión de los conceptos involucrados en el enunciado.
- Identificación de la incógnita. Resultó ser una actividad de relativa facilidad en el caso de que en el problema hubiera una sola cantidad desconocida que era la misma incógnita. Ejemplo: La edad de Juan dentro de 10 años será 48. ¿Cuál es la edad actual?
  Pero hubo dificultad cuando el problema incluía dos o más cantidades desconocidas que debían expresarse en términos de una sola incógnita, ya que la tendencia era emplear letras distintas, una para cada cantidad desconocida.
  Ejemplo: La edad de Pedro es el doble de la de Juan y la suma de las mismas es 48 años. ¿Cuál es la edad de cada uno?
  Esta dificultad se atendió analizando diversos enunciados que presentaran situaciones de este tipo.

4.3.2 Traducción entre distintas representaciones de una misma situación.

Esta actividad fue la que evidenció de manera más significativa el logro de resultados en el desarrollo de la capacidad de los estudiantes para resolver problemas mediante el uso de ecuaciones lineales con una incógnita. Esta fue la esencia del modelo que dentro del proyecto se ha denominado "Diagramas".
Para traducir representaciones verbales a gráficas los estudiantes mostraron habilidad y entusiasmo en el empleo de la gráfica de la balanza o de otras herramientas que les permitieran establecer la equivalencia entre los elementos que entraban en relación al interior de la situación. Se observó que la representación gráfica fue dejada de lado rápidamente por los estudiantes porque les sirvió como un nexo muy efectivo hacia la representación simbólica.
La traducción de representaciones verbales y gráficas a simbólicas fue asimilada rápidamente porque resultaba más práctica y eficiente, y porque se trataba de un proceso que era comprensible y cercano.

4.3.3 Empleo de diferentes estrategias de resolución.

Las actividades realizadas en el aula con diferentes modelos y sus respectivas representaciones, posibilitaron el empleo de diversas estrategias a la hora de resolver los problemas. Por ejemplo, cuando un problema no se podía resolver con la balanza se intentaba su solución con los diagramas o en forma simbólica. De la misma manera, la verificación de un problema resuelto mediante la aplicación de uno de los modelos, se realizaba a través de otro modelo.

Los estudiantes usaron los resultados obtenidos por medio de diferentes estrategias, para confrontarlos entre sí y analizar su coherencia y validez, pues tenían claro que la solución debía ser la misma cualquiera fuera la estrategia aplicada.
Las diferentes estrategias permitieron estudiar una misma situación problemática desde diversos puntos de vista, y ello posibilitó a los estudiantes mayor comprensión y afianzamiento de los conceptos que intervenían en el enunciado.
Se logró que los estudiantes reconocieran la necesidad de resolver los problemas de diferente forma lo cual no era una fortaleza al comienzo del proyecto.
Otro aspecto en el que hubo avance fue en la elaboración de planes que guiaran el trabajo, que plantearan un camino que los llevara a la solución. Después de interpretar el enunciado, siempre era claro el propósito de plantear una ecuación y resolverla. La mayoría de los estudiantes, aunque se notaba en ellos una fuerte tendencia al uso de los modelos (balanza y diagramas), también se observaba en algunos que intentaban plantear y resolver las ecuaciones sin el uso de esos modelos.

4.3.4 Verificación de las soluciones obtenidas

Como la intencionalidad central del proyecto era la resolución de problemas mediante la solución de ecuaciones, la forma más generalizada para verificar las soluciones obtenidas fue la sustitución de esos valores en la ecuación planteada inicialmente y establecer la coherencia entre la solución obtenida y las condiciones del problema.
Otra forma de verificar las soluciones que se logró infundir en los estudiantes fue la contrastación de sus resultados con los de otros grupos y con la respuesta del libro cuando ésta existía.

5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Para este capítulo se tiene en cuenta que el objetivo central de la propuesta consistió en que los estudiantes, a través del uso de herramientas para la resolución de problemas ya trabajadas en otras temáticas de las matemáticas y la física en el colegio, construyeran y desarrollaran estrategias de solución de ecuaciones de primer grado con una incógnita en contextos de problemas. Además se buscaba que el estudiante alcanzara distintos niveles de complejización según el grado escolar, con respecto a:

- La comprensión del significado de ecuación e incógnita.
- La argumentación con respecto a los procedimientos desarrollados y las ecuaciones mismas.
- El manejo del lenguaje simbólico.

De acuerdo con los resultados obtenido se formulan las siguientes conclusiones y recomendaciones :

5.1 CONCLUSIONES

1. El desarrollo de este trabajo permitió dar un buen comienzo al estudio de las ecuaciones ya que el uso de los diferentes modelos (balanza, diagramas y tablero de fichas) permitió abordar el tema con un enfoque diferente al tradicional. Con el uso de los modelos para resolver ecuaciones lineales, se logró avanzar notoriamente en los conceptos de variable, igualdad, incógnita, ecuación, propiedades de la igualdad, términos semejantes, operaciones de suma resta y multiplicación de expresiones algebraicas.

   ¿Cuál es el tradicional?

2. La resolución de problemas fue el punto que dio origen al planteamiento de las ecuaciones, procedimiento que en el método tradicional se realiza al contrario, es decir, primero se estudian las ecuaciones y después se desarrollan problemas de aplicación; esta estrategia permitió ubicar las ecuaciones dentro de un contexto asequible al estudiante e hizo que el mismo estudiante planteara sus propios problemas y ecuaciones lo que les pareció a los alumnos algo novedoso, y despertó en ellos un verdadero interés y entusiasmo por la materia.

3. Se logró que los estudiantes avanzaran en el proceso de realizar transferencias entre diferentes lenguajes como el lenguaje verbal (oral y escrito), el gráfico y el simbólico algebraico. Esto contribuyó en gran parte a que los estudiantes pudieran interpretar, escribir y solucionar ecuaciones simbólicamente.

4. La realización de este proyecto permitió a sus autores consolidarse como un equipo de trabajo logrando una cualificación como profesores de matemáticas y como personas puesto que se desarrolló en cierta forma la capacidad de investigación, de consulta, de expresión oral y escrita en especial, ya que se logró plasmar por escrito una experiencia pedagógica en forma sistematizada, como lo es el presente trabajo;

de igual manera se adquirieron didácticas y herramientas de la educación matemática para continuar con la ardua tarea de investigación.

5. Las dificultades que se presentaron con mayor frecuencia en este proyecto fueron:

   - La transición de la aritmética al álgebra, puesto que los alumnos cometen muchos errores en el trabajo con expresiones algebraicas ya que tienden a generalizar incorrectamente reglas, leyes y operaciones de la aritmética cuando trabajan en el álgebra.

   - Dificultades de comprensión de lectura en la solución de problemas.

   - En un ambiente tradicional administrativo, es muy difícil realizar proyectos de investigación.

5.2 RECOMENDACIONES

A los maestros de matemáticas y en general a todas las personas interesadas y con alguna responsabilidad sobre el tema se recomienda:

-El estudio y la enseñanza de las ecuaciones se debe iniciar desde la primaria usando la estrategia de resolución de problemas, presentándolas desde diferentes enfoques y representaciones.

-Crear espacios de reflexión dentro y fuera de las clases para tratar temas sobre metodologías aplicadas, rendimiento académico y evaluación de los estudiantes, con el fin de reestructurar, si es necesario, las condiciones que faciliten la construcción del conocimiento.

-Atender las dificultades y problemas más frecuentes presentados en el proceso de enseñanza y aprendizaje de los conceptos matemáticos aplicando constantemente estrategias innovadoras que faciliten dicho proceso.

-Proporcionar y crear estrategias didácticas que desarrollen en los alumnos el hábito de lectura y la capacidad de elaborar escritos que expresen coherentemente el pensamiento.

-Promover en los alumnos el espíritu investigativo, la consulta y el análisis y en general desarrollar las capacidades y la disposición para resolver problemas.

- Experimentar y divulgar las actividades propuestas en este trabajo para que se analicen los alcances, los amplíen, los profundicen y los continúen.

BIBLIOGRAFÍA

AGUDELO, C. (2002). *Promoción del pensamiento algebraico en primaria. Una propuesta que cobra sentido de acuerdo con nuestras concepciones sobre el conocimiento matemático.* Aula Urbana, 37, 18-19.

BELL, A. W. (1996) *Research on learning and teaching.* NFER-Nelson. Windsor.

BRANSFORD, J. y STEIN, B. (1986*). Solución IDEAL de problemas. Guía para mejor pensar, aprender y crear.* Barcelona: Editorial Labor.

CARDONA, G. (1999). Módulo alternativas metodológicas (documento de trabajo). Bogotá: Universidad del Rosario.

CARRILLO, J. y CONTRERAS, L:C. (2000). *Resolución de problemas en los albores de siglo XXI: una visión internacional desde múltiples perspectivas y niveles.* Huelva, España: Hergué.

DEULOFEU, J. (2002). Resumen comentado del libro "Resolución de problemas en los albores de siglo XXI: una visión internacional desde múltiples perspectivas y niveles educativos". *Revista EMA, 7*, (1), 117-119.

FRIDMAN, L.M: (1995). *Metodología para resolver problemas matemáticas.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

FILLOY, e. (1998). *Aspectos teóricos del álgebra educativa.* Mexico: Grupo Editorial Iberoamérica.

GARDNER H. (1995) *Inteligencias múltiples.* Barcelona: Ediciones, Paidos.

GIL, D. y MARTINEZ, . (1991). *La enseñanza de las ciencias en la educación secundaria.* Barcelona: Editorial Horsori.

GRAVEMEIJER, K., COBB, P., BOWERS, J. Y WHITENACK, J. (2000). *Symbolizing, modeling and instructional design.* En P. Cobb, E. Yackel y K. McClain (Eds.), Symbolizing and communicating in mathematics classrooms. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates,

JANVIER, C. (1996). *Modeling and the initiation into algebra.* En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds), *Aproaches to algebra. Perspectives for research and teaching* (pp225-236). Dordrecht: Kluwer Academic publishers.

MASON, J., BURTON, L. y STACEY, K. (1992) .*Pensar matemáticamente.* Barcelona: Editorial Labor.

NCTM. (1991). *Estándares curriculares. y de evaluación para la educación matemática.* Sevilla, España: Sociedad Andaluza de Educación Matemática.

NUNOKAWA, K. (2000). Heuristic strategies and problem situations. En J. Carrillo y L.C. Contreras (Eds.), *Resolución de problemas en los albores del siglo XXI: una visión internacional desde múltiples perspectivas y niveles educativos.* Huelva, España: Editorial Hergué.

PRADA, M:D. y MARTINEZ, I. (1994). *Cómo enseñar el lenguaje algebraico, las ecuaciones y los sistemas.* Cuadernos de matemáticas 3. Málaga: Editorial Librería Agora, S. A.

PUIG, L. y CERDAN, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares.*(pp. 183-187). España: Editorial Síntesis

SADOVSKY, P. (2001). Cómo enseñar matemáticas sin morir en el intento. *Aula Urbana, 26*, 3

SCHOENFELD, A. (1992). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics. En D. Grouws (Ed*.), Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: MacMillan Publishing Company.

SOCAS, M., CAMACHO, M., PALAREA, M. Y HERNÁNDEZ, J. (1989). *Iniciación al álgebra.* Madrid: Editorial Síntesis.

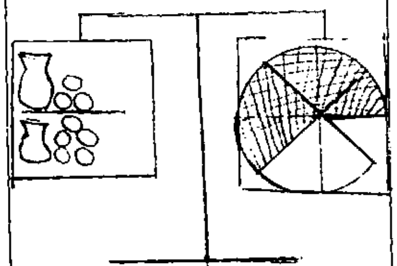
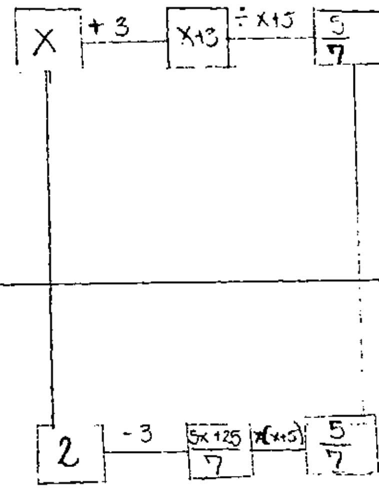
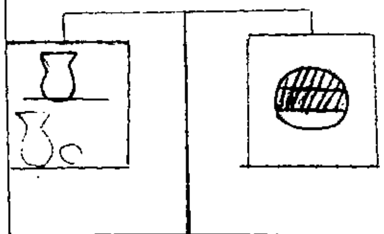
TORRES, L., VALOYES, E. Y MALAGÓN, R. (2002). Situaciones de generalización y uso de modelos en la iniciación al álgebra escolar. *Revista EMA*, *7* (1), 227-246.

LISTA DE ANEXOS

ANEXO 1

I.E.D. CARLOS ARANGO VÉLEZ – J.T. – PROYECTO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MEDIANTE LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES EN EDUCACIÓN BÁSICA – IDEP - 2003

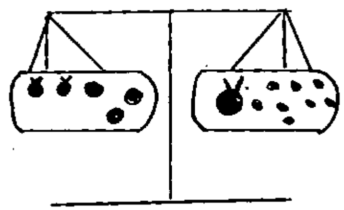
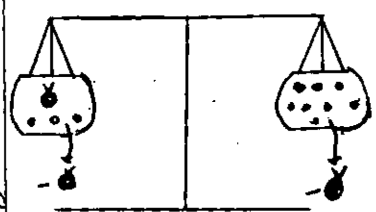
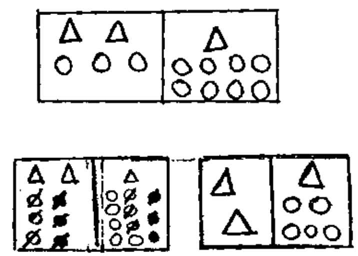
Docente: Luis Fernando Alméciga M. Nivia Yela – Germán Montezuma

DISEÑO No.	ANÁLISIS DE UNA SITUACIÓN REPRESENTADA EN DIFERENTES LENGUAJES: VERBAL, GRÁFICO Y MATEMÁTICO. COMPLETEN LOS ESPACIOS EN BLANCO (Se forman grupos de acuerdo al número de terminación del código de lista. Ejemplo: El grupo 1 está conformado por los alumnos cuyos códigos son: 1, 11, 21, y 31)			
SITUACIÓN / CATEGORÍAS	SITUACIÓN PLANTEADA EN LENGUAJE VERBAL	SITUACIÓN PLANTEADA MEDIANTE LA BALANZA EN EQUILIBRIO	SITUACIÓN PLANTEADA MEDIANTE UN DIAGRAMA	SITUACIÓN PLANTEADA MATEMÁTICAMENTE
REPRESENTACIÓN DE LA SITUACIÓN EN DIFERENTES LENGUAJES	El denominador de una fracción excede en uno al numerador. Si el numerador se aumenta en tres y el denominador se aumenta en cuatro la fracción es cinco séptimos. Cuál es la fracción?			X = numerador x+1 = denominador ⇒ Fraccion = $\frac{x}{x+1}$ $\frac{x+3}{x+1+4} = \frac{5}{7} \Rightarrow \frac{x+3}{x+5} = \frac{5}{7}$ $7(x+3) = 5(x+5)$ $7x+21 = 5x+25$ $7x-5x = 25-21$ $2x = 4$ $x = \frac{4}{2}$ $x = 2 = \frac{x}{x+1} = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$
REVERSIBILIDAD (SITUACIÓN PRESENTADA AL REVÉS)	Dado la Fracción $\frac{5}{7}$; multiplicada por el númerador aumentado en un número desconocido y restado 3 da como resultado 2.			$\frac{5}{7}(x+5) - 3 = 2$ $\frac{5x+25}{7} - 3 = x$ $\frac{5x+25}{7} = x+3$ $5x+25 = 7x+21$ $4 = 2x$ $2 = x \Rightarrow \frac{x}{x+1} = \frac{2}{3}$
CONCLUSIONES	Nota = Los botes representan el número desconocidos y los circulos representan números positivos (valores)			PRUEBA $\frac{2+3}{2+1+4} = \frac{5}{7}$ $\frac{5}{7} = \frac{5}{7}$

ESTUDIANTE (S): Ricardo Bohamón   Heidy Escobar   Jenyfer Muñoz   Jenny Rojas   Fecha: 10/10/03   Curso: 902

I.E.D. CARLOS ARANGO VÉLEZ – J.T. – PROYECTO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MEDIANTE LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES EN EDUCACIÓN BÁSICA

Docentes: Luis Fernando Alméciga M. Nivia Yela – Germán Montezuma

DISEÑO No. 5	ANÁLISIS DE UNA SITUACIÓN REPRESENTADA EN DIFERENTES LENGUAJES: VERBAL, GRÁFICO Y MATEMÁTICO. COMPLETEN LOS ESPACIOS EN BLANCO (Se forman grupos de acuerdo al número de terminación del código de lista. Ejemplo: El grupo 1 está conformado por los alumnos cuyos códigos son: 1, 11, 21, y 31)			
SITUACIÓN / CATEGORÍAS	SITUACIÓN PLANTEADA EN LENGUAJE VERBAL	SITUACIÓN PLANTEADA MEDIANTE LA BALANZA EN EQUILIBRIO	SITUACIÓN PLANTEADA MEDIANTE UN DIAGRAMA Y TABLERO	SITUACIÓN PLANTEADA MATEMÁTICAMENTE
REPRESENTACIÓN DE LA SITUACIÓN EN DIFERENTES LENGUAJES	la balanza está equilibrada en un extremo de la balanza hay dos bolsitas (con la misma cantidad de monedas en cada una) más tres. y en el otro extremo de la balanza hay una bolsita mas ocho monedas. ~~En una videotienda alquilan~~		$X \to \times 2 \to \square + 3 = X + 8 \to \square$ $\boxed{X} \to (+3) \to \ \vdots = \boxed{8}$ $\boxed{5} \leftarrow (-3) \leftarrow \boxed{8}$ $X = 5$	$2X + 3 = X + 8$ $2X+3-X = X+8-X$ $X+3 = 8$ $X+3-3 = 8-3$ $X = 5$
REVERSIBILIDAD (SITUACIÓN PRESENTADA AL REVÉS)	~~tengo el~~ En un lado de la balanza hay una bolsita y en el otro hay 8 monedas. a el extremo derecho le sumo tres y una bolsita y en el otro extremo le sumo una bolsita y puedo saber el Valor de X.	 $X+3 = 8$		$2X + 3 = X + 8$ $2X + 3 - 3 = X + 8 - 3$ $2X = X + 5$ $2 \times 5 = 5 + 5$ $10 = 10$
CONCLUSIONES	Para saber a que equivalen las incognitas 1. debo tener en cuenta que cada X equivale lo mismo.	Si la balanza está equilibrada y deseo quitar una bolsita en cada lado, me sigue quedando equilibrada. y puedo determinar que cada X equivale a cinco.	Si necesitamos saber el Valor de X, agrego tres bolitas negras a cada lado y entonces me quedan dos incognitas en un lado y en el otro una sola menos tres que quiere decir que cada incognita tiene como Valor 5. $5+5 = 5+5$.	De acuerdo a las operaciones puedo saber que cada X corresponde a cinco, entonces: $2 \times 5 + 3 = 5 + 8$ $10 + 3 = 13$ $13 = 13$.

ESTUDIANTE (S): Sandra Milena Acevedo Deisy Johanna Farfán Laura Sanabria G. Andry Julieth Tristancho Fecha: 10 de Septiembre Curso: 701

CÓDIGOS: 1 11 33 36

I.E.D. CARLOS ARANGO VÉLEZ – J.T. – PROYECTO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MEDIANTE LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES EN EDUCACIÓN BÁSICA – IDEP - 2003

Docentes: Luis Fernando Alméciga M. – Nivia Yela – Germán Montezuma

DISEÑO No. 2	ACTIVIDADES CON BALANZA: Complete los espacios de acuerdo a las instrucciones. cada grupo debe disponer de una balanza en equilibrio, de bolsitas oscuras de peso despreciable y de un buen número de monedas de igual denominación.				OBSERVACIONES Y ANÁLISIS (Espacio para el profesor)	
ACTIVIDAD / CATEGORÍAS	SITUACIÓN PLANTEADA EN LENGUAJE VERBAL	SITUACIÓN PLANTEADA MATEMÁTICAMENTE	SITUACIÓN PLANTEADA MEDIANTE UN DIAGRAMA	CONCLUSIONES	Actitud	Pensamiento Matemático:
REPRESENTE LA SITUACIÓN EN DIFERENTES LENGUAJES	En un plato de una balanza hay una bolsita con cierto número de monedas y al lado, en el mismo plato de la balanza, agrego 3 monedas. La balanza se equilibra colocando 7 monedas en el otro plato. ¿Cuántas monedas contiene la bolsita?					
EFECTÚE REVERSIBILIDAD EN CADA UNO DE LOS LENGUAJES						
ANÁLISIS DE RESULTADOS	¿Qué pedía el problema?					
	¿Cuál fue el resultado obtenido?					
	Verifique la respuesta					
SOCIALIZACIÓN	Prepárese para realizar una socialización del proceso de resolución y de los resultados obtenidos (Procure utilizar recursos como carteleras, acetatos, video beam, CPU, ...)					

ESTUDIANTE (S): ____________________ ____________________ ____________________ ____________________

Fecha: __________ Curso: ________

I.E.D. CARLOS ARANGO VÉLEZ – J.T. – PROYECTO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MEDIANTE LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES EN EDUCACIÓN BÁSICA – IDEP - 2003
Docente: Luis Fernando Alméciga M.

DISEÑO No. 3	ANÁLISIS DE UNA SITUACIÓN REPRESENTADA EN DIFERENTES LENGUAJES: VERBAL, GRÁFICO Y MATEMÁTICO. Se forman grupos de acuerdo al número de terminación del código de lista. Ejemplo: El grupo 1 está conformado por los alumnos cuyos códigos son: 1, 11, 21, y 31. Completen los espacios en blanco			OBSERVACIONES Y ANÁLISIS	
SITUACIÓN / CATEGORÍAS	SITUACIÓN PLANTEADA EN LENGUAJE VERBAL	SITUACIÓN PLANTEADA MEDIANTE UN DIAGRAMA	SITUACIÓN PLANTEADA MATEMÁTICAMENTE	Actitud (Orden, responsabilidad, respeto, solidaridad, ...)	Pensamiento Matemático:
REPRESENTACIÓN DE LA SITUACIÓN EN DIFERENTES LENGUAJES			$X - 42138 = 22430$		
REVERSIBILIDAD (SITUACIÓN PRESENTADA AL REVÉS)					
CONCLUSIONES	1) 2) 3) ...				

ESTUDIANTE (S): ____________ ____________ ____________ ____________
Fecha: ____________ Curso: ________

I.E.D. CARLOS ARANGO VÉLEZ – J.T. – PROYECTO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MEDIANTE LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES EN EDUCACIÓN BÁSICA – IDEP - 2003

Docente: Luis Fernando Alméciga M.

DISEÑO No. 3	ANÁLISIS DE UNA SITUACIÓN REPRESENTADA EN DIFERENTES LENGUAJES: VERBAL, GRÁFICO Y MATEMÁTICO. Se forman grupos de acuerdo al número de terminación del código de lista. Ejemplo: El grupo 1 está conformado por los alumnos cuyos códigos son: 1, 11, 21, y 31.			OBSERVACIONES Y ANÁLISIS	
SITUACIÓN / CATEGORÍAS	SITUACIÓN PLANTEADA EN LENGUAJE VERBAL	SITUACIÓN PLANTEADA MEDIANTE UN DIAGRAMA	SITUACIÓN PLANTEADA MATEMÁTICAMENTE	Actitud	Pensamiento Matemático:
REPRESENTACIÓN DE LA SITUACIÓN EN DIFERENTES LENGUAJES	El denominador de una fracción excede en uno al numerador. Si el numerador se aumenta en 3 y el denominador se aumenta en 4 la fracción es 5/7. ¿Cuál es la fracción?				
REVERSIBILIDAD (SITUACIÓN PRESENTADA AL REVÉS)					
CONCLUSIONES	1) 2) 3)				

ESTUDIANTE (S): ______________ ______________ ______________ ______________

Fecha: __________ Curso: ______

I.E.D. CARLOS ARANGO VÉLEZ – J.T. – PROYECTO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MEDIANTE LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES EN EDUCACIÓN BÁSICA – IDEP - 2003
Docente: Luis Fernando Alméciga M.

DISEÑO No. 3	ANÁLISIS DE UNA SITUACIÓN REPRESENTADA EN DIFERENTES LENGUAJES: VERBAL, GRÁFICO Y MATEMÁTICO. Se forman grupos de acuerdo al número de terminación del código de lista. Ejemplo: El grupo 1 está conformado por los alumnos cuyos códigos son: 1, 11, 21, y 31. Completen los espacios en blanco			OBSERVACIONES Y ANÁLISIS	
SITUACIÓN / CATEGORÍAS	SITUACIÓN PLANTEADA EN LENGUAJE VERBAL	SITUACIÓN PLANTEADA MEDIANTE UN DIAGRAMA	SITUACIÓN PLANTEADA MATEMÁTICAMENTE	Actitud (Orden, responsabilidad, respeto, solidaridad, ...)	Pensamiento Matemático:
REPRESENTACIÓN DE LA SITUACIÓN EN DIFERENTES LENGUAJES					
REVERSIBILIDAD (SITUACIÓN PRESENTADA AL REVÉS)		$\boxed{1330} \xleftarrow{-140} \boxed{1470} \xleftarrow{+320} \boxed{1150}$			
CONCLUSIONES	1) 2) 3) ...				

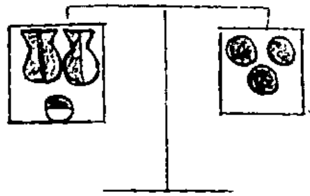
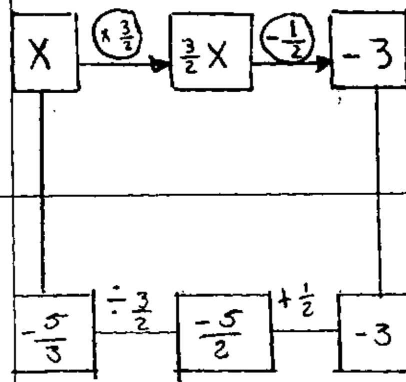
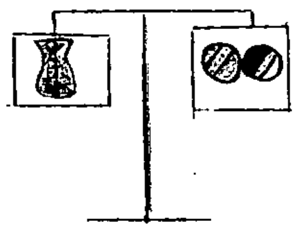
ESTUDIANTE (S): ____________ ____________ ____________ ____________
Fecha: ____________ Curso: ________

I.E.D. CARLOS ARANGO VÉLEZ – J.T. – PROYECTO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MEDIANTE LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES EN EDUCACIÓN BÁSICA – IDEP - 2003
Docente: Luis Fernando Alméciga M.

DISEÑO No. 3	ANÁLISIS DE UNA SITUACIÓN REPRESENTADA EN DIFERENTES LENGUAJES: VERBAL, GRÁFICO Y MATEMÁTICO. Se forman grupos de acuerdo al número de terminación del código de lista. Ejemplo: El grupo 1 está conformado por los alumnos cuyos códigos son: 1, 11, 21, y 31. Completen los espacios en blanco.			OBSERVACIONES Y ANÁLISIS	
SITUACIÓN / CATEGORÍAS	SITUACIÓN PLANTEADA EN LENGUAJE VERBAL	SITUACIÓN PLANTEADA MEDIANTE UN DIAGRAMA	SITUACIÓN PLANTEADA MATEMÁTICAMENTE	Actitud (Orden, responsabilidad, respeto, solidaridad, ...)	Pensamiento Matemático: Procesos, conceptos, contextos; Verbalización, representaciones, reversibilidad, modelación, ...
REPRESENTACIÓN DE LA SITUACIÓN EN DIFERENTES LENGUAJES		$\boxed{x} \xrightarrow{+138} \boxed{} \xrightarrow{-90} \boxed{} \xrightarrow{+117} \boxed{617}$			
REVERSIBILIDAD (SITUACIÓN PRESENTADA AL REVÉS)					
CONCLUSIONES	1) 2) 3) ...				

ESTUDIANTE (S): ______________________ ______________________ ______________________ ______________________
Fecha: ____________ Curso: _______

Docente: Luis Fernando Alméciga M. Nivia Yela – Germán Montezuma

DISEÑO No.	ANÁLISIS DE UNA SITUACIÓN REPRESENTADA EN DIFERENTES LENGUAJES: VERBAL, GRÁFICO Y MATEMÁTICO. COMPLETEN LOS ESPACIOS EN BLANCO (Se forman grupos de acuerdo al número de terminación del código de lista. Ejemplo: El grupo 1 está conformado por los alumnos cuyos códigos son: 1, 11, 21, y 31)			
SITUACIÓN / CATEGORÍAS	SITUACIÓN PLANTEADA EN LENGUAJE VERBAL	SITUACIÓN PLANTEADA MEDIANTE LA BALANZA EN EQUILIBRIO	SITUACIÓN PLANTEADA MEDIANTE UN DIAGRAMA	SITUACIÓN PLANTEADA MATEMÁTICAMENTE
REPRESENTACIÓN DE LA SITUACIÓN EN DIFERENTES LENGUAJES	Los tres mitades de una cantidad desconocida de monedas se le quita media moneda da como resultado una deuda de tres monedas. ¿Cual es la cantidad desconocida de monedas?			$\frac{3}{2}x - \frac{1}{2} = -3$ $\frac{3}{2}x = \frac{-3}{1} + \frac{1}{2}$ $\frac{3}{2}x = \frac{-6+1}{2}$ $x = \frac{-\frac{5}{2}}{\frac{3}{2}} = x = \frac{-10}{6} = x = \frac{-5}{3}$
REVERSIBILIDAD (SITUACIÓN PRESENTADA AL REVÉS)	Si se debe tres monedas y cancelamos media moneda se queda debiendo tres mitades de la moneda, lo cual se divide entre tres medios resultando una deuda de cinco tercios de moneda lo cual representa la cantidad desconocida de monedas.			$(-3+\frac{1}{2}) \div \frac{3}{2} = x$ $\frac{-5}{2} \div \frac{3}{2} = x$ $-\frac{5}{3} = x$
CONCLUSIONES	NOTA = En la presentación gráfica utilizamos círculos negros para representar valores. En dicha representación el resultado fue de $\frac{-5}{3}$ que es el valor de x.	Esto da a pensar que la balanza no representa un peso determinado sino una deuda en cuanto se excede de un lado a otro. La deuda del lado izquierdo es menor.	ahí deuda del lado derecho esto hace que la balanza se incline más hacia la derecha.	PRUEBA $\frac{3}{2}(\frac{-5}{3}) - \frac{1}{2} = -3$ $\frac{-15}{6} - \frac{1}{2} = -3$ $\frac{-15-3}{6} = -3$ $\frac{-18}{6} = -3$ $-3 = -3$

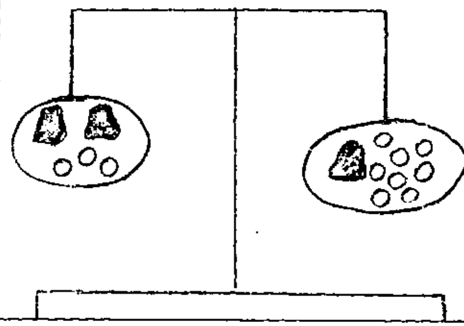
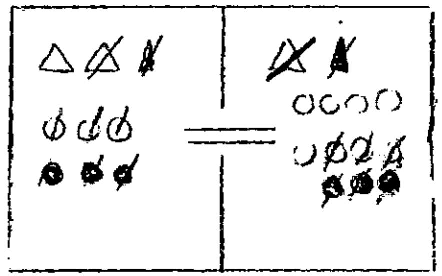
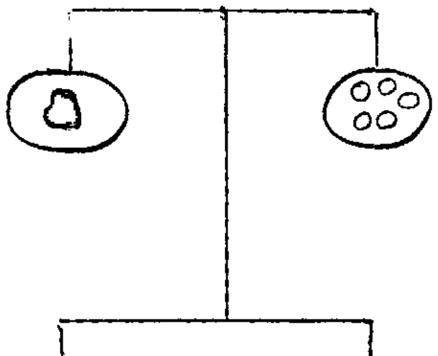
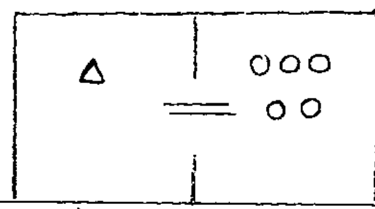
ESTUDIANTE (S): Ricardo Bahamón, Heidy Escobar, Jenyfer Muñoz, Jeimy Rojas — Fecha: 10/10/03 — Curso: 902

CÓDIGOS: 5, 15, 25, 35

ARLOS ARANGO VÉLEZ – J.T. – PROYECTO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MEDIANTE LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES EN EDUCACIÓN BÁSICA

Docentes: Luis Fernando Alméciga M. Nivia Yela – Germán Montezuma

ANÁLISIS DE UNA SITUACIÓN REPRESENTADA EN DIFERENTES LENGUAJES: VERBAL, GRÁFICO Y MATEMÁTICO.
COMPLETEN LOS ESPACIOS EN BLANCO
(Se forman grupos de acuerdo al número de terminación del código de lista. Ejemplo: El grupo 1 está conformado por los alumnos cuyos códigos son: 1, 11, 21, y 31)

SITUACIÓN PLANTEADA EN LENGUAJE VERBAL	SITUACIÓN PLANTEADA MEDIANTE LA BALANZA EN EQUILIBRIO	SITUACIÓN PLANTEADA MEDIANTE UN DIAGRAMA Y TABLERO	SITUACIÓN PLANTEADA MATEMÁTICAMENTE
UN GRANJERO TIENE 2 FINCAS CON CIERTA CANTIDAD DE VACAS. Y 3 QUE TIENE GUARDADAS, SU TIO LE REGALO OTRA FINCA CON SIERTA CANTIDAD DE VACAS QUE NO SE SABEN Y SU ABUELO LE REGALO 8 VACAS ¿CUANTAS VACAS TIENE EN TOTAL?		 $x + 3 = 8$	$2X + 3 = X + 8$ $2x - x + 3 - 3 = x - x + 8 - 3$
SI TIENE 8 VACAS Y REGALA 3 VACAS QUE TIENE GUARDADAS RESULTA QUE EN LAS FINCAS TIENE DE A 5 VACAS.		$x \to (+3) \Rightarrow \boxed{8}$ $\Uparrow \quad \quad \downarrow$ $5 \leftarrow (-3) \leftarrow \boxed{8}$ 	$5 \to (+3) \to \boxed{8}$ $\Uparrow \quad \quad \downarrow$ $x \leftarrow (-3) \leftarrow \boxed{8}$ $8 = x + 3$
Podemos concluir que el granjero pudo razonar el problema hallando el valor de x y restando lo que le regalaron y sumando lo que regalo.	Podemos concluir q' la balanza esta equilibrada ya que poseen el mismo nº de monedas	En el diagrama concluimos q' x es igual a 5 con el procedimiento de sumarle a x 3 que es = a 8, y hacemos la misma operación al revés, q' da 8 menos 3 igual a 5.	Podemos concluir que la operación simbolica a que estaban $2x+3 = x+8$, a el lado isquierdo se le suman 3 cargas negativas y el derecho tambien, y le sumamos a cada lado 1 bolsita negativa que elimine cada positivo.

plo cu / da d / sulta / el bols / quivo

Annyi Maribel 17 — Bryan Guiuseppe 13 — Oscar Montilla 21 — ______

Fecha: 10 - 09 - 03 Curso: 701

ANEXO 3

I.E.D. CARLOS ARANGO VÉLEZ – J.T. – PROYECTO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MEDIANTE LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES EN EDUCACIÓ

CURSO: 603 **Docente: Luis Fernando Alméciga M.**

DISEÑO No. 3	ANÁLISIS DE UNA SITUACIÓN REPRESENTADA EN DIFERENTES LENGUAJES: VERBAL, GRÁFICO Y MATEMÁTICO. Se forman grupos de acuerdo al número de terminación del código de lista. Ejemplo: El grupo 1 está conformado por los alumnos cuyos códigos son: 1, 11, 21, y 31.			OBSERVA AUTO
SITUACIÓN / CATEGORÍAS	SITUACIÓN PLANTEADA EN LENGUAJE VERBAL	SITUACIÓN PLANTEADA MEDIANTE UN DIAGRAMA	SITUACIÓN PLANTEADA MATEMÁTICAMENTE	Actitud (Orden, responsabilidad, respeto, solidaridad, ...)
REPRESENTACIÓN DE LA SITUACIÓN EN DIFERENTES LENGUAJES	Pepe se encontro una cantidad desconocida de canicas y las agrego a las 138 que tenía en su casa, luego regalo 90 canicas entre sus amigos y en el parque jugó y ganó 117 canicas más tarde llegó a su casa, las contó y en total tenía 617 canicas. ¿cuantas canicas se encontro?	$\boxed{x} \xrightarrow{+138} \boxed{} \xrightarrow{-90} \boxed{} \xrightarrow{+117} \boxed{617}$	$X+138-90+117=617$	20
REVERSIBILIDAD (SITUACIÓN PRESENTADA AL REVÉS)	Pepe se fue al parque con 617 canicas que obtuvo el día anterior; jugó y perdió 117 canicas; luego sus amigos le regalaron 90 para que no llorara; muy bravo salió corriendo y se le cayeron 138 canicas; más tarde llegó a su casa, las contó y en total tenía 452 canicas. que eran las que se había encontrado	$\boxed{452} \xleftarrow{-138} \boxed{590} \xleftarrow{+90} \boxed{500} \xleftarrow{-117} \boxed{617}$	$X+138-90+\cancel{117}-\cancel{117}=617-117$ $X+138-90=500$ $X+138-\cancel{90}+\cancel{90}=500+90$ $X+138=590$ $X+\cancel{138}-\cancel{138}=590-138$ $X=452$	30
CONCLUSIONES	1) Que una situación se puede representar en diferentes lenguajes: verbal, gráfico y matemático 2) que una situación verbal se puede resumir en algo muy pequeño matematicamente. 3) Que una situación se puede resolver devolviendose mediante la reversibilidad. ...			

ESTUDIANTE (S): Pedro Antonio S. Carlos Quintero Manuel Montes Carlos Escobar F

ANEXO 4

I.E.D. CARLOS ARANGO VÉLEZ – J.T. – PROYECTO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MEDIANTE LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES EN EDUCACIÓN BÁSICA - IDEP – 2003
Docentes: Luis Fernando Alméciga M. Nivia Yela – Germán Montezuma

RESUELVA LOS SIGUIENTES PROBLEMAS

1. LA EDAD DE PEDRO MÁS 37 ES IGUAL A 58 AÑOS. ¿QUÉ EDAD TIENE PEDRO?
2. MARCELA VENDIÓ 35 CALCOMANÍAS DE SU COLECCIÓN Y LE QUEDARON 29. ¿CUÁNTAS CALCOMANÍAS TENÍA MARCELA?
3. EL PESO DE IRENE MÁS 38 ES IGUAL A 80 KILOS. ¿CUÁL ES EL PESO DE IRENE?
4. TENÍA CIERTA CANTIDAD DE DINERO EN EL BANCO Y RETIRÉ $44800.00. PEDÍ L SALDO Y ME INFORMARON QUE ÉSTE ES DE $ 128600.oo ¿CUÁNTO DINERO TENÍA ANTES DEL RETIRO?
5. CUATRO VECES EL NÚMERO DE LÁPICES QUE TIENE PATRICIA ES IGUAL A 76. ¿CUÁNTOS LÁPICES TIENE PATRICIA?

DESARROLLO

1 La edad de pedro es 21 años porque: hay que restar

$$\begin{array}{r} 58 \\ -37 \\ \hline 21 \end{array}$$

2 El total de la coleccion de calcomanias de marcela es 64. porque hay que sumar

$$\begin{array}{r} 35 \\ +29 \\ \hline 64 \end{array}$$

3 El peso total de irene es 42 porque hay que restar

$$\begin{array}{r} 80 \\ -38 \\ \hline 42 \end{array}$$

4 El valor de X (el numero desconocido) es igual a 5766000 porque

X 4480000 + X - 12860000

X 44800.00 + X - 44800.00 = 128600.00 - 44800.00

X = 5766000 con ecuaciones

5 La cantidad de lapices que tiene patricia son 19 porque multiplicando 19 x 4 es igual a 19: con multiplicación

$$\begin{array}{r} 19 \\ \times\ 4 \\ \hline 76 \end{array}$$

INTEGRANTES

Julian David Valencia
Yamid Alejandro Acosta
Carolina Ortiz
Lorena Figueroa
Adis Ramires

- Astrid Giraldo – Erika Roncancio
- Hans Perez – Luis Carlos Bolaños (cod) 9

-10 -10 -10 (25) -10

9U

I.E.D. CARLOS ARANGO VÉLEZ – J.T. – PROYECTO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MEDIANTE LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES EN EDUCACIÓN BÁSICA - IDEP – 2003
Docentes: Luis Fernando Alméciga M. Nivia Yela – Germán Montezuma

RESUELVA LOS SIGUIENTES PROBLEMAS

1. LA EDAD DE PEDRO MÁS 37 ES IGUAL A 58 AÑOS. ¿QUÉ EDAD TIENE PEDRO?
2. MARCELA VENDIÓ 35 CALCOMANÍAS DE SU COLECCIÓN Y LE QUEDARON 29. ¿CUÁNTAS CALCOMANÍAS TENÍA MARCELA?
3. EL PESO DE IRENE MÁS 38 ES IGUAL A 80 KILOS. ¿CUÁL ES EL PESO DE IRENE?
4. TENÍA CIERTA CANTIDAD DE DINERO EN EL BANCO Y RETIRÉ $44800.00. PEDÍ L SALDO Y ME INFORMARON QUE ÉSTE ES DE $ 128600.00 ¿CUÁNTO DINERO TENÍA ANTES DEL RETIRO?
5. CUATRO VECES EL NÚMERO DE LÁPICES QUE TIENE PATRICIA ES IGUAL A 76. ¿CUÁNTOS LÁPICES TIENE PATRICIA?

DESARROLLO

1. La edad de Pedro +37 es igual a 58 años. ¿Que edad Tiene? R= Se le resta a 37 la misma cantidad. Y para que igualdad se mantenga a 58 se le resta 37. y da 21

Operación

$X+37=58=$
$37-37=58-37=21$
Rta= 21 años tiene Pedro.
$X=21$.

2. Marcela vendió 35 calcomanias de su colección y le quedaron 29. ¿Cuantas Calcomanias tenia Marcela? R= Se le suma a 35 la misma cantidad y para que se mantenga la igualdad a 29 se le suma 35 y da 64.

Operación

$X-35=29=$
$35+35=$
$29+35=64$
$X=64$
R= 64 Calcomanias.

3. El peso de Irene más 38 es igual a 80 kilos ¿Cual es el peso de Irene? R= A 38 se le resta la misma cantidad y para que la igualdad se mantenga ~~se~~ a 80 se le resta 38 y da 52.

Operación

$X+38=80=$
$38-38=$
$80-38=52$
$X=52$
R= 52 kilos.

4. Tenia cierta cantidad de dinero en el banco y retire $44.800. ~~R~~ Pedí el saldo y me informaron que este es de $128.600 ¿Cuanto dinero tenía antes del retiro? R= A $44.800 se le suma la misma cantidad y para que se mantenga la igualdad a $128.600 se le suma $44.800 y da $173.400.

Operación

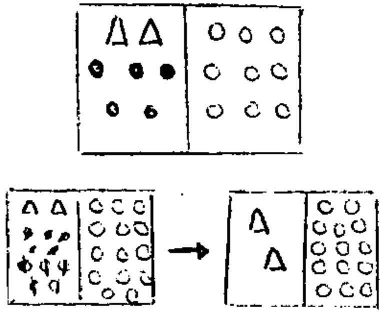
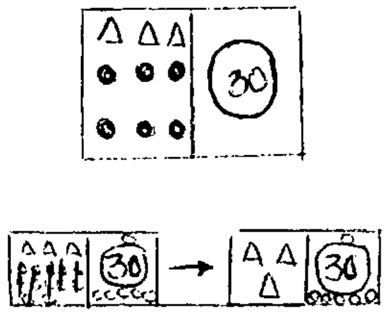
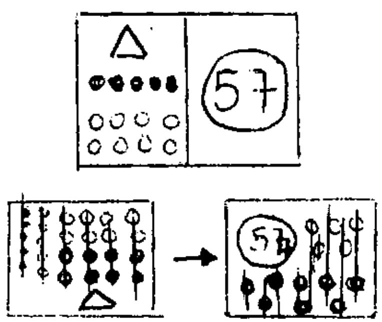
$X-44.800=128.600=$
$44.800+44.800=$
$128.600+44.800=$
173.400
$X=173.900$
R= $ 173.400 pesos.

5. Cuatro veces el número de lapices que tiene Patricia es igual a 76. ¿Cuantos lapices tiene Patricia? R= Se divide 4÷4 y para que se mantenga la igualdad a 76÷4 y da 19.

Operacion

$X÷4\ 76=$
$4÷4=$
$76÷4=19$
$X=19$.
R= 19 lapices.

Nombre: Sandra Milena Acevedo
Curso: 7C1
Materia: Matemáticas
Profesora: Nibia Esther Yela.

REALIZACIÓN VERBAL	TABLERO	REPRESENTACIÓN MATEMÁTICA	DIAGRAMAS
En una videotienda de películas por ser domingo alquilan dos ~~kits~~ (con la misma cantidad de videos) Yo los alquile y me tocó devolver 5 videos que estaban dañados. Vi la cuenta de las películas que estaban alquiladas y habían 9.		$2 \cdot m - 5 = 9$ $2 \cdot m - 5 + 5 = 9 + 5$ $2 \cdot m = 14$ $2m = 14 \rightarrow \Delta = 7$ $\Delta = 0000000$	$\boxed{m} \rightarrow (\text{por } 2) \rightarrow \boxed{14} \rightarrow (-5) \rightarrow 9$ $7 \leftarrow (\div 2) \leftarrow \boxed{14} \leftarrow (+5) \leftarrow 9$ entonces decimos que m es igual a ~~dos~~ siete.
REALIZACIÓN VERBAL. Mi mamá me compró 3 paquetes de dulces. (con la misma cantidad en cada paquete) le ~~q~~ regalé 6 a mi hermanita. Conté los dulces que me quedaban y tenía 30 dulces.	TABLERO 	REPRESENTACIÓN MATEMÁTICA. $3 \cdot A - 6 = 30$ $3 \cdot A - 6 + 6 = 30 + 6$ $3 \cdot A = 36$ $\Delta \rightarrow 12$ $12 \times 3 = 36$ $\Delta = 000000000000$	DIAGRAMAS $\boxed{A} \rightarrow (\times 3) \rightarrow \boxed{36} \rightarrow (-6) \rightarrow 30$ $\boxed{12} \leftarrow (\div 3) \leftarrow \boxed{36} \leftarrow (+6) \leftarrow 30$ entonces decimos que A es igual a doce.
Un niño tiene una bolsita (con monedas de igual valor). Regala cinco monedas a su hermano, y su mamá le regala a él ocho. Cuando llega a su casa y las cuenta resulta con 57 monedas.	TABLERO 	REPRESENTACIÓN MATEMÁTICA. $L - 5 + 8 = 57$ $L - 5 + 5 + 8 = 57 + 5$ $L + 8 = 62$ $L + 8 - 8 = 62 - 8$ $L = 54$ $\Delta = 54$	DIAGRAMAS. $\boxed{L} \rightarrow (-5) \rightarrow \boxed{49} \rightarrow (+8) \rightarrow 57$ $-8 \leftarrow 57$ $\boxed{54} \leftarrow (+5) \leftarrow \boxed{49} \leftarrow (-8) \leftarrow 57$ Entonces decimos que L es igual a 54.