CARACTERIZACIÓN DE LOS REQUERIMIENTOS DIDÁCTICOS PARA EL DESARROLLO DE COMPETENCIAS ARGUMENTATIVAS EN MATEMÁTICAS EN EL AULA*

Olga Lucía León, área Matemáticas
Dora Inés Calderón área Lingüística[1]

Un problema... Un sentido para el proyecto

La investigación consideró fundamentalmente la existencia del problema que hemos dado en denominar "un estado generalizado de incompetencia comunicativa y matemática", tanto en estudiantes como en profesores. Problema que se manifiesta, sobre todo, cuando unos y otros se enfrentan a situaciones que les exigen interpretar y producir: discursos argumentativos y soluciones para problemas matemáticos y validaciones de las mismas; actividades éstas que implican el desarrollo de formas de razonamiento más elaboradas que las que realizan cotidianamente en contextos no escolares.

Frente a este problema, el grupo de investigación[2] consideró que desde la didáctica y la investigación educativa, era necesario generar una reflexión sobre las condiciones y exigencias teóricas y metodológicas que impone el propósito didáctico de desarrollar, en estudiantes de niveles iniciales de universidad, competencias argumentativas en matemáticas. Así, se propuso realizar un proceso de indagación, identificación y caracterización de los elementos que intervienen y que se ponen en juego en la construcción de situaciones didácticas particulares. Para ello se realizó un proceso de investigación-acción

* Esta investigación participó en la convocatoria focalizada de 1999. El informe final se encuentra en el Centro de Documentación del IDEP. Este proyecto también contó con el auspicio financiero de Colciencias-BID, a través de la financiación del proyecto "El papel de la argumentación en las situaciones de validación en el aula".

[1] Las investigadoras son estudiantes del Doctorado en Educación de la Universidad del Valle, en las áreas de Matemáticas y Lenguaje, respectivamente.

[2] Para la presente investigación, el grupo contó, durante los cinco primeros meses, con la colaboración de un coinvestigador en el campo de las matemáticas, el profesor Santiago González de la Universidad del Tolima y estudiante del Doctorado en Educación, en el área de Matemáticas.

que estructuró un constructo teórico elaborado con base en dos acciones fundamentales: las relaciones establecidas en las reflexiones y discusiones teóricas, y los hallazgos obtenidos durante el diseño y aplicación de una propuesta didáctica que surgió como respuesta a la identificación de un estado inicial de desarrollo de competencia comunicativa en matemáticas[3], del grupo de estudiantes observado.

Como resultado de la investigación se pretendió responder a preguntas particulares como:

1. ¿De qué naturaleza es la relación que se da entre los componentes epistemológico, comunicativo, cognitivo y sociocultural en la situación didáctica?

2. ¿Qué competencias matemáticas desarrolla en los estudiantes la práctica de la interacción argumentativa en situaciones de validación y de demostración de lo geométrico en el aula?

3. ¿Cuáles son las condiciones didácticas que garantizan el desarrollo de competencias argumentativas en geometría, en estudiantes de primeros semestres de licenciatura en matemáticas?

El macroproblema consideró que el desarrollo de competencias constituye uno de los aspectos fundamentales de la formación escolar. Además, es evidente que, si bien se ha identificado la necesidad de desarrollar competencias en los estudiantes, también es un hecho que aún no se consolida una noción específica de competencia matemática y tampoco se ha teorizado sobre las implicaciones didácticas para el desarrollo de competencias en los estudiantes.

¿Qué retos se planteó la investigación?

El propósito general de la investigación se planteó para establecer referentes teóricos que fundamenten el diseño de propuestas didácticas para el desarrollo de competencia argumentativa en geometría, en estudiantes de primer semestre de licenciatura en matemáticas. De ahí que los resultados de la investigación sean más de tipo teórico y se conviertan en "un referente didáctico" para el docente de matemáticas y en "un referente teórico" que vislumbra un desarrollo del lenguaje y de la argumentación, para el docente de lenguaje. Además, como resultado teórico, aporta a la teorización del saber didáctico de la matemática y del lenguaje, en tanto propone relaciones entre los dos campos

[3] Resultado del proyecto "El papel de la argumentación en las situaciones de validación del conocimiento matemático en el aula". Convenio Colciencias-Universidad del Valle. Realizado por el grupo Investigador. Vigencia 1999-2000.

disciplinares, a propósito de un problema concreto: el desarrollo de competencia argumentativa en geometría.

Aspectos teóricos de base

Dos aspectos se constituyen en los tópicos teóricos que fundamentan la investigación: el primero se refiere a la caracterización y operacionalización de los denominados requerimientos didácticos, tanto desde el punto de vista de su función como referente para el diseño didáctico, como en su doble papel en el diseño investigativo: como orientador para la comprensión de los procesos didácticos y como producto teórico que explica tales procesos. El segundo, hace alusión a la caracterización de las competencias argumentativas en matemáticas, particularmente en geometría. A continuación se presenta la elaboración teórica realizada como punto de partida de la investigación.

MARCO TEÓRICO

¿Qué es un requerimiento didáctico? ¿Cuál es su función?

El punto de partida del presente estudio fue la consideración de la existencia de elementos estructurales que constituyen el marco referencial del saber propio de la didáctica, o el *referente orientador de tipo epistemológico,* para el diseño didáctico, en sus distintos componentes. Un elemento del referente orientador se constituye en requerimiento didáctico si cumple las siguientes condiciones: I) es un factor de obligada reflexión para el docente y para el investigador educativo, II) su existencia, como sus relaciones, son inherentes a las relaciones didácticas y dan razón del contexto escolar. III) En contextos particulares del proceso enseñanza-aprendizaje necesariamente adquiere una especificidad que se explicita en el diseño didáctico y que, a la vez, lo sustenta, para el desarrollo de los propósitos de aprendizaje.

En términos generales, existen requerimientos básicos en los campos específicos del saber escolar. Tales requerimientos adquieren matices particulares en concordancia con las condiciones impuestas por un tipo de saber, por una determinada población escolar y por unos propósitos curriculares puntuales.

Los requerimientos constituyen la base epistemológica del saber propio de la didáctica. En principio, la identificación de un requerimiento es efecto de

los llamados que hace la reflexión didáctica: ¿cuáles son las condiciones de interacción en el aula?, ¿cuál es el objeto curricular a construir?, ¿cuáles son los procesos cognitivos involucrados en el aprendizaje de tal objeto? y, como efecto del proceso anterior, ¿qué normas y reglas se construyen para la interacción entre miembros de un grupo social, en función de la elaboración y aceptación de un conocimiento? La presente investigación se preguntó, particularmente, por los requerimientos específicos para el desarrollo de competencias argumentativas en geometría, en los estudiantes de primeros semestres de licenciatura en matemáticas.

Sobre la competencia argumentativa en geometría

Como resultado del proceso de teorización y de observación y análisis de los procesos argumentativos de los estudiantes, y de las reflexiones desarrolladas en la investigación, se consolidó un referente que teoriza sobre la competencia argumentativa en matemáticas y particularmente en geometría. De ahí que se precisen, en primera instancia, aspectos que determinan la competencia argumentativa en geometría, y posteriormente se generalicen factores asociados a la competencia argumentativa en matemáticas.

1. Como competencias geométricas básicas, que dan razón de un hacer geométrico, se identificaron:

- La construcción de imágenes mentales de configuraciones bidimensionales y tridimensionales.
- La anticipación a movimientos.
- La producción de razonamientos.

Las anteriores competencias se convierten en base de un saber hacer geométrico que prepara el terreno para el desarrollo de una competencia argumentativa en geometría, por cuanto propician:

- La toma de posición del sujeto frente al conocimiento, como efecto de la elaboración de un sentido geométrico; la asignación de un rol teórico a tal sentido (axioma, teorema, definición); la identificación de un status operatorio dentro de un proceso de razonamiento (hipótesis, premisas, conclusión, apoyos, etc.) y la discriminación de las reglas de aceptación de los procesos puestos en juego en la elaboración de sentido.
- La aprehensión operativa de las figuras.
- La producción de razonamientos inmersos en discursos naturales.
- La producción de razonamientos en discursos teóricos.

La anterior particularización de las competencias argumentativas en geometría permite la identificación de una estructura de competencias *argumentativas en matemáticas constituida por:*

1. El desarrollo de tramas conceptuales de tipo matemático. Este saber garantiza el dominio de referentes y de procesos propios del campo matemático, que permitan la toma de posición epistémica y epistemológica del sujeto frente al objeto de la argumentación; o la asignación de sentidos al conocimiento matemático. Es decir, el sujeto puede tomar, frente al saber matemático, una posición epistémica semántica (si tan sólo asigna valores de confiabilidad a un enunciado desde su experiencia empírica); una posición epistémica teórica (si asigna valores de confiabilidad desde una teoría que proporciona criterios de validación); o una postura epistémica lógica (en tanto conoce y desarrolla procesos operatorios regulados por criterios de consistencia propios de una teoría); Duval 1999. La presencia de las acciones anteriores son el efecto del desarrollo de una competencia epistemológica en matemáticas.

2. El desarrollo de estrategias de interpretación de textos matemáticos, que garantiza formas de operar con el conocimiento y el posicionamiento del sujeto frente al conocimiento. Este dominio le permite al individuo la discriminación de argumentos matemáticos y la realización de procesos de validación para la legitimación de saberes y de procesos; para el establecimiento de verdades o para la determinación de consistencias. La manifestación de estos aspectos es el efecto del desarrollo de las competencias cognitiva y discursiva.

3. El desarrollo de estructuras argumentativas bajo los criterios de verdad y consistencia, que garantizan la producción e interpretación de formas de organización discursiva y textual bajo la estructura justificativa, en los contextos oral y escrito. Este dominio permite al sujeto la toma de posición epistémica y social frente al saber matemático. Es decir que, además de una toma de posición frente al conocimiento, el sujeto habrá de asumir juegos de roles argumentativos y actuar en concordancia con ellos y desarrollar juegos de lenguaje adecuados para la argumentación. Los anteriores elementos conforman la competencia discursiva en matemáticas.

4. El desarrollo de estrategias para la contextualización y el uso de los procesos argumentativos, que garantizan un uso adecuado y pertinente de la argumentación como forma de interacción social. Este dominio exige que el sujeto desarrolle normas de interacción argumentativa, formas de evaluación de efectividad argumentativa y que ponga en escena juegos de lenguaje bajo el criterio de eficacia argumentativa. Estos aspectos constituyen la competencia estratégica.

A partir de la anterior conceptualización sobre la competencia argumentativa en matemáticas, se considerarón, *como indicadores gruesos de desarrollo de esta competencia*, los siguientes grupos de acciones fundamentales:

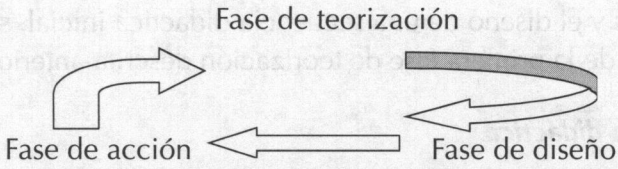
- La identificación, interpretación y producción de sentidos en textos matemáticos. Este grupo pone en juego prioritariamente los aspectos uno, dos y tres enumerados como subcompetencias de la competencia argumentativa en matemáticas.
- La interpretación y producción de tramas argumentativas en matemáticas. Este grupo involucra las cuatro subcompetencias enumeradas y exige un desarrollo de encadenamientos desde la lógica matemática.

Sobre las acciones metodológicas de la investigación

Se realizó un proceso de *investigación-acción* que produjo como resultado la estructuración de un constructo teórico elaborado con base en dos acciones fundamentales: a) las relaciones establecidas en las reflexiones y discusiones teóricas, en el interior del grupo de investigación y, b) los hallazgos obtenidos durante el diseño y aplicación de una propuesta didáctica que surgió como respuesta a la identificación de un estado inicial de desarrollo de competencia comunicativa en matemáticas[4], del grupo de estudiantes observado.

Se eligió, dentro de los métodos de investigación cualitativa, la investigación-acción, por considerarla como una alternativa metodológica que permite la producción de resultados como efecto de la interacción continua entre procesos de reflexión, observación, diseño, puesta en escena, análisis y teorización de los eventos educativos. Con base en las anteriores consideraciones se llevó a cabo una acción investigativa que involucró un proceso de dos ciclos y tres momentos o fases fundamentales: 1) La elaboración de un marco referencial primario sobre los requerimientos, o primera fase de teorización. Este referente permitió el diseño didáctico general y el diseño de instrumentos de observación. 2) La puesta en juego de un diseño didáctico que propendió por el desarrollo de competencias argumentativas en geometría y, paulatinamente, la observación de los requerimientos. Este momento permitió los procesos de validación, regulación y evaluación del diseño e involucró las fases de diseño y la de acción; es decir, se convirtió en el espacio "aclarador" de la naturaleza y función de los requerimientos. 3) La reestructuración de los requerimientos, como efecto de los dos momentos anteriores, o vuelta a la fase de teorización. Así, se generó un ciclo investigativo del tipo:

[4] Resultado del proyecto "El papel de la argumentación en las situaciones de validación del conocimiento matemático en el aula".



Los dos ciclos, que incluyeron las tres fases, tuvieron como finalidad la identificación de requerimientos y la estructuración y relación de tales requerimientos. Paralelamente se diseñó un ciclo adyacente o ciclo de regulación articulado con los procesos de socialización del proyecto. Este ciclo se desarrolló atendiendo a las necesidades de validación de conjeturas, estructuración de estrategias y discusión de posturas teóricas. En este último ciclo participaron, además de los investigadores y los estudiantes de la licenciatura, profesores, investigadores y estudiantes de las áreas de lenguaje y matemáticas de instituciones como: Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Fundación Universitaria Monserrate, Universidad Nacional de Colombia, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Tunja, Universidad de Pamplona, Universidad del Valle, Universidad del Tolima y Asociación Anillo de Matemáticas.

Sobre las categorías teóricas generales de la investigación

El hecho de tratarse de una investigación-acción en el aula implicó, necesariamente, considerar unas categorías de partida para el estudio, como las categorías conceptuales básicas que dieran razón de la estructuración de requerimientos y unas unidades de datos que permitieron observar la relación entre requerimientos y diseño didáctico, y entre requerimientos, diseño didáctico y desarrollo de competencias argumentativas en geometría. La siguiente es la descripción de las dos categorías consideradas inicialmente.

Requerimiento didáctico	Diseño didáctico
Referente teórico que da razón de un componente de la estructura de las relaciones didácticas y que brinda elementos para la estructuración de relaciones entre todos los componentes,a propósito de las relaciones didácticas.	Estructura de una secuencia didáctica establecida a través de un programa particular. Explicita opciones epistemológicas, comunicativas y cognitivas, en el contexto de las relaciones didácticas.

Estas dos categorías se articularon para caracterizar una acción en el aula orientada al desarrollo de competencias argumentativas. La elaboración de

estas categorías y el diseño de una secuencia didáctica inicial, se constituyó en el resultado de la primera fase de teorización descrita anteriormente.

Sobre la acción didáctica

En este apartado se presenta el efecto de la operacionalización de cada una de las categorías de partida en el diseño didáctico y en la acción en el aula.

Efectos de la consideración de la categoría requerimiento en la acción didáctica

Se identificaron, inicialmente, tres requerimientos didácticos básicos que se corresponden con tres aspectos involucrados en el contexto de las relaciones didácticas y que estructuran, de manera particular, el saber didáctico, a saber: requerimiento epistemológico, requerimiento cognitivo y requerimiento comunicativo.

El requerimiento epistemológico

Hay tres acciones didácticas que comprometen la presencia de este requerimiento en el desarrollo de competencias matemáticas, y específicamente en el de competencias argumentativas que involucren tales competencias matemáticas. En primer lugar, la pregunta por el sentido a elaborar para un conocimiento matemático es de carácter epistemológico, que busca obtener, por lo menos, un referente que oriente la acción vigilante del profesor en la articulación de campos conceptuales manifiestos en la diversidad de elaboraciones de sentido que se puedan realizar en el aula. En segundo lugar, la pregunta por lo que regula y justifica la aceptación de un enunciado como definición o como teorema y de un proceso como una descripción, una explicación o una argumentación que prueba o una argumentación que demuestra, permitirá regular y precisar en la elaboración colectiva de conocimiento, la calidad del conocimiento elaborado y los tipos de conexión que evidencian las estructuras consolidadas. Y en tercer lugar, la pregunta por los aspectos que determinan la importancia de un argumento particular en un contexto de elaboración de conocimiento específico, es una pregunta que exige del profesor una conciencia de la dependencia de la diversidad de tramas argumentativas, según juego de roles entre argumentos.

En el marco de las relaciones didácticas, por su naturaleza, el requerimiento epistemológico establece con mayor fuerza la relación contenido-profesor-contenido-estudiantes, dado que de esta relación surgen las formas de organización del contenido y el diseño de tareas y de formas de evaluación.

El requerimiento cognitivo

Es el componente didáctico que construye teóricamente un sujeto del aprendizaje. El desarrollo de las competencias geométricas es una exigencia didáctica, y en consecuencia debe ser un propósito fundamental para la enseñanza de la geometría. Esta exigencia didáctica obliga a considerar requerimientos fundamentales para el profesor, como la comprensión de los procesos cognitivos que se deben desarrollar y por consiguiente el diseño de situaciones de aprendizaje que diferencien y coordinen las diferentes clases de procesos de visualización con los razonamientos requeridos.

Según Duval (1998), los procesos cognitivos necesarios para el desarrollo de esas competencias son de tres tipos: de visualización, de construcción y de razonamiento. Según el autor, estos procesos cumplen funciones epistemológicas específicas. Así, los procesos de *visualización,* que consisten en la identificación de gestales y configuraciones en dos y tres dimensiones, están relacionados con los espacios de representación usados en las ilustraciones de los enunciados, en las exploraciones heurísticas de una situación compleja o en las verificaciones subjetivas. Los procesos de *construcción,* mediados por herramientas (regla, compás, transportador, software geométricos), permiten elaboraciones de configuraciones que pueden ser usadas como modelos en los que la acción sobre lo representativo y observable, llevan a relaciones entre los objetos matemáticos observados. Los procesos de *razonamiento,* se constituyen en procesos de "expansión discursiva" de las pruebas y de las explicaciones; es decir, son procesos de verbalización que implican la elaboración semántica y discursiva de los objetos geométricos, en estructuras generales de tema y rema (descripciones, narraciones, explicaciones, comparaciones o argumentaciones).

En el marco de las relaciones didácticas, el requerimiento cognitivo establece con mayor preeminencia la relación contenido-desarrollo de conocimiento matemático en los estudiantes, contenido-desarrollo de conocimiento didáctico en el profesor, dado que se ocupa del análisis de la comprensión del contenido y de sus factores asociados: seguimiento de procesos, identificación de obstáculos, diseño de criterios para la evaluación del desarrollo de competencias, entre otros.

El requerimiento comunicativo

Es el componente didáctico que estructura la interacción discursiva propuesta para el contexto del aula, en una situación particular de aprendizaje, a través del género discursivo pedagógico. De ahí que este requerimiento involucre: I) La dimensión discursiva del campo del saber puesto en juego (por ejemplo,

de la geometría euclidiana), sus formas particulares de significar y de comunicar. II) La dimensión discursiva del aula: las posiciones discursivas de profesor y de estudiante y sus relaciones de fuerza (que se explicitan mediante el discurso instruccional y el regulativo), que generan formas especiales y prototípicas de comunicar, como la exposición y la argumentación, entre otras.

En este sentido, el requerimiento comunicativo da razón del cómo de la interacción entre estudiantes-contenido y estudiantes-profesor y propicia el análisis de la interacción didáctica: su efectividad e impacto en el desarrollo de los procesos de elaboración de conocimientos y en el logro de propósitos de aprendizaje diseñados curricularmente.

Efectos de la consideración de la categoría diseño didáctico en la acción didáctica

El trabajo en el aula comprometió dos momentos de la fase: la de acción 1 o de diseño, y la de acción 2 o de implementación para la validación del diseño. Este proceso se realizó bajo una estructuración didáctica paulatina: elaboración de un diseño didáctico inicial fundamentado en los focos identificados teóricamente, implementación y observación del diseño y reestructuración y aplicación en la clase. El inicio del desarrollo de la fase de acción tuvo como presupuesto básico que el diseño didáctico se orientaba a la construcción de una situación argumentativa en matemáticas que propendiera por la realización efectiva de las relaciones iniciales determinadas en los requerimientos identificados. Como efecto de todo el proceso anterior, se consolidó un diseño basado en los siguientes criterios:

a. *Identificación del contexto escolar:* licenciatura en matemáticas de una institución pública. Se planteó una secuencia de 16 sesiones de clase de dos horas cada una y se proyectó un total de tres tareas.

b. *Identificación del objeto curricular:* la relación pitagórica y su contexto de áreas.

c. *Identificación de propósitos de aprendizaje para la asignatura:* I) elaborar sentido para la relación pitagórica desde el contexto euclidiano; II) elaborar tramas argumentativas para la relación pitagórica en el contexto euclidiano; III) desarrollar procesos inferenciales en el campo geométrico; IV) aproximar la comprensión de la relación pitagórica en el contexto poscartesiano.

d. *Identificación del impacto de los requerimientos en el diseño didáctico:* los requerimientos impactaron el diseño didáctico desde las siguientes relaciones: entre los requerimientos epistemológico-cognitivo, la relación que establece la jerarquía de los contenidos y entre los requerimientos

epistemológico-comunicativo-socio-cultural del aula, la relación que establece la jerarquía de las acciones y reglas de acción que orientan las tareas. Estas relaciones se constituyeron en el soporte de la estructura del diseño didáctico, considerándose en cada una los siguientes aspectos.

Desde lo epistemológico

Se optó por la relación pitagórica como una relación que expresa el sentido de áreas. Se optó también por la trama argumentativa fundamentada en la relación ángulo recto-teoría de las paralelas-igualdad de figuras por coincidencia y por cantidad de magnitud. Tomar esta opción epistemológica implicó que en la actividad de aula se comprometiera el uso de figuras y el trabajo sobre el ángulo recto y las relaciones de paralelismo.

Desde lo cognitivo

Se privilegió como proceso inferencial, al abductivo; como registro semiótico, al figural; como campo semántico particular, al geométrico euclidiano; como proceso de interacción social, al argumentativo; y como proceso didáctico, a la resolución de problemas que pide relaciones.

Desde lo comunicativo

Se considera la interacción argumentativa como el espacio comunicativo que exige: I) el reconocimiento de un tema polémico, en tanto que en el aula se están elaborando múltiples sentidos para la relación pitagórica; II) el reconocimiento de una situación argumentativa, en tanto está la necesidad de justificar el sentido elaborado ante un auditorio (el profesor) y los compañeros; III) la asunción de una actitud argumentativa que implica: estar dispuesto a estructurar posiciones individuales en torno al sentido, realizar tramas argumentativas que manifiesten la posición individual, prever a un auditorio y producir un discurso argumentativo a propósito de convencer o persuadir a ese auditorio, prever y realizar una actividad de valoración de argumentos contrarios y estar dispuesto a consensuar.

Desde la organización las interacciones o el aspecto sociocultural del aula

La estructura de relaciones profesor-contenido-estudiantes se reconoció como la estructura que da autonomía a los diseños de la actividad en el aula, por cuanto el tejido de relaciones entre los tres elementos está determinado por las condiciones de los contextos particulares del aula. Así, la relación entre estudiante-estudiante y profesor-estudiante, estuvo mediada por la estructura de la tarea: solución individual, solución de parejas, solución colectiva e institucionalización. En consecuencia, se determinaron los siguientes aspectos:

a. *Un juego de roles:* para el profesor y para los estudiantes, en relación con el contenido. Entre el estudiante y el contenido se consideró que el estudiante está en situación de elaboración de sentido con respecto al contenido, de ahí que no esté restringido a una única respuesta. El profesor también está en situación de elaboración de sentido, pero más desde el punto de vista didáctico. Así, la elaboración de sentido entre estudiantes y profesor, con respecto al contenido es de tipo colectivo.

b. *Un contrato didáctico:* fundamentado en la conciencia de producción colectiva de conocimiento, hecho que implica la interacción con conocimiento ya elaborado y una actitud heurística colectiva con los procesos de solución de problemas.

Sobre la observación de los procesos

La acción didáctica que hace parte de la Fase de Acción se observó y estudió mediante la unidad de análisis *Tarea*, teniendo en cuenta que es el objeto didáctico que compromete todas las opciones y decisiones del diseño y que potencia acciones en los estudiantes para el desarrollo de competencias argumentativas en geometría. Por esta razón, las unidades de análisis diseñadas para el estudio de la tarea pretendieron atender a un análisis de procesos de interacción, que dieran cuenta de los procesos cognitivos y comunicativos de los estudiantes

El proceso investigativo indagó, durante el desarrollo de la acción didáctica, las relaciones que se establecieron entre estas categorías, la forma en que se impactan mutuamente y cómo se convierten en un referente para la comprensión del desarrollo de competencias en los estudiantes. Este estudio se llevó a cabo empleando dos tipos de datos fundamentales: los resultados de las discusiones del grupo investigador y los registros en audio, en video y los escritos de los procesos de argumentación de soluciones a problemas geométricos, que realizaron los estudiantes durante el curso de la secuencia didáctica global. Los resultados de los análisis parciales permitieron modificaciones permanentes al diseño didáctico y la producción teórica de cada uno de los requerimientos, que es el resultado de la investigación.

ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

Como resultados finales de la investigación están: I) La secuencia didáctica definitiva; II) Un desarrollo teórico específico generado a partir del proceso

de investigación-acción, para cada uno de los tres requerimientos identificados (cognitivo, comunicativo y epistemológico) y la identificación y caracterización de un cuarto requerimiento, el sociocultural del aula; III) el análisis del desarrollo de la competencia argumentativa en los estudiantes, a partir del desarrollo de la secuencia didáctica. La caracterización de los tres requerimientos identificados inicialmente se explicita en la publicación de los resultados de este proyecto, titulada "Requerimientos didácticos y competencia argumentativa en geometría". A continuación se incluye la caracterización del cuarto requerimiento identificado, como efecto de la reflexión didáctica.

El requerimiento sociocultural del aula al servicio de la argumentación

El requerimiento sociocultural se refiere al componente didáctico de tipo axiológico que identifica y estructura principios de interacción y de regulación en el interior y entre los sistemas que constituyen el contexto de relaciones didácticas. En este sentido, es evidente que las normas y principios de interacción que operan en el interior de los sistemas involucrados en las relaciones didácticas, son inseparables de su explicación teórica y operan en la escenificación de los procesos comunicativos y cognitivos en el aula. Sin embargo, como resultado de la observación de los procesos de comunicación y de argumentación de lo matemático en el aula, se consideró fundamental explicitar y reflexionar separadamente lo concerniente al conjunto de principios y normas de interacción en cada sistema, dado que se constituye en un aspecto fundamental, tanto para la comprensión del funcionamiento de cada uno de ellos, como de la manera en que se influyen entre sí y los efectos que tienen en el diseño y desarrollo de las actividades de aula y el aprendizaje de los estudiantes.

Desde la reflexión de cada uno de los tres primeros requerimientos, se comprendió que los requerimientos socioculturales del aula impactan particularmente tres instancias de las relaciones didácticas: a las formas de acercamiento al saber puesto en juego (el saber geométrico), que genera las normas matemáticas; a las formas de uso social del saber puesto en juego, que genera las normas socio matemáticas (formas de proceder con ese saber, para ser efectivo socialmente); y al saber sobre la naturaleza y tipo de interacciones propuestas, las condiciones del grupo y su composición, la estructura de roles generada y los rituales de las relaciones entre estudiantes y entre estudiantes y profesor; saber que hace evidentes y pone en juego las normas socioculturales del aula.

La secuencia didáctica definitiva

La estructura definitiva de secuencia de actividades diseñada con base en el proceso investigativo y particularmente, atendiendo a la operacionalización de los requerimientos didácticos desarrollados, es la siguiente:

Secuencia didáctica definitiva			
Etapa / Tarea	1: Formulación de la relación	2: Consolidación de la relación	3: Validación de la relación
1	*Propósito* elaborar un sentido de áreas para la relación pitagórica.	→	→
2		*Propósito* elaborar una forma argumentativa para el sentido de áreas en la relación pitagórica.	→
3			*Propósito* generalizar el sentido de áreas para la relación pitagórica.

El desarrollo de la secuencia anterior permitió la recolección de datos para el análisis del desarrollo de competencias argumentativas en geometría, en los estudiantes observados. A continuación se presenta tal análisis, como el segundo resultado presentado en este artículo.

Los requerimientos al servicio de la comprensión del desarrollo de la competencia argumentativa en geometría

El sentido de este análisis es comprender los procesos desarrollados por los estudiantes, en el marco de la realización de una tarea que pretendió potenciar el desarrollo de competencias argumentativas en geometría y la elaboración de un sentido para la Relación Pitagórica. Para este análisis se empleó el diseño de unidades y categorías de análisis propuestas para la fase de acción.

Unidad de datos global	Unidades de análisis	Categorías de análisis
Tarea	• Etapas • Momentos • Actos	• Sentido • Trama argumentativa • Trama de conexión lógica

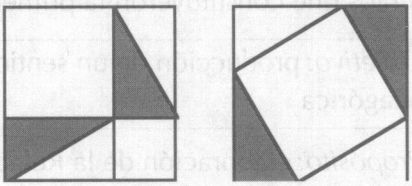
Se tomó una pareja para el seguimiento de su comportamiento de solución, en los distintos momentos que constituyeron la primera etapa; a saber:

Tarea Nº 1	*Objetivo:* producción de un sentido para la relación pitagórica
Etapa Nº 1	*Propósito:* elaboración de la Relación
Momentos	*Tipos de interacción entre los estudiantes y el profesor* *Yo-yo* trabajo individual, para la producción de una primera solución, preparación de argumentos. *Yo-tú* trabajo de pareja, para el estudio y debate de soluciones. Y para la elaboración de una solución de pareja. *Nosotros-ellos* presentación y defensa de la solución de pareja ante el grupo general. Desarrollo de un proceso argumentativo para la consolidación de soluciones. *Él-nosotros* aclaraciones explicitación de consistencias e inconsistencias en las soluciones presentadas e institucionalización de lo elaborado. Este momento está a cargo del profesor y pretende dar pautas para la legitimación de tramas conceptuales y argumentativas.
Actos	*Actos de solución:* actos orientados por la intención de solucionar el problema. *No solución* actos orientados por intenciones externas a la solución del problema. Los actos se clasificaron en argumentativos (tendientes a elaborar sentidos o apoyos para la solución), y actos no argumentativos (tendientes a realizar distintas intenciones discursivas diferentes a la de solucionar el problema.

El análisis de los momentos de interacción se realizó empleando como dato el proceso discursivo registrado en audios y en videos. El resultado es el desarrollo de la solución en los distintos momentos, y el impacto de las interacciones en la consolidación de la relación.

El problema a solucionar es:

Problema: ¿Cuál es la relación matemática que se muestra en la siguiente figura?



Trayectoria de la solución:

Los cuadrados externos son iguales

M1 — Yo-yo

E1: "Me puse a mover la otra figura y me daba la ilusión óptica de que se me había perdido".

Yo-yo

E2: "Girando los triángulos rectángulos nos da los lados del cuadrado mayor, uniendo vértices nos da el otro cuadrado".

La suma de las áreas del cuadrado A es equivalente a la suma de las áreas del cuadrado B.

M2 — Yo-tú

E1: "Si yo no sabía si... los triángulos o los cuadrados habían absorbido esa área".

Yo-tú

E2: "Hay que jugar con la fórmula de los triángulos para poder demostrar".

NOSOTROS:
Los cuadrados son congruentes

M3 — ÉI

P: "¿Cómo garantizan que la línea que se construye acá es esta línea?"

Ellos

C1: "Y también demostrar que esta diagonal es igual a este lado".

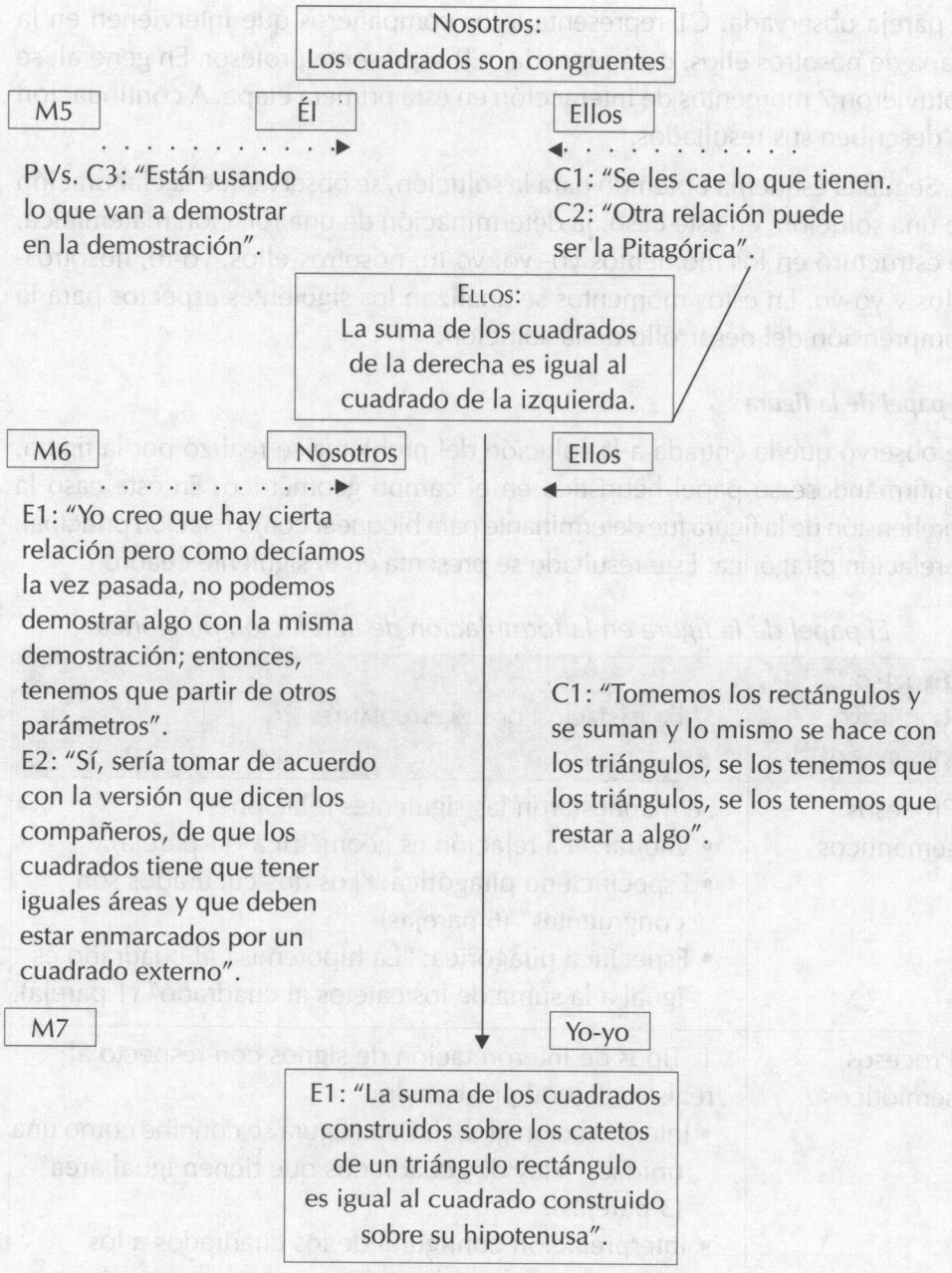
Los cuadrados son congruentes

M4 — Yo-tú

E1: "A cuadrado más B cuadrado es igual a C cuadrado, pero ¿cómo sabemos que este cuadrado es igual a este cuadrado".

Yo-tú

E2: "360° dividido entre 4 nos da 90°, 90° es igual a un ángulo recto".



En el esquema anterior, las flechas verticales conectan los momentos y las horizontales presentan posiciones de los estudiantes con respecto a la solución. Las flechas punteadas indican debilidad en la posición. Las flechas continuas indican seguridad en la posición. E1 representa al estudiante1 observado y E2 representa al estudiante 2 observado. Juntos, E1 y E2, conforman

la pareja observada. C1 representa a los compañeros que intervienen en la etapa de nosotros ellos, o de plenaria, y P, representa profesor. En general, se obtuvieron 7 momentos de interacción en esta primera etapa. A continuación se describen sus resultados.

Según el esquema obtenido para la solución, se observa que la elaboración de una solución, en este caso, la determinación de una relación matemática, se estructuró en los momentos yo- yo, yo-tú, nosotros-ellos, yo-tú, nosotros-ellos y yo-yo. En estos momentos se analizan los siguientes aspectos para la comprensión del desarrollo de la solución:

El papel de la figura

Se observó que la entrada a la solución del problema se realizó por la figura, confirmándose su papel heurístico en el campo geométrico. En este caso la aprehensión de la figura fue determinante para bloquear como relación principal, la relación pitagórica. Este resultado se presenta en el siguiente cuadro.

El papel de la figura en la formulación de la relación pitagórica

Proceso cognitivo observado	Manifestación de los estudiantes
Procesos semánticos	Se manifestaron las siguientes relaciones: • Global: "La relación es geométrica" (1 pareja). • Específica no pitagórica: "Los dos cuadrados son congruentes" (6 parejas) • Específica pitagórica: "La hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los catetos al cuadrado" (1 pareja).
Procesos semióticos	1. Tipos de interpretación de signos con respecto al registro figural presentado: • Interpretación global. Cada figura se concibe como una unidad, "Hay dos cuadrados que tienen igual área" (3 parejas). • Interpretación configural de los cuadrados a los triángulos. Se concibe a los cuadrados como figuras fundamentales. "Hay dos cuadrados con triángulos colocados diferentes" (4 parejas). • Interpretación configural de los triángulos a los cuadrados. Se concibe al triángulo como la figura

	fundamental. "Sin los triángulos quedan dos cuadrados iguales a un tercer cuadrado" (1 pareja). 2. Identificación de unidades significantes • Los cuadrados (3 parejas). • Los cuadrados y los triángulos (4 parejas). • Sombreados y blancos (3 parejas). • El grosor de las líneas no fue identificado como unidad significante. 3. Acciones de tratamiento de registro. • Acciones de composición y descomposición: entre figuras o en el interior de una figura. • Acciones de traslación y rotación de figuras.
Procesos inferenciales	Fundamentalmente se privilegió el uso de la abducción como forma de inferencia en el proceso de solución. Se identificaron los siguientes comportamientos: a) Tipo 1 Dato: dos cuadrados. Estrategia: comparación perceptual. Solución: cuadrados externos iguales. b) Tipo 2 Dato: dos rectángulos. Estrategia: medida de los cuatro lados. Solución: cuadrados iguales. c) Tipo 3 Dato: dos cuadrados compuestos por triángulos y cuadrados. Estrategia: relacionar los triángulos de las figuras y los cuadrados de las dos figuras. Solución: cuadrados externos iguales. d) Tipo 4 Datos: dos cuadrados, cuatro triángulos en el interior de cada cuadrado y cuadrados al interior de cada cuadrado. Estrategia: relacionar triángulos y asegurar igualdad de las partes sobrantes. Solución: dos cuadrados internos de una figura son iguales al cuadrado interno de la otra figura.

La estrategia de separar triángulos manifestada por C1 en el momento 6, cuestiona y debilita el considerar los cuadrados externos como marcos fijos.

Este cuestionamiento privilegia la relación pitagórica sobre la relación de congruencia de los cuadrados. Todo el proceso anterior permite considerar que:

a. El conjunto de gráficas propuesto y que se señala como una evidencia de la relación, no cumple esa función por la aprehensión que se hace de las figuras.

b. La aprehensión de las figuras le asigna un status teórico operativo a la relación pitagórica, que la sitúa más como premisa que como conclusión.

c. El papel que juega la figura en los componentes epistémico y lógico del sentido es fundamental. Puesto que la conducta abductiva exhibida por los estudiantes privilegia, en este caso, la igualdad de los cuadrados sobre la relación entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo.

En el efecto de las interacciones en un contexto argumentativo de la tarea

Mientras que en los momentos 1, 2 y 3 las interacciones permitieron consolidar las relaciones individuales, los momentos 4, 5 y 6 se convirtieron en desestabilizadores de la solución inicial. Dos situaciones de interacción marcaron la tensión sobre la solución inicial:

a. La petición de justificación (momento 3) solicitada por la profesora y los compañeros.

b. El reconocimiento de la ausencia de un argumento fuerte (momento 4).

El efecto de estas situaciones fue el debilitamiento de la solución de pareja y el posicionamiento antagónico de la solución de *Ellos* (momento 5).

Finalmente, la fuerza del antagonismo y el reconocimiento de esta fortaleza conlleva al abandono de la solución de pareja y a un posicionamiento débil para la solución defendida por el grupo argumentador. El reconocimiento de otra solución se marcó por dos actitudes: a) la de admitir haber realizado un paso no legítimo en la solución "no se puede involucrar en la prueba aquello que se va a probar" y, b) la de valorar la solución antagónica. Sin embargo, como efecto final de la tarea, sí se evidenció que todo el proceso facilitó la construcción de un sentido para la relación pitagórica, y este sentido es el de las áreas.

El desarrollo del propósito de la tarea

Aunque la figura bloqueó el proceso de identificación de la relación pitagórica como un status teórico de conclusión, facilitó considerar como unidades significantes y conceptuales: las áreas, el ángulo recto y los triángulos. Este

registro figural también puso en juego los elementos fundamentales para la elaboración de la relación: los cuadrados, las áreas y los triángulos rectángulos.

En la actividad No. 2 se propuso un conjunto de gráficas en las que no estaban explícitos los cuadrados que se construyen sobre los lados del triángulo rectángulo. En este caso, el bloqueo para la relación pitagórica fue mayor y de más resistencia para su movilidad.

Desde el punto de vista del desarrollo argumentativo, se pueda afirmar que la estructura de la interacción argumentativa (expresión-aclaración-cooperación-conclusión), estuvo determinada por los momentos propuestos para la tarea. En este sentido, la estructura argumentativa no emergió directamente del posicionamiento argumentativo de los estudiantes, pero sí estos momentos se consolidaron como los pasos propios de un proceso argumentativo para una solución.

Expresiones como las de E1: "Inicialmente tomé una versión... Eso es lo mío", y E2: "Es más o menos lo mismo... entonces ¿sí está de acuerdo?", tienen la función de expresar o exponer la solución, y manifiestan la posición individual, determinando posturas epistémicas frente a la solución.

Expresiones como las de E1: "A igual C, que no entiendo, pero puede ser como usted dice.", cumplen la función de llamado a la aclaración.

Y E2: "Tengo un nuevo cuadrado... bueno, ¿entonces sí está de acuerdo?, y de nuevo E1: "con su fórmula sí...", que funcionan como explicaciones al proceso realizado y de llamado al acuerdo.

Después de este tipo de interacciones se inicia una etapa de cooperación para la producción de la solución de pareja, pero a partir del acuerdo para la solución de E2. En este momento, en el plano de la producción argumentativa, se desvanecen definitivamente los roles de argumentador y contraargumentador que se pudieran dar en la pareja, desde la lógica de la interacción propuesta en la tarea: discutir las soluciones. Ocurre, entonces, un fenómeno interesante. La cooperación va configurando una sola voz, constituida por los dos estudiantes, como generadores de una solución de pareja; de un solo enunciado; de un argumento y de una posible trama para poner en juego ante el grupo general.

E1: "Bueno, entonces ¿cómo armamos la argumentación? Usamos esta figura de..."

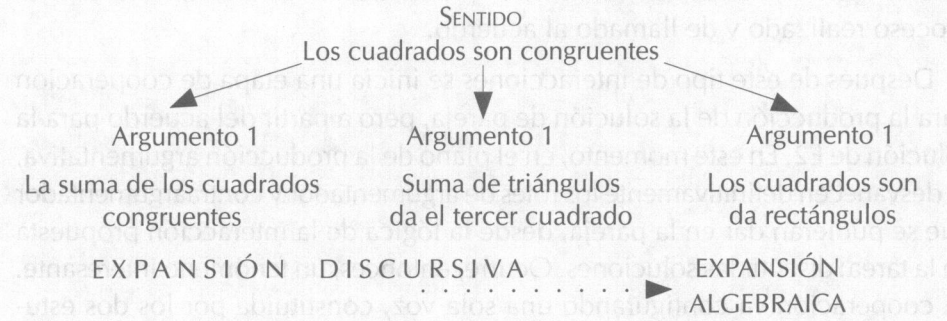
E2: "Bueno, ahí estamos claros, pero cómo defendemos que éste es este mismo? ¿Cómo lo demostramos?"

Lo anterior significa que, si bien el proceso argumentativo en general es débil, se pudieron identificar fases argumentativas fuertes y rasgos de validación, como en los momentos 3 y 4. En el momento 4, se consolida un *nosotros* que defiende una solución actuando discursivamente como una sola voz: se trabaja sobre una sola hoja; el discurso de cada interlocutor se torna en complementario del anterior, generando una única elaboración de texto (escrito a dos manos).

Las demás fases cumplen una función más explicativa, en tanto se orientan a hacer inteligible las soluciones y los procesos expuestos.

Por otra parte, en cuanto al desarrollo de una actitud argumentativa en los estudiantes, se manifiesta y se desarrolla paulatinamente la conciencia de "sujeto argumentador". Esto se observa en expresiones como: "¿cómo lo argumentamos?", "¿Cuál es el argumento?", "¿Cómo demuestra que eso es así?", "Necesitamos un argumento más fuerte", "Esta solución sí no nos la tumba nadie", "O sea, eso es lo que nos piden, nosotros argumentamos eso, sí o no?"

También se observó que la elaboración de la trama argumentativa pone en conflicto al sujeto argumentativo, "en la relación que elaboro, ¿qué se me exige?". Pregunta ésta que va orientando la producción de enunciados solución y, como producto, genera enunciados que van adquiriendo funciones y fuerza de argumentos y se van conectando de cierta manera. Así, la trama identificada en el desarrollo de la solución, por parte de la pareja analizada es:



El resultado de esta trama es un sentido no muy bien consolidado, que en el momento 3 sufre un debilitamiento, como se mostró arriba, frente a la petición de justificación. En particular, cuando se quiere validar el proceso se señala una falencia: falta asegurar que, efectivamente, el cuadrado se construye sobre la hipotenusa. Responder a esta falencia los lleva a pasar del tratamiento figural al conceptual. En este sentido, se observa cómo el proceso de elaboración discursiva y semiótica responde particularmente al propósito de justificar la

solución. Es decir, que el proceso argumentativo responde a una petición epistémica y social de dar cuenta de, bajo el criterio de validez, corrección y prueba.

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

La investigación determinó cuatro requerimientos didácticos fundamentales para el desarrollo de competencias argumentativas en geometría: el *requerimiento epistemológico,* que constituye un referente orientador para la acción vigilante del profesor en la articulación de campos conceptuales, en la aceptación de un enunciado como matemático, de una argumentación como pertinente y de una prueba como demostración. El *requerimiento cognitivo* que identifica las exigencias que el conocimiento a elaborar plantea al proceso didáctico, y el efecto que conocimientos particulares como la geometría tienen en las estructuras cognitivas del sujeto, como lo plantea Duval (1999): "más allá de un contenido de tal o cual conocimiento, la geometría, más que otras áreas en matemáticas, puede ser usada para descubrir y desarrollar diferentes formas de pensamiento". El *requerimiento comunicativo* que es el dispositivo que da razón de la estructuración del contexto del aula y el espacio para la producción de formas discursivas particulares (como la argumentación) que dan vida a las relaciones didácticas, por cuanto una situación didáctica es, en sí misma, una situación de comunicación. Y el *requerimiento sociocultural* del aula, que establece relaciones entre todos los elementos constitutivos del contexto didáctico y determina los procesos de producción, internalización y puesta en escena de normas de interacción al servicio del desarrollo efectivo y eficaz de las relaciones didácticas.

De otra parte, la pregunta por el factor que regula la producción de sentido para un conocimiento matemático, se convirtió en una pregunta que proporcionaba una articulación didáctica natural para los requerimientos. Desde el punto de vista epistemológico, la identificación de los diferentes sentidos que se han asignado a esta relación en los contextos matemáticos, permitió considerar una caracterización de la relación en el contexto euclidiano. Esta opción implicó para el requerimiento cognitivo la identificación del rol de la figura en la elaboración del conocimiento geométrico, y para el requerimiento comunicativo la consideración de las tramas argumentativas que sustentan cada uno de los sentidos.

Un ejemplo interesante de este problema didáctico lo constituyó, en este proyecto, el uso del registro figural. Pensar en el papel de este registro para el

aprendizaje de la geometría se convirtió en un llamado fundamental para el desarrollo de los requerimientos didácticos. Esto por cuanto el uso de ellos fue el que permitió, en el análisis de la tarea, identificar el bloqueo para la formulación de la relación pitagórica. De esta manera, los requerimientos cumplían su doble función: en primer lugar permitieron el diseño de una secuencia didáctica; en segundo explican las razones que impiden una adecuada elaboración de conocimiento matemático.

Desde el punto de vista del análisis de la argumentación en el aula, se evidenció que el efecto de los requerimientos en el desarrollo de competencias argumentativas en matemáticas se sitúa en dos contextos. En primer lugar, los requerimientos proporcionan criterios que determinan competencias específicas a desarrollar. En segundo, ellos proporcionan criterios para valorar los estados de desarrollo de las competencias. En esta perspectiva los resultados de este estudio permiten reconocer que la identificación de una competencia argumentativa en geometría pasa por el reconocimiento de unas competencias básicas en geometría.

De la reflexión anterior se concluyó que la elaboración de requerimientos siempre implicaría la realización de selecciones teóricas y de perspectivas de análisis. Por ello resulta fundamental la explicitación de elementos reguladores de la puesta en juego de los requerimientos. Preguntas como ¿los requerimientos permiten la elaboración de diseños de aula? y, ¿los requerimientos aclaran la mirada sobre los procesos realizados por los estudiantes en el cumplimiento de un propósito didáctico, y permiten anticipar efectos del diseño en el proceso escolar?, proporcionan los elementos de regulación ineludibles para los requerimientos.

Finalmente, en la perspectiva del impacto de la estrategia de socialización del proyecto en la comunidad académica, se puede concluir que cumplió una función, que más que socializante fue formadora. Esto, en tanto que la estrategia permitió construir, desde la diversidad disciplinar y de desempeño laboral y estudiantil, un espacio de reflexión que comprometió al desarrollo del proyecto en una dinámica social de elaboración de conocimiento. A la vez, consolidó una respuesta para una pregunta que se repetía en estos encuentros: ¿Qué es el desarrollo de una competencia argumentativa en geometría? Naturalmente que en un contexto teórico y metodológico general, la respuesta que proporciona este estudio se convierte en un aporte para la teorización sobre este aspecto. Teorización que cumple dos funciones en el contexto de la educación matemática y del lenguaje y la educación: a) ser una herramienta para los docentes e investigadores en el tema de las

competencias, que proviene de un proceso de investigación-acción; b) abonar el campo del debate científico sobre este tema.

BIBLIOGRAFÍA

Álvarez, Carlos. "Two ways of reasoning and two ways of arguing in geometry. Some remarks concerning the aplication of figures in Euclidian geometry", (en prensa). México. UNAM. 2000.

Benson,Donald. "The moment of proof". Nueva York. Oxford. University Press. 1999.

Campos, Alberto. *Axiómatica y Geometría desde Euclides hasta Hilberth y Bourbaki*. Bogotá. Alberto Campos Editor. 1994.

Calderón, Dora. "Género Discursivo, Discursividad y Argumentación". Ponencia presentada para la defensa de candidatura a doctor. Doctorado en Lenguaje y Educación. Universidad del Valle. 2000.

Duval, Raymond. *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* (Tr. Myriam Vega). Cali. Universidad del Valle. 1999.

_____ *Argumentar, demostrar, explicar: ¿Continuidad o ruptura cognitiva?* Bologna. Querétaro. Grupo Editorial Iberoamericano. 1995.

EUCLID. *The Thirteen Books of Euclid´s Elements.* Introduction and Commentary by Sir Th. L. Heath. Nueva York. Dover Publications, Inc. Vol. I, II, II (2ª. edición). 1956.

Francos, D.F. "Demostraciones del Teorema de Pitágoras". En: *Notas de Matemáticas No. 28.* Universidad Nacional. Departamento de Matemáticas y Estadística. Bogotá, octubre de 1989.

Gómez, Adolfo León. *Argumentos y Falacias.* Cali. Universidad del Valle. 1993.

_____ *El primado de la razón práctica.* Cali. Universidad del Valle. 1991.

Jones, K. "Dedeuctive and inductive approaches to solving geometrical problems". En: *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21 Century.* Dordrecht. Klwer Academic Publisher. 1998.

Josephson, J.r. y Josephson, S.G. (Eds.) *Abductive Inference. Computation, Philosophy, Technology*. Cambridge. Cambridge University Press. 1996.

León, Olga Lucía. "El Papel del Quinto Postulado en la Arquitectura del Libro Primero de los Elementos de Euclides". Ponencia presentada para defensa de canditura a doctor. Doctora en Educación Matemática. Universidad del Valle. 2000.

Lo Cascio, Vincenzo. *Gramática de la argumentación.* Madrid. Alianza Editorial. 1991.

Peirce, Charles. "Abduction and Induction". En: J. Buchler. *Philosophical Writings of Peirce.* Nueva York. Dover Publications. 1955.

_____ *Deduction, Induction and Hypothesis. The Popular Science Montly,* vol. XIII. 1978.

Pereda, Carlos. "Teorías de la Argumentación". En: León, Olivé (ed.) *Racionalidad Epistémica.* Madrid. Trotta. 1995.

Perelman, Chäim y Olbrecht-tyteca, Lucien. *Tratado de la Argumentación.* Madrid. Gredos. 1989.

Pérez, Jesús Hernando. "Trilogía de Pierce". Ponencia presentada en el Encuentro de profundización. Proyecto "Caracterización de los requerimientos didácticos para el desarrollo de competencias argumentativas en matemáticas", IDEP-Bogotá. Sede Asociación Anillo de Matemáticas. 2000.

Vasco, Carlos Eduardo. "Dynamic geometry in the Colombian school curriculam", en: *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21 Century.* Dordrecht. Klwer Academic Publisher. 1998.

Zárate, E. "Generalización del Teorema de Pitágoras". En: *Educación Matemática,* vol. 8 No. 2. México. Grupo Editorial Iberoamericano. 1996.