

372.1
679

Instituto para la Investigación Educativa
y el Desarrollo Pedagógico - IDEP



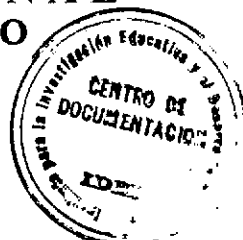
000104

7

Proyecto de investigación
“Anillito: Cultura matemática en la educación básica”

Contrato 078 /96

INFORME FINAL
ACADEMICO



AUTORES

Bladimir Torres Acevedo
Beatriz Espinoza Baquero
Héctor Bejarano Ruiz

Santa Fe de Bogotá, D. C
Diciembre 12 de 1997

Inv. IDEP
79

I. INFORME ACADÉMICO

0. PRESENTACIÓN

La presente investigación se desarrolla dentro del marco de una propuesta de trabajo pedagógica que propende por la formación integral en educación integral de estudiantes de quinto grado de educación básica¹; éste proyecto se desarrolla en Santa Fe de Bogotá en el colegio Distrital San Francisco y la investigación cuenta con la financiación por parte del IDEP para el año 1997.

Se asume como eje de investigación la relación lenguaje-pensamiento, y en particular lenguaje- pensamiento matemático; en niños que estudian en Instituciones Oficiales del Distrito Capital y que han asistido, paralelamente, a nuestras sesiones de trabajo en jornada contraria, durante los mismos períodos escolares.

Asumimos con wittgenstein que el lenguaje de ordena de acuerdo con las reglas de uso público y por lo tanto es la cultura, las formas de vida, la que confiere significados a los enunciados; en este sentido, recuperamos el hablar y escribir como parte de una actividad y de una forma de vida en la escuela, es decir, como una manera de pensar, sentir, actuar y conocer haciendo matemáticas.



PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

El problema de investigación consiste en indagar los tipos de elaboración verbal de las acciones logradas por los niños durante la construcción del conocimiento matemático en situaciones de cooperación social.

Se trata de responder la siguiente pregunta: ¿Cómo nuestros niños pasan de una situación de no discurso sobre el conocimiento, a la elaboración de discurso matemático escolar?

¹ Son sesenta estudiantes que han cursado quinto grado en tres Escuelas del Distrito y que actualmente estudian en el Colegio Distrital San Francisco, jornada tarde.

Particularmente se ha asumido la estrategia cognoscitiva, denominada por nosotros, *verbalización de las acciones* con el propósito de indagar los tipos de discurso elaborados en la construcción de conceptos matemáticos en el contexto de una actividad de estudio.

ENFOQUE INVESTIGATIVO

Hemos asumido el enfoque de la investigación cualitativa en educación que toma elementos tanto de la investigación acción como de la etnografía, constituyendo una forma de indagación autoreflexiva e interpretativa de los constructos de los estudiantes en actividades de resolución de problemas trabajando en equipo.

Nuestras categorías de análisis son:

- La nominación ya que indica la capacidad para representarse apropiadamente los objetos de conocimiento, se refiere a la esencia de las representaciones.
- La articulación pues establece el funcionamiento coordinado de las representaciones unas con otras; da contenido a la pura forma verbal.
- La derivación que muestra la transformación de las representaciones, unas en otras.
- La atribución al indicar los procesos de categorización entre representaciones, el establecimiento de condiciones de existencia para las representaciones y de acreditación entre ellas.
- La competencia comunicativa
- La imagen de conocimiento matemático

1. LA RELACION LENGUAJE – PENSAMIENTO

El lenguaje se convierte en un elemento básico en la ruptura con las concepciones tradicionales de la matemática, con sus formas de trabajo y sus ritos; en este sentido permite conocer el contexto desde el cual se habla la lógica implícita, la manera como se apropia del conocimiento, el sentido de las interacciones personales, el proceso de interiorización de las formas de la acción y el desarrollo de la competencia comunicativa. En particular, el

lenguaje hace visibles los momentos de tránsito y de traducción de una lógica de la acción material a una lógica de acción verbal.

Esta relación puede ser vista en el contexto de la enseñanza y también en el contexto del aprendizaje. En el contexto de la enseñanza, un aumento en el conocimiento de cómo los estudiantes aprenden matemáticas se correlaciona con un aumento en la elaboración de discurso sobre la enseñanza de las matemáticas. En el contexto del aprendizaje, un desarrollo en el aprendizaje de las matemáticas se correlaciona con un aumento en la producción de discurso matemático escolar, esto es, con un desarrollo del lenguaje matemático escolar.

Sin embargo esta relación tiene algunas variantes, según se le asigne un papel a la evolución del lenguaje en las personas y según el tipo de relación que se tenga con el conocimiento.

El lenguaje puede ser visto como *gramática*, como *instrumento del pensamiento* y *en relación con el desarrollo del pensamiento*. Como *gramática* sirve para codificar en el lenguaje los significados ya construidos; como *instrumento del pensamiento* sirve para el control del entorno, para el control de la actividad del individuo, y para buscar y planear la solución de problemas. El *desarrollo del lenguaje en relación con el desarrollo del pensamiento* tiene tres posibilidades: la primera, en la cual se considera que la línea del desarrollo del lenguaje es independiente de la línea del desarrollo del pensamiento, la segunda en la cual se reconoce que estas dos líneas de desarrollo se funden y que el desarrollo del lenguaje sigue al desarrollo del pensamiento, a su proceso de maduración natural. Y la tercera, que el desarrollo del lenguaje no solo está a la par con el desarrollo del pensamiento sino que lo precede convirtiéndose en factor de desarrollo de este último.

Desde el punto de vista del compromiso con el conocimiento, el lenguaje puede mostrar tanto una relación externa, pasiva, de simple manipulación de estructuras superficiales; como una relación interna, de compromiso, activa, que se relaciona con la estructura profunda de su contexto de significado. En esta última relación siempre se está examinando que tan bien es representado el sistema semántico en evolución mediante el sistema de signos articulados.

El lenguaje tiene su razón de ser y de existir porque existe el conocimiento y porque éste conocimiento impone la necesidad de comunicarlo a otros.

Conocimiento que emerge, de manera plena, de la acción conciente y se va constituyendo en sistemas semánticos que buscan su adecuada expresión a través de la sintaxis del lenguaje articulado.

Visto como instrumento, el lenguaje es un potente instrumento analítico pues hace posible analizar las representaciones (percepciones, imágenes, esquemas, estructuras conceptuales, que son formas de pensamiento sintético) al obligarlas pasar por el tamiz lineal del lenguaje articulado y hacer de estos pensamientos verbales objetos de acción, es decir, de reflexión. Pero también puede centrar su foco de atención sobre sus procesos de elaboración e interiorización del conocimiento, tomando el pensamiento más conciente y haciéndolo más coherente.

El siguiente cuadro muestra de manera sintética los usos y las relaciones que se generan:

LENGUAJE Y CONOCIMIENTO	GRAMÁTICA	INSTRUMENTO	LÍNEAS DE DESARROLLO
RELACIÓN EXTERNA	Codifica los Significados	-de control: para sí, o para otros -analítico: con el conocimiento erudito	-Independientes -Se funden: el lenguaje, muestra el aprendizaje
RELACIÓN INTERNA	- sistema de signos que representa sistemas semánticos en evolución	-analítico: con el conocimiento sabio, - con sus procesos de conocimiento -Se crean nuevos significados -Se optimiza la representación	-el desarrollo del lenguaje es desarrollo cognitivo, e inversamente

Dentro de la relación lenguaje–pensamiento, nos detenemos en lo que se ha denominado Pensamiento Verbal y por lo tanto en la forma verbal de la acción.

A este respecto retomamos algunos elementos teóricos sobre el funcionamiento del lenguaje como El Desarrollo del Habla en tanto forma

de conducta superior y compleja, Las Funciones Simbólicas y La Verbalización de la Acción.

1.1 El habla como forma de conducta superior y compleja

La vida del hombre está mediatizada por instrumentos y de la misma manera su actividad psicológica está mediatizada por eslabones producto de la vida social, de los cuales el más importante es el lenguaje.

El anterior presupuesto, nos conduce a la teoría de desarrollo cultural de las formas psíquicas. Para Vigotsky, todas las funciones psíquicas superiores son relaciones de orden social interiorizadas, base de la estructura social de la personalidad. Por lo tanto se puede afirmar que acceder al conocimiento en su más alto nivel de abstracción, es pasar de comportamientos naturales a superiores. Algunas de las cuales son:

Pensamiento en imágenes	=>	pensamiento en
conceptos		
Atención involuntaria	=>	Atención voluntaria
Memoria mecánica	=>	Memoria lógica
Dialogo	=>	lenguaje interior

El habla debe pasar de hábitos verbo – motores al habla como forma de conducta superior y compleja. Los medios externos son: el idioma, la escritura, el cálculo y el dibujo. La Estrategia Didáctica adoptada, de desarrollo del habla en la producción de discurso matemático escolar, es *la verbalización de las acciones en el contexto de una actividad*.

1.2 La función simbólica

El lenguaje tiene dos funciones esenciales: la primera es la capacidad del lenguaje de **evocar situaciones** y acontecimientos, liberando al pensamiento del espacio próximo y desbordando los límites temporales del presente; el segundo el de **insertar dichas situaciones y acontecimientos en un campo conceptual y racional** que enriquece su conocimiento.

Estos dos modos de funcionamiento de la inteligencia pueden considerarse así: el primero como el inicio de la representación mental; el segundo como esquematización representativa (redes conceptuales), conductas

representativas independientes del lenguaje, pero que sirven para la adquisición y ampliación de éste.

El niño en su desarrollo necesita de otros sistemas de significantes constituido por toda su imaginaria mental; la cual se manifiesta a través del juego simbólico, la imitación diferida y los símbolos individuales, que son fuente de representaciones individuales (a la vez cognoscitivas y afectivas)².

Existe pues, **una función simbólica** más amplia que el lenguaje que engloba además de las representaciones mentales (símbolos en sentido estricto), el sistema de los signos verbales (orales y escritos). Lo característico de la función simbólica es la diferenciación entre los significantes (signos y símbolos), de los significados (situaciones o acontecimientos ambos esquematizados y conceptualizados); permitiendo que los primeros puedan evocar la representación de los segundos.

- **Símbolos individuales**, que son toda esa imaginaria mental que se forma cada persona en la cual la reflexión se hace a través de imágenes, es decir, no son signos verbales. Por ejemplo, cuando el niño finge dormir, caerse o llora para que el adulto lo alce. Los símbolos individuales que surgen en la imaginaria mental, son los que dan paso a las conductas representativas, que si bien, son necesarias para la adquisición del lenguaje son independientes de él.
- **El lenguaje verbal**, son sistemas de signos verbales, expresados en lenguaje natural. Cuando se habla, ya se está representando por medio de signos lingüísticos que son sonoros y que pueden posteriormente ser puestos en forma escrita.

Es claro que aquí hay dos sistemas de representación distintos: uno, el sistema de la representación formado por el juego de imágenes y símbolos; y el otro, el sistema de signos verbales, es decir, el lenguaje que es ahora una representación que articula a otra.

Una de las implicaciones del funcionamiento del lenguaje es que extiende el poder de las coordinaciones entre acciones articulando la representación mental, proveyendo al mismo tiempo al pensamiento, de un instrumento que en principio es de control, y luego de combinación, de transformación

² Piaget, J. 1991.

y de análisis tanto de la acción como de la actividad. De esta forma el lenguaje transforma profundamente la estructura del pensamiento, al alcanzar formas de esquematización más avanzadas y una abstracción más móvil.

Los niños cuando ingresa a la escuela están en una etapa de formación de las operaciones lógicas y luego comienzan a construir el sistema de la lógica proposicional, es decir, se comienza a acceder al discurso. La pregunta que surge es:

¿De que manera la enseñanza puede ayudar a desarrollar en los niños habilidades para verbalizar formulaciones en lenguaje matemático?³

Y más precisamente:

¿Cómo los niños acceden al discurso y en particular al discurso matemático escolar?

Los esfuerzos que hacen los niños en el Anillito, consisten en poner todo el contenido de la representación en el discurso, es decir, la esencialidad de lo que es objeto de conocimiento con la dificultad de que dicho objeto se está elaborando. Por esto, es natural que los niños procedan por sucesivas elaboraciones discursivas o retóricas, que a medida que se van afinando las funciones del lenguaje como son: la nominación, la atribución, la derivación y la articulación se pueden convertir en discurso.

1. 3. Análisis de la forma de la acción en el contexto de las situaciones de aprendizaje

Una constante durante el desarrollo del presente trabajo de investigación ha sido la indagación sobre *el sentido de la actividad propuesta desde los maestros*, y en particular, sobre la acción como unidad de análisis de la actividad.

³ Esta pregunta está enmarcada dentro de la línea de investigación *La matemática escolar como lenguaje*, línea que dentro de la Educación Matemática es muy nueva y novedosa, ya que la matemática se había visto aislada del lenguaje y expresamente tomada por los educadores como una ciencia exacta, rígida y absolutamente formal; "con el tiempo este interés ha ido en aumento". Rojan, T. 1994.

Por **actividad** se entiende el conjunto de procesos que realizan una actitud vital y activa del sujeto hacia la realidad; un rasgo característico de esta concepción de actividad es su sentido: *la actividad tiene sentido para el niño cuando el motivo y el objetivo coinciden.*

La mínima unidad de análisis de la actividad la constituye la acción; por **acción** se entiende el procedimiento por el cual se alcanza un objetivo que previamente ha sido representado de manera consciente; por otra parte, ésta es, mas que de tipo cognitivo en el sentido que se refiere a un significado abstraído de la acción física, de carácter cognoscitivo en el sentido de un conjunto de procedimientos que el sujeto realiza para alcanzar un objetivo.

La acción tiene la misma estructura de la actividad: un objeto hacia el cual esta orientada, un objetivo, un motivo, un determinado juego de operaciones que la realizan y un modelo según el cual es llevada a cabo por el sujeto. La acción, como la actividad, es subjetiva, pues siempre pertenece a un sujeto concreto

De la acción se pueden hacer dos consideraciones: la primera, **en cuanto a sus partes estructurales y funcionales** –la parte orientadora, la ejecutora y la de control-; la segunda, **en cuanto al grado de formación de sus principales características** –la forma, los caracteres desplegado, generalizado y asimilado-. En el contexto del proyecto, la primera, ha permitido distinguir y modelar diferentes tipos de actividad cognoscitiva, y la segunda, ha permitido interpretar las distintas interacciones que se producen en la recreación de la acción en cada una de sus formas; sin embargo, nos detendremos en el análisis de la principal característica de la acción, la forma.

1. 3. 1. La forma de la acción

La característica de la acción, más importante en el camino de su transformación de externa en interna, es la forma. Por *forma de la acción* se entiende cada uno de los estados cualitativamente originales en los cuales se recrea, se orienta, se ejecuta y se controla la acción. Estas formas son básicamente: la material, la verbal externa y la mental⁴.

⁴ Galperin, citado por Talízina, deja claro que su propuesta distingue tres formas fundamentales de la acción. Sin embargo, existen formas afines a las formas básicas, como la forma materializada que es afín a la material, la forma verbal externa para sí que se ubica entre la verbal externa y la mental, y la

En la medida que al **objeto de la acción**⁵ se le opere en una nueva forma, su nueva representación podrá ser de naturaleza cualitativamente distinta y original; de esta manera, el objeto de la acción será recreado y transformado con las nuevas posibilidades de su presentación y de trabajo con él, lo cual se extiende también a las operaciones y a la manera de ejecutárselas.

En este contexto se puede decir que no existen acciones sin forma, ni acciones presentadas en formas indeterminadas. La forma de la acción se determina fundamentalmente por la manera en que está representado el objeto de la acción.

Por **Representación del objeto de la Acción** se entiende a su vez un objeto que contiene aquellos aspectos que constituyen propiamente el objeto de acción; cualquier objeto que pretenda sustituir una representación dada debe contener el objeto de la acción que se trate, o simplemente serlo. Así, una forma de la acción define, particular y principalmente, una categoría de formas de representación de los objetos de la acción.

Cuando el sujeto puede representarse el objeto de la acción a partir de la interacción con objetos físicos puramente y depende de ello, se dice que la acción toma la forma material; si en cambio el objeto de la acción se representa verbalmente, se dice que la acción se corresponde con la forma verbal. Cuando la acción toma la forma mental el sujeto ya no cumple la acción como práctica transformadora de objetos exteriores -ni materiales, ni verbales-, sino que ahora la acción se realiza transformando las imágenes de estos objetos. Estas imágenes mentales de los objetos y fenómenos del mundo exterior, son ahora la forma que toman las representaciones del objeto de la acción.

1. 3. 2.. La forma de la acción en situaciones de aprendizaje

En cuanto al uso de las formas de la acción, en situaciones de aprendizaje por colaboración social como las que enfatizan el aprendizaje o el desarrollo

forma perceptiva que se ubica entre la material o materializada y la verbal externa (TALIZINA, N., Psicología de la Enseñanza, Editorial Progreso, Moscú 1988, pág. 60)

⁵ Por **Objeto de la Acción** se entiende aquel aspecto -conjunto de propiedades, elementos y relaciones- sobre el que está directamente orientada la acción.

del pensamiento a través del trabajo en grupo y la resolución de problemas por equipos, a éstas es conveniente considerarlas en relación con el hecho de que puedan ser **manifestadas de manera interna o externa** y de que **puedan estar destinadas para otros o para sí**, a la manera de un abanico de oposiciones disponible, ante la actitud de los sujetos, para el cumplimiento de la acción independientemente de la forma utilizada.

Existe una relación dialéctica entre estas maneras de manifestación de las acciones, así como entre sus destinos, en el sentido de que, desde el punto de vista de las necesidades cognoscitivas, el niño usa estas formas de la acción en función de la significación y comprensión que le puedan aportar; de tal manera que una vez “agotada” determinada forma de la acción, el sujeto se apoyará en otras. Así, por ejemplo, cuando el uso de una forma verbal interna se agota, el sujeto puede acudir naturalmente a la forma externa de la acción verbal; en cuyo caso el sujeto se ve impelido a hablar en voz alta, aunque este trabajando solo.

Estas **maneras en la forma de la acción** se constituyen en elementos importantes al momento de caracterizar el grado de apropiación de la acción por parte de un sujeto en una determinada forma. En cualquier caso el sujeto tiene la posibilidad de utilizar indistintamente diferentes formas de la acción sin que este hecho niegue diferentes grados de interiorización desarrollados en relación con cada una.

Así pues, para este trabajo recreamos la idea de que las formas de realización de la acción se pueden caracterizar, a su vez, como formas internas o externas, para sí o para otros⁶.

Esta caracterización de las acciones permite vislumbrar **un modelo de interpretación de las acciones** a través de tres aspectos: La Forma de la acción -cómo las que propone Galperin-, La Destinación que se hace de la acción -para sí o para otro- y La Manifestación de la acción -externa o internamente-.

Seguramente estos aspectos pueden jugar un papel en relación con el planteamiento de la formación por etapas de las acciones mentales

⁶ Galperin, citado nuevamente por Talizina, asegura que cualquier acción del sujeto puede ser descrita indicando el grado de formación de sus principales características (bis).

propuestas por Talízina; sin embargo, nos referimos solamente al uso de las formas de la acción en situaciones de aprendizaje⁷.

1. 3. 3. Cuadro del modelo de interpretación de la acción.

El siguiente cuadro presenta un modelo de interpretación de la acción, para analizar el juego de interacciones de los estudiantes en el desarrollo de una actividad.

Para sí	EGOCENTRICO (A)	REFLEXIVO -YO CON YO- (B)
Para otros	PARTICIPATIVO (C)	REFEFLEXIÓN -YO CON OTRO IMAGINADO- (D)
	Externa	Interna

Este modelo básicamente involucra dos aspectos: el uno, la actitud del sujeto que se configura a través de la asignación de un destino de la acción al mismo tiempo que de una forma de manifestación.

Las relaciones que se dan quedan representadas en la disposición de las cuatro regiones que se generan en el cuadro. Las unas en las regiones diagonales, las otras en las filas y columnas.

La primera, correspondiente a la diagonal A-D, se refiere a acciones que son aparentes para sí y reales para otros e inversamente; la otra, de acciones verdaderamente para otros o para sí, respectivamente.

Así, la diagonal $A \Leftrightarrow D$, muestra una oposición entre actitudes ya que A se refiere a acciones que son destinadas para sí aunque estas se manifiesten externamente, mientras que en D la acción no se manifiesta en el exterior a pesar de realizarse con destino al otro. En la forma A de la acción el sujeto se ve más o menos afectado del contexto, por ejemplo: si esta realizando la

⁷ Dado que son posibles dos miradas en relación con este tema, la primera sobre el uso de las formas de la acción y la segunda sobre la concepción de la formación de las acciones mentales por etapas, es necesario distinguir entre el grado de interiorización y la utilización de una forma de la acción.

acción y se está expuesto ante otros, puede suceder que se sienta cohibido o por el contrario que se sienta impulsado a mostrarse, ambos aspectos de carácter estratégico; pero puede suceder también que estando desinhibido actúe de manera comunicativa consigo mismo procurándose comprensión y seleccionando cursos de acción para sí. En la forma D de la acción, puede ser destinada al otro con dos fines distintos: primero, a validar imponiendo el propio punto de vista o a queriendo eliminar el del otro; y segundo, considerando el punto de vista del otro y dejándose afectar por éste.

La diagonal $C \Leftrightarrow B$, se caracteriza porque las acciones son categóricas, puras; sí en C realmente la acción se realiza para el otro y en B la acción se realiza puramente para sí mismo..... La acción que se presenta en esta diagonal puede cargarse de fines estratégicos; así en C el individuo puede destinarse con otros con el propósito.

1. 4. La verbalización de la acción en el contexto de una actividad de estudio

Por verbalización de las acciones o cursos de acciones, se entiende la representación, por medio del lenguaje articulado –*discurso*–, de aquellas representaciones que el niño ha construido al abordar una situación problemática en la consecución de un objetivo del cual previamente ha tomado consciencia⁸.

La verbalización de la acción tiene por lo menos tres ámbitos desde donde se la puede considerar: **el cognitivo, el de las funciones del lenguaje y el de lugar cultural.**

- *Cognitivo*: ¿Cómo la verbalización de la actividad – de las acciones - es factor de desarrollo intelectual?
- *Las funciones del lenguaje*. El pensamiento es como una totalidad que emerge de manera simultánea – como si se pensara en forma sintética – y luego se lo tradujera a una sucesión lineal que tiene que adecuarse a unas reglas lingüísticas. Este esfuerzo de representación del pensamiento

⁸ Por verbalización de la acción, se comprende una etapa de configuración de la forma verbal externa de la acción. Este tipo de acción se asimila primero en forma desplegada -todas las operaciones que la integran no solo deben adquirir la forma verbal, sino que deben ser asimiladas en ella-. La generalización de la acción en esta etapa adquiere nuevas posibilidades que le abre la forma verbal de la acción, en particular, la adquisición de otro sistema de signos y de significantes (representación en el lenguaje). Talizina, N. 1988

en el lenguaje natural pasa por las cuatro funciones lingüísticas: nominar, articular, atribuir y designar. La pregunta que nos hacemos aquí es, ¿Cómo se materializan en la verbalización de las acciones estas funciones? Y ¿Cuál es su relación con la interiorización o apropiación del conocimiento matemático?

- *Lugar cultural:* La pregunta que nos hacemos aquí es, ¿De qué manera las formas de actuar pensar, sentir y conocer inmersas en el trabajo con los niños, están fomentando cambios en las distintas maneras de percibir códigos, las reglas de conducta, las formas de relación - con las demás personas - y con el conocimiento matemático?

De esta verbalización de las acciones se han tomado registros⁹ que nos han ido señalando el papel del lenguaje en la construcción del conocimiento matemático escolar desde dos competencias: competencia matemática y competencia cultural, que se han separado así para efectos de análisis.

* *En la Competencia matemática consideramos:*

- El lenguaje, en tanto sistema de signos verbales que articula la representación del pensamiento.
- El desarrollo de la competencia comunicativa, entendida como un conjunto de procesos y conocimientos de diverso tipo: lingüístico, sociolingüísticos, estratégicos y discursivos, que el estudiante deberá poner en juego para producir y comprender discursos matemáticos en contextos escolares.
- Para efectos de análisis hemos considerado conveniente diferenciar, los cuatro aspectos de un sistema conceptual en construcción¹⁰: sintaxis, semántica, pragmática y argumentación. Este enfoque funcional del desarrollo del pensamiento matemático ha centrado los diseños didácticos en las capacidades pragmáticas de los estudiantes, en la semántica y argumentación, permitiendo a los alumnos elaborar su propia sintaxis.

**Competencia cultural, en la que se atiende a la formación de un lugar cultural, configurado entre otros por:*

⁹ Registros como las notas de trabajo de los estudiantes, el diario de campo y las relatorías de los maestros, y en algunas ocasiones grabaciones de audio o video.

¹⁰ Tomado de "Caracterización de los niveles de complejidad de los aspectos de un sistema conceptual en construcción" de Pérez, J. Hernando.

- La relación que los niños tienen con el conocimiento.
- La actividad de estudio, su desarrollo.
- Las prácticas sociales.

El tratamiento de los registros y su análisis, se hace a partir de este enfoque conceptual y de las categorías que se derivan en el proceso de sistematización.

2. SISTEMATIZACIÓN

Uno de los aprendizajes en el que nos hemos visto abocados los maestros del *Proyecto Anillito: Cultura matemática en la educación Básica* ha sido la toma de registros y la realización del respectivo análisis. La labor de orientación general del trabajo realizado por los niños, no solo se comparte, sino que también se rotan los roles de quien toma registros y quien orienta la actividad. Esto ha permitido desarrollar la atención hacia ciertos eventos que se presentan como regularidades en el comportamiento de los niños y que empiezan a ganar para nosotros mucho significado.

También los comentarios que realizamos informalmente al final de cada sesión, nos permiten ver de manera diferente cosas que antes parecían insignificantes; desarrollando así en nosotros *una sensibilidad informada*, la cual habrá que documentar en el preciso momento en que se vuelva a presentar los codiciados eventos. Esta labor en general no ha sido fácil, pero nos ha motivado a seguir registrando eventos significativos para nosotros, como también *ver muchos hechos nuevos* al elaborar las relatorías.

A continuación presentamos una experiencia en estas interesantes y arduas labores, a través de las preguntas **¿Cómo se hace un registro?** y **¿A qué prestar atención?**

Se toma nota por escrito, en el diario de campo, de los eventos que van sucediendo en el transcurso del desarrollo de la sesión de trabajo. Estos eventos versan sobre *cómo piensan y proceden los niños en la solución de una situación problema, y cuales son los obstáculos en su aprendizaje.*

Se consignan las declaraciones espontáneas de los niños y se apoya este registro con el trabajo escrito del niño. Si resulta una situación muy interesante, uno se acerca y le interroga, advirtiéndole que va a escribir lo que responda y se le pide su colaboración para que nos dedique unos pocos

minutos. Le hacemos preguntas que vuelven a atraer a colación la pregunta que se ha tratado unos segundos antes y se pone por escrito (lo hace el maestro).

Esto permite obtener declaraciones de los niños que complementan y amplían la información que cada niño ha consignado en su hoja de trabajo, develando *estrategias de pensamiento, la forma verbal oral espontánea que se desarrolla en la actividad, las interacciones de comunicación, las formas de trabajo, las conjeturas, deducciones, exclamaciones de imposibilidad o dificultad para entender o resolver el problema, la relación que realizan con el conocimiento, la imagen de matemática que poseen*, entre otros. Posteriormente se realiza un análisis crítico al registro del diario de campo, como el que se presenta a continuación.

2. 1. Reflexiones en torno a un registro tomado del diario de campo

En esta sesión ha resultado relevante la forma como proceden para resolver un problema, es decir, las preguntas que hacen, los datos que necesito para cada pregunta, y las conjeturas que les permiten navegar en el problema. (Problema de los caramelos).

Jhon: “yo creí que se utilizaban todos los datos que hay ahí”.

El caso de Gloria:

P: ¿Porque hiciste esta cuenta? (Acercándome a la mesa de trabajo)¹¹

“Quería saber si vendía todos los dulces, cuanto me daba. Coloque el 1260 con los 950 que le dieron por cierta parte de los caramelos y lo sumé para saber cuanto me daba por todos los caramelos, le sume 42 para saber cuanto era la ganancia que me daba por todo”.

Tiene consignado en su hoja de trabajo: “Esta mal” dice (indicando la última suma)

$$\begin{array}{r} 1260 \\ \quad 950 \\ \hline 2210 \\ \quad \quad 42 \\ \hline 2250 \end{array}$$

¹¹ Declaración oral tomada del registro escrito(diario de campo) hecho durante la sesión.

Por otra parte agregan como datos importantes: “un amigo que tiene mucho dinero” “el amigo le compro los caramelos” “ le salgo ganando 20 pesos a cada caramelo”. Esto configura lo que es importante para el negocio de los caramelos pero no para la pregunta ¿Cuánto le valió cada caramelo? Que es la pregunta a la cual le asignan los datos importantes.

Análisis: Igual que la declaración anterior los niños creen que hay que *usar todos los datos que tiene el problema*. Y otros que incluyen como datos importantes como: “le salgo ganando 20 pesos a cada caramelo” o “un amigo que tiene mucho dinero”. Es decir datos que no se necesitan, o que surgen ya de alguna reflexión del problema.

Estos eventos están mostrando una imagen de matemática, en la que hacer matemática es *operar algorítmicamente con los números, y con todos los números que aparecen le enunciado del problema*, porque si están en el problema “*es para usarlos y son importantes*”.

El trabajo realizado por los niños en dos meses apenas ha empezado a remover la imagen de matemática que tienen. Se ha ganado que los niños hagan discursos orales sobre las posibles soluciones a un problema, y en términos escritos, ya no aparecen *los algoritmos desnudos y superpuestos*. Ante la insistencia por el significado de lo que hacen se ha logrado que escriban – en la hoja de trabajo del estudiante - declaraciones como:

“ Para realizar el tercer ejercicio (se refiere a la tercera pregunta) realice una resta de 42 que son el número de caramelos y menos 19 que son los caramelos que el amigo le compró de caramelos y me dio 23 que son los caramelos que le quedaron y luego realizo una suma para probar la resta, sumo $19 + 23$ y me da 42, que es el número de caramelos”. (María Lorena. 11 años).

El esquema mental básico de solución de un problema – *por el cual siempre se menciona el algoritmo que se aplica como solución al problema* – no ha desaparecido; así como *el esquema probatorio* que es realizar el algoritmo inverso (reversibilidad) para obtener el dato original, no se ha modificado. Este esquema ha evolucionado de ser una sencilla comprobación algorítmica *a un evento significativo para sí* que le permite estar seguro. Ronal escribe: “... y para estar seguro de que *es* el resultado, sumo 23 y 19”.

Veamos otro registros: Jhon Fredy escribe: “... Para hacer esta pregunta tengo que hacer una resta y restamos 42 menos 19 y me da 23 entonces le sobraron 23 caramelos por lo tanto 42 es el número de caramelos que

compró y 19 es el número de lo que le compraron”. Escribe la siguiente operación: $42 - 19 = 23$.

Estos registros muestran que está cambiando la relación del niño con el conocimiento y con el maestro, ya que las acciones que empieza a *hacer son para convencerse a sí mismo y empezar a ganar confianza en sus propias ideas*; cosa que al comienzo no sucedía ya que la comunicación que el niño lograba era de tipo *estratégico*, es decir, la situación no es problema para el niño, sino es para solucionarle al maestro un problema, y por lo tanto trato de *solucionarlo de la manera como me oriente la intuición* y opero con todos los números que me da.

La intuición aquí puede ser vista de dos maneras: una como *acción estratégica* para satisfacer al maestro y la otra *al servicio de la imagen de conocimiento matemático que se tenga*, es necesario aclarar que estas imágenes pueden ser estáticas – que es la que creemos circula la escuela – o puede evolucionar lentamente a través de la indagación sistemática e intencional de la matemática escolar tanto del maestro como de los niños.

Otro elemento característico de esta imagen de conocimiento matemático es la forma intuitiva mediante la cual proceden por estimaciones y la cual les permite decidir cual es el algoritmo que resuelve el problema.

Veamos el caso de Julio: (declaración verbal consignada en el diario de campo)

P: ¿Porque pensaste en una resta?

Julio: “Porque de pronto disminuía el número”, luego de una pausa y de insistir con la pregunta: “Porque le disminuía al número para saber el resultado que valió cada caramelo”.

P: ¿Porque no hizo una multiplicación?

Julio: “ que da un número alto entonces ahí esta mal”, “ que daba el puntaje que vale cada caramelo”. “Multiplicamos... (pausa) nos daba un número más grande, que cada caramelo no podía valer 52.000 pesos. Es un número menor que 1260”.

P: ¿porque divide?

Julio: “Porque uno divide 1260; lo divido en 42 porque son los que valen y entonces ahí salen 30 pesos”, “ que cada caramelo vale 30 pesos”.

P: ¿Cómo me aseguro que de verdad cada caramelo costo 30 pesos?

Julio: “ haciendo una multiplicación...” (explica lo que significa cada número- 42, 30 y 1260).

P: ¿Hay otra manera de probar?
Julio:” sumando $30 + 30 + 30 + \dots$

Gustavo interpela: “ tiene que ser un número pequeño, entonces si multiplico o sumo da un número muy grande, entonces hay que restar o dividir, pero se resta porque ahí no dice que hay que repartir y la división es repartir”.

Una confirmación explícita de la estimación algorítmica es el caso de Jhonatan: “Se tiene que hacer una división, porque ni suma, ni resta o multiplicación no da”. Jhonatan en su trabajo individual ha escrito los datos que él cree se necesitan para solucionar el problema y luego vuelve a copiar estos mismos datos porque fueron presentados en plenaria por otros niños, mostrando con esto que *no ha tenido consciencia de su trabajo* y que lo valioso es lo que el maestro y sus otros compañeros han consignado en el tablero.

Es notable que escuchando las intervenciones de los niños y dando una hojeada en cada mesa a los escritos, *una abrumadora mayoría proceda por esta especie de eliminatoria de posibilidades para aplicar un algoritmo.*

Otra faceta de esta misma imagen es *la inestabilidad de los razonamientos propios (falta de confianza en sus propios razonamientos) ante la interacción de comunicación con el maestro o con otro compañero.* Veamos el siguiente caso:

P: ¿ Cuantos caramelos vendió? (La maestra ordena consignar por escrito la pregunta y escribir los datos que necesito)

A. “Que vendió 20 caramelos por 950 pesos”

P: ¿Cómo lo supiste?

A. “ Un dato es que vendió 19 caramelos.

P: ¿Es un dato que necesitamos?

A. “No”

A₁”Vendio cada caramelo a 50 pesos cada uno”

A₂”Que le dieron 950 pesos”

Se nota, en el caso anterior, que el niño va cambiando su respuesta a medida que el maestro lo interpela, porque siente que lo que él dice está mal y no puede ver con claridad lo que el maestro quiere, es decir, no hace consciencia de sí mismo, sino lo que le importa es el otro.

Por otra parte al hallar los datos que necesitan *se ven impelidos a avanzar en la solución de la pregunta, trazando cursos de acción y verificando que funciona*; por esta razón han avanzado hasta resolver la pregunta. En segundo lugar en la interacción de comunicación con la maestra los niños, al *no* obtener una señal de aprobación de la maestra, lanza una tras otra afirmación, sin insistir, explicar o argumentar su posible validez. Proceden adivinando lo que quiere la maestra hasta que aciertan.

2. 2. Caracterización de la matemática escolar con la que los niños llegan al programa

Carecen de narratividad, no hay discurso propio, maneja algo así como un “rezo”, que ha sido impuesto por alguien, por ejemplo: “para saber cuantos caramelos me quedaron tengo que hacer una resta”.

1. *Las operaciones matemáticas son mágicas, no hay un proceso racional de construcción del algoritmo*: “De siete no puedo quitar nueve, le digo al tres que me preste una y queda convertido en 17”. Es claro que las cantidades se personifican: “le digo al tres que me preste una” y por otra parte sufren las cantidades una transformación mágica, dado que el 1 no es 1, sino 10, y el siete se vuelve 17.

Otro ejemplo: “Como hay dos cifras en el divisor, separo dos en el dividendo y digo...” Aquí el niño se orienta para solucionar un problema por la *retahíla*, y el papel de esta es mostrarle al maestro que le aprendió su discurso

2. *No le enseñan los algoritmos completos*, es decir, se hace una sincopación – por años escolares – del algoritmo. “Yo no puedo hacer esa división de dos cifras, a mí me han enseñado por una cifra”. El énfasis de la enseñanza se hace en el aprendizaje de algoritmos fraccionados, por ejemplo: suma en la que no se llevan cantidades, suma llevando, resta fácil y resta prestando.

3. *Las matemáticas son los números y sus operaciones mágica*

En una situación problema donde aparezcan cantidades todas deben utilizarse. Ante el problema: “Pedro tiene 20 años y vive en una casa grande con tres perros, 2 gatos, 5 loros, ¿Cuántos animales viven en la casa? Y ¿Cuánto vale cada loro?”

Los niños ante la primera pregunta suman efectivamente el número de perros, gatos y loros; pero ante la segunda pregunta no se fijan que los datos son insuficientes, pero como les sobra una cantidad que es 20 esta debe ser utilizada, haciendo cosas como “ $20 \times 5 = 100$ ” donde 100 dicen es el precio del loro.

4. *La concepción de matemática, es estática llena de definiciones y de rígidas recetas.* Esta visión produce una forma de pensamiento y de acción como: *los niños son poco creativos, hay que decirles a cada momento que hay que hacer, no preguntan, siguen recetas, el maestro es el único que puede validarles, es decir, esta bien o mal, se conforman con cualquier respuesta, el todo es sea número*
5. *Todos los problemas matemáticos tienen solución,* por esto operan con las cantidades no importa cómo y que signifiquen, es el caso presentado en el numeral 5, 20 son años y 5 son loros y al multiplicar el número de años por el número de loros es igual a dinero.
6. *En matemáticas no se hace discurso,* se hacen operaciones con números. Al decir discurso nos estamos refiriendo a la posibilidad de narrativizar las acciones y operaciones matemáticas – incluyendo los procesos de solución –Esta dificultad es mucho mayor en el ejercicio del escribir, ya que pueden *pasar por clases de español.* También sucede que cuando al niño se le pide escribir el proceso de solución, dice” ¿Cuándo vamos a hacer matemáticas?
7. *Para poder solucionar un problema, el maestro debe darle los conceptos previos, sino el niño “no lo puede resolver”.* Esta es una visión compartida del maestro y del estudiante. Al maestro es frecuente escucharle expresiones como “Yo este problema no se lo pongo a los niños porque ellos todavía no saben sumar llevando” y el niño exclama” Yo no puedo hacer eso porque mi profesor no me ha enseñado”.
8. El niño al lanzar juicios, solo tiene en cuenta el punto de vista del maestro y este se le convierte en una *verdad absoluta*, indiscutible; es por esto que no se escuchan, gritan y responden en coro.
9. Hay una *tendencia en los niños a generalizar en los juicios,* por un caso o dos, se generaliza para todos.
10. *El niño cree en sus afirmaciones* tanto que cuando las lanza y chocan con las afirmaciones de los otros, no son escuchadas ni sometidas a discusión.

2. 3. Niveles de narrativa en los niños

1. Lo primero que se muestra es el “rezo” o la “retahíla”.
2. Hablar directamente de las operaciones sin explicaciones posteriores: “dividimos 1262 entre 42 caramelos y así obtenemos el precio de cada caramelo”.

3. El sujeto se muestra explicándose que es lo que tengo que hacer.
4. Invoca a la operación y explica lo que determinan las cantidades.
Ejemplo: "Dividimos 950 pesos que fue la cantidad de plata que me dio mi amigo por cierto número de caramelos; por 50 que es el precio de cada caramelo que le vendió el amigo, y nos dio 19 caramelos, que fueron los caramelos que le vendí a mi amigo".
5. Opera y dice que es cada cantidad:

$$50 - 20 = 30$$

$$\begin{array}{r}
 50 \\
 \times 19 \\
 \hline
 450 \\
 50 \\
 \hline
 950
 \end{array}$$

50 => Son lo que le vendió al amigo

30 => Son el precio de cada caramelo

20 => Son las ganancias

6. Comienza con la respuesta y argumenta porque, mostrando procesos de reversibilidad.

2. 4. Análisis de registros

El trabajo que presentamos a continuación es la recopilación del trabajo con los niños en el campo conceptual de los números fraccionarios. Los niños trabajan situaciones problemáticas en las cuales tienen que operar con dichos números. Se parte de una situación concreta – material materializada – y luego se les pide hablar y escribir (verbalizar) en el lenguaje natural, las acciones y operaciones realizadas.

Los registros presentados aquí, los hemos considerado como los más representativos de los cinco grupos en los que se han podido clasificar; pertenecen a la parte en que culmina, globalmente el proceso de formación de las acciones (y operaciones) en forma verbal externa y se avanza hacia el camino de su interiorización.

En el desarrollo de la actividad, los niños hacen estas elaboraciones en voz alta (trabajo individual y en equipo) y luego en forma verbal escrita (trabajo en equipo).

Actividad: Argumentar la validez de la siguiente afirmación:

$$1 / 2 + 2 / 6 = 11 / 12$$

❖ Primer registro

“Cogimos la tira de los sextos y de esa tira cogimos dos sextos cogimos la tira de los medios y cogimos solo un medio los unimos y cogimos la tira de los doceavos y la pusimos debajo del medio y de los sextos y nos daba en la línea del décimo doceavo. Entonces la afirmación es falsa. (Linda Cárdenas).

Análisis del primer registro

- Lógica
 - La lógica está en la argumentativa de lo que sabe hacer.
 - Hay justificaciones de orden retórico
 - Hay un conocimiento incipiente de los objetos, las operaciones y las relaciones de la nueva estructura (los fraccionarios).

- Articulación
 - La articulación de la representación es horizontal, porque agrupa y clasifica las acciones.
 - Su mirada es aún global, no hay una diferenciación explícita de las acciones que son objeto de conocimiento
 - El “y” vincula las acciones en la secuencia en que se produjeron
 - Las frases no son proposiciones matemáticas

- Competencia pragmática
 - Comunica y convence por medio de acciones que son evidencias materiales
 - Las palabras están pegadas a las acciones externas

- Competencia lingüística
 - Está a la saga, ya que describe acciones secuenciales articuladas por la forma en que se vincularon sus representaciones, sin lograr todavía articular según las reglas del lenguaje natural.
 - Se comunica a través de la acción material.

- Se dan actos de habla no apropiados, ya que el solo lenguaje natural no es suficiente para demostrar lo que afirma
- El uso de los verbos
 - El tiempo de los verbos esta en pasado
 - El verbo ser aparece en el desenlace o clausura de la narración
- Formas de validación
 - Se apoya en la evidencia empírica, así son las cosas porque son de hecho

❖ Segundo registro

“Esta afirmación es falsa porque: que por un lado de la tira están los sextos entonces la mitad son tres sextos y a esos tres sextos le agrego los dos sextos lo cual tres sextos es una mitad y de la otra mitad también tiene tres sextos pero yo cogí solo dos sextos entonces sobra un sexto y ese sexto lo doble y por el otro lado estaban los doceavos lo cual los conté y el sexto que doblé estaba formado por dos doceavos y como son doce doceavos menos dos doceavos daba no más diez doceavos lo cual esa afirmación es falsa”.
(Carlos Alberto).

Análisis del segundo registro

- Lógica
 - La lógica está aún en la evidencia empírica de lo que sabe hacer
 - Las justificaciones son de orden retórico
 - Empieza a mirar objetos individuales, opera con ellos atribuyendo equivalencias conceptuales.
- Articulación
 - Utiliza el “y”, como enlace para describir las acciones materiales.
 - Utiliza enlaces para pasar de acciones materiales a materializadas. Por ejemplo “...están los sextos, entonces la mitad son tres sextos”. De forma similar “ lo cual”, “ y como son”. Estos enlaces tienen carácter de deducción.
 - No usa signos de puntuación
 - Las acciones solo se pueden diferenciar por el uso de los enlaces.
 - Su mirada es aún muy global y no organiza acciones en torno a una categoría, es decir, no aparece la generalización.
 - Sus justificaciones siguen siendo de orden retórico

- Analiza acciones.
- Competencia pragmática
 - La fuerza del argumento está en el convencimiento de las acciones materiales. Esto es, en la evidencia.
 - Comienza a utilizar algunas deducciones, posibilitadas por la manipulación del material, más no por generalización en matemáticas.
 - Aunque la estructura del discurso es retórica, a diferencia del anterior, comienza a hacer pequeñas explicaciones que se sales de la evidencia.
 - Comunica y convence por medio de acciones que son evidencias materiales
 - El tiempo para los verbos en la primera parte es presente y en la segunda parte pasado
 - No logra hacer generalizaciones
- Competencia lingüística
 - El presente lo usa cuando está seguro de las acciones que realiza y el pasado para explicar qué de lo que realizo le sirve para llevar a cabo o ejecutar correctamente la acción.
 - La narración va acompañada de la explicación, es decir del porque lo hace.
 - Establece relaciones
 - La realización verbal es desplegada
 - Al no usar los signos de puntuación, no es claro donde empiezan y donde terminan las acciones y las frases no se distinguen explícitamente.
- Formas de validación
 - Se sigue apoyando en la evidencia empírica.

❖ Tercer registro

“Que un medio equivale a seis doceavos y dos sextos equivalen a cuatro doceavos y cuatro doceavos más seis doceavos son diez doceavos.

Entonces es falso, porque le falta un doceavo para ser once doceavos”
(Etna Milena).

Análisis del tercer registro

- Lógica

- Desaparece la evidencia material o materializada
- La fuerza del argumento está en el lenguaje, casi se podría asegurar, que en las acciones mentales no necesita hacer retórica, ni dar explicaciones.
- Hace afirmaciones con mucha seguridad
- Sintetiza las acciones, la fuerza del argumento es lo sintético.

- **Articulación**

- Construye afirmaciones matemáticas, no apoyadas en acciones materiales, sino en acciones mentales.
- Dichas proposiciones son enlazadas de la siguiente manera:

$$(p \wedge q \wedge r) \Rightarrow s$$

- Es decir, muestra las causas para poder concluir, pero necesita dar una explicación de más para estar segura de que lo que dedujo es correcto.

$$(p \wedge q \wedge r) \Rightarrow s \quad \text{porque ...}$$

- Por otra parte pareciera que $(p \wedge q \wedge r)$ no son suficientes para concluir s .
- Desaparece el discurso retórico, para mostrar generalización de operaciones
- No se hace necesario el uso de los signos de puntuación ya que los enlaces son suficientes para entender el discurso

- **Competencia pragmática**

- Las acciones están en el plano mental y se podría decir que la pragmática está fuera del contexto rutinario
- Se puede notar el paso a lo hipotético deductivo
- No se puede asegurar que ya hay discurso matemático, está en esa mediación entre lo común y lo formal

- **Competencia lingüística**

- Muestra claramente las operaciones que formaron sus acciones materiales, ya que es capaz de sintetizar y esto le permite nominar
- Comienza a desechar acciones o a categorizarlas para ver las como parte de una operación
- Por otra parte utiliza la palabra “equivalencia” que hace que mire la totalidad como un todo armónico y no como igualdad o resultado de operaciones

- El discurso es impersonal, a diferencia de los anteriores donde aparece el sujeto ejecutor de acciones
- Los verbos utilizados son “equivaler” y “ser”, que son propios del discurso sobre objetos matemáticos; por una parte el ser que define la esencia del objeto matemático y el “equivaler” que hace ver el concepto a la par con otro. (En matemáticas existen equivalencias no igualdades, es decir, operación 1 equivale a operación 2).
- La lógica esta a un nivel conceptual
- Hace nominaciones y busca equivalencias
- Las frases son completas y se convierten en proposiciones matemáticas
- Se desprende de lo material para hacer acciones mentales
- La realización verbal es reducida
- Formas de validación
- La racionalidad del conocimiento

❖ Cuarto registro

“Que dos sextos y un medio son equivalentes a once doceavos, esta afirmación es falsa, porque da diez doceavos.

Dos sextos son equivalentes a cuatro doceavos y un medio son equivalentes a seis doceavos entonces sumo cuatro doceavos que son dos sextos y seis doceavos que son un medio da diez doceavos y no once doceavos, entonces la afirmación es falsa” (Juan Pablo)

Análisis del cuarto registro

- Lógica
 - Desaparece la evidencia material – materializada.
 - La fuerza del argumento está en el lenguaje.
 - Sintetiza las acciones, y puede analizarlas a voluntad propia.
- Articulación
 - Hace nominaciones precisas articulando proposiciones matemáticas
 - Formula la validez de la afirmación y luego pasa a probarla.
 - Los objetos matemáticos son mostrados mediante equivalencias
 - El discurso muestra la categorización de las operaciones y su nominación que ahora se realiza en el plano conceptual.
 - Realiza equivalencias en ambas direcciones al nivel conceptual
 - El uso del verbo SER está en presente.
 - Utiliza signos de puntuación que sirven de enlace a las proposiciones.

- Competencia pragmática
 - El discurso está presentado como una prueba matemática
- Competencia lingüística
 - Usa los términos adecuados y frases bien formadas para comunicarse
 - Las frases son proposiciones compuestas
- Competencia pragmática
 - Opera con acciones mentales, dialogando con el otro sujeto inmerso en la escritura y lo refuta.

❖ Quinto registro

“Esta afirmación es falsa porque vamos a pasar todo a doceavos. Dos sextos son equivalentes a 4 doceavos y un medio es equivalente a seis doceavos entonces sumando dos sextos que son cuatro doceavos y un medio que son 6 doceavos sería equivalente a 10 doceavos y no a once doceavos entonces la afirmación es falsa”(Miller).

Análisis del quinto registro

- Se diferencia con el anterior, en que involucra al interlocutor, para que ejecute con él las acciones mentales.
- Explícita la estrategia o acción a realizar
- La realización verbal es reducida

2. 5. Un análisis de la forma material interna para sí a la verbal externa para otro

En el proceso de asimilación de una forma de la acción, al sujeto le es necesario orientarse tanto al contenido del objeto de la acción como a la forma misma de la acción. Es clara la forma en que en el sujeto se dinamiza para operar sobre objetos en forma verbal cuando éste implementa el uso de las funciones lingüísticas; en el caso de acciones materiales es conocida su pertinencia como punto de partida de la asimilación, gracias precisamente a la representación material concreta que aporta¹².

¹² Por esta razón las acciones de tipo material-perceptiva constituyen formas apropiadas para iniciar la construcción y aprehensión de cursos de acciones sistemáticos y regulares, los que más tarde se habrán de realizar en forma interna acompañadas de determinadas características y recibiendo el nombre de operaciones.

Las acciones materiales que realiza un sujeto se insertan en el juego de posibilidades que generan los objetos materiales; el sujeto ha de estar sometido al juego de condiciones que subyace a la situación material, sea que éste desarrolle cursos de acción con tanteo o con eliminación sistemática. Esto no ocurre en el caso en que los objetos se manipulan en la forma verbal, salvo que allí se haya reconstruido el sistema de relaciones en juego en la anterior situación material.

En el caso de la noción de ángulo, por ejemplo, que inicialmente es adquirida en forma dinámica realizando giros con el cuerpo, una generalización importante se obtiene pasando la acción a la forma materializada al representarse la situación con un dibujo; este dibujo aun contiene en forma natural la estructura del objeto de la acción y las condiciones para operar con ella -segmentos de recta-; si se introduce una forma simbólica de representación el sujeto puede experimentar *el* haberse quedado sin objeto de la acción, por el hecho de no haberse conformado plenamente el Objeto de la acción en esta forma simbólica, tarea esta de supremo cuidado.

Dado que la acción material parte de condiciones definidas por objetos materiales, el sujeto que la actúa lo hace condicionado a la lógica del material, es decir, a la lógica que los elementos y relaciones del material configuran; de modo que las posibilidades en esta forma de la acción, así como sus limitaciones, descansan en esta lógica material.

En particular, un material didáctico aunque ofrece una numerosidad de opciones somete al sujeto que la realiza al juego de posibilidades que se desprenden de su carácter de Unidad, entendido éste como la clase potencial de todas las relaciones posibles entre partes del material dado.

En el registro de los caramelos se observa que los niños al desarrollar el problema usan una lógica que no pertenece ni a la matemática ni al material concreto; pensamos que sí el proceso de solución de este problema se hubiera acompañado de la acción material, se hubiera eliminado las soluciones del tipo "se dejaron de vender 300 caramelos". Esto por que la forma verbal no reproduce de manera espontánea la lógica del objeto de la acción.

Un desempeño así es resultado de la falta de construcción de acciones materiales: cuando un estudiante no ha tenido la oportunidad de pensar materialmente por sí mismo, no tiene la comprensión del significado de la acción material por cuanto no se ha intuido en el material la lógica correspondiente. En este caso se han presentado estudiantes que se cohiben de manipular el material porque sienten temor a equivocarse ya que descargan todo, el juego de posibilidades en su propio desempeño, negando el carácter de unidad de dicho juego.

Podríamos decir que en la acción material especialmente se hace posible el que un objeto se vea y se palpe y sin embargo no se le conozca en franco contraste con la confianza y familiaridad que le podamos reconocer; a diferencia, la acción en la forma simbólica-verbal -el sujeto ya no percibe el objeto-, le lleva a descubrir que ahora no tiene confianza frente al objeto y que necesita “conocerle”, esto es, representarlo verbalmente recreándolo en todos sus elementos y propiedades fundamentales.

La representación en la forma material es pasiva en el sentido de que permite escoger intuitivamente el objeto material que contiene al objeto de la acción, mientras que la representación en forma verbal implica necesariamente la capacidad consciente de recrear una representación del objeto de la acción capaz de contenerlo en determinada esencialidad.

En la forma material de la acción se da el caso que el conocimiento reposa fuera del sujeto en la forma de una lógica material, esto es, en la forma de una estructura funcional atrapada en los objetos; de tal modo que cuando la acción reaparece ya no en la forma material sino en la verbal, sin apoyo en el material, la lógica del material junto con el material mismo que antes sugerían el tipo de operaciones y la forma de su realización, desaparecen y entonces surge la necesidad del conocimiento teórico el cual modela y/o simula alguna parte de la estructura atrapada en los objetos materiales.

En síntesis, las formas de la acción por las que circula la práctica del estudiante se dan en función de sus necesidades cognitivas, y de sus motivaciones e intereses; la práctica de éstas le permite descubrir, por ejemplo, el objeto de determinada acción, el contenido de la misma -las operaciones, sus composiciones, su carácter consecutivo, la estructura en la cual se inscriben tales secuencias-, así como ejercer un control objetivo sobre la acción misma.

2. 6. Tensión entre lo analítico y lo sintético

En los registros, entre más fino sea el lenguaje matemático, lo que más atrapa son relaciones y operaciones; que son las que en última instancia quedan en los conceptos. Estas relaciones y operaciones son invisibles en la parte material materializada, y solo son visibles cuando se ponen en el lenguaje, puesto que se convierten en *objetos de reflexión*, se va decantando la esencialidad del objeto y finalmente se convierte en concepto. Lo esencial es lo que lo hace **ser y es lo que lo diferencia de los demás**.

El pensar, se desarrolla y desenvuelve en una permanente tensión entre lo sintético y lo analítico:

Sintético – analítico – sintético

En la primera fase se asimila la acción como totalidad, pasando luego por un filtro riguroso cuya función es partir el todo en secciones muy finamente separadas, y a su vez articuladas por el lenguaje. Gracias a éste, es posible hacer el análisis de la representación del pensamiento y hacer de los objetos representados, objetos de reflexión que pasaran entonces al plano de la conceptualización y es aquí donde es posible operar, ya no con el objeto materializado sino con la palabra que lo representa. Por esto, el proceso vuelve a lo sintético, de una forma cualitativamente distinta a la que se inició.

En el trabajo que hemos realizado con los niños muestra que siempre pasan de un NO discurso, a **estructuras lingüísticas narrativas**, como se puede mostrar en este y en otros ejemplos:

El problema del *ovillo de cabuya*: se trata de un ovillo de cabuya, al que sucesivamente se le toma la mitad de lo que quedaba, hasta el momento en que se le sustraen $2 / 5$ y con los restantes 30 cms hacen un teléfono.

La estructura narrativa se pone de relieve en el siguiente registro: “ Empezamos a investigar los $2 / 5$ que cogió la hermana y sacamos la conclusión que cada $1 / 5$ vale 10 centímetros de cabuya en este problema entonces los $2 / 5$ miden 20 centímetros de cabuya y sobran 30 centímetros de cabuya con la que al final hicieron un teléfono”.(David)

En este caso vemos que:

“ Empezamos a investigar los $2 / 5$ que cogió la hermana,

⇒ *potencialidad de la acción*

y sacamos la conclusión que cada $1 / 5$ vale 10 centímetros de cabuya en este problema.

⇒ *puesta en acto de la acción*

problema entonces los $2 / 5$ miden 20 centímetros de cabuya y sobran 30 centímetros de cabuya con la que al final hicieron un teléfono”.

⇒ *Clausura*

3. APROXIMACIÓN A LOS TIPOS DE VERBALIZACIÓN DE LAS ACCIONES

A continuación presentamos una primera aproximación a los tipos de discurso que presentan los estudiantes cuando están trabajando la resolución de problemas en equipo.

Tipo 0. No hacen verbalización de la acción, elaboran (realizan) un texto más o menos escueto de las acciones hechas, contadas con el mínimo detalle.

Hay riqueza en la potencialidad de la acción, en lo que se está construyendo. En estos procesos semióticos de la conciencia, hay una mirada global que no logra penetrar en las relaciones operaciones y acciones que están plenas de contexto, de muchas redes incipientes.

También se encuentra que carece de los elementos sintácticos del idioma como la puntuación y las palabras que sirven de vínculo.

Hay una intencionalidad pragmática por comunicarse ya que los objetos que manipula en el discurso están adheridos no solamente a las acciones físicas sino al contexto rutinario y vivencial.

Consideramos que esta es una primera etapa en la adquisición de los conocimientos, pero que si se enfatiza se puede convertir en un obstáculo, debido a la enseñanza, que más tarde se puede convertir en obstáculo epistemológico en el conocimiento matemático. Esto es, el usar siempre el mismo referente matematizado, que no ha llegado a ser interiorizado en forma mental, no permite que el objeto de conocimiento se convierta en acción mental.

Validación: Se espera que la validación sea dada por los otros. Las acciones son externas y ajenas, se hacen para complacer al otro.

Tipo 1. Se describe la actividad con algunos detalles por medio de frases cortas. Se hace evidente la dificultad para nominar las acciones y diferenciar explícitamente lo que será objeto de conocimiento.

La articulación de las frases se hace por medio del “entonces” y del “y”, con la característica de que estos vínculos no son conectivos lógicos, solo sirven de vínculo en la sucesión lineal que constituye la frase.

Realiza atribuciones de acciones físicas, que él pueda comprobar y mostrar empíricamente, como en:

“¿Dos sextos son equivalentes a cuatro novenos?. No es equivalente porque al medir $4 / 9$ con $2 / 6$ notamos que $4 / 9$ es más grande que $2 / 6$. Entonces notamos que en la tira nos hace falta $1 / 9$ para completarlo”.(Jhon Alejandro García).

El razonamiento no se compromete, prevalece la acción física. Por otra parte se espera siempre una orden para ejecutar, no le hacen seguimiento a la acción. Interactúan con el maestro esperando que le digan si está bien o mal, no para hablar sobre el tema, es para pedir que se le valide.

En la verbalización de la acción los verbos que más comúnmente usan son: tener, hacer, coger, notar, dar; todos usados en pasado.

Validación: Se apoyan en la evidencia empírica, así son las cosas porque son de hecho.

Tipo 2. Construyen proposiciones y las justifican, aparece el texto y el discurso sobre lo que es objeto de conocimiento. En la verbalización escrita aparece lo que ya se ha ido constituyendo en forma oral; no es lo mismo decir 15 , 15 años o 15 como la edad de..

Se presta atención a las relaciones que entran en juego pero no se nominan (mayor que, menor que), se comprenden sin enunciarse. La explicitación es necesaria para tomar conciencia de las relaciones y poder considerarlas como objeto de estudio.

Validación: La validez está apoyada en las reglas de la estructura lógica de los conocimientos matemáticos que maneja.

Tipo 3. La verbalización de la acción es desplegada, todavía está en el nivel rutinario. Es narración de acciones, son en sí declaraciones argumentativas que contienen elementos de prueba. Está buscando la esencialidad del concepto, su comprensión. Es explícito el interlocutor.

Validación: Se apoya en la evidencia empírica

Tipo 4. La verbalización de la acción es reducida, su contenido es descontextualizado y está en el plano de la acción mental.

Está en el tránsito entre el contexto hipotético y el generalizado. Identifica las relaciones y las operaciones de la nueva estructura. Esta última se manifiesta como objeto matemático pero sólo en el aspecto semántico; enriquecido por la pragmática y elaborado por la argumentación. En el aspecto sintáctico, aún no ha elaborado suficientemente las reglas de su escritura (representación en el sistema de signos matemáticos). Por otra parte expresa un diálogo escrito fluido con el texto propuesto. No es un texto explicativo, es un texto que muestra la condensación de un pensamiento, un número de palabras significativamente menor, factores que caracterizan una tendencia hacia la predicación. El verbo ser es utilizado para mostrar la esencia del objeto de estudio.

Validación: Está al nivel formal de la demostración matemática, utiliza la simbología propia de la matemática.

En conclusión afirmamos que para la adquisición e interiorización de los conocimientos matemático así como para el desarrollo intelectual (formación del pensamiento matemático) de los estudiantes, es necesario que elabore y realice estos tipos de verbalización de las acciones. Con esto queremos afirmar que detrás de cada concepto hay trabajo intelectual intenso que realizar y que su adquisición y apropiación es a menudo lenta y demanda períodos largos de tiempo.

APOYO BILIOGRAFICO

AZCOAGA, J. 1993. *Del lenguaje al pensamiento verbal*. Editorial El Ateneo. Buenos Aires.

Bruner, J. 1991. *Actos de significado*. Alianza Editorial. Madrid.

_____ 1988. *Acción, lenguaje y pensamiento*. Editorial Gedisa. Barcelona.

_____ *Realidad mental y mundos posibles*. Editorial Gedisa. Barcelona

Davidov, W. 1988. *La psicología evolutiva y pedagógica en la URSS*. Editorial Progreso Moscú.

Davis, P: y Hersh, R 1988.. *Experiencia matemática*. Editorial Labor Barcelona:

Dickson, L y otros 1991.*El aprendizaje de las matemáticas* Editorial Labor. Barcelona.

Elkana, Y. 1993. *La ciencia como sistema cultural: una interpretación antropológica*.

FOUCAULT, M., 1991. *Las palabras y las cosas: una arqueología de las ciencias humanas*. Trad.cast.:1968, E.C. Frost.(Siglo XXI: Colombia).

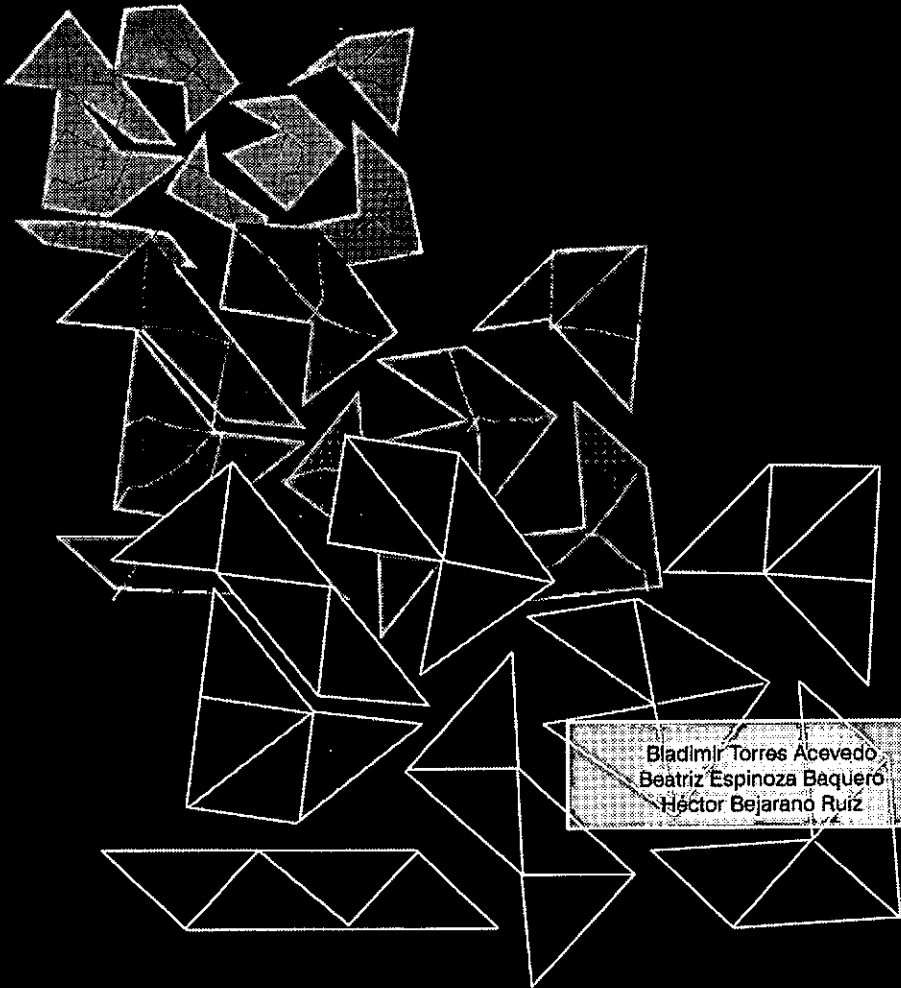
PIAGET, J., 1991. *Seis estudios de psicología* (Six études de psychologie). Trad.cast.:1964, J. Marfá. (Labor: Barcelona).

ROJANO, T. *La matemática escolar como lenguaje. Nuevas perspectivas de investigación y enseñanza*. Enseñanza de las ciencias. Vol 12 (1), pp 45-56.Marzo de 1994.

TALIZINA, N., 1988. *Psicología de la enseñanza*. Traducido del ruso por Ana Clavijo.(Editorial Progreso: Moscú).

WERTSCH, J., 1990. *La voz de la racionalidad en un enfoque sociocultural de la mente*. , en Vygotsky y la educación: Connotaciones y aplicaciones de la psicología sociohistórica en la educación. Trad. Cast. :1990, Miguel Wald.(Aique: 1993).

EL PAPEL DE LA VERBALIZACION
DE LAS ACCIONES EN EL DESARROLLO
DEL PENSAMIENTO MATEMATICO ESCOLARIZADO



Bladimir Torres Acevedo
Beatriz Espinoza Baqueró
Héctor Bejarano Ruiz

Proyecto de investigación
"Anillito: Cultura matemática en la educación básica"
Contrato 078 /96

**EL PAPEL DE LA VERBALIZACION
DE LAS ACCIONES
EN EL DESARROLLO
DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO
ESCOLARIZADO**

Análisis de registros

AUTORES

Bladimir Torres Acevedo
Beatriz Espinoza Baquero
Héctor Bejarano Ruiz

Santa Fe de Bogotá, D. C., Diciembre 22 de 1997

"El Papel de la Verbalización de las Acciones en el Desarrollo del Pensamiento Matemático Escolarizado"

Esta investigación ha sido realizada con el apoyo del Instituto para la Investigación Educativa y el Desarrollo Pedagógico IDEP. Santafé de Bogotá, D.C. Dic. 22 de 1997

EL PAPEL DE LA VERBALIZACION DE LAS ACCIONES EN EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO ESCOLARIZADO¹.

Análisis de Registros

L

La presente investigación se desarrolla dentro del marco de una propuesta de trabajo pedagógica que propende por la formación integral en matemáticas de estudiantes de quinto grado de educación básica²; éste proyecto se desarrolla en Santa Fe de Bogotá en el colegio Distrital San Francisco y cuenta con la financiación por parte del IDEP para el año 1997.

Se asume como eje de investigación la relación lenguaje-pensamiento, y en particular lenguaje-pensamiento matemático; en niños que estudian en Instituciones Oficiales del Distrito Capital y que han asistido, paralelamente, a nuestras sesiones de trabajo en jornada contraria, durante los mismos períodos escolares.

Asumimos con Wittgenstein que el lenguaje se ordena de acuerdo con las reglas de uso público y por lo tanto es la cultura, las formas de vida, la que confiere significados a los enunciados; en este sentido, recuperamos el hablar y escribir como parte de la actividad y de una forma de vida en la escuela, es decir, como una manera de pensar, sentir, actuar y conocer haciendo matemáticas.

- ¹ Se refiere al proceso de formación de estudiantes y de su actividad de estudio; que se desarrolla en el contexto de una propuesta pedagógica adelantada con la S.E.D. y que involucra la organización del espacio, del tiempo y de las actividades escolares de los niños del anillito
- ² Son sesenta estudiantes .ue han cursado quinto grado en tres Escuelas del Distrito y que actualmente estudian en el Colegio Distrital San Francisco, jornada tarde.

INVESTIGACIÓN

El problema de investigación consiste en indagar los tipos de elaboración verbal de las acciones logradas por los niños durante la construcción del conocimiento matemático en situaciones de cooperación social.

Se trata de responder la siguiente pregunta: ¿Cómo nuestros niños pasan de una situación de no discurso sobre el conocimiento, a la elaboración de discurso matemático escolar?

Particularmente se ha asumido la estrategia cognoscitiva, denominada por nosotros, verbalización de las acciones con el propósito de indagar los tipos de discurso elaborados en la construcción de conceptos matemáticos en el contexto de una actividad de estudio.

Desde el punto de vista de la relación pedagógica entre maestro y estudiante, la exigencia de verbalizar la acción – cómo estrategia en la apropiación del conocimiento - tiene como fin:

- *Hacer visibles los procesos de apropiación del conocimiento matemático.*
- *Desarrollar lenguaje matemático escolar, es decir, hacer discurso matemático; lo que implica la presencia de otros y por lo tanto de la implantación de la comunicación y el desarrollo de la respectiva competencia.*
- *Confrontar las representaciones de lo que es objeto de conocimiento, en los espacios generados para tal fin cómo: el trabajo en las plenas, el trabajo en equipo, y en el diálogo con el maestro.*
- *Crear un ambiente de trabajo a modo de un lugar cultural como espacio propicio para la reflexión, la polémica, y la elaboración de discurso matemático escolar.*

ENFOQUE INVESTIGATIVO

Hemos asumido el enfoque de la investigación cualitativa en educación que toma elementos tanto de la investigación acción como de la etnografía, constituyendo una forma de indagación autoreflexiva e interpretativa de los constructos de los estudiantes en actividades de resolución de problemas trabajando en equipo.

Nuestras categorías de análisis son:

La nominación: *se refiere a la esencia de las representaciones, indica la capacidad para representarse apropiadamente los objetos de conocimiento y darles un nombre.*

La articulación: *establece el funcionamiento coordinado de las representaciones unas con otras; da contenido a la pura forma verbal.*

La derivación: *muestra el movimiento de las representaciones desde su origen, los matices y nuevos sentidos que adquiere: plicar, multiplicar, duplicar, triplicar.*

La atribución: *Da una representación en otra por ejemplo: amigos y cuatro, forma cuatro amigos, cinco y número primo, forma cinco es número primo. Indica los procesos de categorización entre representaciones, el establecimiento de condiciones de existencia para las representaciones y de acreditación entre ellas.*

La competencia comunicativa: *entendida como la capacidad de comprender las ideas matemáticas del otro y hacer comprensible al otro en el discurso las ideas matemáticas propias.*

La imagen de conocimiento matemático: *en tanto categoría de análisis cultural, ya que las imágenes de conocimiento determinan las prácticas, los valores, el estilo de las interacciones comunicativas, las formas de validar el conocimiento, los valores, los ritos, entre otros.*

1

Análisis de Registros Sobre La Verbalización De Las Acciones

Un concepto fundamental desde los inicios del desarrollo de la presente investigación es el de realización verbal; inicialmente con Realización Verbal definíamos el acto de seguir con palabras las acciones materiales, bajo el presupuesto de que replicar con palabras lo mismo que se hace con las manos incidía contundentemente en la formación de pensamiento discursivo.

Son ejemplos de realización verbal registros como lo de Carolina, Cristian Camilo, Edna Milena y Jhon Urrego.

Registro de Carolina Rangel, quinto grado.

ejercicio
hacer la realizacion verbal
como hago para pasar en 1101
en base (2) a base (10)
En la tercera casilla del abaca
de derecha a izquierda tengo

una pepa la paso a la segunda casilla del abaco la pepa y le busco compañero y me quedan 2 pepas entonces paso la primera pepita a la primera casilla del abaco luego paso la segunda al lado derecho y le busco compañero y me dieron 5 pepitas, en base 10

Registro de Cristian Camilo, (quinto grado)

Desarrollo

1. Analisis

Para saber cuanto

costaran las 6300

operaciones debo mul

tiplicar la cantidad

de operaciones.

Analisis

Para saber si 25

operaciones costaran

250 pesos debo del

Operacion

$$\begin{array}{r}
 63 \\
 \times 10 \\
 \hline
 630
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 250 \\
 \times 25 \\
 \hline
 1250 \\
 5000 \\
 \hline
 6250
 \end{array}$$

hacer los 250 caramelos

por solo un supercoco

con los 63 super

cocos. RTA: Los 63 supercocos cuestan

630 pesos.

Como lo hizo: Comence a pensar yo misma

y entre yo Jddy comenzamos hacer la ope-

racion y comenzamos a dividir 250 pesos

con los 25 supercocos y de hay va a

brianos que cada supercoco vale 10 pesos

y ese resultado lo multiplicamos por lo 63

supercocos.

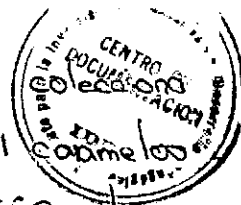
Registro de Edna Milena, (quinto grado)

Actividad

1) Juanito vive en el pais de 2
caramelos su mamá le regalo 101
y el a comprado 1011 caramelos ¿Cuántos
caramelos tiene Juanito en el pais en el
de 21?

Datos importantes

a) Que Juanito vive en el pais de 21



b) Los caramelos q' le regalo su mamá

c) los caramelos q' al comprar

Possible Solutions

36

a) Colocamos en el abaco egipcio de derecha a izquierda la cantidad de 101 q' le regalo su mamá (en la cantidad) y le agregamos lo q' el abaco comprado q' es 1011 y nos estaba dando 1112 ^{suma} pero como en la base (2) los únicos números q' pueden haber son 0 y 1, entonces no nos podía dar ese resultado de 1112. Bueno como en la primera casilla del abaco egipcio habían 2 pepitas aunque a jugar formamos grupos de a 2. y me salió un grupo del uno sacamos un representante a la segunda casilla del abaco de derecha a izquierda. y el compañero sale del juego como en la segunda casilla del abaco de derecha a izquierda me quedaron 2 pepitas y la primera casilla del abaco de derecha a izquierda 0 con las 2 pepitas q' tenemos en el abaco formamos un grupo con las 2 pepitas y empecé a jugar del uno grupo pero un representante del

Y después a seguir como en la cuarta casilla del abaco había una sola pepita la paso a la 3 casilla del abaco y le pongo un compañero paso un representante a la segunda casilla del abaco teniendo en cuenta que hay ahí una pepita bueno como la pase una pepita le coloco su amiguito primo de la tercera casilla otra otra pepita a la segunda casilla del abaco y le consigo un compañero los pongo grupitos de a 2 por el primer grupo paso un representante y le pongo su amigo paso el otro grupo y el representante de la tercera casilla del abaco y le pongo su amigo paso el otro amigo de la 2 casilla del abaco y le pongo su amigo

Registro de Jhon Urrego, quinto grado

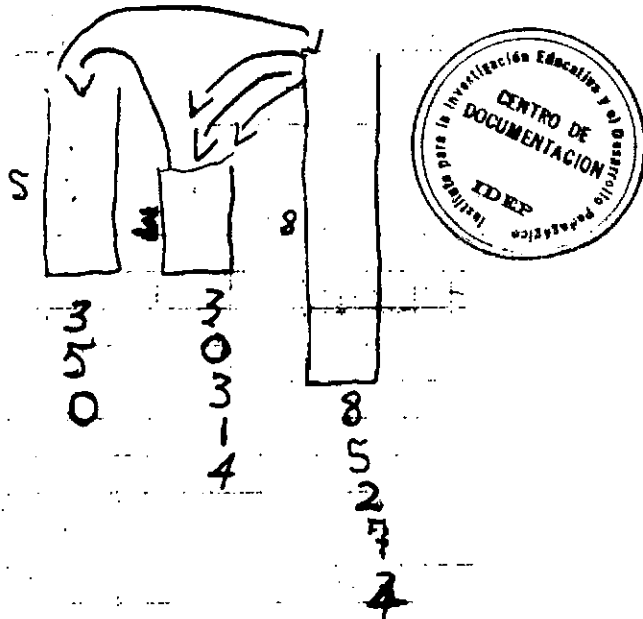
UN REPARTO JUSTO

Los campesinos que se llamaban: Dami y [REDACTED] Jimmy compraron un berril de vino de 8 litros. y se

querían repartir por partes iguales y solo disponían de dos botes una con capacidad de 5 litros y otra con capacidad de 3 litros.

¿cómo hacen para medir la mitad de uno para cada uno de ellos?

POSIBLE SOLUCIÓN



tenemos el barril de ~~8~~ 8
litros y las dos vasijas
con capacidad de 3, y de
5 litros.

echamos tres litros en la
vasija de 3 y después
esos 3 litros los echamos
a la vasija de 5 y lue-
go echamos 2 litros
más en la vasija de

3 y pasamos ~~los~~
a la de 5 de tal ma-
nera que en la vasija
de 5 queda 2 litros y
en la vasija de 3 que
ocupa 3 litros.

Entonces pasamos los 5
litros al barril de 8 y
queda en el barril 7
litros. y vaciamos el litro
de la vasija de 3 al ba-

si lo de 0 y luego echa
300 del barril 3 litros
y la base de 3 y esos
tres los echamos a la
base de 0 de 100 me-
tra que en la base
de 0 queda 4 litros y
en el barril tambien
queda 4 litros. Hay con
de 10 y 100 de 1
4 litros.

En el caso de Carolina y Cristian se observa un tipo de realización verbal de carácter material, ya que se refieren a las acciones que hacen sus manos o que otros pueden identificar perceptivamente. Sus escritos muestran un carácter descriptivo y exclusivamente lineal. Es una descripción en primera persona, lo que centra la acción en el sujeto y no en los objetos de la acción

En el caso de Edna Milena y Jhon Urrego, sus escritos muestran elementos de descripción simbólica, que muestran ya algún grado de manejo de los objetos dentro de la forma verbal. Son descripciones que usan acciones en tercera persona, mostrando interiorización del diálogo con otro y una actitud de compartir la acción.

En el caso de Edna es más clara la presencia de elementos de la acción verbal, ya que se detienen a evaluar las acciones y hay preocupación por una buena formación de las expresiones que representan acciones, comprometiéndose con un código simbólico

Por otra en el registro de Edna, existe un desplazamiento del pensamiento egocéntrico al pensamiento social interiorizado, ya que cuando habla de "colocamos", " sacamos", "formamos", hay por lo menos dos personas, y cuando se refiere a "lo que le regalo su mamá" hay un tercero con el cual se establece un diálogo de nos con los actores del problema; este diálogo constituye el contexto y el sentido para producir discurso. Se trata de un discurso que no deja nada tácito ni suelto y que se articula de manera conciente.

Con base en los avances de registro se hace visible el límite de incidencia; de esta herramienta cognitiva, en el desarrollo del pensamiento discursivo. De una parte, difícilmente se trascendía la descripción de objetos y acciones, lo que genera en el estudiante una pérdida de sentido y motivación por esta práctica verbal; por otra parte, existe una tendencia hacia su mecanización lo que posteriormente hace difícil el traslado de la acción de la forma material o materializada a la verbal.

Con el término **Realización Verbal** hoy entendemos la práctica de formular en el habla lo que se corresponde con lo realizado en los hechos en objetos materiales; en otras palabras, se trata de consumir en palabras una acción que a su vez se cumple o se ha cumplido con las manos. En otra forma se puede afirmar que la verbalización de las acciones es el acto de representar por medio del lenguaje articulado –discurso–, aquellas representaciones que el niño ha construido al abordar situaciones problemáticas.

De esta manera la realización verbal permite explorar las condiciones perceptivas implícitas en el material, apoyando así un aprestamiento para el manejo de condiciones teóricas -implícitas en las acciones verbales-.

Al mismo tiempo que se reformulaba el lugar del término realización verbal en la incidencia sobre la formación de pensamiento matemático escolar, se genera un vacío en el sentido de hacerse explícita una nueva etapa en la verbalización del pensamiento. En tal sentido se introduce aquí un nuevo concepto, el de *Verbalización de las Acciones*.

Por **Verbalización de las Acciones** entendemos la recreación plena de la acción por parte del pensamiento verbal. Esta formación de la acción presupone que del contenido concreto de los objetos se han separado los rasgos y las propiedades sustanciales para la acción; las propiedades separadas se fijan a las palabras y se convierten en sus significados. Ahora es posible su utilización en forma de objeto verbal, es decir, el niño puede operar con las palabras y a través de ellas con sus significados. No se trata de saber explicar cómo se ejecuta una acción, se trata de saber consumir la acción plenamente de forma verbal.

El trabajo realizado con los niños muestra que siempre pasan de un no *discurso, a estructuras lingüísticas narrativas*, como se puede mostrar en este y anteriores ejemplos:

El problema del ovillo de cabuya: se trata de un ovillo de cabuya, al que sucesivamente se le tomo la mitad de lo que quedaba, hasta el momento en que se le sustraen $\frac{2}{5}$ y con los restantes 30 cms hacen un teléfono.

La estructura narrativa se pone de relieve en el siguiente registro: " Empezamos a investigar los $\frac{2}{5}$ que cogió la hermana y sacamos la conclusión que cada $\frac{1}{5}$ vale 10 centímetros de cabuya en este problema entonces los $\frac{2}{5}$ miden 20 centímetros de cabuya y sobran 30 centímetros de cabuya con la que al final hicieron un teléfono".(David)

En este caso vemos que:

16

" Empezamos a investigar los $\frac{2}{5}$ que cogió la hermana,
⇒ *potencialidad de la acción*
y sacamos la conclusión que cada $\frac{1}{5}$ vale 10 centímetros de cabuya en este problema.

⇒ puesta en acto de la acción

entonces los 2 / 5 miden 20 centímetros de cabuya y sobran 30 centímetros de cabuya con la que al final hicieron un teléfono".

⇒ Clausura

Como consecuencia de lo anterior la función del habla pasa por un cambio cualitativo. Si con la realización verbal el habla servía principalmente de sistema de indicaciones que se descubrían directamente en la percepción, de modo que el papel del niño consistía no en comprender la palabra, sino la situación o fenómeno. Con la verbalización el habla se convierte en portadora de todo el proceso de la acción, y todas las operaciones que la integran, no solo deben adquirir la forma verbal, sino que deben ser asimiladas en esta.

Veamos como ejemplo el registro de Jhon Urrego en el problema de " El rollo de cabuya":

EL ROLLO DE CABUYA

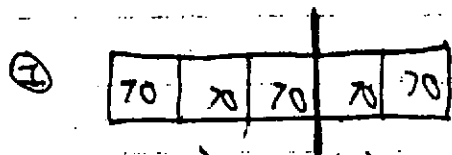
Doña alicia le dio a su hijo un rollo de cabuya y ella misma le quitó la mitad del rollo, luego volvió a quitar la mitad de lo que quedaba, luego volvió a quitar la mitad de lo que quedaba y así sucesivamente hasta que le quedaba un pedacito de cabuya que se lo comió.

Después de eso volvió a quitar la mitad de lo que quedaba y así sucesivamente hasta que le quedaba un pedacito de cabuya que se lo comió.

representa lo que cogieron
entre la madre y el padre.

9: Con cuantos centímetros
hubiera quedado pablo si
su hermana no le hubiera
robado 30 centímetros de
cabello.

POSIBLES SOLUCIONES



Como la her-
mana de pablo le robó 30
de cabello entonces hacemos
la grafica de los quintos, y
si le quedaran a pablo
30 centímetros, osea que
cada quinto son 70 cen-
tímetros y si sumamos, nos
da 350 centímetros.

50

Entonces como el papa le ha-

ha quedado la mitad de lo
que tenía se supone que
antes de que el papa le qui-
tara la mitad tenía (700)

y el hermano antes de
que le quedaran 700 centi-
metros le cogió la mitad
es decir que antes le quedaban
200 centímetros.

y la mamá antes le había
cogido la mitad es decir que
es el doble de 200 que da
(400)

antes el rollo de cabu-
ja medía 800 centímetros.

2. la mamá cogió más
cabuja porque cogió la mitad
del rollo y la otra mitad
se la repartieron los otros.

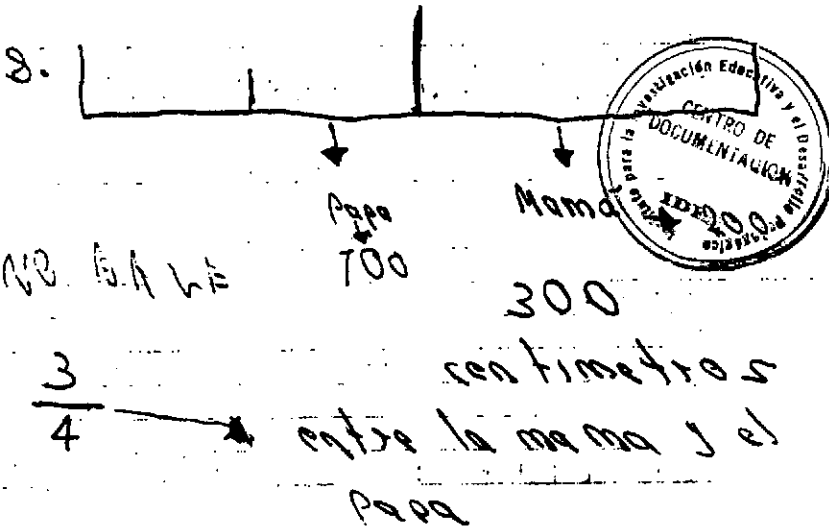
3. La hermana de Pablo cogio menos cebuya porque solo cogio 30 centimetros

4. La mamá cogio 400 ct. de cebuya.

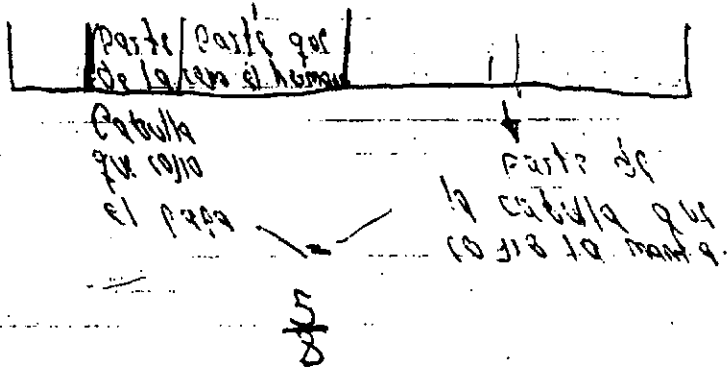
5. el papa cogio la mitad de la mitad o sea ~~200~~ 50

6. La hermana cogio 30 ct. que es lo mismo que dos quintos.

7. el hermano cogio 300 ct.



8-



Porque la mamá coje la mitad de la cabulla y el papa coje la cuarta parte de la otra mitad, entonces dividimos la cabulla en octavos y la mamá coje $\frac{4}{8}$ y el papa $\frac{1}{8}$ o sea que entre los dos cojeran $\frac{5}{8}$.

9- como la hermana de Pablo le coje $\frac{2}{5}$ de los 50 centímetros de cabulla que le queda y dos quintos equivalentes a 20 centímetros.

Si su hermana no le ubiera quitado ~~cojo~~ los 30 centímetros ubiera que de de con los 50 centímetros.

¿QUE PARTE DE LA CABEZA REPRESENTA LO QUE COJO LA HERMANA? Como la hermana cojo $\frac{2}{5}$ de los 50 centímetros

o sea de $\frac{1}{5}$ de toda la cabeza, entonces como dividimos un octavo en 8 partes

hicimos

$$5 \times 8 = 40$$

↓
Puntos

↓
octavos

↓
40 avos

Entonces como la hermana cojo $\frac{2}{5}$ de un octavo de la cabeza entonces es 40

avos cojo $\frac{2}{40}$ que es equivalente a $\frac{1}{20}$

2

Sistematización de la Verbalización de las Acciones en el campo conceptual de las fracciones

Uno de los aprendizajes en el que nos hemos visto abocados los maestros del *Proyecto Anillito: Cultura matemática en la educación Básica* ha sido la toma de registros y la realización del respectivo análisis. La labor de orientación general del trabajo realizado por los niños, no solo se comparte, sino que también se rotan los roles de quien toma registros y quien orienta la actividad. Esto ha permitido desarrollar la atención hacia ciertos eventos que se presentan como regularidades en el comportamiento de los niños y que empiezan a ganar para nosotros mucho significado.

También los comentarios que realizamos informalmente al final de cada sesión, nos permiten ver de manera diferente cosas que antes parecían insignificantes; desarrollando así en nosotros *una sensibilidad informada*, la cual habrá que documentar en el preciso momento en que se vuelva a presentar los codiciados eventos. Esta labor en general no ha sido fácil, pero nos ha motivado a seguir registrando eventos significativos para nosotros, como también *ver muchos hechos nuevos* al elaborar las relatorías.

24

A continuación presentamos una experiencia a través de las preguntas **¿Cómo se hace un registro?** y **¿A qué prestar atención?**

Se toma nota por escrito, en el diario de campo, de los eventos que van sucediendo en el transcurso del desarrollo de la sesión de trabajo. Estos

eventos versan sobre *cómo piensan y proceden los niños en la solución de una situación problema, y cuales son los obstáculos en su aprendizaje.*

Se consignan las declaraciones espontáneas de los niños y se apoya este registro con el trabajo escrito del niño. Sí resulta una situación muy interesante, uno se acerca y le interroga, advirtiéndole que va a escribir lo que responda y se le pide su colaboración para que nos dedique unos pocos minutos. Le hacemos preguntas que vuelven a atraer a colación la pregunta que se ha tratado unos segundos antes y se pone por escrito (lo hace el maestro).

Esto permite obtener declaraciones de los niños que complementan y amplían la información que cada niño ha consignado en su hoja de trabajo, develando *estrategias de pensamiento, la forma verbal oral espontánea que se desarrolla en la actividad, las interacciones de comunicación, las formas de trabajo, las conjeturas, deducciones, exclamaciones de imposibilidad o dificultad para entender o resolver el problema, la relación que realizan con el conocimiento, la imagen de matemática que poseen*, entre otros. Posteriormente se realiza un análisis crítico al registro del diario de campo.

El trabajo que presentamos es la recopilación del trabajo alcanzado con los niños en el campo conceptual de los números fraccionarios. Los niños trabajan situaciones problemáticas en las cuales tienen que operar con dichos números. Se parte de una situación concreta – material materializada – y luego se les pide hablar y escribir (verbalizar) en el lenguaje natural, las acciones y operaciones realizadas.

Los registros presentados aquí, los hemos considerado como los más representativos de los cinco grupos en los que se han podido clasificar; pertenecen a la parte en que culmina, globalmente el proceso de formación de las acciones (y operaciones) en forma verbal externa y se avanza hacia el camino de su interiorización.

En el desarrollo de la actividad, los niños hacen estas elaboraciones en voz alta (trabajo individual y en equipo) y luego en forma verbal escrita (trabajo en equipo).

Actividad: Argumentar la validez de la siguiente afirmación:

$$1/2 + 2/6 = 11/12$$

PRIMER REGISTRO

“Cogimos la tira de los sextos y de esa tira cogimos dos sextos cogimos la tira de los medios y cogimos solo un medio los unimos y cogimos la tira de los doceavos y la pusimos debajo del medio y de los sextos y nos daba en la línea del décimo doceavo. Entonces la afirmación es falsa. (Linda Cárdenas).

Análisis del primer registro

- **Lógica** _____
 - La lógica está en el material, en lo que sabe hacer.
 - Hay justificaciones de orden retórico
 - Hay un conocimiento incipiente de los objetos, las operaciones y las relaciones de la nueva estructura (los fraccionarios).

- **Articulación** _____
 - La articulación de la representación es horizontal, porque agrupa y clasifica las acciones.
 - Su mirada es aún global, no hay una diferenciación explícita de las acciones que son objeto de conocimiento
 - El “y” vincula las acciones en la secuencia en que se produjeron
 - No escribe signos de puntuación
 - Las frases no son proposiciones matemáticas

- **Competencia pragmática** _____
 - Comunica y convence por medio de acciones que son evidencias materiales
 - Las palabras están pegadas a las acciones externas

- **Competencia comunicativa** _____
 - Está a la saga, ya que describe acciones secuenciales articuladas por la forma en que se vincularon sus representaciones, sin lograr todavía articular según las reglas del lenguaje natural.
 - Se comunica a través de la acción material.
 - Se dan actos de habla no apropiados, ya que el solo lenguaje natural no es suficiente para demostrar lo que afirma

- **El uso de los verbos** _____
 - El tiempo de los verbos esta en pasado
 - El verbo **ser** aparece en el desenlace o clausura de la narración
- **Formas de validación** _____
 - Se apoya en la evidencia empírica, así son las cosas porque son de hecho

SEGUNDO REGISTRO

“Esta afirmación es falsa porque: que por un lado de la tira están los sextos entonces la mitad son tres sextos y a esos tres sextos le agrego los dos sextos lo cual tres sextos es una mitad y de la otra mitad también tiene tres sextos pero yo cogí solo dos sextos entonces sobra un sexto y ese sexto lo doble y por el otro lado estaban los doceavos lo cual los conté y el sexto que doblé estaba formado por dos doceavos y como son doce doceavos menos dos doceavos daba no más diez doceavos lo cual esa afirmación es falsa”. (Carlos Alberto).

Análisis del segundo registro

- **Lógica** _____
 - La lógica está aún en la evidencia empírica de lo que sabe hacer
 - Las justificaciones son de orden retórico
 - Empieza a mirar objetos individuales, opera con ellos atribuyendo equivalencias conceptuales.
- **Articulación** _____
 - Utiliza el “y”, como enlace para describir las acciones materiales.
 - Utiliza enlaces para pasar de acciones materiales a materializadas. Por ejemplo “...están los sextos, entonces la mitad son tres sextos”. De forma similar “ lo cual”, “ y como son”. Estos enlaces tienen carácter de deducción.
 - No usa signos de puntuación

- Las acciones solo se pueden diferenciar por el uso de los enlaces.
- Su mirada es aún muy global y no organiza acciones en torno a una categoría, es decir, no aparece la generalización.
- Sus justificaciones siguen siendo de orden retórico
- Analiza acciones.

• **Competencia pragmática** _____

- La fuerza del argumento está en el convencimiento de las acciones materiales. Esto es, en la evidencia.
- Comienza a utilizar algunas deducciones, posibilitadas por la manipulación del material, más no por generalización en matemáticas.
- Aunque la estructura del discurso es retórica, a diferencia del anterior, comienza a hacer pequeñas explicaciones que se salen de la evidencia.
- Comunica y convence por medio de acciones que son evidencias materiales
- El tiempo para los verbos en la primera parte es presente y en la segunda parte pasado
- No logra hacer generalizaciones

• **Competencia comunicativa** _____

- El presente lo usa cuando está seguro de las acciones que realiza y el pasado para explicar qué de lo que realizó le sirve para llevar a cabo o ejecutar correctamente la acción.
- La narración va acompañada de la explicación, es decir del porque lo hace.
- Establece relaciones
- La realización verbal es desplegada
- Al no usar los signos de puntuación, no es claro donde empiezan y donde terminan las acciones y las frases no se distinguen explícitamente.

• **Formas de validación** _____

- Se sigue apoyando en la evidencia empírica.

TERCER REGISTRO

“Que un medio equivale a seis doceavos y dos sextos equivalen a cuatro doceavos y cuatro doceavos más seis doceavos son diez doceavos. Entonces es falso, porque le falta un doceavo para ser once doceavos” (Etna Milena).

Análisis del tercer registro

• Lógica

- Desaparece la evidencia material o materializada
- La fuerza del argumento está en el lenguaje, casi se podría asegurar, que en las acciones mentales no necesita hacer retórica, ni dar explicaciones.
- Hace afirmaciones con mucha seguridad
- Sintetiza las acciones, la fuerza del argumento es lo sintético.

• Articulación

- Construye afirmaciones matemáticas, no apoyadas en acciones materiales, sino en acciones mentales.
- Dichas proposiciones son enlazadas de la siguiente manera:

$$(p \wedge q \wedge r) \Rightarrow s$$

- Es decir, muestra las causas para poder concluir, pero necesita dar una explicación de más para estar segura de que lo que dedujo es correcto.

$$(p \wedge q \wedge r) \Rightarrow s \quad \text{porque}$$

- Por otra parte pareciera que $(p \wedge q \wedge r)$ no es suficiente para concluir s .
- Desaparece el discurso retórico, para mostrar generalización de operaciones
- No se hace necesario el uso de los signos de puntuación ya que los enlaces son suficientes para entender el discurso

• **Competencia pragmática**

- Las acciones están en el plano mental y se podría decir que la pragmática está fuera del contexto rutinario
- Se puede notar el paso a lo hipotético deductivo
- No se puede asegurar que ya hay discurso matemático, está en esa mediación entre lo común y lo formal

• **Competencia comunicativa**

- Muestra claramente las operaciones que formaron sus acciones materiales, ya que es capaz de sintetizar y esto le permite nombrar
- Comienza a desechar acciones o a categorizarlas para ver las como parte de una operación
- Por otra parte utiliza la palabra "equivalencia" que hace que mire la totalidad como un todo armónico y no como igualdad o resultado de operaciones
- El discurso es impersonal, a diferencia de los anteriores donde aparece el sujeto ejecutor de acciones
- Los verbos utilizados son "equivaler" y "ser", que son propios del discurso sobre objetos matemáticos; por una parte el ser que define la esencia del objeto matemático y el "equivaler" que hace ver el concepto a la par con otro. (En matemáticas existen equivalencias no igualdades, es decir, operación 1 equivale a operación 2).
- La lógica esta a un nivel conceptual
- Hace nominaciones y busca equivalencias
- Las frases son completas y se convierten en proposiciones matemáticas
- Se desprende de lo material para hacer acciones mentales
- La realización verbal es reducida
- Formas de validación
- La racionalidad del conocimiento

CUARTO REGISTRO

30

"Que dos sextos y un medio son equivalentes a once doceavos, esta afirmación es falsa, porque da diez doceavos.

Dos sextos son equivalentes a cuatro doceavos y un medio son equiva-

lentes a seis doceavos entonces sumo cuatro doceavos que son dos sextos y seis doceavos que son un medio da diez doceavos y no once doceavos, entonces la afirmación es falsa" (Juan Pablo)

Análisis del cuarto registro

- **Lógica** _____
 - Desaparece la evidencia material – materializada.
 - La fuerza del argumento está en el lenguaje.
 - Sintetiza las acciones, y puede analizarlas a voluntad propia.
- **Articulación** _____
 - Hace nominaciones precisas articulando proposiciones matemáticas
 - Formula la validez de la afirmación y luego pasa a probarla.
 - Los objetos matemáticos son mostrados mediante equivalencias
 - El discurso muestra la categorización de las operaciones y su nominación que ahora se realiza en el plano conceptual.
 - Realiza equivalencias en ambas direcciones al nivel conceptual
 - El uso del verbo SER está en presente.
 - Utiliza signos de puntuación que sirven de enlace a las proposiciones.
- **Competencia pragmática** _____
 - El discurso está presentado como una prueba matemática
- **Competencia comunicativa** _____
 - Usa los términos adecuados y frases bien formadas para comunicarse
 - Las frases son proposiciones matemáticas compuestas
 - Es persuasivo y convence
- **Competencia pragmática** _____
 - Opera con acciones mentales, dialogando con el otro sujeto inmerso en la escritura y lo refuta.

QUINTO REGISTRO

"Esta afirmación es falsa porque vamos a pasar todo a doceavos. Dos sextos son equivalentes a 4 doceavos y un medio es equivalente a seis doceavos entonces sumando dos sextos que son cuatro doceavos y un medio que son 6 doceavos sería equivalente a 10 doceavos y no a once doceavos entonces la afirmación es falsa"(Miller).

Análisis del quinto registro

- Se diferencia con el anterior, en que involucra al interlocutor, para que ejecute con él las acciones mentales.
- Explícita la estrategia o acción a realizar
- La realización verbal es reducida

OBSERVACIÓN GENERAL

En los registros, entre más fino sea el lenguaje matemático, lo que más atrapa son relaciones y operaciones; que son las que en última instancia quedan en los conceptos. Estas relaciones y operaciones son invisibles en la parte material materializada, y solo son visibles cuando se ponen en el lenguaje, puesto que se convierten en *objetos de reflexión*, se va decantando la esencialidad del objeto y finalmente se convierte en concepto. Lo esencial es **lo que lo hace ser y es lo que lo diferencia de los demás**.

El pensar, se desarrolla y desenvuelve en una permanente tensión entre lo sintético y lo analítico:

Sintético – analítico – sintético

En la primera fase se asimila la acción como totalidad, pasando luego por un filtro riguroso cuya función es partir el todo en secciones muy finamente separadas, y a su vez articuladas por el lenguaje. Gracias a éste, es posible hacer el análisis de la representación del pensamiento y hacer de los objetos representados, objetos de reflexión que pasaran entonces al plano de la conceptualización y es aquí donde es posible operar, ya no con el objeto materializado sino con la palabra que lo representa. Por esto, el proceso vuelve a lo sintético, de una forma cualitativamente distinta a la que se inicio.

Aproximación a tipos de elaboración en la verbalización de las acciones

A continuación presentamos una primera aproximación a los tipos de discurso que presentan los estudiantes cuando están trabajando la resolución de problemas en equipo.

Tipo 0. No hacen verbalización de la acción, elaboran (realizan) un texto más o menos escueto de las acciones hechas, contadas con el mínimo detalle.

Hay riqueza en la potencialidad de la acción, en lo que se está construyendo. En estos procesos semióticos de la conciencia, hay una mirada global que no logra penetrar en las relaciones, operaciones y acciones que están plenas de contexto, de muchas redes de significado incipientes. Carecen de los elementos sintácticos del idioma como la puntuación y las palabras que sirven de vínculo.

Hay una intencionalidad pragmática por comunicarse ya que los objetos que manipula en el discurso están adheridos no solamente a las acciones físicas sino al contexto rutinario y vivencial.

Consideramos que esta es una primera etapa en la adquisición de los conocimientos, pero que si no se supera las formas de trabajo estas se pueden convertir en un obstáculo, debido a la enseñanza y más tarde se convierten en obstáculo epistemológico en la adquisición del conocimiento matemático. Esto es, el conocimiento no ha llegado a ser interiorizado en forma mental, no permitiendo que el objeto de conocimiento se convierta en acción mental.

Validación: Se espera que la validación sea dada por los otros. Las acciones son externas y ajenas, se hacen para complacer al otro.

Tipo 1. Se describe la actividad con algunos detalles por medio de frases cortas. Se hace evidente la dificultad para nominar las acciones y diferenciar explícitamente lo que será objeto de conocimiento.

La articulación de las frases se hace por medio del "entonces" y del "y", con la característica de que estos vínculos no son conectivos lógicos, solo sirven de vínculo en la sucesión lineal que constituye la frase.

Realiza atribuciones de acciones físicas, que él pueda comprobar y mostrar empíricamente, como en: "*¿Dos sextos son equivalentes a cuatro novenos?*". No es equivalente porque al medir $4/9$ con $2/6$ notamos que $4/9$ es más grande que $2/6$. Entonces notamos que en la tira nos hace falta $1/9$ para completarlo". (Jhon Alejandro Garcia).

El razonamiento no se compromete, prevalece la acción física. Por otra parte se espera siempre una orden para ejecutar, no le hacen seguimiento a la acción. Interactúan con el maestro esperando que le digan si está bien o mal, no para hablar sobre el tema, es para pedir que se le valide.

En la verbalización de la acción los verbos que más comúnmente usan son: tener, hacer, coger, notar, dar; todos usados en pasado.

Validación: Se apoyan en la evidencia empírica, así son las cosas porque son de hecho.

Tipo 2. Construyen proposiciones y las justifican, aparece el texto y el discurso sobre lo que es objeto de conocimiento. En la verbalización escrita aparece lo que ya se ha ido constituyendo en forma oral; no es lo mismo decir 15, 15 años o 15 como la edad de..

Se presta atención a las relaciones que entran en juego pero no se nominan (mayor que, menor que), se comprenden sin enunciarse. La explicitación es necesaria para tomar conciencia de las relaciones y poder considerarlas como objeto de estudio.

Validación: La validez está apoyada en las reglas de la estructura lógica de los conocimientos matemáticos que maneja.

Tipo 3. La verbalización de la acción es desplegada, todavía está en el nivel rutinario. Es narración de acciones, son en sí declaraciones argumentativas que contienen elementos de prueba. Está buscando la esencialidad del concepto, su comprensión. Es explícito el interlocutor.

Validación: Se apoya en la evidencia empírica

Tipo 4. La verbalización de la acción es reducida, su contenido es descontextualizado y está en el plano de la acción mental.

Está en el tránsito entre el contexto hipotético y el generalizado. Identifica las relaciones y las operaciones de la nueva estructura. Esta última se manifiesta como objeto matemático pero sólo en el aspecto semántico; enriquecido por la pragmática y elaborado por la argumentación. En el aspecto sintáctico, aún no ha elaborado suficientemente las reglas de su escritura (representación en el sistema de signos matemáticos). Por otra parte expresa un diálogo escrito fluido con el texto propuesto. No es un texto explicativo, es un texto que muestra la condensación de un pensamiento, un número de palabras significativamente menor, factores que caracterizan una tendencia hacia la predicación. El verbo ser es utilizado para mostrar la esencia del objeto de estudio.

Validación: Está al nivel formal de la demostración matemática, utiliza la simbología propia de la matemática.

En conclusión afirmamos que para la adquisición e interiorización de los conocimientos matemático así como para el desarrollo intelectual (formación del pensamiento matemático) de los estudiantes, es necesario que elabore y realice estos tipos de verbalización de las acciones. Con esto queremos afirmar que detrás de cada concepto hay trabajo intelectual intenso que realizar y que su adquisición y apropiación es a menudo lenta y demanda períodos largos de tiempo.

3

El papel del lenguaje en el desarrollo del pensamiento matemático

El lenguaje se ha convertido en un elemento básico en la ruptura con las concepciones tradicionales de la matemática, con sus formas de trabajo y sus ritos; permitiendo conocer el contexto desde el cual se habla, la lógica implícita, la manera como se apropia del conocimiento, el sentido de las interacciones personales, el proceso de interiorización de las formas de la acción y el desarrollo de la competencia comunicativa. En particular, el lenguaje ha hecho visibles los momentos de tránsito y de traducción de una lógica de la acción material a una lógica de acción verbal.

La vida del hombre está mediatizada por instrumentos y de la misma manera su actividad psicológica está mediatizada por eslabones producto de la vida social, de los cuales el más importante es el lenguaje.

El anterior supuesto, nos conduce a la teoría de desarrollo cultural de las formas psíquicas. Para Vigotsky, todas las funciones psíquicas superiores son relaciones de orden social interiorizadas, base de la estructura social de la personalidad. Por lo tanto se puede afirmar que acceder al conocimiento en su más alto nivel de abstracción, es pasar de comportamientos naturales a superiores. Algunas de las cuales son:

36

Pensamiento en imágenes	=>	Pensamiento en conceptos
Atención involuntaria	=>	Atención voluntaria
Memoria mecánica	=>	Memoria lógica
Dialogo	=>	lenguaje interior

El habla debe pasar de hábitos verbo – motores al habla como forma de conducta superior y compleja. Los medios externos son: el idioma, la escritura, el cálculo y el dibujo.

Esta relación tiene algunas variantes según se le asigne un papel a la evolución del lenguaje en las personas y según el tipo de relación que se tenga con el conocimiento.

El lenguaje puede ser visto como *gramática*, como *instrumento del pensamiento y en relación con el desarrollo del pensamiento*. Como *gramática* sirve para codificar en el lenguaje los significados ya construidos; como instrumento del pensamiento sirve para el control del entorno, para el control de la actividad del individuo, y para buscar y planear la solución de problemas.

El *desarrollo del lenguaje en relación con el desarrollo del pensamiento* tiene tres posibilidades: la primera, en la cual se considera que la línea del desarrollo del lenguaje es independiente de la línea del desarrollo del pensamiento, la segunda en la cual se reconoce que estas dos líneas de desarrollo se funden y que el desarrollo del lenguaje sigue al desarrollo del pensamiento, a su proceso de maduración natural. Y la tercera, que el desarrollo del lenguaje no solo está a la par con el desarrollo del pensamiento sino que lo precede convirtiéndose en factor de desarrollo de este último.

Desde el punto de vista del *compromiso con el conocimiento*, el lenguaje puede mostrar tanto una *relación externa*, pasiva, de simple manipulación de estructuras superficiales; como una *relación interna*, de compromiso, activa, que se relaciona con la estructura profunda de su contexto de significado. En esta última relación siempre se está examinando que tan bien es representado el sistema semántico en evolución mediante el sistema de signos articulados.

El lenguaje tiene su razón de ser y de existir porque existe el conocimiento y porque éste conocimiento impone la necesidad de comunicarlo a otros. Conocimiento que emerge, de manera plena, de la acción consciente y se va constituyendo en sistemas semánticos que buscan su adecuada expresión a través de la sintaxis del lenguaje articulado.

Visto como instrumento, el lenguaje es un potente instrumento analítico pues hace posible analizar las representaciones (percepciones, imágenes, esquemas, estructuras conceptuales, que son formas de pensa-

miento sintético) al obligarlas pasar por el tamiz lineal del lenguaje articulado y hacer de estos pensamientos verbales objetos de acción, es decir, de reflexión. Pero también puede centrar su foco de atención sobre sus procesos de elaboración e interiorización del conocimiento, tornando el pensamiento más consciente y haciéndolo más coherente.

El siguiente cuadro muestra de manera sintética los usos y las relaciones que se generan:

LENGUAJE Y CONOCIMIENTO	GRAMÁTICA	INSTRUMENTO	LÍNEAS DE DESARROLLO
RELACIÓN EXTERNA	Codifica los Significados	<ul style="list-style-type: none"> • de control: para sí, o para otros • analítico: con el conocimiento erudito 	<ul style="list-style-type: none"> • Independientes • Se funden: el lenguaje, muestra el aprendizaje
RELACIÓN INTERNA	<ul style="list-style-type: none"> • sistema de signos que representa sistemas semánticos en evolución 	<ul style="list-style-type: none"> • analítico: con el conocimiento sabio, • con sus procesos de conocimiento • Se crean nuevos significados • Se optimiza la representación 	<ul style="list-style-type: none"> • el desarrollo del lenguaje es desarrollo cognitivo, e inversamente

Dentro de la relación lenguaje–pensamiento, nos detenemos en lo que se ha denominado Pensamiento Verbal y por lo tanto en la forma verbal de la acción.

LA FUNCIÓN SIMBÓLICA EN EL LENGUAJE

El lenguaje tiene dos funciones esenciales: la primera es la capacidad del lenguaje de **evocar situaciones** y acontecimientos, liberando al pensamiento del espacio próximo y desbordando los límites temporales del presente; el segundo el de **insertar dichas situaciones y acontecimientos en un campo conceptual y racional** que enriquece su conocimiento.

38

Estos dos modos de funcionamiento de la inteligencia pueden considerarse así: el primero como el inicio de la representación mental; el segundo como esquematización representativa (redes conceptuales), con-

ductas representativas independientes del lenguaje, pero que sirven para la adquisición y ampliación de éste.

El niño en su desarrollo necesita de otros sistemas de significantes constituido por toda su imaginación mental; la cual se manifiesta a través del juego simbólico, la imitación diferida y los símbolos individuales, que son fuente de representaciones individuales (a la vez cognoscitivas y afectivas)³.

Existe pues, una función simbólica más amplia que el lenguaje que engloba además de las representaciones mentales (símbolos en sentido estricto), el sistema de los signos verbales (orales y escritos). Lo característico de la función simbólica es la diferenciación entre los significantes (signos y símbolos), de los significados (situaciones o acontecimientos ambos esquematizados y conceptualizados); permitiendo que los primeros puedan evocar la representación de los segundos.

- Símbolos individuales, que son toda esa imaginación mental que se forma cada persona en la cual la reflexión se hace a través de imágenes, es decir, no son signos verbales. Por ejemplo, cuando el niño finge dormir, caerse o llorar para que el adulto lo alce. Los símbolos individuales que surgen en la imaginación mental, son los que dan paso a las conductas representativas, que si bien, son necesarias para la adquisición del lenguaje son independientes de él.
- El lenguaje verbal, son sistemas de signos verbales, expresados en lenguaje natural. Cuando se habla, ya se está representando por medio de signos lingüísticos que son sonoros y que pueden posteriormente ser puestos en forma escrita.

Es claro que aquí hay dos sistemas de representación distintos: uno, el sistema de la representación formado por el juego de imágenes y símbolos; y el otro, el sistema de signos verbales, es decir, el lenguaje que es ahora una representación que articula a otra.

Una de las implicaciones del funcionamiento del lenguaje es que extiende el poder de las coordinaciones entre acciones articulando la representación mental, proveyendo al mismo tiempo al pensamiento, de un instrumento que en principio es de control, y luego de combinación,

³. Piaget, J. 1991.

de transformación y de análisis tanto de la acción como de la actividad. De esta forma el lenguaje transforma profundamente la estructura del pensamiento, al alcanzar formas de esquematización más avanzadas y una abstracción más móvil.

Los niños cuando ingresan a la escuela están en una etapa de formación de las operaciones lógicas y luego comienzan a construir el sistema de la lógica proposicional, es decir, que se comienza a acceder al discurso

Los esfuerzos que hacen los niños en el Anillito, consisten en poner todo el contenido de la representación en el discurso, es decir, la esencialidad de lo que es objeto de conocimiento con la dificultad de que dicho objeto se está elaborando. Por esto, es natural que los niños procedan por sucesivas elaboraciones discursivas o retóricas, que a medida que se van afinando las funciones del lenguaje como son: la nominación, la atribución, la derivación y la articulación se van convirtiendo en discurso.

4

La forma de la acción en el contexto de las situaciones de aprendizaje

Una constante durante el desarrollo del presente trabajo de investigación ha sido la indagación sobre *el sentido de la actividad propuesta desde los maestros*, y en particular, sobre la acción como unidad de análisis de la actividad.

Por *actividad* se entiende el conjunto de procesos que realizan una actitud vital y activa del sujeto hacia la realidad; un rasgo característico de esta concepción de actividad es su sentido: *la actividad tiene sentido para el niño cuando el motivo y el objetivo coinciden*.

La mínima unidad de análisis de la actividad la constituye la acción; por *acción* se entiende el procedimiento por el cual se alcanza un objetivo que previamente ha sido representado de manera consciente; por otra parte, ésta es, mas que de tipo cognitivo en el sentido que se refiere a un significado abstraído de la acción física, es de carácter cognoscitivo en el sentido de un conjunto de procedimientos que el sujeto realiza para alcanzar un objetivo.

La acción tiene la misma estructura de la actividad: un objeto hacia el cual esta orientada, un objetivo, un motivo, un determinado juego de operaciones que la realizan y un modelo según el cual es llevada a cabo por el sujeto. La acción, como la actividad, es subjetiva, pues siempre pertenece a un sujeto concreto

De la acción se pueden hacer dos consideraciones: la primera, **en cuanto a sus partes estructurales y funcionales** –la parte orientadora, la ejecutora y la de control-; la segunda, **en cuanto al grado de formación de sus principales características** –la forma, los caracteres desplegado, generalizado y asimilado-. En el contexto del proyecto, la primera, ha permitido distinguir y modelar diferentes tipos de actividad cognoscitiva, y la segunda, ha permitido interpretar las distintas interacciones que se producen en la recreación de la acción en cada una de sus formas; sin embargo, nos detendremos en el análisis de la principal característica de la acción, la forma.

LA FORMA DE LA ACCIÓN

La característica de la acción, más importante en el camino de su transformación de externa en interna, es la forma. Por **forma de la acción** se entiende cada uno de los estados cualitativamente originales en los cuales se recrea, se orienta, se ejecuta y se controla la acción. Estas formas son básicamente: la material, la verbal externa y la mental⁴.

En la medida que al **objeto de la acción**⁵ se le opere en una nueva forma, su nueva representación podrá ser de naturaleza cualitativamente distinta y original; de esta manera, el objeto de la acción será recreado y transformado con las nuevas posibilidades de su presentación y de trabajo con él, lo cual se extiende también a las operaciones y a la manera de ejecutárselas.

En este contexto se puede decir que no existen acciones sin forma, ni acciones presentadas en formas indeterminadas. La forma de la acción se determina fundamentalmente por la manera en que está representado el objeto de la acción.

Por **Representación del objeto de la Acción** se entiende a su vez un objeto que contiene aquellos aspectos que constituyen propiamente el objeto de acción; cualquier objeto que pretenda sustituir una represen-

4. Galperin, citado por Talizina, deja claro que su propuesta distingue tres formas fundamentales de la acción. Sin embargo, existen formas afines a las formas básicas, como la forma materializada que es afín a la material, la forma verbal externa para sí que se ubica entre la verbal externa y la mental, y la forma perceptiva que se ubica entre la material o materializada y la verbal externa (TALIZINA, N., Psicología de la Enseñanza, Editorial Progreso, Moscú 1988, pág. 60)

5. Por Objeto de la Acción se entiende aquel aspecto -conjunto de propiedades, elementos y relaciones- sobre el que está directamente orientada la acción.

tación dada debe contener el objeto de la acción que se trate, o simplemente serlo. Así, una forma de la acción define, particular y principalmente, una categoría de formas de representación de los objetos de la acción.

Cuando el sujeto puede representarse el objeto de la acción a partir de la interacción con objetos físicos puramente y depende de ello, se dice que la acción toma la forma material; si en cambio el objeto de la acción se representa verbalmente, se dice que la acción se corresponde con la forma verbal.

Cuando la acción toma la forma mental el sujeto ya no cumple la acción como práctica transformadora de objetos exteriores -ni materiales, ni verbales-, sino que ahora la acción se realiza transformando las imágenes de estos objetos. Estas imágenes mentales de los objetos y fenómenos del mundo exterior, son ahora la forma que toman las representaciones del objeto de la acción.

LA FORMA DE LA ACCIÓN EN SITUACIONES DE APRENDIZAJE

En cuanto al uso de las formas de la acción, en situaciones de aprendizaje y colaboración social como las que enfatizan el aprendizaje o el desarrollo del pensamiento a través del trabajo en grupo y la resolución de problemas por equipos, a éstas es conveniente considerarlas en relación con el hecho de que puedan **ser manifestadas de manera interna o externa** y de que **puedan estar destinadas para otros o para sí**, a la manera de un abanico de oposiciones disponible, ante la actitud de los sujetos, para el cumplimiento de la acción independientemente de la forma utilizada.

Existe una relación dialéctica entre estas maneras de manifestación de las acciones, así como entre sus destinos, en el sentido de que, desde el punto de vista de las necesidades cognoscitivas, el niño usa estas formas de la acción en función de la significación y comprensión que le puedan aportar; de tal manera que una vez "agotada" determinada forma de la acción, el sujeto se apoyará en otras.

Así, por ejemplo, cuando el uso de una forma verbal interna se agota, el sujeto puede acudir naturalmente a la forma externa de la acción verbal; en cuyo caso el sujeto se ve impelido a hablar en voz alta, aunque este trabajando solo.

Estas **maneras en la forma de la acción** se constituyen en elementos importantes al momento de caracterizar el grado de apropiación de la acción por parte de un sujeto en una determinada forma. En cualquier caso el sujeto tiene la posibilidad de utilizar indistintamente diferentes formas de la acción sin que este hecho niegue diferentes grados de interiorización desarrollados en relación con cada una.

Así pues, para este trabajo recreamos la idea de que las formas de realización de la acción se pueden caracterizar, a su vez, como formas internas o externas, para sí o para otros⁶.

Esta caracterización de las acciones permite vislumbrar **un modelo de interpretación de las acciones** a través de tres aspectos: La Forma de la acción -cómo las que propone Galperin-, La Destinación que se hace de la acción -para sí o para otro- y La Manifestación de la acción -externa o internamente-.

Seguramente estos aspectos pueden jugar un papel en relación con el planteamiento de la formación por etapas de las acciones mentales propuestas por Talízina; sin embargo, nos referimos solamente al uso de las formas de la acción en situaciones de aprendizaje⁷.

El siguiente cuadro presenta un modelo de interpretación de la acción, para analizar el juego de interacciones de los estudiantes en el desarrollo de una actividad.

Cuadro - modelo de interpretación de las acciones en el contexto de las situaciones de aprendizaje.

Para sí	EGOCENTRICO (A)	REFLEXIVO -YO CON YO- (B)
Para otros	PARTICIPATIVO (C)	REREFLEXIÓN -YO CON OTRO IMAGINADO- (D)
	Externa	Externa

44

⁶ Galperin, citado nuevamente por Talízina, asegura que cualquier acción del sujeto puede ser descrita indicando el grado de formación de sus principales características (bis).

⁷ Dado que son posibles dos miradas en relación con este tema, la primera sobre el uso de las formas de la acción y la segunda sobre la concepción de la formación de las acciones mentales por etapas, es necesario distinguir entre el grado de interiorización y la utilización de una forma de la acción.

Este modelo básicamente involucra dos aspectos: el uno, la actitud del sujeto que se configura a través de la asignación de un destino de la acción; el segundo, a la asignación de una forma de manifestación.

Las relaciones que se dan quedan representadas en la disposición de las cuatro regiones que se generan en el cuadro. Las unas, en las regiones diagonales, las otras en las filas y columnas.

La primera, correspondiente a la diagonal $A \Leftrightarrow D$, se refiere a acciones que son aparentes para sí y reales para otros e inversamente; la otra, de acciones verdaderamente para otros o para sí, respectivamente.

Así, la diagonal $A \Leftrightarrow D$, muestra una oposición entre actitudes ya que A se refiere a acciones que son destinadas para sí aunque estas se manifiesten externamente, mientras que en D la acción no se manifiesta en el exterior a pesar de realizarse con destino al otro.

En la forma A de la acción el sujeto se ve más o menos afectado del contexto, por ejemplo: si esta realizando la acción y se está expuesto ante otros, puede suceder que se sienta cohibido o por el contrario que se sienta impulsado a mostrarse, ambos aspectos de carácter estratégico; pero puede suceder también que estando desinhibido actúe de manera comunicativa consigo mismo procurándose comprensión y seleccionando cursos de acción para sí.

En la forma D de la acción, puede ser destinada al otro con dos fines distintos: primero, a validar imponiendo el propio punto de vista o a queriendo eliminar el del otro; y segundo, considerando el punto de vista del otro y dejándose afectar por éste.

La diagonal $C \Leftrightarrow B$, se caracteriza porque las acciones son categóricas, puras; sí en C realmente la acción se realiza para el otro y en B la acción se realiza puramente para sí mismo. La acción que se presenta en esta diagonal puede cargarse de fines estratégicos o comunicativos de manera análoga a la que se da en la diagonal $A \Leftrightarrow D$.

UN ANÁLISIS DE LA FORMA MATERIAL INTERNA PARA SÍ A LA VERBAL EXTERNA PARA OTRO

En el proceso de asimilación de una forma de la acción, al sujeto le es necesario orientarse tanto al contenido del objeto de la acción como a la forma misma de la acción. Es clara la forma en que en el sujeto se dinamiza para operar sobre objetos en forma verbal cuando éste implementa el uso de las funciones lingüísticas; en el caso de acciones materiales es conocida su pertinencia como punto de partida de la asimilación, gracias precisamente a la representación material concreta que aporta⁸.

Las acciones materiales que realiza un sujeto se insertan en el juego de posibilidades que generan los objetos materiales; el sujeto ha de estar sometido al juego de condiciones que subyace a la situación material, sea que éste desarrolle cursos de acción con tanteo o con eliminación sistemática. Esto no ocurre en el caso en que los objetos se manipulan en la forma verbal, salvo que allí se haya reconstruido el sistema de relaciones en juego en la anterior situación material.

En el caso de la noción de ángulo, por ejemplo, que inicialmente es adquirida en forma dinámica realizando giros con el cuerpo, una generalización importante se obtiene pasando la acción a la forma materializada al representarse la situación con un dibujo; este dibujo aun contiene en forma natural la estructura del objeto de la acción y las condiciones para operar con ella -segmentos de recta-; si se introduce una forma simbólica de representación el sujeto puede experimentar el haberse quedado sin objeto de la acción, por el hecho de no haberse conformado plenamente el Objeto de la acción en esta forma simbólica, tarea esta de supremo cuidado.

Dado que la acción material parte de condiciones definidas por objetos materiales, el sujeto que la actúa lo hace condicionado a la lógica del material, es decir, a la lógica que los elementos y relaciones del material configuran; de modo que las posibilidades en esta forma de la acción, así como sus limitaciones, descansan en esta lógica material.

46

⁸ Por esta razón las acciones de tipo material-perceptiva constituyen formas apropiadas para iniciar la construcción y aprehensión de cursos de acciones sistemáticos y regulares, los que más tarde se habrán de realizar en forma interna acompañadas de determinadas características y recibiendo el nombre de operaciones.

En particular, un material didáctico aunque ofrece una numerosidad de opciones, somete al sujeto que la realiza al juego de posibilidades que se desprenden de su carácter de Unidad, entendido éste como la clase potencial de todas las relaciones posibles entre partes del material dado.

En el registro de los caramelos se observa que los niños al desarrollar el problema usan una lógica que no pertenece ni a la matemática ni al material concreto; pensamos que si el proceso de solución de este problema se hubiera acompañado de la acción material, se hubiera eliminado las soluciones del tipo "se dejaron de vender 300 caramelos". Esto por que la forma verbal no reproduce de manera espontánea la lógica del objeto de la acción.

Un desempeño así es resultado de la falta de construcción de acciones materiales: cuando un estudiante no ha tenido la oportunidad de pensar materialmente por sí mismo, no tiene la comprensión del significado de la acción material por cuanto no se ha intuido en el material la lógica correspondiente. En este caso se han presentado estudiantes que se cohiben de manipular el material porque sienten temor a equivocarse ya que descargan todo, al juego de posibilidades en su propio desempeño, negando el carácter de unidad de dicho juego.

Podríamos decir que en la acción material especialmente se hace posible el que un objeto se vea y se palpe y sin embargo no se le conozca en franco contraste con la confianza y familiaridad que le podemos reconocer; a diferencia, la acción en la forma simbólica-verbal -el sujeto ya no percibe el objeto-, le lleva a descubrir que ahora no tiene confianza frente al objeto y que necesita "conocerle", esto es, representarlo verbalmente recreándolo en todos sus elementos y propiedades fundamentales.

La representación en la forma material es pasiva en el sentido de que permite escoger intuitivamente el objeto material que contiene al objeto de la acción, mientras que la representación en forma verbal implica necesariamente la capacidad consciente de recrear una representación del objeto de la acción capaz de contenerlo en determinada esencialidad.

En la forma material de la acción se da el caso que el conocimiento reposa fuera del sujeto en la forma de una lógica material, esto es, en la forma de una estructura funcional atrapada en los objetos; de tal modo que cuando la acción reaparece ya no en la forma material sino en la

verbal, sin apoyo en el material, la lógica del material junto con el material mismo que antes sugerían el tipo de operaciones y la forma de su realización, desaparecen y entonces surge la necesidad del conocimiento teórico el cual modela y/o simula alguna parte de la estructura atrapada en los objetos materiales.

En síntesis, las formas de la acción por las que circula la práctica del estudiante se dan en función de sus necesidades cognitivas, y de sus motivaciones e intereses; la práctica de éstas le permite descubrir, por ejemplo, el objeto de determinada acción, el contenido de la misma – las operaciones, sus composiciones, su carácter consecutivo, la estructura en la cual se inscriben tales secuencias-, así como ejercer un control objetivo sobre la acción misma.

5

La pregunta como acción verbal para la construcción de objetos y estructuras verbales

Una de las actividades que se desarrollan en el ANILLITO es la **solución y formulación de problemas**, que se convierten en actividad una vez que los niños la asumen como tarea vital. Algunas de las estrategias que hemos utilizado para lograr su apropiación por parte de los estudiantes son:

1. Dada una situación formularle preguntas.
2. Dados unos datos, inventarse un problema, es decir, construirle una situación de contexto, hacerle preguntas y resolver algunas de ellas.
3. Dado un problema corriente, se les pide que le hagan el mayor número de preguntas.
4. Reconstruir el problema a partir de una lectura, y hacerle el mayor número de preguntas.
5. Reconstruir un problema a partir de una secuencia de imágenes.
6. Invención libre de problemas.
7. Dada una situación con datos insuficientes para su solución, agregar los datos que hacen falta, hacerle preguntas y resolver algunas.

Es necesario aclarar que una tarea se convierte en problema cuando cumple los siguientes requisitos:

- **La apropiación de la parte orientadora de la acción** lograda a través de: el reconocimiento de los datos importantes, la calidad de las preguntas que formulan y la verbalización misma del problema.

- **La búsqueda activa de caminos de solución;** lleva consigo la necesidad de utilizar diversos niveles de representación acordes con su grado de comprensión y sus necesidades cognitivas.
- En principio la situación abordada es neutra para el niño, pero el momento en que se le pide transformarla, agregarle datos, hacerle preguntas, construirle un contexto, **se le convierte en un reto cognitivo.**

Existe una relación muy estrecha entre la solución e invención de problemas y el desarrollo intelectual de los estudiantes. En este caso estamos de acuerdo con Alberto Lavarrere (1.988) cuando afirma que, pensar es esencialmente solucionar problemas, pues estos cumplen una doble función. *Por una parte la de asimilación, fortalecimiento y comprobación de conocimientos y por otra la función educativa (cultural) y de desarrollo cognitivo.*

Resolver un problema significa no solo la apropiación y transformación de lo que es objeto de estudio, sino también de las condiciones culturales para que estas operaciones, métodos y procesos mentales se desarrollen y transformen.

Así, la solución de problemas transforma al alumno no solo en calidad y cantidad de conocimientos, también en la apropiación de procesos y procedimientos generales, en estrategias y maneras diferentes de entender un problema, de formas diferentes de valorar y valorarse frente a un grupo social, de la elaboración de juicios y criterios para decidir cuándo algo es un problema; todo esto configura hábitos y habilidades tanto en el plano intelectual, motivacional y afectivo, que no son otra cosa que maneras de pensar, sentir y actuar culturalmente construidas.

Categorización de las preguntas hechas por los niños en el problema del tanque

SITUACION: Se tiene un tanque de cemento que tiene tres llaves y un desagüe. La primera llave vierte al tanque 68 litros de agua en 4 minutos, la segunda llave vierte 108 litros en 6 minutos y la tercera llave 248 litros de agua en 8 minutos; por el desagüe sales 55 litros en 5 minutos. El desagüe está cerrado y el tanque se llena en 53 minutos.

Para caracterizar las preguntas tendremos en cuenta los siguientes aspectos:

- **La parte orientadora de la acción.**
 - **El manejo del tiempo en el contexto del problema.**
 - **Las condiciones que les colocan a las preguntas.**
 - **La estructura de la pregunta.**
1. *Preguntas ligadas a la globalidad del problema*, donde la parte orientadora de la acción es incompleta, esta confusa o no la entienden. Poseen estructura simple y bien construida, el tiempo y la capacidad del tanque no son importantes.
 - ¿Cómo se sabe que es agua?
 - ¿Quién abre las tres llaves?
 - ¿De qué empresa es el tanque?
 - ¿De qué está hecho el tanque?
 - ¿De qué color es el tanque?
 - ¿Cuánto mide el tanque de cemento?
 - ¿Porqué es necesario que el tanque tenga un desagüe?
 2. *Preguntas que tienen respuesta en el enunciado del problema*; la parte orientadora de la acción está situada sobre los datos del enunciado, no hay manejo del tiempo, no se agregan condiciones y la estructura de la pregunta es sencilla y bien construida.
 - ¿Cuántas llaves tiene el tanque?
 - ¿Cuántos desagües tiene el tanque?
 - ¿Cuántos litros de agua salen por el desagüe?
 - ¿Cuánta agua vierte la primera llave?
 - ¿Cuántos litros bota de agua la segunda llave?
 - ¿Cuántos litros salen de la tercera llave?
 3. *Preguntas que aluden a la parte orientadora de la acción*, pero no aluden explícitamente al tiempo, se introducen nuevas condiciones, cada una revela alguna ambigüedad, estructura compuesta bien construida.
 - Si el desagüe y las tres llaves están abiertas, ¿cuánta agua sale en total?

- Si el desagüe y la segunda llave esta abierta, ¿cuánta agua sale en total?
- ¿Cuánta cantidad de agua se puede reciclar en el tanque?
- ¿Cuántos litros de agua hay en el tanque llenándose?
- ¿Porqué el tanque se llena en 53 minutos y no en 55 minutos?

4. *Preguntas que tienen clara la base orientadora*, el tiempo se delimita dentro de las condiciones del problema, no se necesita conocer la capacidad del tanque. Las condiciones son precisas y no se salen de la base orientadora, poseen estructura compleja.

- ¿El desagüe cuánta agua vierte en una hora?
- ¿Cuántos litros de agua salen en un minuto de la primera llave?
- ¿Cuántos litros de agua salen de la tercera llave en una hora?
- ¿Cuántos litros caen entre todas las llaves y en cuanto tiempo?
- Si el desagüe esta abierto ¿Cuántos litros bota en tres minutos?

5. *Preguntas complejas* donde su solución implica el despliegue de la exploración uno a uno y el uso de la combinatoria, la capacidad del tanque se asume como conocida. Algunas preguntas incluyen condiciones nuevas.

- ¿En cuántos minutos se llena el tanque si el desagüe está cerrado y las llaves están abiertas?
- ¿Cuánto se demora el tanque llenándose con una sola llave abierta y el desagüe cerrado?
- Si una llave está dañada, ¿En cuánto tiempo las otras dos pueden llenar el tanque?
- ¿Será posible que el tanque se llene si el desagüe esta abierto y las tres llaves están abiertas?
- ¿Cuántos minutos se demorará una llave en llenar el tanque?
- ¿En cuánto tiempo se llenaría el tanque con solo dos llaves abiertas y el desagüe cerrado?.

El valor cognitivo de preguntarse en esta perspectiva es apropiarse del esquema de la base orientadora de la acción, prestando atención a los datos importantes, a las condiciones esenciales del problema, y a las transformaciones posibles cuando la pregunta introduce nuevas condiciones. Además, se hace evidente la necesidad de saber si la pregunta está bien hecha, lo cual lleva al niño a trazar cursos posibles de acción y a resolver parcialmente el problema. Es en síntesis toda una construcción de sentido y de transformación de la actividad en un problema para sí.

APOYO BIBLIOGRAFICO

- Azcoaga, J. 1983. *Del lenguaje al pensamiento verbal*. Editorial El Ateneo. Buenos Aires.
- Bruner, J. 1991. *Actos de significado*. Alianza Editorial. Madrid.
- _____ 1988. *Acción, lenguaje y pensamiento*. Editorial Gedisa. Barcelona
- _____ *Realidad mental y mundos posibles*. Editorial Gedisa. Barcelona
- Davidov, V. 1988. *La psicología evolutiva y pedagógica en la URSS*. Editorial Progreso. Moscú.
- _____ *La enseñanza escolar y el aprendizaje psíquico*. Edit. Progreso. Moscú
- Davis, P: y Hersh, R 1988. *Experiencia matemática*. Editorial Labor Barcelona:
- Dickson, L y Otros 1991. *El aprendizaje de las matemáticas*. Editorial Labor. Barcelona.
- Elkana, Y. 1993. *La ciencia como sistema cultural: una interpretación antropológica*. Módulo de pedagogía I, U.P.N.
- Elliot, J. 1990. *La investigación acción en educación*. Ediciones Morata. Madrid.
- Foucault, M., 1991. *Las palabras y las cosas: una arqueología de las ciencias humanas*. Trad.cast.:1968, E.C. Frost. (Edit. Siglo XXI: Colombia).
- _____ *La arqueología del saber*. Edit. Siglo XXI. Mexico.
- Goetz, J.P.y LeCompte, M.D. *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa*. Ediciones Morata. Madrid.
- Halliday, M.A. 1982. *El lenguaje como semiótica social. Una interpretación social del lenguaje y del significado*. Fondo de cultura económica. Mexico
- Morei, M. 1983. *Lecturas de Foucault*. Editorial Taurus. Madrid.
- Kemmis, S. Y Otro. 1988. *Teoría crítica de la enseñanza*. Edit. Martinez Roca. Barcelona.

- Luria, A.R. 1993. *Lenguaje y pensamiento* Ediciones Roca Ltda. Reimpresión Bogotá. Traducido al castellano por Pedro M. Merino del original ruso (Ediciones de la Universidad de Moscú)
- Petrovsky, A. 1990. *Psicología Evolutiva y Pedagógica*. Edit. Progreso. Moscú.
- Piaget, J., 1991. *Seis estudios de psicología* (Six études de psychologie). Trad.cast.: J. Marfá. 1964. Edit. Labor: Barcelona.
- _____ 1987. *Introducción a la epistemología genética*. Ediciones Paidós. México
- _____ 1986. *La formación del símbolo en el niño*. Fondo de cultura económica. Mexico.
- _____ 1989. *La construcción de lo real en el niño*. Editorial Crítica. Barcelona.
- Rojano, T. *La matemática escolar como lenguaje. Nuevas perspectivas de investigación y enseñanza*. Enseñanza de las ciencias. Vol 12 (1), pp 45-56. Marzo de 1994.
- Schaff, A. 1967. *Lenguaje y conocimiento*. Editorial Grijalvo. Mexico
- Talízina, N., 1988. *Psicología de la enseñanza*. Traducido del ruso por Ana Clavijo. Editorial Progreso. Moscú.
- Vicente, Maribel F. 1995. *Un modelo para la formación del sistema de habilidades matemáticas en la escuela media cubana*. Tesis de doctorado. Santiago de Cuba.
- Wertsch, J., 1990. *La voz de la racionalidad. en un enfoque sociocultural de la mente en "Vigotsky y la educación: Connotaciones y aplicaciones ..."*. Traducc. Al castellano de Miguel Wald. Editorial Aique.
- _____ 1988. *Vigotsky y la formación social de la mente*. Ediciones Paidós. Barcelona
- Moll, Luis C. (Comp.). 1993. *Vygotsky y la educación: Connotaciones y aplicaciones de la psicología sociohistórica en la educación*. (Trad. Cast. por Wald, Miguel, 1990). Editorial Aique.
- Vigotsky, Lev. 1983. *Pensamiento y lenguaje. Comentarios críticos de Jean Piaget*. Edit. La Pleyade. Buenos Aires.
- Wittrock, M. 1989. *La investigación en la enseñanza II. Métodos cualitativos y de observación*. Barcelona.