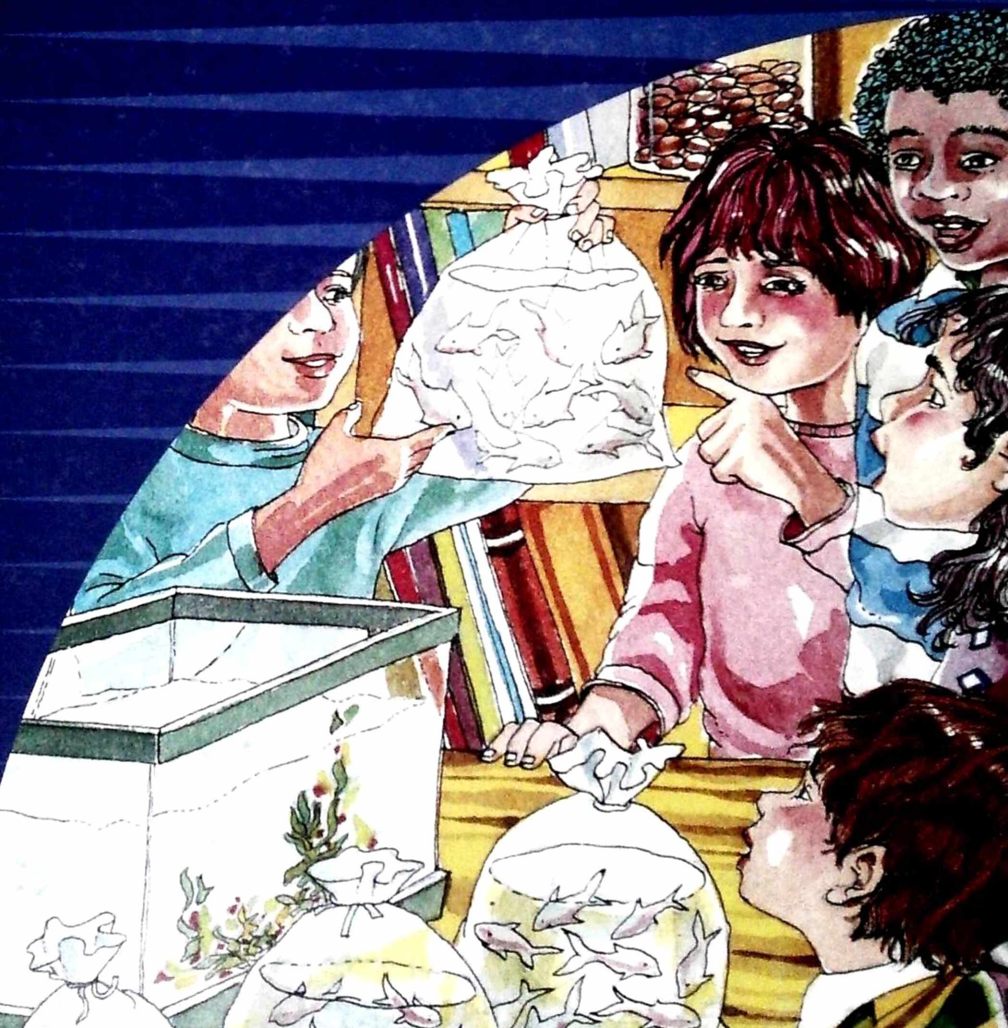
SERIE GUÍAS

Por la Bogotá que Queremos

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS CON ESTRUCTURAS ADITIVAS Y MULTIPLICATIVAS



ALCALDIA MAYOR
SANTA FE DE BOGOTA D.C.
Secretaría
EDUCACION

SOLUCIÓN DE PROBLEMA
CON ESTRUCTURAS
ADITIVAS Y MULTIPLICATI

PROYECTO EVALUACIÓN COMPETENCIAS B

Material de apoyo al trabajo de los docent

ÁREA DE MATEMÁTICAS

Enrique Peñalosa Londoño
Alcalde Mayor de Santa Fe de Bogotá

Cecilia María Vélez White
Secretaria de Educación Distrital

Nohemy Arias Otero
Subsecretaria Administrativa

Jesús Mejía Peralta
Subsecretario Académico

Sylvia Escovar Gómez
Subsecretaria de Planeación y Finanzas

Juana Inés Díaz Tafur
Directora de Fomento a la Calidad de la Educación

Textos de Lenguaje: Rosa Julia Guzmán Rodríguez
Textos de Matemáticas: Marina Ortiz Legarda
Integrante de la Asociación Anillo de Matemáticas
Edición: Marta Osorno Reyes
Coordinación Editorial:
Corporación para el Desarrollo de la Educación Básica
CORPOEDUCACIÓN
Diseño y Armada electrónica: Patricia Montaña Domínguez
Ilustración cubierta: Elías Taffur Miranda
Ilustración: Patricia Montaña Domínguez

Primera edición 10.000 ejemplares
Santa Fe de Bogotá, noviembre de 1999

Tabla de Contenido

Presentación

La Secretaría de Educación Distrital, en su plan sectorial para el período 1998 - 2001, se propone mejorar los resultados de la acción educativa, definidos en términos de las competencias y valores que se espera desarrollen todos los estudiantes durante su paso por las instituciones educativas.

Como parte de este propósito, realizó una evaluación censal de competencias básicas en Lenguaje y Matemáticas, aplicada a los estudiantes de tercero y quinto grados de Educación Básica del Distrito Capital, en el segundo semestre de 1998. La Universidad Nacional de Colombia tuvo a cargo la orientación académica de este proceso.

Los resultados de esta evaluación permitieron identificar algunos aspectos que requieren un mayor trabajo en las escuelas, tanto en el área de Lenguaje como en el área de Matemáticas.

El material que se presenta en esta colección de módulos aporta elementos de las dos áreas mencionadas, y tiene como propósito apoyar el trabajo de los docentes, con el ánimo de contribuir así en el mejoramiento de la educación.

Este material, está constituído por cinco módulos para el área de Lenguaje y cinco para el área de Matemáticas, que trabajan los siguientes aspectos:

- Una reflexión general sobre la temática que aborda el módulo.
- Unos aportes conceptuales que ayudan al maestro a una mejor comprensión de la situación y le dan la posibilidad de generar actividades propias en su aula.
- Unas sugerencias para trabajar con sus alumnos, que incluyen tanto la exposición de ideas, como la presentación de actividades concretas que pueden ser utilizadas directamente por los profesores con sus alumnos.
- Unas reflexiones, presentadas en forma de taller para los docentes, con el propósito de que sean compartidas en grupo, enriquezcan la discusión sobre cada tópico y generen la búsqueda de alternativas realizables en cada escuela.
- Unas sugerencias bibliográficas, para apoyar el estudio de los docentes sobre cada tema.

Las secciones presentadas en cada módulo se complementan mutuamente, y tienen la intención de aportar elementos en la construcción del discurso pedagógico necesario para sustentar las prácticas educativas particulares de cada institución escolar. Se trata además, de propuestas didácticas que pueden ser implementadas con los recursos que las instituciones educativas oficiales poseen, por lo que es de esperarse que su aplicación y seguimiento se den, en la perspectiva de mejorar los resultados que nuestros estudiantes están presentando en el momento.

Los temas desarrollados en cada uno de los módulos son los siguientes:

Lenguaje

1. Producción de textos
2. Comprensión de lectura
3. La escritura y la escuela
4. La lectura y la escuela
5. La comunicación

Matemáticas

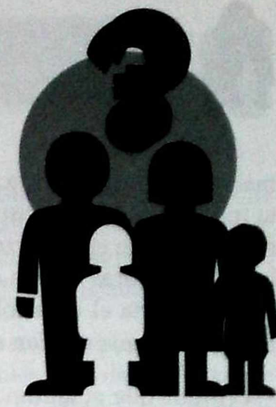
1. Manejo de códigos matemáticos
2. Sistemas de numeración con valor posicional
3. Solución de problemas con estructuras aditiva y multiplicativa
4. Solución de problemas que requieren inferencias lógicas
5. Desarrollo del pensamiento espacial y geométrico

Otro propósito de los módulos es el de someter a la consideración de los docentes una(s) forma(s) de orientar la actividad didáctica, que han dado resultados exitosos en procesos investigativos, con el fin de proporcionar otros referentes, otros puntos de vista, que enriquezcan la discusión y amplíen los horizontes de comprensión de la complejidad del acto pedagógico, pero que también contribuyan a lograr resultados de mayor calidad en las áreas de Lenguaje y de Matemáticas.

El logro del anterior propósito podrá establecerse en la medida en que ocurran, como resultado de la distribución del material, las siguientes situaciones:

- El material sea recibido efectivamente en las instituciones educativas.
- Su contenido sea objeto de lectura y análisis cuidadoso por parte de los docentes y demás integrantes de la comunidad educativa interesados en su contenido y funcionalidad.
- Los docentes decidan experimentar en las aulas, como parte del Proyecto Educativo Institucional, las propuestas didácticas contenidas en los distintos módulos.
- El proceso de experimentación esté acompañado permanentemente por el intercambio de las experiencias particulares, en reuniones de área o en consejos de maestros.
- Los grupos de docentes compartan su experiencia con colegas de otras instituciones.
- Se comience el diseño de categorías de análisis que permitan establecer si los nuevos resultados son o no de mejor calidad que los anteriores.
- Se comunique a la Secretaría de Educación algunos de los resultados obtenidos con los estudiantes, tanto en lo afectivo como en lo cognitivo.

REFLEXIÓN



ACERCA DEL DESARROLLO DE LA AUTONOMÍA

La formación de los estudiantes en la autonomía o el desarrollo de procesos autónomos en el aula es uno de los aspectos que más preocupan e interesan a la mayoría de los docentes y directivos docentes; prueba de ello es la considerable cantidad de Proyectos Educativos Institucionales que identifican la **autonomía** como el eje conductor de su proceso educativo.

Sin embargo, al igual que en los diversos aspectos que tienen que ver con educación matemática y con educación en general, los puntos de vista, las concepciones, los enfoques acerca del desarrollo de la autonomía son muy diversos.

A continuación se presentan algunos elementos teóricos de tipo psicológico y afectivo con los que se pretende aportar a la discusión de lo que significa desarrollo de la autonomía.

Un niño (o un adulto) es autónomo cuando es capaz de tomar sus propias decisiones, pero no teniendo en cuenta únicamente sus propios puntos de vista, sino considerando que su acción involucra a otras personas y, en algunos casos, concierne a todos.

Piaget, quien aportó de manera significativa al desarrollo y comprensión de esta temática, propuso dos ámbitos para su desarrollo: la autonomía moral y la autonomía intelectual y postuló la autonomía como principal finalidad de la educación.

Para los dos ámbitos, Piaget planteó que la autonomía significa ser gobernado por sí mismo (en contraposición con heteronomía que significaría ser gobernado por los demás).

Sin embargo, se trata de un planteamiento que ha sido interpretado y aplicado de una manera equivocada, porque se le ha identificado con el "dejar hacer" o el "hacer lo que uno quiera" que no corresponde, en forma alguna, a la teoría piagetiana. (Kamii, *La autonomía como finalidad de la educación*, pp. 2 – 8).

En el desarrollo de su propuesta, Piaget hizo aportes muy importantes acerca de la manera como los docentes y la institución escolar pueden trabajar para el desarrollo de la autonomía moral e intelectual en los niños.

A partir de su planteamiento básico según el cual el desarrollo de la autonomía significa en resumen "llegar a ser capaz de pensar por sí mismo, con sentido crítico, teniendo en cuenta muchos puntos de vista, tanto en el ámbito moral como en el intelectual", Piaget identificó las características de una acción educativa que sí posibilitaría el desarrollo de la autonomía. Estas tienen que ver con elementos como:

- Permitir que el alumno encuentre sus propias respuestas; que haga sus propios descubrimientos.

- Promover la confrontación respetuosa y tolerante de distintos puntos de vista.

- Optar por la **reciprocidad** como determinante de la propia moralidad; reciprocidad que aparece "cuando el respeto mutuo es suficientemente fuerte para hacer que el individuo sienta el deseo de tratar a los demás como él desearía ser tratado". (Piaget, *El juicio moral en el niño*, p. 196).

- Superar paulatinamente el premio o el castigo (que pueden estar representados por la calificación) como estímulo o motor para el comportamiento, reemplazándolo por lo que Piaget llama el intercambio permanente de puntos de vista entre adultos y niños a fin de tomar la decisión más favorable o más benéfica para todos.

UNA OPCIÓN FRUCTÍFERA: COLOCAR A LOS ALUMNOS EN ZONA DE DESARROLLO PRÓXIMO

En el proceso de aula, en la interacción permanente docente-alumno-conocimiento, es donde se pueden crear, de manera específica, las condiciones para que se consoliden formas de desarrollo de la autonomía tanto moral como intelectual.

Uno de los aportes más valiosos en este campo fue el que propuso Vigotsky cuando formuló su concepto de zona de desarrollo próximo. Se parte de considerar el desarrollo de los niños en dos ámbitos:

- El desarrollo **real**, que se puede establecer en relación con lo que el niño puede hacer **por sí solo** (alcanzar un juguete, amarrarse los zapatos, dibujar un cuadrado, resolver una suma, ...).

- El desarrollo **potencial**, que se establece en relación con lo que el niño puede hacer con la **orientación o la guía** de un adulto o de otro niño más adelantado.

Cuando el adulto (en este caso, el maestro) crea las condiciones para que el niño, a partir de lo que ya sabe o de lo que ya es, realice tareas nuevas o descubra lo que en el momento es desconocido para él, está colocando al niño en zona de desarrollo próximo.

Es decir, la zona de desarrollo próximo es, según Vigotski, la **distancia** entre el desarrollo real y el desarrollo potencial; pero esa distancia no existe en la mente o en las estructuras cognitivas del niño, sino que debe ser creada por el adulto (el docente) durante el proceso de aprendizaje. (Wertsch, *Vigotski y la formación social de la mente*, pp. 75 – 92).

Cuando se crea la zona de desarrollo próximo, el maestro no le da al niño toda la información, no le enseña todos los pasos: le permite descubrir, encontrar, deducir, inventar, pero no en forma espontánea y azarosa pues son necesarias las condiciones propicias para que el descubrimiento o la creación se realicen; en ello radica la riqueza del proceso didáctico.

Ejemplos de la forma como se puede colocar a los alumnos en zona de desarrollo próximo son la elaboración de procesos de reversa de las diferentes acciones, y la realización de acciones similares a las ya efectuadas, pero en condiciones nuevas:

a. Cuando los niños ya se han apropiado del juego en base 2 (en el juego del ábaco) no es necesario decirles cómo funciona el juego para la base 3; cualquier niño normal puede proponerlo si el maestro le pregunta: si el juego es así formando grupos de 2, ¿cómo será el juego formando grupos de 3?

b. De igual manera, cuando los alumnos se han apropiado de la forma general del juego de derecha a izquierda, poseen las condiciones (desarrollo real) para describir y proponer las reglas del juego de izquierda a derecha (desarrollo potencial).

El hecho de permitir a los alumnos, de manera permanente, el acceso autónomo a niveles de aprendizaje para los que ya están capacitados (preparados) posibilita la aparición de rasgos del desarrollo de su personalidad como los siguientes:

- Confianza en su propia capacidad para lograr los aprendizajes.
- Respeto y consideración por los intentos de sus compañeros por lograr esos mismos aprendizajes, puesto que se trata de esfuerzos análogos y, de alguna manera, colectivos o compartidos.
- Disposición permanente para colaborar con otros compañeros.
- Progresivos niveles de autoconfianza y autoestima, componentes esenciales de la autonomía tanto moral como intelectual.
- Superación de la dependencia del maestro: poco a poco los alumnos van necesitando menos de la voz de aprobación del maestro, que es lo que tradicionalmente les da seguridad, puesto que cuentan con instrumentos propios para el control de su actividad.
- Entusiasmo por un trabajo que sí puede realizar, lo cual se traduce en el deseo de seguirse ejercitando por su cuenta, es decir, de imponerse sus propias tareas.

La formación de personas autónomas debe irse reflejando paulatinamente en el hecho de que los alumnos cumplen con sus compromisos académicos y de convivencia porque deciden hacerlo, porque ello forma parte de su ser o de su conciencia, porque disfrutan haciéndolo y no porque se les premia, se les castiga o se les otorga un "aprobado" o un título.

Es decir, los alumnos convierten el estudio y la convivencia sana en **necesidades vitales** para ellos, en actividades cuya realización es imprescindible en sus vidas; hacia ese horizonte deberán marchar las propuestas educativas de las instituciones escolares.

El trabajo en la solución y formulación de problemas aditivos y multiplicativos es una buena disculpa para desarrollar la autonomía de los niños.

Resolver un problema es encontrar un camino allí donde no se conocía previamente camino alguno, encontrar la forma de salir de una dificultad, encontrar la forma de sortear un obstáculo, conseguir el fin deseado, que no es conseguible de forma inmediata, utilizando los medios adecuados. (G. Polya en: *Krulik y Reys* 1980, p.1).

La solución de problemas es el proceso por el que los niños experimentan la potencia y la utilidad de las matemáticas en el mundo que les rodea. Es también un método de indagación y aplicación.

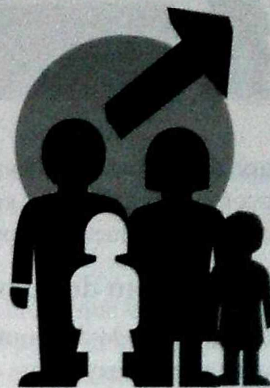
Reflexión

Las situaciones de problema pueden establecer la necesidad de saber y fomentar la motivación para el desarrollo de conceptos.

Cuando la resolución y formulación de problemas pasa a ser una parte integrante de la docencia en el aula y los niños van teniendo éxito en esta tarea, ganan autonomía y confianza en el uso de las matemáticas y desarrollan una mente perseverante.

De la misma manera, aumenta su capacidad para comunicarse matemáticamente y para utilizar procesos de pensamiento de más alto nivel.

Aporte conceptual



Solución de problemas: estrategia didáctica fundamental

La solución de problemas es considerada por numerosos pedagogos de las matemáticas la actividad fundamental que se debe trabajar en esta área; es así como muchos de ellos no dudan en afirmar que "hacer matemáticas es ocuparse de resolver problemas".

En ese orden de ideas, el trabajo escolar en matemáticas que privilegia, por ejemplo, la identificación y escritura de cantidades, el manejo de algoritmos, o el reconocimiento de propiedades de las operaciones, no estaría posibilitando que los estudiantes **hagan matemáticas,** a no ser que cada vez que inquiera por esos contenidos, coloque a los alumnos en la perspectiva de solucionar un problema.

Por otra parte, la capacidad para resolver problemas se considera actualmente como la expresión de una de **las conductas más inteligentes del hombre,** razón por la cual es un propósito que se ha convertido en la preocupación central de la educación matemática.

Atendiendo a los objetivos de la publicación, se presentarán a continuación elementos teóricos y didácticos relacionados con algunos de los desempeños evaluados en la prueba de competencias básicas en lenguaje y matemáticas, aplicada a los alumnos de 3° y 5° grados en noviembre de 1998.

- Resolver problemas mediante la combinación de estructuras aditivas y multiplicativas.

- Comprender y controlar la resolución de problemas con estructura aditiva y multiplicativa realizando inferencias lógicas.

Los dos desempeños citados, pertenecientes a los niveles de competencia 2 y 3, respectivamente, "uso de códigos matemáticos" y "explicación del uso", poseen el rasgo común de la formación de estructuras aditivas y multiplicativas, que se abordarán en este módulo.

Los aspectos relacionados con la realización de inferencias lógicas tendrán tratamiento específico en el módulo titulado "Problemas con inferencia lógicas".

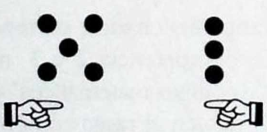
La estructura aditiva

Si se entiende a la **estructura aditiva** como la capacidad que se posee para identificar, comprender y abordar las situaciones en las que tienen aplicabilidad las operaciones suma y resta, se deduce que su desarrollo implica o requiere la apropiación de los siguientes conceptos, cada uno de los cuales conlleva un nivel de entendimiento propicio para la comprensión de enunciados y la solución de problemas:

1. Concepto de Suma

Como resultado de **reunir** a dos cantidades en una tercera (mayor que cualquiera de las dos originales), o **añadir** una cantidad a otra. Las acciones reunir y añadir significan interpretaciones didácticas análogas de la acción de sumar, pero conducen a consecuencias didácticas distintas. (Maza, Carlos. *Sumar y restar. El proceso de enseñanza-aprendizaje de la suma y de la resta.* Pág. 10).

- En efecto, cuando se piensa la suma como el resultado de **reunir** dos cantidades, lo que se infiere es el acercamiento simultáneo de las dos cantidades, una a la otra, para reunir una tercera cantidad, mayor que cualquiera de las dos originales.



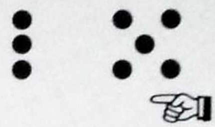
Las dos manos se mueven simultáneamente al reunir la cantidad de 5 fichas con la cantidad de 3 fichas y formar la nueva cantidad de 8 fichas.

Esta interpretación se identifica, asimismo, con una **concepción formal de suma** según la cual a todo par de números naturales le corresponde, a través de la operación suma, otro número natural, situación expresada simbólicamente como

$$+ : N \times N - N$$

Se trata de una concepción en la que la suma es considerada una operación binaria pero de **carácter estático**, puesto que los 2 sumandos permanecen inalterados hasta cuando se efectúa la operación.

- Cuando se piensa la suma como el resultado de **añadir** una cantidad a otra, la segunda cantidad (la que se añade) adquiere un papel transformador de la primera cantidad.



La cantidad de 5 fichas se acerca a la cantidad de 3 fichas, se agrega a ella para formar la cantidad nueva de 8 fichas.

La concepción formal de suma que corresponde a la segunda interpretación considera la suma como una operación en la que ocurre la siguiente situación: dado un número natural **k**, a todo número natural **a** le corresponde otro número natural **a + k**, lo cual se simboliza como

$$+ k : N - N$$

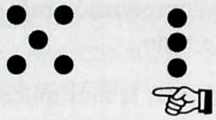
En el ejemplo ilustrado, en el que $k = 5$, la aplicación de N en N, tomaría la forma

$$+ 5 : N - N$$
$$+ 5 : 1 - 6$$
$$+ 5 : 2 - 7$$
$$+ 5 : 3 - 8$$
$$\ldots$$
$$+ 5 : 17 - 22$$
$$+ 5 : 35 - 40$$

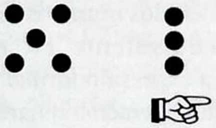
En este caso, la suma es considerada como una operación unitaria y posee **carácter dinámico** o de **operador** ya que uno de los sumandos actúa como herramienta para transformar al otro sumando.

2. Concepto de Resta

Como resultado de **quitar** una cantidad a otra mayor. Generalmente, la resta, asumida como la operación inversa de la suma, parte de la concepción de suma como operación unitaria, enfoque que facilita la acción de quitar o retirar la cantidad que se había añadido en la primera oportunidad.



Acción de **añadir** una cantidad a otra.



Acción de ***quitar*** la cantidad añadida.

Como la resta no es conmutativa, la interpretación más usual es la de **operación unitaria**, puesto que a una cantidad se le quita otra, y no es común la interpretación de que las dos actúen simultáneamente.

Por lo tanto la concepción formal que generalmente se maneja es la que asigna a cada número natural n otro número natural **n – k**, a través de la operación resta (con la aclaración de que el primer conjunto sería realmente **Nk**, formado por los números naturales mayores que k, para asegurar que la operación tenga respuesta y sí se configure una función o aplicación:

$$\mathbf{-\,k : Nk - N}$$

Sin embargo, la consideración de la resta como operación binaria no puede omitirse, por cuanto los elementos de $N \times N$ son pares sujetos a un orden y se puede considerar la aplicación *resta* entre los conjuntos N y $N \times N$:

$$- : N \times N - N$$

Lo que se puede concluir es que la concepción más funcional desde el punto de vista didáctico, de las operaciones suma y resta, es la que las considera operaciones unitarias.

El hecho de adjudicar papeles diferentes a los conjuntos que intervienen, facilita la comprensión de la resta como operación inversa de la suma y posibilita la comprensión de las diferentes situaciones que los alumnos enfrentan en la solución de problemas, en las cuales deben dar respuesta a cuestiones como:

$$6 + ? = 8$$

$$? + 4 = 7$$

$$3 + 9 = ?$$

$$7 - ? = 4$$

$$? - 2 = 9$$

$$10 - 5 = ?$$

3. Relación parte – todo

En la construcción del significado de las operaciones aritméticas juega un importante papel la relación parte-todo, en la que intervienen el **todo** como conjunto completo y las **partes** o subconjuntos.

Cuando la relación parte-todo se establece entre números o cantidades, cumple las siguientes propiedades:

a. Cuando se descompone el todo, se obtienen una o más partes.

b. Al reunir todas las partes se obtiene como resultado el todo.

c. Cada parte es menor que el todo.

En el caso de las operaciones adición y sustracción la relación parte-todo adquiere la siguiente forma:

Adición

1. Las partes no son necesariamente iguales. **Ejemplo.** Francisco tiene 9 carritos y Nelson tiene 7 carritos.
2. Dadas las partes, se puede conocer el todo. Para el ejemplo anterior se podría preguntar: ¿cuántos carritos tienen entre los dos niños?
3. Dada una parte y el exceso de otra parte sobre ella, hallar la otra parte. **Ejemplo.** Sandra tiene 15 conchas y Marina tiene 3 conchas más que Sandra. ¿Cuántas conchas tiene Marina?

Sustracción

1. Si se conoce el todo y una parte, hallar la otra parte. **Ejemplo.** Entre Camilo y Marcela reúnen $ 450. Si Camilo tiene $ 230, ¿cuánto tiene Marcela?
2. Hallar el exceso de una parte sobre otra. **Ejemplo.** Felipe camina 18 cuadras y Mercedes camina 22 cuadras. ¿Cuántas cuadras más camina Mercedes?
3. Si se conoce una parte y su exceso sobre otra, hallar la otra parte. **Ejemplo.** Martín tiene 15 años. Si tiene 5 años más que Liliana, ¿cuántos años tiene Liliana?

La ejercitación, mediante las propuestas didácticas correspondientes, de la relación parte-todo (principalmente mediante la solución de problemas) permite el fortalecimiento de la **estructura aditiva.**

ESTRUCTURA MULTIPLICATIVA

La estructura multiplicativa se refiere, por su parte, a la capacidad para identificar, comprender y abordar las situaciones cuya solución requiere la aplicación de las operaciones multiplicación y división. El desarrollo de la estructura multiplicativa está basado en la apropiación de los conceptos de las dos operaciones y también de una comprensión más compleja de la relación parte-todo.

Al igual que la suma, la multiplicación se asume como operación unitaria o como operación binaria.

a. Como operación binaria, en la multiplicación intervienen dos números (factores) con un papel equivalente en el proceso operatorio. La expresión formal de la multiplicación como operación binaria la identifica como una aplicación de $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ en el mismo conjunto **N**.

$$N \times N \to N$$

$$(2, 7) \to 14$$

$$(1, 8) \to 8$$

$$(2, 3) \to 6$$

$$(5, 9) \to 45$$

Desde el punto de vista de las matemáticas la multiplicación como operación binaria tiene un carácter más general y, por lo tanto, más acorde con las reglas del funcionamiento matemático. (Maza, 1991, pág. 17).

b. Como operación unitaria, la multiplicación se piensa de una manera más restringida, más particular, y su expresión formal sería, por ejemplo:

$$\begin{array}{rcl} N & \to & N \\ 5 & \to & 30 \\ 6 & \to & 36 \\ 12 & \to & 72 \\ 100 & \to & 600 \end{array}$$

Es decir, en este caso, la aplicación de $N \times N$ en N se obtiene de multiplicar cualquier número natural por 6; otras aplicaciones se obtendrían, por consiguiente, cuando se multiplique por otros números naturales.

La práctica escolar más común, según la cual la multiplicación se define como una "suma repetida o reiterada", corresponde más a la concepción de multiplicación como operación unitaria en la que los factores tienen roles distintos y además son números de naturaleza diferente: uno de ellos es el cardinal de un conjunto de elementos (generalmente el segundo), mientras el otro es el cardinal de un conjunto de conjuntos (generalmente el primero). Por ejemplo:

Si se piensa 2×6 como 2 veces 6, entonces:

6 es la cantidad de **elementos** del conjunto que se repite.

2 es la cantidad de **conjuntos** de 6 elementos que deben formarse.

La concepción de multiplicación como operación unitaria es la que resulta más sencilla y accesible en los procesos de aprendizaje; de todas maneras el carácter de operación binaria se adquiere paulatinamente, cuando el proceso escolar apunta a la verificación de las propiedades de la multiplicación.

Por su parte, la relación parte–todo adquiere aquí una característica particular, por cuanto debe agregársele la condición de "partes iguales" (que no es necesaria para la estructura aditiva); de esta manera la relación parte–todo se convierte también en elemento fundamental de la noción de fracción, la cual forma parte del campo conceptual de la estructura multiplicativa.

En el caso de las operaciones multiplicación y división y para el concepto de fracción, la relación parte–todo adquiere la siguiente forma:

1. La multiplicación

- La reunión de partes iguales da como resultado el todo.
- La cantidad de partes iguales y el contenido de cada parte se asocian al concepto de divisor.
- Los "todos" referidos a una parte determinada se asocian al concepto de múltiplo.
- Surge un significado de área.

2. La división

- Hallar el contenido de cada parte, conocido el número de partes.
- Hallar el número de partes si se conoce el contenido de cada parte.
- Entender la división como restas sucesivas. (Campistrous y otro, *Aprende a resolver problemas aritméticos*, pág. 2).

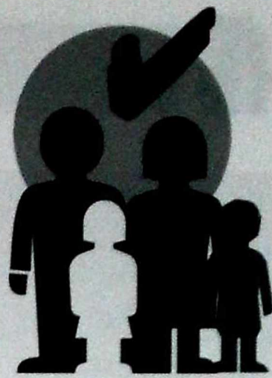
3. Concepto de fracción

Las siguientes son condiciones que se proponen para lograr la comprensión del concepto de fracción en su "faceta espacial", es decir, la que enfatiza en unidades o "todos" representados en áreas de figuras planas: (Piaget, J. citado por Dickson y otros. *El aprendizaje de las matemáticas*, pág. 297).

- Una región unitaria o entera se considera divisible.
- Las partes deben ser de igual tamaño.
- El todo puede ser dividido en cualquier número de partes.
- Cada parte puede ser considerada, a su vez, como todo.

El desarrollo o la formación de las estructuras aditiva y multiplicativa, incluye, entre otros, los elementos conceptuales anteriores, los cuales adquieren sentido en el ámbito de la lectura, análisis y solución de problemas. Es decir, se trata de desempeños que van lográndose casi en forma simultánea y su consecución está relacionada con la forma como se gradúen los niveles de dificultad durante el proceso didáctico, dependiendo del grado escolar en el que se esté trabajando.

PROPUESTA DIDÁCTICA



SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

La propuesta didáctica para solución de problemas que se presenta a continuación, para su discusión y análisis, ha sido ya experimentada con estudiantes de educación básica; el grado en que se aplique debe ser decidido por cada grupo de docentes, después de acordar la orientación y contenidos que tendría en cada grupo de alumnos.

Más que dar recetas o listar problemas para resolver con los alumnos de un grado u otro, presenta las reflexiones necesarias y los elementos para que cada docente diseñe la estrategia que mejor se acomode a sus alumnos y a él mismo.

La propuesta contempla los siguientes aspectos:

1. Solución de problemas con enunciados completos (sin condiciones faltantes o sobrantes).
2. Reconstrucción de enunciados.
3. Invención de problemas.

1. Solución de problemas con enunciados completos

La forma más tradicional de introducir a los niños en el trabajo de solución de problemas ha sido la presentación de enunciados completos. Esta actividad podría orientarse de la siguiente manera:

1.1 Comprensión de los conceptos incluidos en el enunciado

Representa el requisito primero e indispensable para el cumplimiento exitoso de la tarea de resolver un problema.

La comprensión de los conceptos que el enunciado involucra se logra mediante el diálogo productivo entre el docente y sus alumnos; en dicho diálogo se debe hacer explícito el significado y el sentido que cada uno de los conceptos que trae el enunciado representa para el grupo.

Con el fin de ilustrar lo que aquí se plantea, vale la pena analizar lo sucedido con tres de los problemas que formaron parte de la evaluación censal de competencias básicas en matemáticas.

a. Item 8 – Grado 5° (Escenario: paradero de las flotas).

> Mientras esperábamos, mi mamá vio una amiga y...
>
> – Julita qué dicha verla. ¿Para dónde va?
>
> – De paseo a Girardot. Isabelita querida, los de la fábrica contratamos ese bus, el 222.
>
> – Qué rico, y ¿cuántos van?
>
> – No sé, pero vamos doce mujeres y hay tres hombres por cada mujer, así que en total vamos:

1	4 pasajeros
2	15 pasajeros
3	36 pasajeros
4	48 pasajeros

Los porcentajes para cada una de las respuestas fueron:

Respuesta1: 2%
Respuesta 2: 56%
Respuesta 3: 29%
Respuesta 4: 12%

Pero más preocupante y notorio que este bajo resultado para la respuesta correcta es el alto porcentaje (56%) que optó por la respuesta 2: 15 pasajeros. No es difícil deducir la forma como ese grupo de alumnos interpretó o dió significado a las condiciones del problema, lo cual ha sido corroborado con algunas entrevistas. La información fue interpretada como si la parte final del problema hubiera sido enunciada en los siguientes términos:

– No sé, pero vamos doce mujeres y tres hombres, así que en total vamos…

Es decir, la información fue interpretada atendiendo solamente a los datos numéricos, doce y tres; lo demás se consideró irrelevante, o la capacidad que se había logrado para comprender lo que el problema planteaba no permitió acceder a una interpretación cabal de la situación.

La opción 3 (36 pasajeros) que fue seleccionada por el 29% de la población implica que el enunciado del problema, en su parte final, haya sido entendido como:

– No sé, íbamos a viajar doce mujeres y además tres hombres por cada mujer; pero ahora solamente van a viajar los hombres, así que en total van…

Los alumnos que contestaron de esta manera no fueron conscientes de que en el bus viajarían mujeres y hombres y que era necesario atender a la relación que establecía el enunciado para encontrar el número total de pasajeros; interpretaron acertadamente la información "tres hombres por cada mujer" pero no pudieron completar el análisis de la situación.

Por supuesto que ni el docente de matemáticas ni el grupo de estudiantes pueden prever todas las posibles relaciones de orden lógico y numérico que van a encontrar en los problemas que se les propongan; pero sí es posible trabajar en forma permanente para lograr la disposición necesaria a fin de no enfrentar la solución de un problema (sea de matemáticas o de cualquiera otra índole) sin haber intentado comprender lo mejor posible las condiciones, los elementos, los **conceptos** que el problema involucra.

El proceso didáctico en el aspecto de la comprensión del enunciado de un problema consiste en la lectura, análisis y discusión del contenido de algunos enunciados que el docente y los niños seleccionen como los más significativos porque se refieren a las nociones matemáticas que más aparecen en las situaciones escolares y cotidianas.

Por ejemplo, para el caso del problema que nos ocupa, se podría seguir un proceso como el siguiente:

- Lectura del enunciado en voz alta.
- Preguntas orientadoras:
  – ¿En cuál de las frases del enunciado está la información indispensable para resolver el problema?

- ¿Qué es lo que el problema pregunta, en definitiva? (es necesario hacer explícito que el problema pregunta por el **total** de personas que van a viajar, no solamente hombres o no solamente mujeres).
- ¿Qué significa la expresión hay tres hombres por cada mujer?
- ¿El problema dice que sólo viajan hombres?, ¿que sólo viajan mujeres?
- ¿El número del bus, 222, es necesario para encontrar la respuesta que pide el problema?

• Acuerdos del grupo sobre lo que el problema pregunta.

Aunque parezca una actividad complicada o engorrosa, realmente resulta ágil y productiva, porque al ser de naturaleza colectiva, en su desarrollo hacen presencia múltiples códigos y experiencias de tipo cultural que poseen los alumnos, unos más que otros, y que contribuyen para que la comprensión por parte de todo el grupo sea más cualificada.

b. Item 11 – Grado 3° (Escenario: campo deportivo)
Con este problema se presentó una situación parecida a la anterior.

Luego que aceptamos los errores y que el profe reconoció nuestro esfuerzo, nos reímos de unas jugadas que les hicimos y terminamos riéndonos de nosotros mismos. Vimos entonces la necesidad de entrenar y el profe nos propuso dos opciones: entrenar 40 minutos durante dos mañanas o 70 minutos una tarde. Como a Felipe no le gusta mucho el deporte, escoge entrenar el menor tiempo posible, o sea

1	cualquier opción da igual.
2	las mañanas.
3	la tarde.

Los porcentajes de respuestas dadas por los alumnos entre quienes se aplicó la prueba fueron los siguientes:

Respuesta 1: 18%
Respuesta 2: 52%
Respuesta 3: 28%

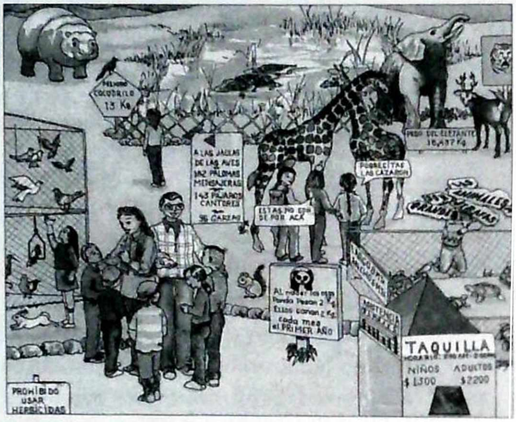
El alto porcentaje de alumnos (52%) que seleccionó la opción 2: las mañanas, no obran así porque no comprendan que 70 es menor que 80 sino porque hicieron la comparación entre 40 y 70 que son los datos numéricos evidentes que propone el enunciado. Es decir, atendieron al dato 40 minutos, pero no al dato "durante dos mañanas", lo cual revela una lectura superficial del enunciado y un énfasis dirigido a los datos numéricos, en detrimento de la atención que requieren, igualmente, los datos presentados con palabras.

c. Item 30 – Grado 5° (Escenario: zoológico).

Mi tío nos dijo: "hoy pagué las cuatro entradas de niños y las dos de adultos con un billete de $20.000. Al que descubra cuánto me devolvieron, le regalo ese dinero". Corrimos a la taquilla y a cada uno nos dio un resultado diferente. El correcto es:

1	$11.600
2	$10.600
3	$10.400
4	$9.600

Porcentajes de respuestas:
Respuesta 1: 19%
Respuesta 2: 9%
Respuesta 3: 30%
Respuesta 4: 35%



Tal como se ve en el facsímil de la ilustración proporcionada a los niños para resolver la prueba, la información complementaria del problema decía que la entrada de un niño valía $1.300 y la de un adulto, $2.200. Por lo tanto, los alumnos que optaron por la respuesta 3 (30% de la población) manejaron la información completa; pero un porcentaje superior (35%) que optó por la respuesta 4 interpretó la pregunta como si se refiriera solamente al costo de las entradas y no al dinero devuelto.

Esta es otra situación que también revela que los alumnos no tienen en su formación matemática la disposición, la disciplina o la cultura, si se quiere, de la lectura juiciosa del enunciado junto con el interés por descubrir lo que allí se informa y se pregunta.

Algunos conceptos frecuentes

Existe una serie de conceptos que aparecen en la matemática escolar y en la vida cotidiana con bastante frecuencia, por lo que la mayoría de los docentes induce que su comprensión es obvia o espontánea; aunque algunos alumnos, por su experiencia de vida, dan cuenta de ellos con mayor propiedad que otros, también aquí son necesarios el diálogo y los acuerdos, a fin de lograr un nivel de comprensión más equitativo.

Los conceptos mencionados son, entre otros:

- Precio de compra o de venta un artículo.
- Posibles relaciones entre precio de compra y precio de venta.
- Ganancia o pérdida total y por artículo.
- Distancia recorrida por un vehículo durante determinado tiempo.
- Velocidad del mismo vehículo.

Por otra parte, los enunciados incluyen unas expresiones, unas formas de decir, que no son siempre herramientas lingüísticas familiares para todos los estudiantes.

Son expresiones del tipo:

- A es tantas **unidades** mayor que B (o el exceso de A sobre B es de tantas unidades).
- A es tantas **veces** mayor que B.

Aunque se trata de situaciones parecidas, cada una de ellas remite a relaciones numéricas diferentes, por cuanto la primera se resuelve mediante una adición y la segunda mediante una multiplicación, situación que no es siempre clara para los estudiantes; además, se trata de elementos básicos de la estructura aditiva y la estructura multiplicativa, respectivamente, por lo que su comprensión adquiere gran importancia.

Algo similar ocurre con:

- C es tantas **unidades** menor que D
- C es tantas **veces** menor que D

que son expresiones que complementan la visión conceptual del primer ejemplo.

Un problema aparentemente tan sencillo como:

> "Si mi mamá me regalara $250, tendría $1.000. ¿Cuánto dinero tengo?"

propuesto en un libro de texto para tercer grado, da lugar a distintas interpretaciones en los alumnos y, por lo tanto, a procesos de solución y respuestas diferentes.

Del diálogo con los niños se deducen las siguientes formas de interpretar el enunciado y el proceso de solución:

- No hay diferencia entre decir "tengo" y decir "tendría"; es decir, el problema dice que tengo $1.000 y esa es la respuesta.
- A los $250 que me regalan, debo agregarle los $1.000; entonces completo $1.250.
- Como los $250 todavía no los tengo, debo restárselos a $1.000 y la respuesta es $750.

La operación $1.000 – $250 = $750 es aceptada por la mayoría de los estudiantes, como la que resuelve el problema, sólo después de que han comprendido el sentido gramatical de la expresión condicional "Si me regalaran..." y por lo tanto, de la forma verbal "tendría". Este tipo de enunciados requieren de un análisis cuidadoso, así como de la elaboración, en consenso, del proceso de solución más acorde con las condiciones dadas.

1.2 Construcción de la base orientadora y ejecución del proceso de solución

El diálogo en torno al significado de los conceptos o términos involucrados en el enunciado posibilita la decisión acerca de la operación que permite encontrar el dato que se busca.

Por ejemplo:

a. La **ganancia** aparece cuando el precio de venta de un artículo es mayor que el precio de compra del mismo artículo, y para encontrar su valor es necesario resolver la resta:

   Precio de venta – precio de compra

b. La **velocidad** de un vehículo se refiere a la distancia que el vehículo recorre con una determinada duración, es decir, en una hora o en un minuto, entonces para encontrar la velocidad es necesario resolver la división:

   Recorrido del vehículo ÷ tiempo empleado en el recorrido

La construcción de la base orientadora se refiere al diseño del *curso de la acción* necesaria para solucionar el problema. Los psicólogos soviéticos se refirieron a la necesidad de que la base orientadora que un alumno o grupos de alumnos propone coincida con las *condiciones objetivamente necesarias* para solucionar el problema.

En el siguiente ejemplo se aprecian las diferencias que pueden surgir entre las condiciones objetivamente necesarias para resolver un problema, y la base orientadora que un alumno construye, la cual se revela en la forma de darle solución:

> Dos hombres realizan un trabajo por $136.000 y trabajan durante 5 días. Si uno de ellos recibe un salario de $12.500 por día, ¿cuál es el salario diario del otro?[1]

[1] Este problema formó parte de una investigación realizada por la Asociación Anillo de Matemáticas sobre desarrollo de pensamiento matemático en alumnos de grado 5°. (Anillo de Matemáticas, 1994).

La lectura y el análisis del enunciado conducen a la identificación de las siguientes condiciones, como las que son objetivamente necesarias para la solución del problema:

- Dos trabajadores realizan una obra conjuntamente.
- El pago total por el trabajo es \$136.000.
- Cada uno recibe determinada cantidad de dinero por cada día trabajado, que puede ser la misma para los dos, o diferente.
- Los dos trabajan durante 5 días.
- Uno de ellos recibe \$12.500 por día.

La cabal comprensión de la situación descrita y de las relaciones lógicas y numéricas involucradas permite agregar el siguiente razonamiento a la base orientadora: el problema puede ser resuelto por lo menos en dos formas, atendiendo a las condiciones ya especificadas.

Primera forma

– Se averigua primero el salario total del trabajador que gana \$12.500 diarios. (\$12.500 × 5).
– Se resta el salario total del primer trabajador del dinero recibido entre los dos que es de \$136.000.
– Se divide el resultado de la resta entre 5, y se obtiene el salario diario del segundo trabajador.

Segunda forma

– Se averigua el salario diario conjunto de los dos trabajadores (\$136.000 ÷ 5).
– Del salario diario conjunto se resta el salario del trabajador que se conoce, y se obtiene el salario diario del otro trabajador.

En lo que sigue se muestran algunas de las formas como estudiantes participantes en el estudio mencionado dieron solución al problema y se explicita la base orientadora que allí se revela[2].

a. 136.000 ÷ 5 = 27.200

Respuesta: el otro señor gana \$27.200

Base orientadora que sustenta esta respuesta:

- Un trabajador gana \$12.500 por día.
- El segundo trabajador gana \$136.000 durante los 5 días.

b. 136.000 – 12.500 = 123.500

Respuesta: el otro señor recibe \$ 123.500

Base orientadora que sustenta esta respuesta:

- Los dos trabajadores reciben \$136.000 por los 5 días.
- Uno de ellos recibe \$12.500 por los 5 días.

c. 12.500 × 5 = 62.500

136.000 – 62.500 = 73.500

Respuesta: El otro trabajador recibe \$73.500.

Base orientadora que sustenta esta respuesta:

- El salario total de un trabajador es \$62.500.
- El salario total del segundo trabajador es \$73.500.

Cuando la solución de un problema se aborda a partir de condiciones que se suponen o se inventan, pero que no concuerdan con las condiciones objetivas que el problema plantea, es cuando se da la no-coincidencia entre base orientadora y condiciones objetivamente necesarias para la solución del problema. La identificación necesaria entre esas dos dimensiones del proceso comprensivo se logra mediante el análisis y la discusión permanentes, lo cual conduce a una actitud reflexiva y analítica en los estudiantes, que se reflejará paulatinamente en su desempeño exitoso en la tarea de resolver problemas.

[2] Es pertinente precisar que el 12% de la población del estudio obtuvo la respuesta esperada, \$14.700.

De acuerdo con lo expuesto hasta este momento se puede deducir que la construcción de la base orientadora comporta en sí misma la **fase de ejecución** de la solución del problema (realización de las operaciones previstas), fase que puede acompañarse por el proceso explicativo que genera la comprensión lograda. Ejemplo: (problema anterior)

Primera forma

Salario diario del primer trabajador: $12.500

Dinero que recibe el primer trabajador en los 5 días: $12.500 × 5 = $62.500

Total de dinero que reciben los dos trabajadores en los 5 días: $136.000

Dinero que recibe el segundo trabajador en los 5 días: $136.000 – $62.500 = $73.500

Salario diario del segundo trabajador: $73.500 ÷ 5 = $14.700

R/ El segundo trabajador recibe un salario diario de $14.700.

Segunda forma

Total de dinero que reciben los dos trabajadores en los 5 días: $136.000

Total de dinero que reciben los dos en 1 día: $136.000 ÷ 5 = $ 27.200

Salario diario del primer trabajador: $12.500

Salario diario del segundo trabajador: $27.200 – $12.500 = $ 14.700

R/ El segundo trabajador recibe un salario diario de $14.700.

Dentro de la fase de construcción de la base orientadora y del diseño de la fase de ejecución es posible atender también a dos rasgos fundamentales de la solución de problemas:

a. La exploración de formas diferentes de solución, tomando la decisión de considerarlas todas u optar por una de ellas.

b. La exploración de diferentes formas de representar la(s) solución(es) seleccionada(s), la cual puede hacerse en forma gráfica, verbal, o simbólica.

1.3 Fase de control de la solución

Es la situación que en la matemática escolar se conoce como la **prueba** o la **comprobación** del resultado; la forma más común de hacerlo, pero también la más acorde con la formación de las estructuras operatorias, es la que procede teniendo en cuenta las condiciones dadas por el problema, sustituyendo en ellas el valor encontrado, con el fin de verificar si las proposiciones que se logran clasifican como verdaderas en el ámbito lógico que el enunciado ha creado.

Un elemento fundamental en el aspecto de control de las respuestas es el que se refiere a la **estimación** de la misma: en el problema de los dos trabajadores, por ejemplo, si la respuesta de un alumno hubiese sido del orden de los $120.000 (como salario diario), la reflexión consecuente sería: el rango en que se ubica la respuesta (centenas de mil) no es acorde con el rango de los datos del problema.

También en esta oportunidad estamos ante una disposición que es necesario crear mediante el proceso didáctico: la decisión de controlar los propios procesos, de confrontar los resultados personales, en actitud constructiva, con los resultados de otros compañeros, no debería ser siempre una exigencia o una imposición del maestro; es necesario que se constituya en parte importante del desarrollo de pensamiento matemático y de la autonomía.

El hecho de disponerse permanentemente a verificar o a controlar los resultados obtenidos en la solución de un problema aporta importantes elementos para la formación de la personalidad de los estudiantes:

- Búsqueda de diferentes caminos para la solución de un mismo problema, pues generalmente cuando se intenta la comprobación del método empleado se encuentran indicios de otra forma en que el mismo problema se hubiera podido resolver.
- Creación de ambientes propicios para la confrontación respetuosa de distintos puntos de vista.
- Avance en el desarrollo de la autonomía ya que se generan de manera evidente sentimientos de autoconfianza y autoestima.
- Formación de una actitud favorable hacia el avance colectivo, es decir, hacia la contribución al mejoramiento de los niveles comprensivos del grupo, superando el deseo de la exclusiva figuración personal.

2. Reconstrucción de enunciados

Una consecuencia didáctica del trabajo que se realiza con enunciados completos es la posibilidad de identificar enunciados que no lo son; es decir, enunciados en los que faltan datos, o en los que aparecen datos sobrantes o superfluos.

Surge de esta manera un campo de acción muy eficaz para el logro de niveles de comprensión cada vez más elevados en la tarea de comprender y resolver problemas. Se trata de proponer a los estudiantes la reconstrucción de enunciados o (corrección de enunciados), tarea que puede atenderse, por lo menos, en tres ámbitos.

2.1 Identificar datos faltantes

La identificación o reconocimiento de datos que hacen falta en el enunciado requiere del ejercicio de las estructuras operatorias, pues cuando se intuye que un problema se podría resolver mediante una adición, pero no aparecen ni el segundo sumando ni el resultado de la suma, la conclusión inmediata es que hace falta un dato, si es que al problema se pretende darle solución aritmética (que es lo usual en la matemática escolar básica). Algo similar ocurre cuando la intuición pone en funcionamiento la estructura multiplicativa y no aparece sino uno de los tres elementos que la constituyen.

Desde el anterior punto de vista se habla cuando se emplean los términos **identificar o reconocer** datos faltantes, pues los términos no están en el enunciado, pero sí forman parte de la estructura operatoria que se pone en juego a partir de la lectura del enunciado que se propone.

Los siguientes ejemplos son adaptaciones de algunos de los problemas que formaron parte de la prueba de la evaluación de competencias básicas en lenguaje y matemáticas.

> Hoy fuimos al zoológico; cuando llegamos había un grupo de 32 personas. ¿Cuántas personas en total visitaron hoy el zoológico?

La lectura cuidadosa del enunciado suscita, por lo menos en algunos estudiantes, la natural inquietud; el proceso reflexivo que sigue puede enriquecerse con preguntas como:

- ¿Es posible contestar la pregunta con los datos que se tienen?. ¿Cuál dato haría falta?
- ¿Cuál podría ser ese nuevo dato?
- ¿Cómo quedaría el nuevo enunciado?
- ¿Bajo cuál circunstancia la respuesta "32 personas" sería una respuesta válida?

- ¿Cómo sería el enunciado para que "32 personas" fuera una respuesta válida?
- ¿Cuál sería el proceso de solución y cuál la respuesta, en cada caso?

> Correr forma parte del entrenamiento de los jóvenes deportistas; si María Isabel le da 12 vueltas a la cancha, ¿cuánto tiempo tarda en dar una vuelta?

Se pone en juego la estructura multiplicativa y el dato "12 vueltas" se configura como uno de los términos de una división que no se puede realizar, precisamente porque falta el dato que completa la estructura, que en este caso sería el "tiempo que emplea María Isabel en dar las 12 vueltas a la cancha".

En el caso de la estructura multiplicativa, cuando se completan los enunciados, aparece un elemento muy importante y que le da mayor solidez a su desarrollo: es el relacionado con las unidades de medida, que en cada caso deben ser acordes con el(los) datos(s) que sí aparecen. En el caso del ejemplo, el dato faltante debe darse en unidades de tiempo y la respuesta en tiempo / vuelta:

Ejemplo de enunciado completo: Correr forma parte del entrenamiento de los jóvenes deportistas; si María Isabel da 12 vueltas a la cancha en 18 minutos, ¿cuánto tiempo tarda en dar una vuelta?

Tiempo que gasta María Isabel en dar 12 vueltas: 18 minutos

Tiempo que gasta María Isabel en dar 1 vuelta: 18 minutos ÷ 12 = 1,5 minutos

R/ María Isabel gasta 1,5 minutos en dar una vuelta o María Isabel emplea 1,5 minutos / vuelta.

Otros ejemplos de enunciados incompletos:

- Diego está leyendo por estos días un libro muy interesante. Si su velocidad de lectura le permite leer 11páginas por día, ¿cuántos días se demorará Diego en terminar de leer su libro?
- Mario y Carlos desean comprar entre los dos un juego de video; Carlos puede aportar \$7200 y Mario puede aportar \$3500, pero en el almacén les dicen que ese dinero no es suficiente. ¿Cuánto dinero les hizo falta?
- Una persona vende su automóvil en \$11.500.000 y ganó en el negocio \$630.000; si al vender una camioneta en \$14.700.000 también obtuvo ganancia, ¿en cuál de los dos negocios la ganancia fue mayor?
- Mauricio tiene 8 años; Camilo dos años más que Julián y tres años menos que Santiago. ¿Cuántos años tiene cada uno?

Cada uno de los enunciados que se propongan a los estudiantes dan lugar a un proceso en el que entran en juego estructuras mentales relacionadas con:

- Comprensión de los conceptos involucrados en el enunciado.
- Capacidad para decidir si se trata de un enunciado completo o no, de acuerdo con la estructura operatoria que surge de las condiciones conocidas.
- Selección del rango de las cantidades que se propongan para cubrir los datos faltantes.

2.2 Identificar datos sobrantes o superfluos

En la misma vía del numeral anterior, se apunta ahora a reconocer los datos que no hacen falta para aplicar la estructura operatoria que se pone en juego.

Se compran seis sillas de 40 centímetros de ancho por un valor de $25.600 cada una. ¿Cuál es el valor de las sillas?

La lectura y análisis del enunciado se pueden orientar tanto a la identificación del dato sobrante (las sillas miden 40 centímetros de ancho), como a la complementación del enunciado, atendiendo a ese dato y planteando una pregunta nueva.

Si se suprime el dato sobrante, el nuevo enunciado sería:

Se compran seis sillas por un valor de $25.600 cada una: ¿Cuál es el valor de las sillas?

Si se completa el problema atendiendo al "dato sobrante", se podría construir un enunciado nuevo como el siguiente:

Se compran seis sillas de 40 centímetros de ancho por un valor de $25.600 cada una. ¿Cuál es el valor de las sillas? ¿Cuánto espacio ocupan a lo ancho las 6 sillas si se colocan una al lado de otra?

Otros ejemplos de enunciados con datos sobrantes o superfluos:

- En un puesto del mercado se consigue la libra de lulo a $1.500 y la libra de guayaba a $800. ¿Cuánto valen 6 libras de lulo y 8 libras de guayaba si la vendedora tiene 45 años?
- Un terreno de forma rectangular en el que se han sembrado 23 árboles de naranja mide 96 metros de largo y 57 metros de ancho. ¿Cuál es el área del terreno?
- Los osos panda pesan 2 Kg al nacer y ganan 2 Kg de peso cada mes en el primer año. ¿Cuánto pesa un oso a los 5 meses de vida si tiene otros 2 hermanos?
- Para caminar de su casa al colegio Maritza debe hacer un recorrido diario de 732 metros y sale de su casa a las 6:30 a.m. ¿Cuántos metros en total debe recorrer Maritza en los 5 días de la semana en el viaje de ida y regreso entre su casa y su colegio?

2.3 Proponer todas las posibles preguntas a un problema

La actividad de proponer preguntas, a partir de unas condiciones y unos datos conocidos, hace referencia a las distintas relaciones que se pueden establecer entre los datos y a las estructuras operatorias posibles de aplicar. Por lo tanto, la actividad se ubica nuevamente en el ámbito de la claridad conceptual que se logre mediante el diálogo y la reflexión conjunta, ya que de esa manera son posibles los acuerdos y los aportes para una mejor comprensión de la situación que el problema ejemplifica.

Para trasladarse de una ciudad a otra, una persona ha recorrido: 38 km a caballo, en tren 316 km más que a caballo; en carro 224 km menos que lo recorrido en tren y a caballo juntos; en avión 412 km y todavía le faltan 275 km para llegar a su destino.

Se trata de un problema que pone en acción los elementos de la estructura aditiva; pero la actividad mental que los alumnos realicen se enriquecerá con la orientación que dé el docente hacia la explicitación de todas las relaciones posibles que se establecen entre los datos; es necesario, por lo tanto, permitir la expresión, en forma oral o escrita, de los diferentes niveles de comprensión que los alumnos posean en el momento en que se les proponga el ejercicio, comprensión que podrá cualificarse con los aportes de los demás integrantes del grupo. Las preguntas posibles son, entre muchas otras:

- ¿Cuánto más recorrió la persona en carro que a caballo?
- ¿Cuántos kilómetros en total ha recorrido?
- ¿Recorrió más en avión que en los otros medios de transporte juntos? ¿Por qué?
- ¿Cuál es la distancia entre las dos ciudades?

Es decir, además de la pregunta obvia de la distancia entre las dos ciudades, los alumnos pueden proponer otro tipo de preguntas que requieren, precisamente, de la atención detallada a las relaciones particulares entre los datos.

Otros ejemplos de enunciados a los que se les pueden proponer preguntas de diverso tipo:

- Vicente gana $17.800 por día de trabajo, labora 6 días a la semana y gasta $207.800 cada dos semanas.
- Para iniciar el año escolar tuve que comprar: 6 cuadernos rayados de $1.250 cada uno; 2 cuadernos cuadriculados de $1.540 cada uno; 2 libros de $14.600 cada uno y dos bolígrafos de $1.200 cada uno. Mi mamá disponía en ese momento de $40.000 para mis útiles.
- En un pueblo de 30.600 habitantes, 3/5 de los hombres y 2/3 de las mujeres tienen más de 20 años.
- En un bazar se quieren recoger $50.000 por medio de una rifa y para ello se hacen 100 boletas a $650 cada una. Sólo se vendieron 86 boletas y el artículo rifado valía $23.200. (La situación varía si se considera que la boleta ganadora haya sido vendida o no)
- La edad de un padre está en relación 3 a 1 con la de su hijo; la edad del abuelo está en la relación 5 a 1 con la del mismo niño, quien tiene 12 años.

Los problemas de enunciado que aparecen en los diversos textos de matemáticas pueden servir en los propósitos aquí señalados, si se supera la práctica tradicional de dejar su solución como "tarea para la casa" y se la reemplaza por su lectura y análisis orientados por el docente. Los enunciados pueden adecuarse agregándoles datos superfluos, suprimiendo otros o invitando a los estudiantes a proponerles otras preguntas.

3. Invención de problemas

Inventar o proponer problemas nuevos es uno de los indicadores más significativos de desarrollo de pensamiento matemático.

La actividad de "inventar problemas" requiere, entre otras, de las competencias matemáticas a las que se ha hecho alusión en los numerales anteriores, pero también está basada en la competencia lingüística y comunicativa necesaria para la construcción de enunciados con coherencia gramatical. Sin embargo, el aspecto de la coherencia gramatical se ubica en un nivel de exigencia menor si lo que se quiere mirar cuando los alumnos inventan problemas es la expresión de relaciones de tipo espacial, lógico y numérico presentes en su estructura cognitiva, es decir, si lo que se pretende evaluar son competencias básicas en matemáticas. De todas maneras, los procesos investigativos en educación matemática han mostrado que un nivel bajo en competencia lingüística tiene como consecuencia que el propio alumno no entienda después el enunciado que él mismo ha propuesto.

La hipótesis que subyace a la presente propuesta didáctica es que el cumplimiento de las dos actividades anteriores (solución de problemas con enunciados completos y reconstrucción de enunciados) provee a los alumnos de herramientas conceptuales valiosas para la tarea de inventar problemas. Vale la pena enfatizar en la necesidad de convertir la actividad de "proponer problemas nuevos" en una labor permanente en la clase de matemáticas, una vez realizados suficientes ejercicios en los otros dos ámbitos.

Dos formas de enfrentar la tarea de inventar problemas

Una forma de apoyar el proceso de invención de problemas es la de suponer unas operaciones conocidas, a las cuales se debe adecuar la historia o el enunciado en el que dichas operaciones tendrían sentido; el nivel de dificultad puede irse aumentando gradualmente desde la aplicación de estructura aditiva simple y estructura aditiva compuesta hasta la estructura multiplicativa simple y compuesta.

a. Inventar un problema que se resuelva con la operación

14 niños + 20 niños + 18 niños = 52 niños

(Estructura aditiva simple)

b. Inventar un problema que se resuelva con las operaciones:

$ 4.500 + $ 3.750 = $ 8.250

y $ 8.250 – $2.190 = $6.060

(Estructura aditiva compuesta)

c. Inventar un problema que se resuelva con la operación:

452 naranjas × 3 = 1.356 naranjas

(Estructura multiplicativa simple)

d. Inventar un problema que se resuelva con las operaciones:

$1.694 ÷ 2 = $847

y $847 × 5 = $4.235

(Estructura multiplicativa compuesta)

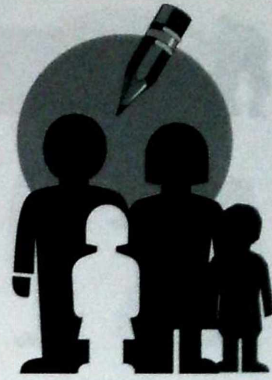
En un segundo momento la información de apoyo no tendría unidades de medida o de conteo asignadas; no se proponen situaciones que involucren "niños" o "pesos" o "metros" sino solamente las operaciones que se deben tener en cuenta en el momento de idear el enunciado. La información del primer ejemplo se convertiría en

$$14 + 20 + 18 = 52$$

Cada alumno o grupo selecciona las unidades con las que quiere trabajar, con lo que aparecen en el aula diversas formas de concebir una situación que se resuelve con una misma operación aritmética.

Después de cumplidas estas etapas ya se puede aspirar a que los alumnos cuenten con recursos cognitivos y afectivos que les permitan inventar problemas cuyo significado y solución puedan ser controlados por ellos mismos.

PENSANDO CON OTROS



- Dialogue con sus compañeros en torno a la siguiente afirmación:

Uno de los propósitos de la educación matemática debería ser también el avance en el desarrollo de la competencia comunicativa y lingüística, a través de la producción de textos escritos y la lectura comprensiva de información verbal.

El contenido de esta afirmación se relaciona de manera directa con los aspectos tratados en el presente módulo, pero su aplicación se puede pensar en los distintos ámbitos de la ciencia matemática.

- ¿Cuál es su experiencia como docente, en ese sentido?
- ¿Cuál fue su experiencia como estudiante de matemáticas en educación básica, media y superior?
- ¿Las clases de matemáticas fueron siempre "tableros llenos de números"?
- ¿Tuvo usted, por suerte, algún maestro que le despertara gusto y amor por las matemáticas?

- En relación con el contenido del módulo, observen lo que sucede cuando se trata de resolver el siguiente problema, sin acudir a operaciones escritas, es decir "mentalmente":

Una botella con su tapa cuestan \$1.100; si la botella cuesta \$1.000 más que la tapa ¿cuánto cuesta cada cosa?

La respuesta que se da de manera casi inmediata es: la botella vale \$1.000 y la tapa vale \$100.

Pero, al hacer la comprobación, ¿se cumplen las condiciones del problema? ¿Cuál es el error de apreciación que se comete, en este caso? (La respuesta acertada es \$1050 y \$50).

Pensando con otros

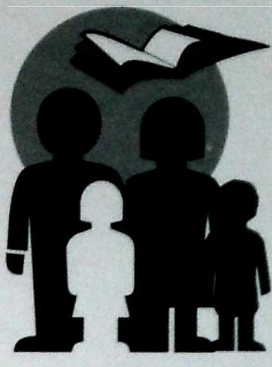
- Otro problema interesante para mirar en grupo:

¿Con cuántas cifras en total se escriben los números de 1 a 20?

Los dígitos del sistema decimal de numeración son diez, pero eso no es lo que el problema pregunta.

Entre uno y diez hay números de 1 y de 2 cifras, pero el problema indaga por la **cantidad total** de cifras. (La respuesta sería 31 cifras).

PARA SABER MÁS



Asociación Anillo de Matemáticas. AMA. *Construcción de sistemas lógicos y numéricos. Propuesta de desarrollo curricular para los grados 4°, 5° y 6° de educación básica.* Santa Fe de Bogotá. 1998.

Asociación Anillo de Matemáticas. AMA. *El desarrollo del pensamiento matemático en la educación básica.* Santa Fe de Bogotá. 1994.

Castaño, Jorge. *La construcción del pensamiento multiplicativo compuesto.* En: *Hojas Pedagógicas 4.* Ministerio de Educación Nacional. Santa Fe de Bogotá. 1996.

Charnay, Roland. *Aprender por medio de la resolución de problemas.* En: *Didáctica de las matemáticas.* Compiladoras: Cecilia Parra e Irma Saiz. Paidós México. 1994.

Dickson, Linda y otros. *El aprendizaje de las matemáticas.* Capítulo IV: lenguaje, palabras y símbolos. Labor. Madrid. 1991.

Freudenthal, H. *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas.* Textos seleccionados. Cinvestav. Ipn. México. 1994.

Kamii, Constance. *La autonomía como finalidad de la educación. Implicaciones de la teoría de Piaget.* Visor. Madrid. 1992.

Langford, Peter. *El desarrollo del pensamiento conceptual en la escuela secundaria.* Ediciones Paidós. México. 1989.

Maza, Carlos. *Sumar y restar. El proceso de enseñanza / aprendizaje de la suma y de la resta.* Visor. Madrid. 1989.

Maza, Carlos. *Enseñanza de la multiplicación y la división.* Síntesis. Madrid. 1991.

Orton, A. *Didáctica de las matemáticas.* Morata. Madrid. 1990.

Piaget, Jean. *El juicio moral en el niño.* Paidós. Madrid. 1990.

Talizina, N. *Psicología de la enseñanza.* Progreso. Moscú. 1988.

Wertsch, James. *Vigotski y la formación social de la mente.* Paidós. Barcelona. 1988.

En esta serie se han publicado los siguientes títulos:

Área del lenguaje

1. Producción de textos
2. Comprensión de lectura
3. La escritura y la escuela
4. La lectura y la escuela
5. La comunicación

Matemáticas

1. Manejo de códigos matemáticos
2. Sistemas de numeración con valor posicional
3. Solución de problemas con estructuras aditiva y multiplicativa
4. Solución de problemas que requieren inferencias lógicas
5. Desarrollo del pensamiento espacial y geométrico