CAPÍTULO

10

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MEDIANTE LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES EN BÁSICA SECUNDARIA

Nivia Yela Caicedo*

Colegio Distrital San Francisco de Asís
Localidad Los Mártires

* Licenciada en Física de la Universidad de Nariño, Pasto. Maestría en Educación con Énfasis en Lecto-escritura y Matemáticas de la Universidad Externado de Colombia. Nominada al Premio Compartir al Maestro en el año 2001, Mención de Honor en los años 2002 y 2004.

Introducción

Esta experiencia de innovación consta de dos fases: la primera (2002,2004), desarrollada en el Colegio Carlos Arango Vélez (Localidad 8), donde tuve la oportunidad de coordinar el proyecto de innovación pedagógica denominada *Resolución de problemas mediante la solución de ecuaciones en Básica Secundaria* (proyecto financiado por el IDEP). Y una segunda fase (años 2005,2007) donde se implementa la misma propuesta en el Colegio San Francisco de Asís J T. (Localidad 14).

Entre los años 2002 y 2004, en el colegio Carlos Arango Vélez, se realiza una adaptación de la propuesta que, sobre la iniciación a las ecuaciones, escriben Socas, Camacho, Palarea y Hernández (1989). El proyecto de resolución de problemas, que venía en desarrollo en la institución desde años anteriores, da origen a la propuesta de innovación denominada *Resolución de problemas mediante la solución de ecuaciones en básica secundaria,* la cual se presentó y fue aceptada por el IDEP en la convocatoria que tenía como objeto apoyar y financiar proyectos de innovación pedagógica e investigación en el aula (Contrato No 23 de 2002).

Concretamente, la innovación consiste en considerar estrategias no usuales al entorno escolar para la solución de ecuaciones, y enmarcar este proceso de solución en la metodología de resolución de problemas.

La propuesta está constituida por una serie de talleres, planteados para ser desarrollados por los estudiantes y por tareas de socialización intercaladas con la ejecución de las guías a medida que las diversas partes de cada una se van realizando, durante la implementación.

Esta propuesta se planteó debido a las dificultades que presentaban los estudiantes cuando debían resolver una ecuación. Dificultades que tienen que ver, en primer lugar, con el concepto de ecuación, el cual, para ellos, no tiene ningún significado y, generalmente, lo definen como una "expresión que contiene la x".

En segundo lugar, el símbolo igual, en una ecuación, los estudiantes lo relacionan con el resultado de una operación aritmética, impidiendo que solucionen la ecuación, la verifiquen y, además, presenten dificultades con la solución de problemas que involucran la solución de ecuaciones en el campo de conocimiento de la matemática y también de otras áreas.

En el desarrollo de la propuesta se consideró un enfoque teórico que pone de relieve la validez y pertinencia del empleo de *modelos*, (*Aula Urbana*, julio-agosto de 2004. No 48), en el planteamiento y solución de ecuaciones que sirven como estrategia básica para la resolución de problemas.

Como se menciona anteriormente, la propuesta se basó en la secuencia de tareas de Socas y otros, en donde se utilizan distintos *modelos* (balanza, diagramas, esquemas, tablero de fichas) como ayudas intermedias para llegar a la representación algebraica de las ecuaciones, a su solución y a la verificación.

Según Aizpun, citado por los mismos autores:

> *(...)... los modelos en el álgebra son una herramienta fundamental que permite pasar de una situación problemática, expresada, por ejemplo, en lenguaje ordinario, al modelo y de éste a la expresión algebraica correspondiente; en este sentido, entenderemos el modelo como una forma de lenguaje.*

Marco referencial

Los modelos

Al tomar la decisión de basar la propuesta en la idea de *modelo* fue necesario estudiar algunas de las definiciones del término y empleos de dicha palabra en la enseñanza de las matemáticas, con el fin de establecer un significado del término para la propuesta. Lo anterior, teniendo en cuenta que la palabra *modelo* se usa en diversas situaciones con significados que, aunque en general pueden aproximarse, puntualmente pueden diferir.

Para Janvier (1996), un modelo puede estar formulado en forma de una expresión simbólica en la que una variable se expresa en términos de otras, en forma de gráfica o como una tabla de números producida por un computador después de una simulación. En consecuencia, este autor define modelar como el doble proceso de crear o diseñar un modelo con base en supuestos, y verificarlo; el modelo tiene, por lo tanto, un estado doble: se establece en términos matemáticos y es independiente de la realidad de la que emergió, y representa objetos o relaciones concretas que pueden ser medidas; a los elementos del modelo (parámetros de la fórmula, características de la gráfica y de la tabla), que no tenían significado previamente, se les da un significado según el contexto de la situación que se investiga, ya que un modelo puede considerarse al mismo tiempo abstracto y concreto.

Según Filloy y Sutherland (1996), hay dos posiciones extremas sobre el uso de recursos didácticos para la enseñanza del álgebra. La primera posición propone modelar las nuevas operaciones y objetos en algún contexto concreto familiar a los estudiantes, para llenarlos de significado; en ese caso, el primer elemento de la sintaxis algebraica es construido con base en el comportamiento del modelo, por ejemplo una balanza de brazos iguales, o el modelo geométrico. La otra posición propone aprender las reglas sintácticas apropiadas y aplicarlas luego en la resolución de problemas y ecuaciones. Esta es la aproximación tradicional de enseñanza basada en el modelo de Viéte (transposición de términos de un lado de la ecuación al otro) o el modelo de Euler (operar en ambos lados de la ecuación con los inversos aditivos y multiplicativos).

Con estas ideas, se asumió que un modelo permite representar situaciones, simularlas, simplificarlas y predecir comportamientos; es decir, el modelo posibilita mejorar la comprensión de la situación y resolver problemas. Se optó por usar la palabra modelo con un adjetivo que indique de qué tipo de modelo se habla al referirse a dicho término; es así como la balanza de brazos iguales se podría denominar como recurso para modelar o como modelo físico; el dibujo de la balanza, como modelo gráfico, y la expresión algebraica general de una ecuación lineal, como modelo matemático.

Objetivo

El objetivo central de la propuesta es que los estudiantes, al terminar el grado noveno, a través del uso de herramientas para la resolución de problemas y el uso de modelos, construyan y desarrollen estrategias de solución de ecuaciones de primer grado con una incógnita.

Además se busca alcanzar logros en el estudiante, en distintos niveles de complejidad según el grado escolar, con respecto a:

- La comprensión del significado de ecuación e incógnita.
- La argumentación con respecto a los procedimientos desarrollados en la resolución de problemas y las ecuaciones mismas.
- El manejo del lenguaje simbólico.

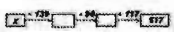
Para esto se espera, entonces, que el estudiante lleve a cabo las siguientes acciones:

- Analizar enunciados verbales de problemas de forma que puedan ser contextualizados, es decir, ubicados dentro de una situación ya conocida o que se debe consultar.
- Interpretar y transformar el problema mediante uno o varios *modelos* existentes para solucionar ecuaciones en el álgebra, como las reglas formales, la búsqueda experimental, la balanza, el tablero con fichas, y la inversión del diagrama.
- Escribir su respectiva expresión simbólica.
- Resolver la ecuación resultante con los distintos métodos.
- Verificar la respuesta obtenida.
- Interpretar la respuesta con respecto a la situación planteada.
- Argumentar acerca del significado de los términos de una ecuación que se perciben al utilizar los diferentes métodos.

A continuación realizo una descripción de las distintas etapas (5) por las cuales ha pasado la propuesta, las cuales tienen que ver con el diseño, la ejecución y la socialización de la misma.

En una *primera etapa*, una vez aprobada la propuesta por el IDEP (año 2002-2003), se realiza una reflexión en torno a las dificultades de los estudiantes con respecto a la resolución de problemas y la solución de ecuaciones. También se realizan las siguientes lecturas para la fundamentación teórica de la propuesta: *Cuadernos de Formación de Profesores*, de Luis Rico y otros; *Bases teóricas del currículo de matemáticas en Educación Secundaria*, de Luis Rico Síntesis, Madrid, 1997); *Perspectivas en educación matemática*, de Luz Manuel Santos Trigo y Ernesto Sánchez (1996); *El aprendizaje de las matemáticas*, de Linda Dickson (1991); *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática del NCTM y otros* (1991); *Problemas aritméticos escolares*, de Luis Puig y Fernando Cerdán (1998); *Una organización de los programas de investigación en didáctica de las matemáticas*, de Vicenc Font.

La *segunda etapa* corresponde al diseño de los talleres e implementación de los mismos con los estudiantes, de quienes se recogió información con respecto a los procesos llevados a cabo en forma escrita y las explicaciones orales que se les solicitaron. Esta información se complementó con la obtenida mediante la observación directa de los docentes, quienes llevaron registro de las actividades realizadas por los estudiantes.

DISEÑO No. 4	PRESENTACIÓN Y ANÁLISIS DE UNA SITUACIÓN EN DIFERENTES LENGUAJES: VERBAL, GRÁFICO Y MATEMÁTICO. MODELOS DE DIAGRAMA, TABLERO DE FICHAS Y MATEMÁTICO			
SITUACIÓN / INDICACIONES O REQUERIMIENTOS	PROPONGA, EN LENGUAJE VERBAL, UNA SITUACIÓN DE LA VIDA COTIDIANA QUE COORESPONDA AL DIAGRAMA	SITUACIÓN REPRESENTADA MEDIANTE UN DIAGRAMA	REPRESENTE Y SOLUCIONE LA SITUACIÓN MEDIANTE TABERO DE FICHAS	REPRESENTE Y SOLUCIONE LA SITUACIÓN MATEMÁTICAMENTE
PRESENTACIÓN DE UNA SITUACIÓN EN DIFERENTES LENGUAJES				
REVERSIBILIDAD (SITUACIÓN PRESENTADA AL REVÉS)				
SOCIALIZACIÓN DEL PROCESO Y RESULTADOS	Prepárese para realizar ante el grupo una socialización del proceso de resolución y de los resultados obtenidos			

En la *tercera etapa* se realizó el análisis y la interpretación de la información recogida a través de diversos medios y la escritura del reporte final del proyecto.

Posteriormente viene una *cuarta etapa* de socialización de la propuesta en diferentes escenarios: Colegio Carlos Arango Vélez, IDEP, Maloka, Secretaría de Educación. También se realiza la publicación del artículo para el magazín *Aula Urbana* y el capítulo cuarto del libro *Proyecto innovación e investigación de las matemáticas en el aula*, publicado por el IDEP, el cual tiene como título *Aplicación de modelos en el planteamiento de ecuaciones y la resolución de problemas.*

En esta etapa, también se presenta esta propuesta al Premio COMPARTIR al Maestro, de quienes se recibió una Mención de Honor como Experiencia Pedagógica Ejemplar.

En la *última etapa* se lleva la propuesta al Colegio Distrital San Francisco de Asís, de Bogotá, localidad 14, jornada tarde, donde se continúa con la misma y se avanza en la implementación de la solución de las ecuaciones con dos incógnitas a través de calculadoras (Texas Instruments Voyage), *software* de matemáticas (Derive y Cabri, Descartes) y con la resolución de problemas que involucran contextos de otras áreas.

En la tabla siguiente se observan los cambios realizados en los talleres en la última etapa. Posteriormente presento un ejemplo, tomado de Internet, de actividad para realizar en el aula

Situación presentada en forma verbal	Realización de la representación gráfica en derive	Representación numérica realizada en derive	Análisis	Consultar enlaces
Los antropólogos saben cómo estimar la altura de un hombre usando un hueso pista. Para esto, aplican la fórmula: H = 2,89h + 70,64 H es la altura del hombre h es la longitud de su húmero a. Si el húmero mide 30cm, ¿cuál es la altura del hombre? b. Si un hombre mide 163,12 cm., ¿cuán largo es su húmero? Tabla de datos realizada en derive			Responder las preguntas del problema de acuerdo con la herramienta del software o del enlace	Consultar Proyecto Descartes en Internet y complementar información. Ver un resultado al final de la tabla

El siguiente ejemplo sencillo fue tomado de Internet. (Proyecto Descartes) el cual los estudiantes pueden consultar para completar el proceso solicitado en otros talleres.

A partir de las representaciones numéricas mostradas en Descartes se puede realizar la gráfica en Derive. Contestar las preguntas con la información de la misma y completar las demás celdas de la tabla

El precio de un bolígrafo en la papelería cercana es de 700 pesos.

Calcula y escribe en la tabla siguiente el precio de los bolígrafos que se indican.

bolígrafos	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
precio								

Esta tabla se llama tabla de valores.

En la escena siguiente hemos dibujado unos ejes coordenados. En el eje horizontal representamos el número de bolígrafos que compramos. En el eje vertical representamos el precio de la compra. Para cada valor que le asignes al número de bolígrafos, se marca en su vertical el precio de esos bolígrafos con un punto rojo.

En la parte inferior de la escena asígnale a la variable bolígrafos los valores de la tabla anterior y observa su precio, es decir, la altura donde se coloca el punto rojo.

	- ¿Qué mide un cuadradito cualquiera del eje horizontal?
	- ¿Qué mide un cuadradito cualquiera del eje vertical?
	- Fijándote en la gráfica, ¿cuánto cuestan 16 bolígrafos? ¿Cuántos bolígrafos te dan por 3,60 € ?
	- ¿Tiene sentido unir los puntos rojos de la gráfica? ¿Por qué?

Estrategia didáctica

Para el desarrollo de las actividades que se plantean a continuación se tiene en cuenta el grado en el que se encuentran los estudiantes. Es el profesor quien decide cuáles actividades realizar, y el momento y el nivel que necesita lograr, con la posibilidad de iniciar desde grado sexto.

Es necesario aclarar que cada uno de los modelos presenta limitaciones con respecto al sistema de números en los cuales se está desarrollando; por ejemplo, el modelo de la balanza puede plantear problemas que involucran los números naturales; con el modelo del tablero de fichas es mejor plantear problemas que involucran los números enteros. Nuevamente, es el profesor quien estudia la situación de los estudiantes y puede aumentar o disminuir el nivel de complejidad de las actividades presentadas en la propuesta.

El modelo de la balanza

Las actividades con el modelo de la balanza tienen la finalidad de lograr que los estudiantes le den un significado a la igualdad como equivalencia, utilicen incógnitas para cantidades desconocidas, apliquen la propiedad uniforme, planteen y resuelvan ecuaciones de la forma: $x \pm a = b$ $ax \pm b = c$, y representen gráficamente enunciados verbales de problemas y posteriormente los resuelvan.

La propuesta didáctica se inicia con la construcción de la balanza de brazos iguales, la cual lleva unos recipientes a los lados como platos. Para empezar los estudiantes argumentan y escriben sobre el significado del equilibrio en la balanza, se escuchan varias opiniones y luego se sacan conclusiones en forma colectiva.

Posteriormente se realizan tareas como las siguientes:

- Equilibrar la balanza física de diferentes maneras, hacer una representación gráfica de la situación y colocar en frente de la representación gráfica la expresión aritmética.

Esta actividad fue necesario realizarla con una balanza de verdad, no la representación gráfica de la misma, puesto que los estudiantes adquieren el significado del equilibrio cuando perciben la balanza en movimiento; de lo contrario, algunos estudiantes la observan como algo estático, así se dibujen cantidades diferentes en cada plato.

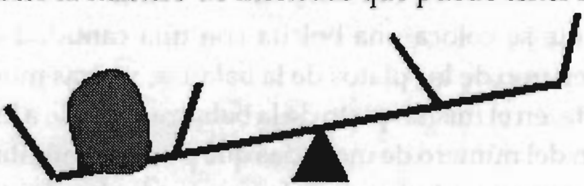
Ejemplos de actividades a desarrollar en la clase:

- Se encuentra la balanza en equilibrio, con cinco monedas en cada lado; se debe agregar o quitar la misma cantidad de monedas en ambos platos de la balanza. Luego se representa en forma aritmética la situación presentada en la balanza.

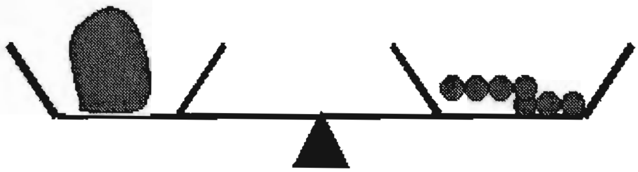
Situación inicial: 5 = 5
Posteriormente se quitan dos monedas en cada plato; de este modo, en forma aritmética, la situación se representa como 3 =

- Para iniciar con las cantidades desconocidas y al mismo tiempo controlar el número de ellas en cada plato de la balanza, es necesario colocar cierta cantidad de monedas dentro de una bolsita oscura (donde no se logra identificar la cantidad), en uno de los platos de la balanza, y en el otro colocar monedas de una en una hasta lograr el equilibrio de la balanza. A continuación se describe la situación final y la situación inicial.

Situación inicial: la balanza en desequilibrio con monedas en una bolsa oscura, en uno de los platos. Los estudiantes realizan conjeturas y estimaciones con respecto al número de monedas que puede tener la bolsa.



Situación final: la balanza se equilibra con determinado número de monedas, encontrando al mismo tiempo la cantidad de monedas de la bolsita.



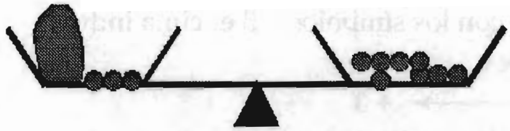
Los estudiantes escriben matemáticamente las situaciones presentadas en la balanza: la situación inicial y la situación final. Por ejemplo, para la primera situación: X =?, donde se asume que esta expresión significa que hay una cantidad desconocida x en un plato de la balanza y en el otro plato se desconoce (?) con cuántas monedas se logrará el equilibrio.

Para la situación final: X = 7, la cual se consigue cuando se agregan una a una las monedas en el plato de la derecha hasta lograr el equilibrio de la balanza, se asume que la cantidad desconocida de las monedas en la bolsita es de 7. Vale aclarar que las monedas son de la misma denominación.

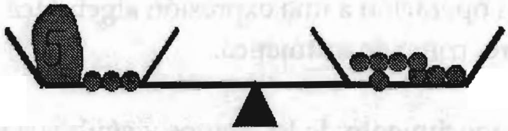
Se toma la decisión de utilizar monedas para el trabajo con la balanza por la aproximada homogeneidad de su peso y porque en cualquier territorio se consiguen; además, el número marcado en la moneda afianza la idea de que las cantidades que se agregan o quitan son iguales. También, por su peso, es más fácil controlar las dificultades de precisión de las balanzas realizadas en casa, las cuales no son muy exactas. Inicialmente se intentó con botones y fichas de juegos infantiles. Decisión:

- La siguiente descripción corresponde a la solución de ecuaciones de la forma $x + a = b$ ó $x - a = b$.

Nuevamente se coloca una bolsita con una cantidad desconocida de monedas en uno de los platos de la balanza, y otras monedas por fuera de la bolsita, en el mismo plato de la balanza. Se pide a los estudiantes la estimación del número de monedas que pueden equilibrar la balanza, y luego se procede a colocar monedas en el otro plato hasta lograr el equilibrio de la balanza; se escribe matemáticamente la situación: en forma aritmética la situación final y en forma algebraica la situación inicial. Ejemplo:



Situación inicial: $x + 3 = ?$, la cual indica que hay un número desconocido de monedas en la bolsita y tres monedas más en uno de los platos, y en el otro plato se desconoce el número de monedas que pueden equilibrar la balanza:



Situación final: $5 + 3 = 8$, indica que la balanza se equilibra con ocho monedas; luego en la bolsa hay cinco monedas que representan el valor de la cantidad desconocida x.

El modelo se vuelve más complejo de acuerdo con el grado escolar (5° - 9°), de la siguiente manera:

- Colocar bolsitas en ambos platos de la balanza.
- Cambiar la ubicación de la bolsita al lado izquierdo o derecho de la balanza.

El modelo de los diagramas

Con estas actividades se pretende que los estudiantes escriban ecuaciones a partir del enunciado verbal de un problema, representen la ecuación por medio del diagrama y resuelvan la ecuación y el problema.

Se inicia con la escritura de los símbolos y signos utilizados en los diagramas de la siguiente manera:

- La flecha con los símbolos x 3 encima indica multiplicar por tres.

  $\longrightarrow$ **x 3**

- La flecha con los símbolos + 3 encima indica sumar tres.

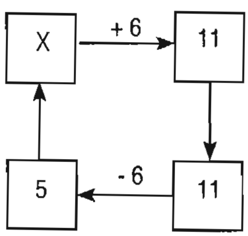
  $\longrightarrow$ **+ 3**

Los resultados de las operaciones van dentro de los cuadrados de los diagramas, de esta manera, el símbolo $\boxed{4x}$ es el resultado de una operación en el diagrama.

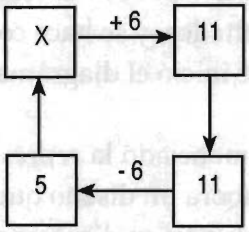
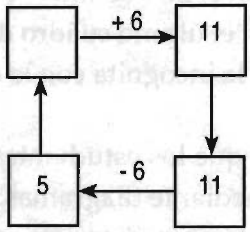
Esta forma de representación contribuye a que el estudiante asuma como resultado de una operación a una expresión algebraica y no necesariamente un número, como en aritmética.

Después del reconocimiento de los signos y símbolos se sugiere la representación de ecuaciones mediante diagramas; por ejemplo: dada la ecuación x + 6 = 11, representarla con un diagrama y solucionarla.

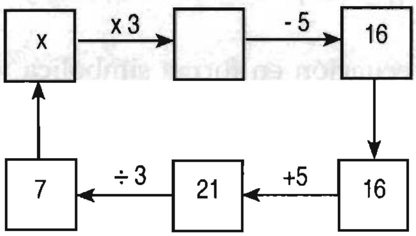
Los estudiantes realizan el siguiente diagrama y lo leen, de la siguiente manera. A un número desconocido x, se le suma 6 y se obtiene como resultado el número 11; si se lee el diagrama en sentido contrario, como indica la flecha, se dice que al número 11 se le resta 6 (porque la flecha en el otro sentido indica la operación contraria, que en este caso es una resta) y se obtiene como resultado el número cinco. Por correspondencia se traza la flecha que de cinco llega hasta x, solucionando la ecuación.



Luego se escribe la situación en forma algebraica y se verifica la ecuación dentro del mismo diagrama

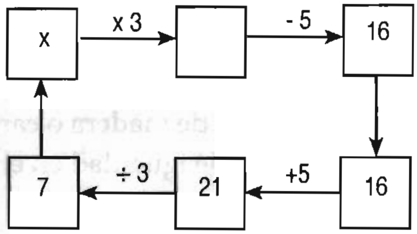
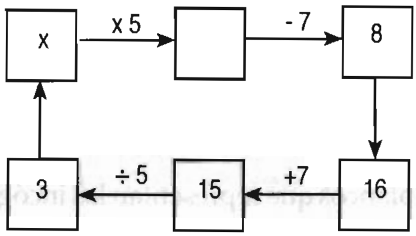
Ecuación	Diagrama	Verificación
x + 6 = 11		
	x + 6 = 11	x + 6 = 11 11 – 6 = 5 lectura hacia la izquierda

Otro ejemplo: Representar mediante un diagrama la ecuación
3x – 5 = 16

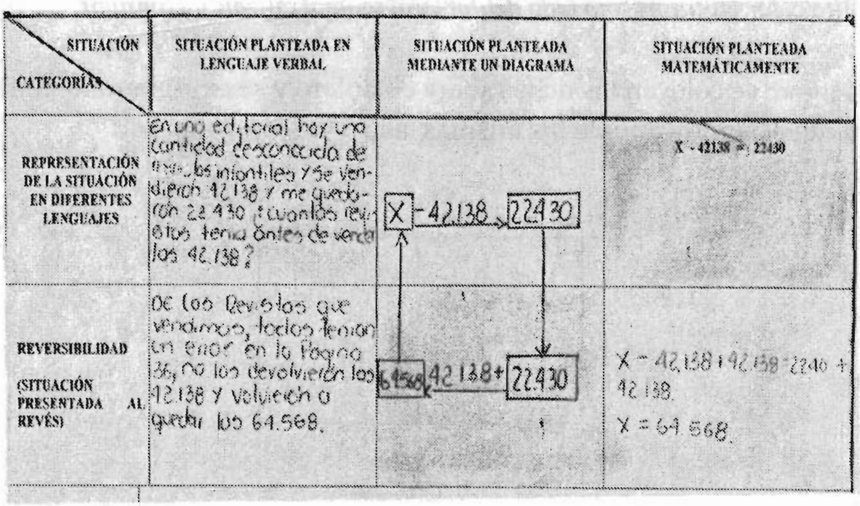


Nuevamente se invita los estudiantes a leer el diagrama primero hacia la derecha, de la siguiente manera: el número desconocido x se multiplica por 3 y se obtiene como resultado 3x, también desconocido; a este resultado se resta 5 y se obtiene 16. Ahora, al leer en sentido contrario, de derecha a izquierda, las operaciones también se invierten; si la flecha que va hacia la derecha tiene la operación – 5 sobre ella, en la flecha que queda debajo de ella en el diagrama queda la operación + 5. De esta manera, la lectura del diagrama en el sentido derecha izquierda se haría así: se parte de 16, el cual es el resultado final, se invierte la flecha

	SITUACIÓN PLANTEADA EN LENGUAJE VERBAL	SITUACIÓN PLANTEADA MEDIANTE UN DIAGRAMA	SITUACIÓN PLANTEADA MATEMÁTICAMENTE
REPRESENTACIÓN DE LA SITUACIÓN EN DIFERENTES LENGUAJES	En una editorial hay una cantidad desconocida de libros infantiles y se vendieron 42.138 y me quedaron 22.430 ¿cuántos libros tenía antes de vender los 42.138?	$\boxed{X} - 42138 \rightarrow \boxed{22430}$	$X - 42138 = 22430$
REVERSIBILIDAD (SITUACIÓN PRESENTADA AL REVÉS)	De los devueltos que vendimos, todos tenían un error en la página 36, no los devolvieron los 42.138 y volvieron a quedar los 64.568.	$\boxed{64568} \leftarrow 42138 + \boxed{22430}$	$X - 42.138 + 42.138 = 22430 + 42\ 138$ $X = 64\ 568.$

Situación presentada en forma verbal	Diagrama	Expresión simbólica formal
Si a tres veces x se le resta cinco y se obtiene 16 ¿cuánto vale x? Otra forma : A tres veces un número se le resta cinco y se obtiene como resultado 16. ¿Cuál es el número?		Tradicionalmente se resolvería: $3x - 5 = 16$ $3x - 5 + 5 = 16 + 5$ Restando 5 en ambos lados de la ecuación $3x = 21$ $x = 7$ Con el diagrama: $16 + 5 = 21$ $21 \div 3 = 7$
	Dado el siguiente diagrama complete las otras columnas 	

A continuación presento un trabajo realizado por los estudiantes donde se ilustra el proceso anterior:

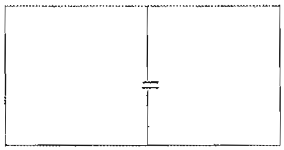


SITUACIÓN / CATEGORÍAS	SITUACIÓN PLANTEADA EN LENGUAJE VERBAL	SITUACIÓN PLANTEADA MEDIANTE UN DIAGRAMA	SITUACIÓN PLANTEADA MATEMÁTICAMENTE
REPRESENTACIÓN DE LA SITUACIÓN EN DIFERENTES LENGUAJES	En una editorial hay una cantidad desconocida de [illegible] infantiles y se vendieron 42.138 y me quedaron 22.430 ¿cuántos revistos tenía antes de vender los 42.138?	X -42.138 22430	X - 42138 = 22430
REVERSIBILIDAD (SITUACIÓN PRESENTADA AL REVÉS)	De los Revistos que vendimos, todos tenían un error en la Pagina 36, no los devolvieron los 42.138 y volvieron a quedar los 64.568.	64568 42.138+ 22430	X - 42.138 + 42.138 = 22430 + 42.138. X = 64.568.

Modelo "tablero de fichas de colores"

Esta actividad se inicia con la construcción del tablero y las fichas de colores.

El tablero consta de un rectángulo de madera o cartulina, dividido por una línea vertical y con un signo de igualdad en el centro.

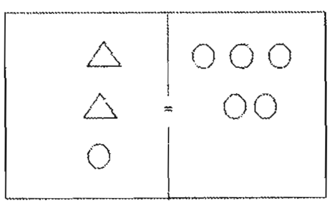


Las fichas se construyen en cartulina y están conformadas por:

- 20 triángulos negros que representan las incógnitas con coeficiente negativo.
- 20 triángulos blancos que representan las incógnitas con coeficiente positivo.
- 20 círculos negros para números negativos.
- 20 círculos blancos que representan los números positivos.

La única ***regla de eliminación*** es la siguiente: *parejas de la misma forma y distinto color en un mismo lado del tablero, se neutralizan y eliminan.*

Para jugar, se colocan las fichas sobre el tablero y se expresa matemáticamente el significado de las mismas, así:

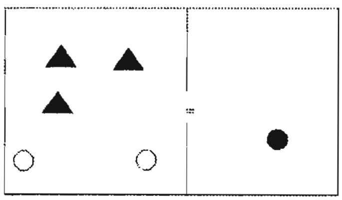


Ejemplo: $2X + 1 = 5$

En el lado izquierdo del tablero hay dos triángulos blancos que representan dos veces el valor de la incógnita y un círculo blanco que representa el número 1; en el lado derecho del tablero hay 5 círculos blancos que representan el número cinco al otro lado de la ecuación.

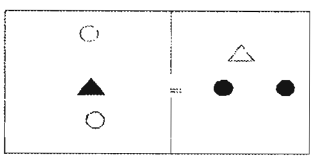
En el siguiente ejemplo se observa la representación de la ecuación **$-3X + 2 = -1$** en el tablero de fichas. Los tres triángulos negros representan tres veces el valor de la incógnita negativa y el círculo negro representa al número negativo del lado derecho de la ecuación.

Después de cada transformación en el tablero se escribe la ecuación resultante debajo del mismo, con lo cual se introduce el concepto de ecuaciones equivalentes, muy necesario para enseñar la solución de sistemas de ecuaciones.



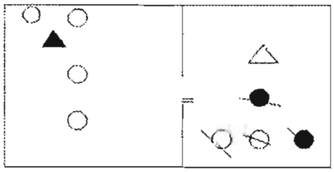
$-3X + 2 = -1$

Una vez que los estudiantes son capaces de representar matemáticamente cualquier ecuación en el tablero, se les solicita dejar los triángulos blancos en un mismo lado del tablero, lo que se logra aumentando o quitando fichas de acuerdo con la regla de eliminación del juego.
Ejemplo:



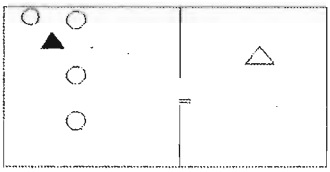
$-3X + 2 = -1$

Para eliminar las dos unidades negativas del lado derecho, se aumentan dos unidades positivas a ambos lados (dos círculos blancos a ambos lados), y se obtiene:



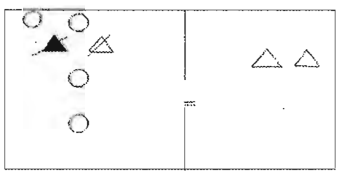
-X + 4 = X – 2 + 2, equivalente a -X + 4 = X

Se eliminan de acuerdo con la regla y se obtiene:



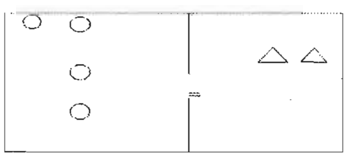
-X + 4 = X

Para eliminar el triángulo negro del lado izquierdo se coloca a ambos lados un triángulo blanco y se obtiene:



- X + X+ 4 = X + X

Posteriormente se elimina el triángulo negro con el triángulo blanco del lado izquierdo.

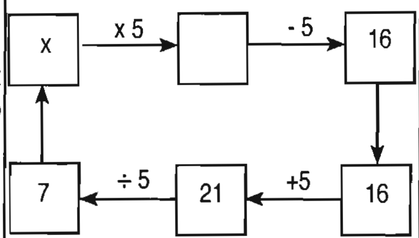


4 = X + X es decir 4 = 2X

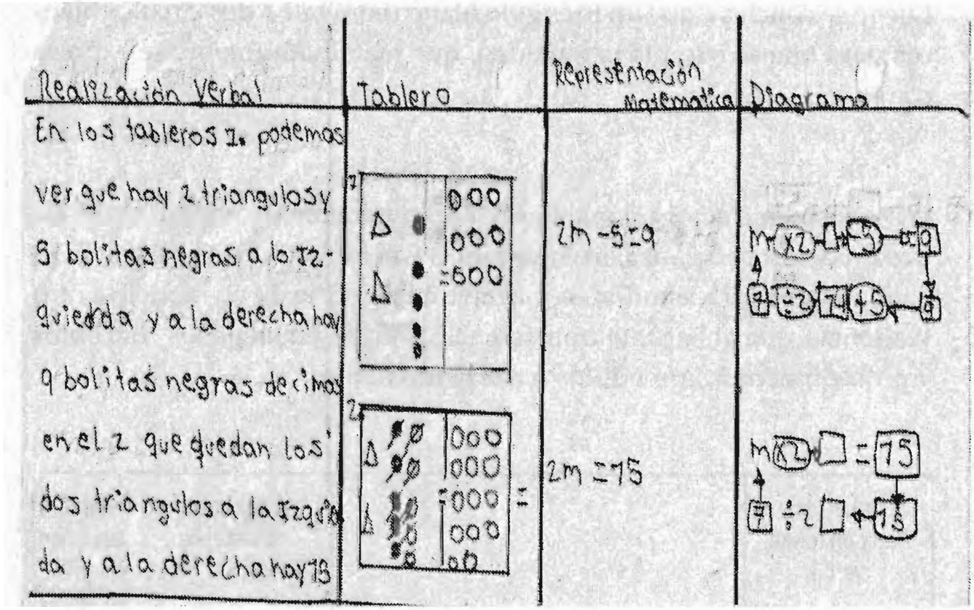
Luego se concluye que un triángulo blanco equivale a dos círculos blancos para que se cumpla la igualdad, que matemáticamente se expresa como:

$X = 2$

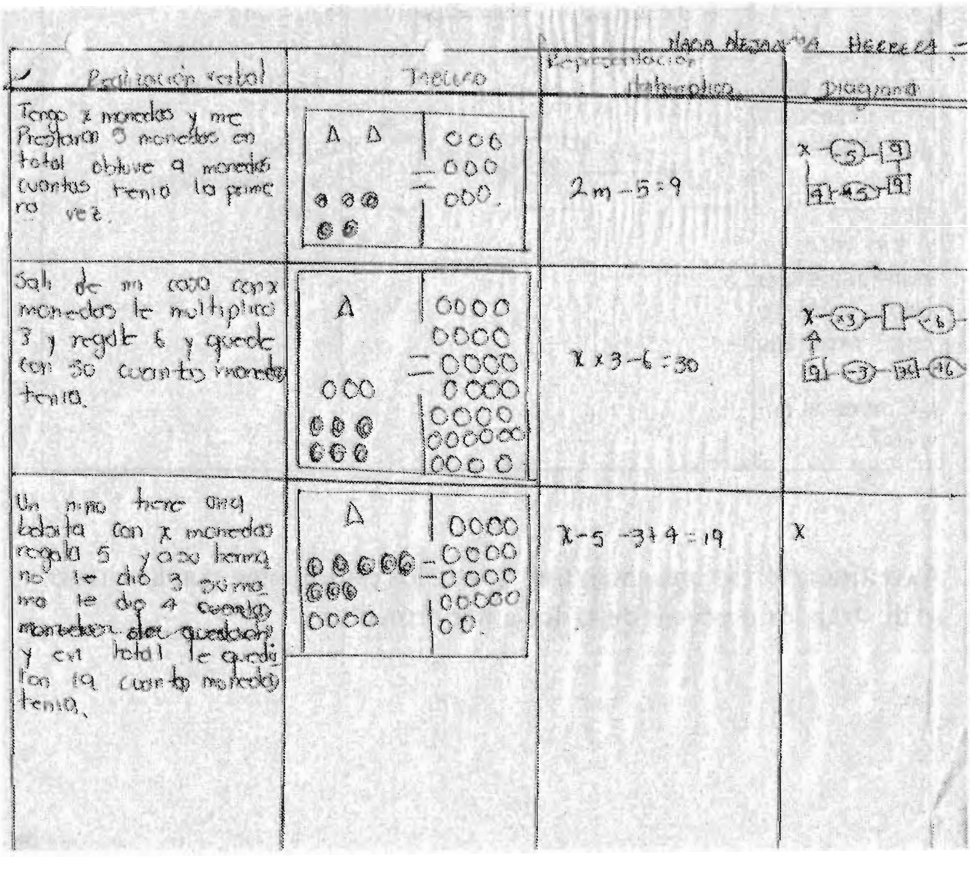
Posteriormente se diseñan talleres que involucran actividades con los tres modelos: la balanza, los diagramas y el tablero de fichas, con la finalidad de que los estudiantes hagan transferencia de un modelo a otro y, además, que al hacer la transferencia pongan en juego los conceptos y procedimientos aprendidos hasta el momento.

Situación presentada en forma verbal		Expresión matemática	Representación en el tablero de fichas
Si a tres veces x se le resta cinco y se obtiene 16 ¿cuánto vale x? Otra forma : A tres veces un número se le resta cinco y se obtiene como resultado 16. ¿Cuál es el número?		$3x - 5 = 16$ $3x - 5 + 5 = 16 + 5$ $3x = 21$ $x = 7$ otra forma con el diagrama en reversa $16 + 5 = 21$ $21 \div 3 = 7$	

A continuación se presentan trabajos de los estudiantes, con los cuales se ilustran los procesos descritos anteriormente.



Realización Verbal	Tablero	Representación Matemática	Diagrama
En los tableros 1. podemos ver que hay 2 triangulos y 9 bolitas negras a la izquierda y a la derecha hay 9 bolitas negras de cimas en el 2 que quedan los dos triangulos a la izquierda y a la derecha hay 75		2m − 5 = 9 2m = 75	



Realización verbal	Tablero	Representación Matemática	Diagrama
Tengo x monedas y me prestaron 5 monedas en total obtuve 9 monedas cuantas tenía la primera vez.		2m − 5 = 9	
Salí de mi casa con x monedas le multiplico 3 y regalé 6 y quedé con 30 cuantas monedas tenía.		x × 3 − 6 = 30	
Un niño tiene una bolsita con x monedas regala 5 y a su hermano le dió 3 su mamá le dio 4 cuantas ~~monedas le quedaron~~ y en total le quedaron 19 cuantas monedas tenía.		x − 5 − 3 + 4 = 19	x

Seguimiento y evaluación

Para efectos de seguimiento del proceso de los estudiantes, se evalúan los siguientes indicadores:

- Argumentar sobre el significado de una ecuación.
- Utilizar diferentes modelos para representar una ecuación.
- Dado un enunciado verbal, representarlo mediante un modelo y escribir su respectiva expresión simbólica.
- Resolver y verificar diferentes ecuaciones, utilizando la propuesta de los modelos en el álgebra: método aritmético, reglas formales, búsqueda experimental, método de la balanza, el tablero, los diagramas e inversión de los mismos.
- Utilizar *software* de matemáticas para resolver las ecuaciones, representarlas gráficamente, verificarlas e interpretar la solución.

Resultados

Con base en la información recogida sobre los procesos desarrollados por los estudiantes en el aula, las intervenciones orales, la información proveniente de los distintos registros, los logros esperados en los estudiantes, se realizó un análisis de la propuesta, en términos de su pertinencia, viabilidad y efectividad.

Los resultados de la propuesta se catalogan como *avances* en el desarrollo del pensamiento algebraico de los estudiantes en los ámbitos que se enuncian, seguidos de los elementos conceptuales más puntuales que fue posible observar y caracterizar:

Nivel de apropiación de los modelos propuestos: balanza, diagramas y tablero de fichas.

En este ámbito los avances se observaron en:

- *Manejo de la propiedad uniforme*: los estudiantes a través de los modelos manifiestan verbalmente la condición de manejar el equilibrio en los lados de la ecuación.

- *Transformación de situaciones físicas a situaciones simbólicas*: dada la representación simbólica, los estudiantes pueden realizar cualquier otra forma de representación planteada en los talleres y plantear situaciones cotidianas que pueden modelarse por la ecuación presentada. (Anexo).
- *Manejo de la reversibilidad*: a través de los diagramas los estudiantes lograron comprender procesos de reversibilidad, que lograron explicar en forma verbal.

Planteamiento y solución de ecuaciones

- *Reconocimiento de los elementos que conforman la ecuación*: especialmente con los tableros de fichas, los estudiantes lograron darles significado a las incógnitas y al hecho de que su valor debe mantener el equilibrio. Tampoco se encuentra en las tareas realizadas por los estudiantes operaciones como $3x + 3 = 4x$, que es frecuente encontrar cuando se utilizan métodos tradicionales.
- *Aplicación de la propiedad uniforme*: ya no se enseñó en forma mecánica procedimientos como, si está multiplicando, pasa a dividir al otro lado y si está sumando pasa a restar; estos procesos fueron interiorizados por los estudiantes a través del trabajo con los modelos.
- *Verificación de resultados:* los estudiantes lograron controlar sus resultados, ya que la solución de la ecuación debía ser coherente con todas las formas de representación que se solicitaron.

Resolución de problemas

- *Análisis de enunciados: transformar el enunciado y ampliar su comprensión por medio de preguntas. Identificación de la incógnita.* En este aspecto, si el estudiante interpretaba mal el enunciado, tanto la ecuación, como la solución de la misma le traía error; por lo tanto, debía devolverse a analizar el problema e identificar los errores. También se evidencia avances en el planteamiento de problemas, lo cual significa que se logró un nivel más alto de interpretación de enunciados.

- Traducción entre distintas representaciones de una misma situación: se observa en las diferentes representaciones utilizadas para realizar los talleres propuestos.
- Empleo de diferentes estrategias de resolución: los diferentes enunciados planteados por el profesor, o por ellos mismos, les permitieron diseñar diferentes estrategias con las cuales llegaban al mismo resultado.
- Verificación de resultados: siempre estuvieron pendientes de analizar la coherencia entre el resultado de la solución de la ecuación y la solución del problema. Se observa en los procesos de argumentación que presentan en los talleres.
- Uso de herramientas tecnológicas en el aula de clase (calculadoras y *software*).

Reflexiones

- El desarrollo de este trabajo permitió dar un buen comienzo al estudio de las ecuaciones, ya que el uso de los diferentes modelos (balanza, diagramas y tablero de fichas) permitió abordar el tema con un enfoque diferente al tradicional. Con el uso de los modelos para resolver ecuaciones lineales, se logró avanzar notoriamente en los conceptos de variable, igualdad, incógnita, ecuación, propiedades de la igualdad, términos semejantes, operaciones de suma resta y multiplicación de expresiones algebraicas.
- La resolución de problemas fue el punto que dio origen al planteamiento de las ecuaciones, procedimiento que en el método tradicional se realiza al contrario; es decir, primero se estudian las ecuaciones y después se desarrollan problemas de aplicación; esta estrategia permitió ubicar las ecuaciones dentro de un contexto asequible al estudiante e hizo que el mismo estudiante planteara sus propios problemas y ecuaciones, lo que les pareció a los alumnos algo novedoso, y despertó en ellos un verdadero interés y entusiasmo por la materia.
- Se amplió el repertorio de problemas que involucran ecuaciones de primer grado, se logró determinar su nivel de complejidad para ubicarlos en los distintos grados escolares, mirar su pertinencia para promover los logros deseados.

Recomendaciones

- El estudio y la enseñanza de las ecuaciones se debe iniciar desde los últimos grados de básica primaria, usando la estrategia de resolución de problemas, presentándolas desde diferentes enfoques y representaciones.
- Proporcionar y crear estrategias didácticas que desarrollen en los alumnos el hábito de lectura y la capacidad de elaborar escritos que expresen coherentemente el pensamiento.
- Experimentar y divulgar las actividades propuestas en este trabajo para que se analicen los alcances, los amplíen, los profundicen y los continúen.

Referencias

Agudelo, C. (2002). Promoción del pensamiento algebraico en primaria. Una propuesta que cobra sentido de acuerdo con nuestras concepciones sobre el conocimiento matemático. En Revista *Aula Urbana*, 37, 18-19. Bogotá: IDEP.

Bell, A. W. (1996). *Research on learning and teaching.* NFER-Nelson. Windsor.

Bransford, J. & Stein, B. (1986). *Solución ideal de problemas. Guía para mejor pensar, aprender y crear*. Barcelona: Editorial Labor.

Cardona, G. (1999). *Módulo alternativas metodológicas* (documento de trabajo). Bogotá: Universidad del Rosario.

Carrillo, J. & Contreras, L. C. (2000). *Resolución de problemas en los albores de siglo XXI: una visión internacional desde múltiples perspectivas y niveles*. Huelva, España: Hergué.

Deulofeu, J. (2002). Resumen comentado del libro *Resolución de problemas en los albores de siglo XXI: una visión internacional desde múltiples perspectivas y niveles educativos.* En *Revista EMA, 7,* (1), 117-119.

Dickson, L (1991). *El aprendizaje de las matemáticas.* Madrid: Editorial Labor.

Fridman, L. M. (1995). *Metodología para resolver problemas matemáticas.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Gardner, H. (1995) *Inteligencias múltiples.* Barcelona: Ediciones Paidós.

Gil, D. & Martínez. (1991). *La enseñanza de las ciencias en la educación secundaria.* Barcelona: Editorial Horsori.

Hitt, Fernando. (1998).Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y currículo. En revista *Educación Matemática.* Vol 10, No 2. Agosto 1998. pp 23-45. Bogotá: Universidad de Los Andes.

Mason, J., Burton, L. & Stacey, K. (1992). *Pensar matemáticamente.* Barcelona: Editorial Labor.

NCTM. (1991). *Estándares curriculares. y de evaluación para la educación matemática.* Sevilla, España: Sociedad Andaluza de Educación Matemática.

Nunokawa, K. (2000). Heuristic strategies and problem situations. En: J. Carrillo y L.C. Contreras (Eds.), *Resolución de problemas en los albores del siglo XXI: una visión internacional desde múltiples perspectivas y niveles educativos.* Huelva, España: Editorial Hergué.

Prada, M. D. & Martínez, I. (1994). *Cómo enseñar el lenguaje algebraico, las ecuaciones y los sistemas. Cuadernos de Matemáticas,* 3. Málaga: Editorial Librería Agora, S. A.

Puig, L. & Cerdan, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares.* España: Editorial Síntesis. pp.183-187.

Rico, Luis & De Guzmán, Miguel. (1997). *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria.* España: Editorial Síntesis.

Santos Trigo, Luz y Sánchez, Ernesto. (1996). *Perspectivas en educación matemática*. México. Grupo Editorial Iberoamerica.

Sadovsky, P. (2001). "Cómo enseñar matemáticas sin morir en el intento". En: *Aula Urbana, 26*, 3. Bogotá: IDEP.

Socas, M., Camacho, M., Palarea, M. y Hernández, J. (1989). *Iniciación al álgebra.* Madrid: Editorial Síntesis.

Torres, L., Valoyes, E. & Malagón, R. (2002). Situaciones de generalización y uso de modelos en la iniciación al álgebra escolar. En: *Revista EMA, 7* (1), 227-246. Editora: Luisa Andrade. Bogotá: Universidad de Los Andes.

INVESTIGACIÓN E INNOVACIÓN

Investigación e innovación educativa y pedagógica Premio 2007

El Instituto para la Investigación y el Desarrollo Pedagógico –IDEP- y la Secretaría de Educación del Distrito Capital Bogotá presentan a los ganadores del Premio a la investigación e innovación educativa y pedagógica de maestras y maestros de colegios oficiales de Bogotá, distribuidos en dos categorías: Categoría 1, *Premio a la investigación educativa y pedagógica:* Investigaciones educativas y pedagógicas, cuyos resultados aportan al mejoramiento y la transformación de la escuela, la enseñanza y los aprendizajes; y la Categoría 2, *Premio a la innovación educativa y pedagógica o experiencia pedagógica*: Proyectos o propuestas de mejoramiento, solución de problemas o dificultades, cambios, transformación o novedad en aspectos, situaciones o problemas de la vida educativa o académica (aula, áreas, currículo, proyectos, etc.) realizados por docentes y directivos docentes.

Investigación e Innovación es un esfuerzo editorial del Idep orientado a divulgar y socializar las investigaciones e innovaciones producidas por el Instituto, así como aquellas que contribuyan a la resolución y comprensión de los problemas de actualidad e interés que atraviesan la educación de la ciudad. La colección quiere ser un medio y una red de circulación de la producción investigativa en el campo de la educación y la pedagogía, que estimule la controversia y contribuya al reconocimiento del papel social de la investigación y su importancia en la formulación de las políticas públicas educativas.

ISBN: 978-958-20-0966-3

9 789582 009663

ALCALDÍA MAYOR DE BOGOTÁ D.C.
Instituto Investigación Educativa y Desarrollo Pedagógico

BOGOTÁ POSITIVA
GOBIERNO DE LA CIUDAD