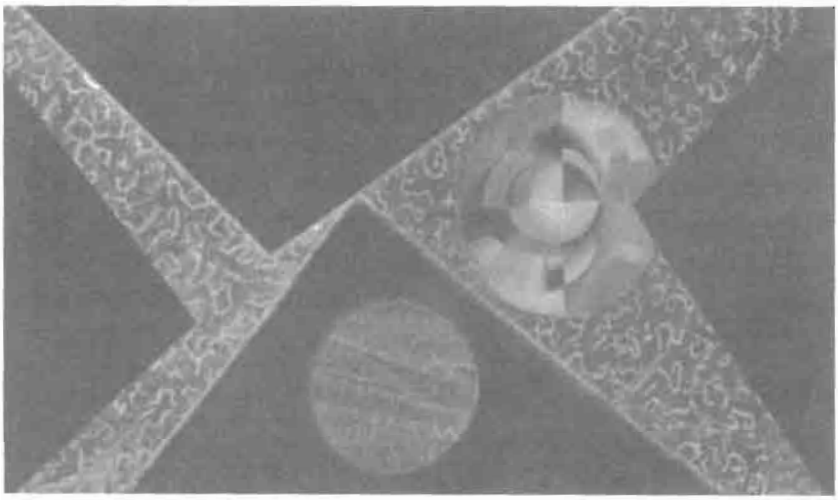
INVESTIGACIONES E INNOVACIONES DEL IDEP



INVESTIGACIÓN SOBRE CONCEPCIONES DE LOS DOCENTES

COMPRENSIÓN DE ALGUNOS CONCEPTOS ARITMÉTICOS EN PROFESORES DE PRIMARIA*

Martha Bonilla Estévez
Neila Sánchez Heredia, Martha Vidal A.
Universidad Distrital Francisco José de Caldas

En este trabajo se presenta el resumen de la investigación en la que se pretendía conocer y comprender el conocimiento pedagógico de un grupo de profesores de primaria acerca de las nociones sobre las operaciones aritméticas y los algoritmos utilizados, y poder usar los resultados obtenidos como referentes para organizar algunos programas de formación.

La aparición de nuevas propuestas curriculares así como la divulgación de los resultados de investigaciones en Educación Matemática han puesto de relieve la importancia de lograr cambios significativos en el conocimiento de los profesores de matemáticas. En particular, a los profesores de primaria (que enseñan matemáticas) se les exigen ciertas competencias y habilidades cognitivas y procedimentales para las cuales nunca fueron formados.

Desde nuestra posición de formadores entendemos que toda práctica educativa es una consecuencia de la forma en que cada profesor interpreta el hecho educativo y de las concepciones que guían su acción. Así mismo, toda actividad de formación se orienta por unos principios teóricos particulares, principalmente en unas concepciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de un contenido específico. En el caso de las matemáticas, y tal como lo señala Blanco (1996) muchos profesores las conciben como un conjunto de reglas que deben ser transmitidas como algo ya dado, preestablecido, y que deben ser memorizadas al igual que las situaciones en las cuales deben ser aplicadas. Esta visión es contraria a los nuevos retos de la enseñanza matemática y es por ello que se deben diseñar programas de formación que favorezcan el cambio conceptual sobre la naturaleza del conocimiento matemático, su enseñanza y su aprendizaje.

* La investigación "Comprensión de algunos conceptos aritméticos en profesores de primaria", se realizó durante el período 1997-1998, y fue auspiciada por la Universidad Distrital Francisco José de Caldas y el Instituto para la Investigación Educativa y el Desarrollo Pedagógico, IDEP. El informe final se encuentra en el Centro de Documentación del IDEP.

Surgen varios interrogantes: ¿qué deben conocer los profesores de primaria acerca de las matemáticas, su enseñanza y su aprendizaje?, ¿cómo conseguir que efectivamente se vayan generando cambios en los procesos de aprender a enseñar matemáticas?, ¿cómo evaluar la efectividad del proceso? Así mismo, ¿qué saben los profesores acerca de los conocimientos matemáticos que tratan en el aula?, ¿cuál es su comprensión de los conceptos matemáticos que enseñan? Todos estos interrogantes, y por supuesto muchos más, se pueden constituir en puntos de partida para posibles investigaciones, necesarias a la hora de diseñar proyectos de formación del profesorado.

Los problemas que orientaron la indagación fueron:

Problema 1: Las nociones sobre las cuatro operaciones aritméticas y sus algoritmos ocupan gran parte de la enseñanza básica primaria y se pueden considerar como un núcleo fuerte en la iniciación a la formación del pensamiento matemático en el niño. A partir de nuestra experiencia y de otras investigaciones es posible concluir que algunas concepciones de los maestros se constituyen en un obstáculo para propiciar el desarrollo del pensamiento matemático en los niños. Por ello nuestro problema es: ¿cómo caracterizan los profesores de primaria los conceptos de las operaciones aritméticas y sus correspondientes algoritmos?

Problema 2: a la hora de dotar de significado a situaciones en las que se presenten problemas de tipo aditivo y multiplicativo y sus correspondientes operaciones inversas, los profesores utilizan diversos argumentos de tipo matemático o didáctico que justifican sus respuestas. Lo mismo sucede en los momentos de explicar las razones por las cuales se usa un procedimiento matemático para resolver un problema determinado. Por ello, nos parece importante explorar en nuestra investigación: ¿cuáles son los modelos de problemas de tipo aditivo o de resta, multiplicación o división que utilizan los profesores de primaria, al analizar situaciones en las que una de estas operaciones se use como modelo matemático?, ¿qué argumentos utilizan los profesores a la hora de explicar las razones que los llevan a enseñar unos ciertos algoritmos de una cierta manera?

Derivados de los problemas planteados, también fueron objetivos del estudio:

Objetivo 1: caracterizar las concepciones del grupo de profesores que interviene en este estudio, acerca de las operaciones aritméticas: suma, resta, multiplicación y división.

Objetivo 2: describir los tipos de argumentos que utilizan para justificar los procedimientos algorítmicos involucrados en las cuatro operaciones aritméticas.

Objetivo 3: analizar las relaciones entre la comprensión de diferentes aspectos relativos a las nociones aritméticas en cuestión, y el uso de los modos de representación que se pueden utilizar.

Objetivo 4: A partir de los resultados del trabajo construir una propuesta de programa de formación para profesores de primaria, en la cual se incluyan las comprensiones encontradas como casos a ser analizados por los participantes.

Metodología empleada

El estudio se desarrolló con un grupo de 62 profesores del Distrito Capital, en su mayoría ubicados en las escuelas de la localidad 8ª. La totalidad de profesores ha ejercido la profesión docente por un tiempo mayor a 5 años. La preparación académica corresponde a los niveles de normalista, estudiantes y/o licenciados en educación básica primaria, y sólo 4 dijeron tener estudios de posgrado. También se pudo apreciar que la totalidad de los profesores habían realizado cursos de perfeccionamiento docente.

Los instrumentos de investigación planteados fueron un cuestionario y una entrevista semiestructurada. El cuestionario se diseñó en dos partes, una relacionada con los problemas aritméticos elementales, y la otra con los algoritmos de las cuatro operaciones, tal como se describe a continuación:

Una de las actividades que realiza un profesor es la elaboración de problemas relacionados con las operaciones aritméticas que enseña, para ser colocados como tareas escolares. Tomando como referencia su práctica en ese aspecto, elabore, para cada una de las relaciones numéricas que se presentan a continuación, tres problemas diferentes y explique las razones por las cuales cree que son diferentes.

9 + 7 = 16	1.a.
	1.b.
	1.c.
Explique las razones:	

6 x 3 = 18	1.a.
	1.b.
	1.c.
Explique las razones:	

En la primera parte se utilizó un cuestionario con el que se deseaba obtener el conocimiento de los profesores de las diferentes estructuras semánticas de los problemas aritméticos escolares PAES, que se pueden asociar con una operación dada. Se les presentó la operación aritmética completa, para no direccionar hacia cierto tipo de problemas determinados por el lugar de la incógnita, a la vez que se mantuvieron los números menores de 20 para que fueran tipos de problemas trabajados por todos los profesores.

En lo relativo a la Parte II, el cuestionario se estructuró usando aquellos casos que pretenden ser situaciones de aula en las que el profesor debe tomar una decisión de enseñanza. En cada caso se presenta una operación, en la que se pone de manifiesto el error del estudiante:

Caso 1

José tiene 8 años, está en segundo grado, aprendiendo a sumar. Ha hecho el siguiente ejercicio:

$$\begin{array}{r} 6\ 9\ 9 \\ +\ 3\ 0\ 1 \\ \hline \end{array}$$

escribiendo en su hoja, en pasos sucesivos lo siguiente:

$$\text{a)}\ \begin{array}{r} 6\ 9\ 9 \\ +\ 3\ 0\ 1 \\ \hline 1\ 0 \end{array} \qquad \text{b)}\ \begin{array}{r} 6\ 9\ 9 \\ +\ 3\ 0\ 1 \\ \hline 9\ 1\ 0 \end{array} \qquad \text{c)}\ \begin{array}{r} 6\ 9\ 9 \\ +\ 3\ 0\ 1 \\ \hline 9\ 9\ 1\ 0 \end{array}$$

1. ¿Cuál fue la causa de que José hiciera la operación así?
2. ¿Cómo enseñaría esa suma a José?

Esta parte se estructuró de acuerdo a dos tipos de cuestiones: *Análisis clínico* e *intervención en el aula;* a este respecto se utiliza el error para situar al profesor en una situación de identificación del mismo, y luego se le pide que haga una intervención en el aula, es decir que diseñe una secuencia de enseñanza para corregir el error encontrado.

Con los anteriores ítems se identificó la comprensión conceptual que los profesores tienen de los diferentes algoritmos de las operaciones aritméticas, con los números naturales a través del análisis de los errores que comenten los alumnos. Un objetivo común a los cuatro casos consistió en obtener información sobre el papel que desempeñan dos ideas conceptuales del sistema de numeración: valor posicional y agrupamiento, en dotar de significado a los algoritmos (información conceptual).

En el *caso de la suma,* se obtuvo información acerca de la comprensión del profesor frente a una situación en la que el alumno no maneja el agrupamiento. Para el *caso de la resta,* se buscó información sobre el manejo del valor posicional y la descomposición de unidades superiores a inferiores. En el *caso de la multiplicación,* se obtuvo información sobre el valor posicional y la conversión de unidades. Y para el *caso de la división,* se obtuvo información sobre el valor posicional.

MARCO TEÓRICO

Esquema analítico

Para el diseño de las categorías de análisis se utilizaron los siguientes criterios:

PARTE I: Para clasificar las respuestas de los profesores se usó la estructura semántica de los problemas propuestos y los modelos de las situaciones.

En el proceso de análisis se consideró relevante utilizar diferentes variables en la descripción de las categorías, como el lugar de la incógnita y los diferentes papeles en la situación que desempeñaban los números proporcionados en la expresión aritmética.

Para los problemas vinculados con la expresión aditiva se emplearon las categorías semánticas de los problemas aritméticos escolares PAES establecidos en la literatura, y en particular se utilizó la clasificación propuesta por Nesher. Para los problemas vinculados con la expresión multiplicativa se utilizaron las clasificaciones propuestas por Greer, incorporando las que elaboraron Vergnaud y Schwartz.

Las categorías definitivas fueron las siguientes:

CATEGORÍAS ADITIVO	CATEGORÍAS MULTIPLICATIVO
S1 Combinación	M11 Isomorfismo de medida (Veces) I x E = E
S21 Cambio aumentar	M12 Isomorfismo de medida (Cada uno) I x E = E
S22 Cambio disminuir	M21 Isomorfismo de medida (Veces) E x I = E
S3 Comparación	M22 Isomorfismo de medida (Cada uno) E x I = E
S4 Numérico	M3 Producto de medidas $M_1 \times M_2 = M_3$
S5 Gráfico	M4 Numérico
S6 No lo hizo	M5 Gráfico
S7 Especial	M6 No lo hizo
	M7 Especial

Al tomar como eje de caracterización el lugar que ocupa la incógnita dentro del problema, se construyeron las siguientes categorías:

I 1	a + b = ?	a x b = ?
I 2	a + ? = c	a x ? = c
I 3	? + b = c	? x b = c

Con relación a la caracterización de las razones por las cuales los profesores consideran a los problemas como diferentes, se procedió de manera inductiva, generando la siguiente categorización:

Para la estructura aditiva	Para la estructura multiplicativa
R1 Mira de uno en uno e identifica lo que hay que hacer para resolverlo	R1 Mira de uno en uno e identifica lo que hay que hacer para resolverlo
R2 Por ser diferente el enunciado	R2 Por ser diferente el enunciado
R3 Por los objetos	R3 Por las sumas reiteradas
R4 Por el lugar de la incógnita	R4 Por el lugar de la incógnita
R5 Por las operaciones y los enunciados involucrados	R5 Por las operaciones y los enunciados involucrados
R6 No clasificable	R6 No clasificable
R7 No hay razones	R7 No hay razones

Parte II: las explicaciones dadas por los profesores para el análisis de los errores de los niños y de las propuestas de enseñanza realizadas se analizaron de *manera inductiva,* para crear un sistema de categorías que diera cuenta *del uso* que los profesores hacían de los conceptos vinculados con el sistema de numeración decimal (agrupamiento, valor posicional, cantidad) y estableciendo relaciones entre el conocimiento procedimental y el conceptual.

La *descripción inicial* de las respuestas fueron categorizadas en grupos que muestran las características de la comprensión de los profesores de las nociones relativas al sistema de numeración decimal, y las conexiones entre lo conceptual y lo procedimental.

Las categorías elaboradas fueron las siguientes:

Descripción de las categorías

C1 No da explicaciones o no sabe.

C2 La explicación presentada es confusa y los criterios de análisis expuestos no están claros.

C3 Justificaciones apoyadas en criterios sintácticos (mecánicos).

C4 Se utilizan explicaciones basadas en el reconocimiento del agrupamiento (unidades, decenas, centenas) sin que expliquen el uso dentro del algoritmo.

C5 Se utilizan explicaciones basadas en el conocimiento del valor posicional (las casillas) sin que expliquen el uso dentro del algoritmo.

C6 Se presenta una explicación que involucra valor posicional y teoría de agrupamiento, sin que ello demuestre comprensión de o sobre lo conceptual.

Entrevista

Proceso de elaboración: se realizaron dos (2) entrevistas usando la técnica de entrevista semiestructurada. En la primera, el objetivo consistió en buscar más comprensión de lo expuesto por el profesor desde lo escrito (en las razones o argumentos usados para diferenciar los problemas propuestos), así como indagar por el conocimiento del profesor en relación con los aspectos tratados, presentándole para ello otros tipos de problemas semejantes a los realizados por él, o problemas que aunque no fueron elaborados por él le sirvieran para tener más elementos de contrastación a la hora de dar diferencias.

La segunda entrevista tenía como objetivo buscar la *comprensión* que el sujeto tiene frente a los conceptos, sobre las operaciones aritméticas y los algoritmos presentados.

Para determinar algunas de las concepciones que tienen los maestros acerca de la aritmética básica, el método de "entrevista clínica" como técnica de investigación nos permitió establecer secuencias significativas de análisis a través de la misma planificación de las entrevistas, puesto que desde el principio de la recolección de la información se establecieron unos "elementos" –*contenido esperado*– que posteriormente, de manera consciente o inconsciente, se tiende a confirmar, tal como se ha observado en investigaciones como la de Erickson, 1986. Esto significa que parte de las estrategias utilizadas en las entrevistas buscan confirmar algún tipo de teoría inducida, o un determinado enfoque o modelo sobre el cual se pretende indagar.

Un propósito fundamental del trabajo consistió en estudiar el uso que hacen los profesores de los conceptos en cuestión, para explicar tanto las diferencias entre los problemas como las reglas involucradas en los algoritmos. Para ello

se utilizó el "análisis de contenido", relacionando las respuestas con los datos obtenidos.

Algunos resultados

Análisis descriptivo: para realizar un análisis global de los enunciados de los problemas elaborados por los profesores se usaron los siguientes criterios:

1. Identificación del tipo de problema enunciado aritmético elaborado.
2. Identificación de la estructura semántica del problema verbal formulado.
3. Identificación de la estructura sintáctica del problema enunciado.
4. Evaluación de la precisión y la coherencia del enunciado.
5. Análisis de la correspondencia entre el enunciado elaborado y la estructura de la relación planteada.

• Criterio 1: características de los problemas aritméticos enunciados. Para este apartado se tuvo en cuenta que los profesores produjeran problemas de tipo verbal (247 problemas) en el cual se expresa una situación más o menos cercana a la descripción de un suceso de la vida real, o un problema de tipo numérico (41) en el cual se solicita al resolutor que realice un cálculo numérico entre las cantidades propuestas. Por otro lado, la categoría gráfico (14) corresponde al tipo de problemas que presenta una representación y solicita que mediante ella se encuentre la respuesta a la pregunta planteada.

• Criterio 2: la tabla 2 muestra el número total de los problemas elaborados de acuerdo con cada estructura analizada y con la clasificación realizada.

Categorías Aditivas	Total	Categorías Multiplicativas	Total
Combinación	75 (55,55%)	Veces	12 (10,72%)
Cambio Aumentar	41 (30,37%)	Cada uno	94 (83,93%)
Cambio Disminuir	9 (6,66%)	Producto de medidas	6 (5,35%)
Comparación	10 (7,4%)		
Total	135		112

Tabla 2

• Criterio 3: *Análisis de la sintaxis.* Para este apartado se tomaron no sólo problemas de enunciado verbal sino también gráfico y numérico; en el caso en que los profesores elaboraron problemas.

La mayoría de los profesores elaboraron problemas en los que se preguntaron por la incógnita I1, correspondiente al total de la operación. Esta situación pudo deberse a que la forma de presentar la sentencia canónica los haya inclinado a elaborar ese tipo de problemas, o a que en los tipos de problemas no incluyen los correspondientes a la sustracción (en el caso aditivo) y a la división (en el caso multiplicativo). Ello es importante en cuanto nos permite conjeturar acerca de la conceptualización que poseen los profesores sobre estructura aditiva o estructura multiplicativa, y es por ello que este aspecto será objeto de un análisis en las entrevistas.

• Criterio 4: *Análisis de la precisión y coherencia.*

Como enunciados imprecisos podemos presentar los siguientes ejemplos:

– En el enunciado hace falta la relación multiplicativa:

"Si doy 6 frutas a 3 niñas. ¿Cuántas frutas son?"

– En el enunciado hace falta la congruencia de las partes:

"Reparto en 6 cajas 18 huevos. ¿Cuántos huevos corresponden a cada caja?

– En el enunciado hace falta una de las partes del todo:

"Luis Leonardo en un balde tiene 16 bolsas de leche; debe repartirlas entre la fila de José y la fila de Paola. ¿Cuántas bolsas reparte en cada fila?"

– Un enunciado incoherente propuesto por un profesor, fue :

"Por medio de varias canicas buscar una operación que no sea la multiplicación ni la suma y le dé el mismo resultado".

Este tipo de problemas no se encontró en muchos casos pero se incluyó porque en la estructura multiplicativa la expresión de relación multiplicativa o la congruencia de las partes son muy importantes para obtener la estructura deseada.

• Criterio 5: de los problemas en los cuales no hay correspondencia entre el enunciado planteado y la relación que se pretende modelar encontramos ejemplos como los siguientes:

Para modelar 6 x 3 = 18

– 18 niños entran a estudiar y se retiran 6 a la mitad de año. ¿Cuántos niños quedan?

– ¿Cuánto le hace falta a 6 + 3 para llegar a 18?

Para modelar 9 + 7 = 16

– Tengo 16 bombones para repartirlos entre 9 niñas y 7 niños. ¿Cuántos bombones le corresponden a cada uno?

– Tengo 16 colombinas para repartir entre 9 niñas. ¿Cuántas colombinas le corresponden a cada una?

Como conclusiones parciales de este apartado podemos observar lo siguiente: la mayoría de los profesores redactó un problema verbal con lo que se infiere que ellos reconocen la tarea de producir problemas como elaborar "historias" o "tratar de proponer problemas relacionados de alguna manera con la vida cotidiana de los alumnos", que es lo que nosotros denominamos problemas con enunciado de tipo verbal. Como un hecho atípico se encontraron profesores que pueden producir hasta dos enunciados verbales y luego producen enunciados numéricos o gráficos.

La preferencia que se encontró para los problemas de estructura aditiva fue la correspondiente a los problemas de combinación, y para los de estructura multiplicativa la de isomorfismo de medida en su subcategoría de cada uno; las demás categorías se presentan con menor frecuencia.

Una de las cuestiones que también se desprende de este análisis es la relativa a las categorías que aparecen con menor frecuencia. Ellas corresponden, para la estructura aditiva, las de cambio disminuir y comparación, para la estructura multiplicativa, las de veces, de producto de medidas y de expresión cuotitiva. Estas ausencias nos permiten señalar que en el programa de formación es necesario incluir el análisis de las categorías olvidadas o no tenidas en cuenta a la hora de elaborar problemas.

Al considerar la estructura sintáctica, se encontró que la mayoría de los profesores enuncia problemas preguntando por el total; pensamos que la causa de esto estaría en que las sentencias aritméticas planteadas poseen un orden intrínseco que ellos respetan a la hora de enunciar los problemas. Al realizar un análisis desde los conceptos seleccionados para esta investigación (estructura aditiva y estructura multiplicativa) podremos asegurar que la mayoría de los profesores no comprende la resta como una parte de la estructura aditiva, ni la división como parte de la estructura multiplicativa. Ello nos lleva a proponer que el cambio de la posición de la incógnita sea uno de los aspectos a tener en cuenta para la estructuración de las temáticas del programa de formación.

También se debe incluir, a fin de posibilitar la comprensión de la construcción de la estructura aditiva y/o multiplicativa, la relación existente de la suma con la resta y de la multiplicación con la división en la medida en que son partes de dos campos conceptuales "considerados como conjuntos de problemas que comportan operaciones aritméticas y nociones de tipo aditivo (tales como adición, sustracción, diferencia, intervalo, traslación) o de tipo multiplicativo (como multiplicación, división, fracción, razón, semejanza)" (Vergnaud. 1983, p. 482) .

Las razones expuestas

En lo relativo a la caracterización de las razones expuestas por los profesores, podemos observar que las de tipo 1 se presentan con mayor frecuencia (23,7% y 20,34%) tanto en la estructura aditiva como en la multiplicativa. Para la estructura aditiva le siguen en frecuencia las razones expuestas desde la diferencia "radica en los enunciados", seguido de las razones "por el lugar de la incógnita". Para lo multiplicativo aparecen con mayor frecuencia las de "el enunciado", seguida de "no clasificable".

ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

Las cuatro operaciones

Para caracterizar las concepciones sobre las cuatro operaciones y los modos de representación usados por los profesores para dotar de significado a dichas operaciones, con relación a estos supuestos se realizaron las indagaciones correspondientes y encontramos que, tal como lo afirma Fischbein, los profesores usan los modos "primitivos" de conceptualización que se describen en las siguientes unidades de información.

La naturaleza de las operaciones aritméticas se identifica a través de la siguiente idea primitiva:

Las operaciones aritméticas son relaciones estáticas que relacionan elementos simultáneos de la realidad. Esta idea primitiva se expresa en cada una de las operaciones aritméticas, y para ejemplificar este tipo de análisis presentamos dos casos:

La suma: caso de Yudy

Sumar es unir y el modo de representación asociado es un conjunto, con dos subconjuntos disyuntos, para hallar el total la estrategia se basa en el conteo de elementos que componen un conjunto.

• Problema de comparación:

"Hay 9 lápices rojos; si hay 7 lápices amarillos más que rojos, ¿cuántos lápices amarillos hay en total?"

Explica: "Se suman los 9 colores rojos y los 7 amarillos", para representarlo dibuja un conjunto con los 9 colores rojos y le añade los otros 7 y al final cuenta el total de colores.

Yudy usa el modelo de unir conjuntos, sin interesarle que en los problemas de cambio haya una cantidad inicial que se transforma, y que además la acción se hace sobre los dos colores. En los problemas de comparación igualmente al considerarlo como relativo a una unión de conjuntos disyuntos, pierde una clase, la de los lápices rojos, quedándose así sin una de las cantidades a comparar.

La división: caso Manuel

El modelo explícito de división es el de reparto, usando para su representación un grupo que representa el todo y por repartición se dan los elementos del conjunto a cada uno de los subconjuntos a formar. Para este caso, usa estrategias basadas en el conteo (entregando de a uno) y en pocas ocasiones quitando grupos de mayor cantidad (de a 2 o de a 3, etc.).

• Ante el problema: "Hay un grupo de 6 niños y entre todos juntan 18 pesos. ¿Cuánto ahorra cada niño, si se supone que cada uno aporta lo mismo?"

• Para resolverlo, Manuela dice: "Hay que aplicar la división. Si se supone que dan lo mismo, tomo los 18 y le doy uno a cada niño y me quedan 12, vuelvo y le reparto uno a cada niño y quedan 6 para darle uno a cada niño, o sea que a cada niño le doy tres".

Para representarlo, dibuja a los 6 niños y va dibujando un billete debajo de cada uno, hasta que "se le acaban los billetes".

Tanto para los problemas de tipo multiplicativo como para los de división, el modo de razonar (sumas repetidas o reparto repetitivo) permite que los profesores desconozcan la función de las cantidades (intensivas o extensivas) dentro de los problemas. Por ello, la cantidad intensiva es considerada como el número de veces que se suma un grupo y hacen las sumas correspondientes

sobre la cantidad extensiva. Para la división, el asumir estrategias de tipo de resta les permite olvidar las medidas involucradas en las cantidades y hacer repartos en grupos de "a tantos".

Los algoritmos

Para la entrevistas de tipo II se tomaron como base las repuestas dadas en cuanto referían a los conceptos involucrados en el sistema de numeración decimal, los cuales se encuentran implícitos en los algoritmos de la suma, la resta, la multiplicación y la división.

Luego de realizar el análisis descriptivo de las repuestas obtenidas, para cada uno de los casos presentados (suma, resta, multiplicación, división) se determinaron, de acuerdo con el tipo de respuestas obtenidas, varios niveles para reagrupar a los profesores. Dichos niveles fueron:

N1 Todas las explicaciones se basan en razonamientos de tipo sintáctico.

N2 En alguna de las explicaciones usa en concepto de agrupamiento.

N3 En alguna de las explicaciones usa en concepto de valor posicional.

N4 En alguna de las explicaciones usa en conceptos de agrupamiento y valor posicional.

Sólo se entrevistaron tres profesores que estaban clasificados en N1, N2 y N3 (seleccionados al azar).

Del análisis de contenido, usando las respuestas dadas a la parte II del cuestionario, se puede deducir que existen dos formas predominantes de razonamiento entre los profesores del estudio. Éstos son los razonamientos centrados en lo sintáctico y aquellos que muestran una vinculación no muy elaborada –pero sí presente– entre lo conceptual y lo procedimental.

Explicaciones basadas en razonamientos sintácticos

Caso Ana

Con relación al valor posicional o relativo de las cifras se menciona lo que denominamos casillas, que en nuestro medio corresponden a gráficos como el siguiente:

CENTENAS	DECENAS	UNIDADES
2	5	4

para señalar que hay 2 centenas, 5 decenas y 4 unidades. Este tipo de razonamiento se encuentra en explicaciones como las siguientes:

> "En cuanto a la posición es el sitio que ocupa cada número, la ubicación en forma vertical uno debajo del otro, de acuerdo con la cantidad de dígitos. En las casillas se pone un número, cuando se tiene 10 se pone un 0 y se pasa el 1 a la casilla de las decenas... y lo mismo si se pasa de 99, se pasa un 1 a la casilla de las centenas... cuando uno va a ubicar un número en las casillas se les dice que solamente un número puede ir en cada casilla".

En lo concerniente al *agrupamiento* se usa la conformación de grupos para darle los nombres a las casillas y para encontrar las unidades, decenas y centenas en cada número:

> "Generalmente uno trabaja con el niño que las unidades son hasta 9, cuando se completa un 10 se coloca 1 en las decenas. Cuando ya tenemos por ejemplo el número 99, ¿cuántos grupos de 10 podemos hacer? 9, pero cuando por ejemplo tenemos 100 ¿entonces qué pasa?, no podemos colocar el 100 o sea hay dos casillas pero ahí hay 3 números, ¿entonces qué hacemos?, explicamos que las centenas son grupos de 100 elementos, entonces ¿qué pasa?, ¿cuántos grupos de 100 hay? Hay un solo grupo de 100 y lo completamos entonces con los dos ceros... esos ceros serían que hay 10 decenas, o sea una centena son 100 unidades, ahora si vamos a hacer con los 100 elementos grupos de a 10 ¿cuántos grupos podemos hacer?, salen 10 grupos de a 10, y si vamos a contar uno por uno, ¿cuántos unidades hay?, pues hay 100".

A pesar de que parece entender la teoría de agrupamiento en lo relativo a la composición y descomposición de unidades de orden superior en unidades de orden inferior, o viceversa, este conocimiento no se pone de manifiesto. Cuando explica por qué en cada casilla sólo va un número, dice:

> "Bueno así... o sea.. por lo menos es lo que a mí me enseñaron".

Un hecho importante de resaltar es *el valor asignado al cero*, en cuanto el cero es un dígito importante en todo sistema de valor posicional, y por lo tanto en la escritura decimal de los números. Así, puede verse que el valor que Ana asigna al cero cuando se refiere a los ceros en el número 7.004, dice:

> "El cero no tiene nada, pero como está en la casilla de las centenas el cero es un grupo de 100, el cero ocupa el grupo de 100... el cero le prestó al otro..."

Este tipo de explicación muestra la confusión al asignarle al cero valor dentro de las casillas, según la posición que ocupe, pero al mismo tiempo reconoce que el cero no tiene valor. Ana manifiesta su desconocimiento sobre el valor del cero como numeral que ocupa un lugar en una cifra (representada en el sistema decimal) que significa la ausencia de unidades de ese orden.

Analizado las explicaciones del algoritmo de la suma en lo relativo al uso que hace de estos conceptos (valor posicional y agrupamiento) es consistente con el tipo de conceptos expresados, cuando al explicar el error del niño, dice :

> "Primero la ubicación pues el niño sí la hizo o sea tiene en cuenta la posición del número o sea uno debajo del otro, unidades, decenas y centenas, ... el niño suma bien 9+1 da 10, pero al colocar el número el niño no sabe que ahí no se pueden colocar dos números en la misma casilla. Entonces es cuando yo... le digo: ¿cuántas decenas hay?, hay una decena y se coloca el cero y la decena en la casilla de decenas..."

Al dar explicaciones para el algoritmo de la multiplicación en lo que respecta a la explicación del desarrollo de la multiplicación, muestra conocer las reglas sin que para ello use el valor posicional y el producto de las diferentes unidades de orden involucradas en los números.

> "Empezamos a multiplicar por las unidades, o sea porque primero se va a trabajar con las unidades y se ubica en la parte de las unidades, luego con las decenas y se ubica en la parte de las decenas o sea en el segundo lugar de las casillas, o sea ¿por qué se empieza por las unidades?, la razón no se la puedo dar..."

En relación con la teoría del agrupamiento implícita en el algoritmo de la multiplicación, en lo que se refiere a la multiplicación de un número de dos cifras por otro de tres (como es el ejemplo que se puso), es manifiesto el poco uso de dicha teoría.

Al explicar el algoritmo de la división, pierde el valor posicional y todo lo convierte a unidades.

> E: Este 70 son centenas y el 23 son unidades, luego cuando tienes que 23 entre 70 da 1 y queda 1, ese uno que queda ¿qué son unidades, decenas, centenas?
>
> A: Como 23 x 3 son 69 y 70 - 69 son 6 decenas y me sobraba 1, entonces ese 1 es unidad.
>
> E: Estos 12 ¿qué son?
>
> A: Unidades

E: ¿Siempre se convierten en unidades?

A: Sí

Podemos concluir que en este caso se presenta un razonamiento de tipo sintáctico en la medida en que sus razonamientos se basan en criterios desvinculados de los conceptos involucrados, con lo cual se presenta un conocimiento de tipo memorístico y repetitivo de unas reglas que "funcionan". Sus explicaciones son de tipo "intuitivo" o provienen de la experiencia no reflexiva en el sentido de que tanto su enseñanza como su aprendizaje han sido "así".

"Es que así es, porque así me lo enseñaron".

Explicaciones basadas en razonamientos en los cuales se vincula el conocimiento conceptual con el procedimental, de tal manera que los conceptos matemáticos de valor posicional y agrupamiento entran a explicar los algoritmos.

Caso Lucy

En lo que se refiere al valor posicional, Lucy manifiesta su conocimiento y uso de este concepto cuando reconoce que existen unidades de diferente orden.

"El sistema de numeración siempre se ha formado de derecha a izquierda, siempre de menor a mayor... los niños saben que es imposible que 18 sea al contrario (81). Ellos dicen: "Por ahí no empieza" y "eso no es así"...

Para la *teoría del agrupamiento,* Lucy refleja un conocimiento de lo que significan las relaciones entre las unidades de diferente orden, aunque no manifiesta conocer los procedimientos multiplicativos que existen en la construcción de los números; no hace referencia a la base 10 ni a las potencias de dicha base.

"Cuando se habla de unidades, decenas y centenas los niños generalmente empiezan por 10 unidades que son iguales a una decena... cuando pasan a unir 10 decenas se forma una centena y ellos van ubicando en la tabla de las casillas unidades, decenas y centenas".

También hace referencia al desagrupamiento, hablando para ello de la "reversa".

"... Se cambia una decena en 10 unidades..."

Para *la explicación del uso del cero* como parte integrante de un número, manifiesta su conocimiento acerca del valor del cero cuando inicia una cifra como diferente al valor del cero, cuando es el valor de unidades intermedias de un número dado.

"E: En 004 ¿cuánto vale el 0?

L: El cero a la izquierda no vale nada.

E: ¿Y en 7004?

L: Ahí sí vale el cero, porque no está a la izquierda de ninguna cantidad sino en medio. Entonces ahí el cero tiene un valor".

En relación con las explicaciones sobre el algoritmo de la suma, Lucy, conociendo la teoría del agrupamiento en lo relativo a los valores que toman las unidades de orden superior, la utiliza para saber cómo se conforma una decena, pero su razonamiento conceptual incluye cuestiones de tipo mecánico, como el uso de las "casillas", para indicar la posición de los numerales que conforman el número que resulta de la suma:

"... Le diría que 9 + 1= 10, y que 10 unidades= 1 decena, y lo colocaría dentro de la casilla... Para esta explicación utilizaría el ábaco para cambiar las 10 unidades por una decena, y así sucesivamente..."

En las explicaciones sobre la resta, Lucy manifiesta un claro conocimiento de los desagrupamientos entre las unidades (sucesivas) de orden superior a orden inferior (en grupos de 10) y lo pone en juego cuando habla de prestar.

"Conseguimos prestado de alguien, las decenas no tienen, cero, las centenas tampoco entonces el 7 mil presta una unidad, nos presta 10 centenas. Ésta presta una a las decenas y quedan 9 centenas y las 10 decenas prestan una decena a las unidades y quedan 9 decenas entonces la decena que son 10 unidades más 4 son 14".

En la explicación sobre la multiplicación y la razón por la cual se "corre" una cifra a la izquierda, Lucy manifiesta claramente una posición ambigua frente al uso de lo conceptual en relación con el producto entre unidades de diferente orden, porque aunque sabe por qué se corre una cifra a la izquierda, sin embargo lo justifica desde su aprendizaje.

"... Generalmente al niño se le dice que debe correr un lugar hacia la izquierda... es lo que uno aprendió y todavía se maneja... porque éste es el resultado de las decenas. Se coloca iniciando debajo de las decenas... es como multiplicar por 50 unidades y no es necesario colocar el 0".

(Este comentario hace relación a los números 36 200 en la multiplicación, colocamos el cero en negrilla para indicar el cero al cual ella se refiere como no necesario).

		7	2	4
	x		5	3
	2	1	7	2
36	2	0	**0**	

En cuanto a la división, Lucy muestra el escaso uso de los conceptos y se traslada a un razonamiento de tipo procedimental, en donde se le pierde el valor de las unidades de orden superior y las conversiones entre ellas.

> L: "... Si se toman 23 como unidades, también se toman 70 como unidades".
>
> E: "O sea que 70 centenas ¿dejan de ser centenas para convertirse en 70 unidades?"
>
> L: "Pues sí... en esto no había pensado, no me había hecho esa pregunta, no sabría decir... en este momento sí se convierten en unidades simples para realizar la división, porque es una división más grande..."

Con relación al cero del cociente muestra su conocimiento de que ese debe ser una decena:

> "Tiene que ser otro valor, o sea pienso que depende del resultado, debe ser como una decena".

Al terminar la división dice:

> "¡El cero aquí es de decenas!"

Como una conclusión parcial de este apartado podríamos decir que los profesores del estudio manifiestan un tipo de razonamiento muy proclive a la ausencia del conocimiento de los conceptos de valor posicional, teoría de agrupamiento y sistema de numeración, a la vez que las explicaciones sobre los algoritmos demuestran el desconocimiento de "por qué funcionan". Parece ser que, algunos con mayor éxito que otros, usan los conceptos mencionados sin que parezca explícito su reconocimiento de la existencia de ellos como conceptos matemáticos importantes.

CONCLUSIONES

Sin pretender generalizar respecto a la población de profesores de la básica primaria, este trabajo sí permite conocer algunas tendencias y características del conocimiento de contenido pedagógico que los mismos poseen, conocimiento que puede ser usado para preveer elementos básicos a tener en cuenta a la hora de diseñar los programas de formación permanente. De cualquier forma, ampliar nuestro conocimiento sobre las características de las concepciones que el grupo de profesores posee sobre los temas abordados

constituye, para nosotros, como formadores de profesores, un objetivo importante que motiva el desarrollo de este tipo de investigaciones.

En lo relativo al tipo de problemas planteados por los profesores, es notoria la mayor capacidad para elaborarlos (en relación con la variedad de los contenidos de los mismos) de tipo aditivo y multiplicativo. Siendo también muy relevante que la inmensa mayoría de los profesores planteó problemas con enunciados coherentes, lo que desde nuestro punto de vista constituye una fortaleza de ellos ya que nos muestra que su concepción de problema se relaciona con situaciones que representan "hechos reales" y no simplemente con tipos de ejercicios sin sentido ni significado.

Cabe anotar también, que la variedad de problemas que los profesores pueden resolver no se corresponde con su capacidad para dar razones referentes a las diferencias presentes en cada uno de ellos. Esto nos permite asegurar que es necesario incluir en un programa de formación este tipo de conocimiento, acerca de las diferentes clasificaciones y análisis de los problemas, puesto que creemos que eleva la capacidad de razonamiento pedagógico y didáctico del profesor, a la vez que le permite entender los elementos conceptuales involucrados en el pensamiento numérico.

Tal como se muestra en el análisis realizado, los profesores plantean problemas en los que la incógnita varía de posición, y algunos de ellos muestran un conocimiento que relaciona la adición con la sustracción y la multiplicación con la división. También en esto existe una baja compresión de lo que constituye la red conceptual que abarca lo que se denomina estructura aditiva y estructura multiplicativa, aunque algunos profesores parecen identificar las operaciones suma y resta (multiplicación y división), como componentes de una misma estructura cognitiva, siendo probable que las creencias arraigadas acerca de la relación inversa entre las operaciones aritméticas, producto de la enseñanza actual de las matemáticas formales, no les posibilite el análisis y el uso sobre las relaciones cognitivas de las estructuras mencionadas.

En la parte relativa al conocimiento de los algoritmos, también es muy notoria la baja comprensión conceptual explicitada por los profesores del estudio. Aunque se manejen los procesos involucrados, las explicaciones acerca de los conocimientos matemáticos involucrados en ellos es casi nula. Por esto concluimos que es un tipo de conocimiento que debe estar en un programa de formación, porque al ser temas que involucran el trabajo de los niños de primaria durante casi toda la escolaridad, es necesario que el profesor conozca los conceptos involucrados –valor posicional y agrupamiento– y sus relaciones con lo que constituye el pensamiento aditivo y multiplicativo, en

relación con que nuestro sistema de numeración involucra razonamientos de tipo aditivo (al descomponer el valor del número en unidades simples o de un mismo orden) y razonamientos de tipo multiplicativo (cuando con unidades de un tipo hace unidades de un orden siguiente o para desagrupar). De la misma manera, al explicar la escritura polinómica se involucran tanto razonamientos de tipo aditivo como multiplicativo, al tener en cuenta la base y sus potencias para describir los órdenes y las relaciones entre ellos.

Con relación al primer objetivo, "Caracterizar las concepciones del grupo de profesores que intervienen en este estudio, acerca de las operaciones aritméticas: suma, resta, multiplicación y división", hemos encontrado que las ideas subyacentes a las explicaciones dadas corresponden a lo que denominamos razonamiento de tipo estático (relaciones entre elementos simultáneos de la realidad) en la medida en que para su conceptualización utilizan el modelo de conjuntos disyuntos. A continuacion se hace una breve descripción de estos conceptos para cada una de las operaciones:

La suma es *unir* y la resta *quitar,* correspondiente con un modelo de representación que utiliza un conjunto total compuesto de dos subconjuntos disyuntos. Las estrategias de solución están basadas en el conteo que puede corresponder a las operaciones de unión (diferencia) de conjuntos.

La multiplicación se corresponde con la idea *de suma repetida* de sumandos iguales y la división con la idea de *reparto* de una cantidad que representa un todo que será dividido en partes iguales. Las estrategias de solución se sustentan en esquemas de conteo actuando sobre colecciones totales o sobre algunas de sus partes. Por ejemplo, se toma cada conjunto como un todo a contar, o como un todo previamente contado, información que al reunirlos puede o no tenerse en cuenta dado que, muchas veces, proceden por conteo a partir de uno, para desde allí realizar las uniones de conjuntos y hacer la suma total. Lo mismo sucede con la división, se usa la estrategia de resta, de grupos de un mismo número de elementos, y luego por conteo (quitar) se soluciona el problema.

Unido a estas concepciones encontramos que las estrategias de enseñanza usadas corresponden a las secuencias en las que las operaciones se conciben, para aprender a restar es necesario saber sumar; para presentar el producto como sumas reiteradas es indispensable tener un buen manejo de la suma; para aprender a dividir es necesario saber restar. En procesos más avanzados se presenta la multiplicación usando las tablas y los algoritmos de división que incluyen las operaciones suma, resta y multiplicación. Esta forma de actuación didáctica es uno de los aspectos que se espera cuestionar en un programa de formación que pretenda que los maestos construyan referentes

teóricos (matemáticos y didácticos) explícitos, que orienten su labor profesional.

En cuanto al objetivo 2, "Describir los tipos de argumentos que utilizan para justificar los procedimientos algorítmicos involucrados en las cuatro operaciones aritméticas", podemos decir que la mayoría de los profesores presenta un desconocimiento de los conceptos de valor posicional y agrupamiento, lo que hace que sus explicaciones se basen en razonamientos de tipo sintáctico, convierten en un buen mecanismo para "enseñar" los algoritmos de las cuatro operaciones, pero a su vez, desde nuestro punto de vista, son un obstáculo para que ellos asuman nuevas perspectivas de enseñanza en la cual la construcción de lo conceptual y lo significativo se conviertan, a nivel de primaria en los propósitos de la enseñanza de las matemáticas escolares.

El objetivo 3, "Analizar las relaciones entre la compresión de diferentes aspectos relativos a las nociones aritméticas en cuestión y el uso de los modos de representación que pueden utilizar", como ya lo dijimos en el apartado correspondiente al objetivo 1, las representaciones utilizadas son muy escasas y esto es, desde lo que concebimos como el conocimiento de contenido pedagógico, uno de los conocimientos que los profesores deben poseer, puesto que para elaborar secuencias de enseñanza que pretendan un aprendizaje significativo, los diferentes modos de representar conceptos se constituyen en herramientas útiles y necesarias para dotar de significado a los conceptos estudiados. En particular, para los conceptos abordados en este trabajo se requiere que el profesor comprenda las diferentes clasificaciones de los problemas aritméticos elementales, en la medida en que le permite abordar diferentes situaciones que, al ser analizadas desde el contexto, dan sentido a los números que aparecen en ellas. En cuanto a los algoritmos podemos decir que el uso de otros modos de conceptualización le permitirá usar, por ejemplo, instrumentos didácticos como el ábaco o las regletas que posibilitan la construcción de los diferentes sistemas de numeración, en particular el sistema de numeración decimal.

BIBLIOGRAFÍA

BLANCO, L. (1996). "Aprender a enseñar matemáticas: Tipos de Conocimiento". En J. GIMÉNEZ, S. LLINARES y V. SÁNCHEZ (Eds.) *El Proceso de llegar a ser un profesor de Primaria. Cuestiones desde la educación matemática.* Colección Mathema. Comares. Granada.

CARPENTER T, FENNEMA E. , PETERSON P y CAREY D. (1988). "Theachers pedagogical content knowlodge of estudents problem solving in elementary arithmetic". in: Journal for Research *Mathematics Education.*

CASTRO E. , RICO, L. y CASTRO, E. (1995). *Estructuras aritméticas elementales y su modelización.* una empresa docente - Grupo Editorial Iberoamérica. Bogotá.

DICKSON, L. BROWN, M y GIBSON, O.(1991) *El aprendizaje de las matemáticas.* Labor. M.E.C. Madrid.

GREER, B. "Mulltiplication and division as models of situations". En Grouws, D. (1992) (Eds.) *Handbook of research on mathematics teaching and learning.* Macmillan.

LLINARES, S. y SÁNCHEZ, V. (Eds.) *Teoría y práctica en educación matemática.* Alfar. Madrid.

LLINARES, S. (1991). "La naturaleza de la comprensión de las nociones matemáticas. Variable en la formación de profesores de matemáticas". En C. Marcelo y otros (Eds). *El estudio de casos en la formación del profesorado y la investigación didáctica.* Servicio de Publicaciones de la Universidad de Sevilla.

LLINARES, S. (1993). "Aprender a enseñar matemáticas. Conocimiento de contenido pedagógico y entornos de aprendizaje". En: L. Montero y J.M.Vez (eds.) *Las didácticas específicas en la formación del profesorado.* Tórculo Ediciones. Santiago.

LLINARES, S. , SÁNCHEZ, V. y GARCÍA, M. (1994). "Conocimiento de contenido pedagógico del profesor. Tareas y modos de representación para las fracciones". *Revista de Educación* No. 304. Centro de Publicaciones del Ministerio de Educación y Ciencia. Madrid.

LLINARES, S. "Conocimiento profesional del profesor de matemáticas: conocimiento, creencias y contexto en relación a la noción de función". Mimeo. Conferencia presentada en el IV Encontro de Investigaçao em Educaçao Matemática. Luso, Portugal, 27-29 de abril de 1995.

LLINARES, S. (1996). "Contextos y aprender a enseñar matemáticas: El caso de los estudiantes para profesores de primaria". En: J. GIMÉNEZ, S. LLINARES y V. SÁNCHEZ (Eds.) *El Proceso de llegar a ser un profesor de Primaria. Cuestiones desde la educación matemática.* Colección Mathema. Comares. Granada.

LLINARES, S y SÁNCHEZ, V. (1996). "Comprensión de las nociones matemáticas y modos de representación. El caso de los números racionales en estudiantes para profesores de primaria". En: J. GIMÉNEZ, S. LLINARES y V. SÁNCHEZ (Eds.) *El*

Proceso de llegar a ser un profesor de Primaria. Cuestiones desde la educación matemática. Colección Mathema. Comares. Granada.

National Council of Teachers of Mathematics (1989). Profesionals standards for teaching mathematics. NCTM. Reston.

Puig. L. y Cerdán, F. (1995). *Problemas aritméticos escolares.* Editorial Síntesis. Madrid.

Vergnaud, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad.* México. Trillas.