370.7
I23i
ej

INVESTIGACION EDUCATIVA Y DESARROLLO PEDAGOGICO

ALCALDIA MAYOR SANTA FE DE BOGOTA D.C.

BOGOTÁ PARA VIVIR todos del mismo lado

370.7
I23c
Ej.1

Instituto para la Investigación Educativa
y el Desarrollo Pedagógico – IDEP
000134

INSTITUTO PARA LA INVESTIGACIÓN EDUCATIVA Y DESARROLLO PEDAGÓGICO (IDEP)

INFORME ACADÉMICO FINAL

PROYECTO: ***ICEP***

INSTITUCIÓN: CED BRASILIA USME

CONTRATO: 101 DE 2000

04/06/08

El presente informe académico dirigido a docentes e investigadores da cuenta de todas las fases de desarrollo de la innovación y aportes significativos de la misma orientados **a mejorar los ambientes mediados por el uso de las calculadoras graficadoras que repercuta en la optimización de las prácticas de enseñanza de los docentes del área de matemáticas y en los aprendizajes de los estudiantes de décimo y once.**

000533

Equipo Innovador Institución Escolar: Carmen Cecilia Martínez
Jorge Eliecer Tolosa
Omar Eduardo Torres
Alvaro Rene Arévalo

Por el IDEP: Aurelio Usón Jaeger

Bogotá, Noviembre de 2001

Inv. IDEP
108

INSTITUTO PARA LA INVESTIGACIÓN EDUCATIVA Y DESARROLLO PEDAGÓGICO (IDEP)

FICHA TÉCNICA

PROYECTO: ***ICEP***

INSTITUCIÓN: CED BRASILIA USME

CONTRATO: 101 DE 2000

TABLA DE CONTENIDO

1. IDENTIFICACIÓN 4
2. CARACTERIZACIÓN 5
2.1. JUSTIFICACIÓN 5
2.1.1. Calculadoras gráficas: tecnología e informática educativa en la enseñanza y el aprendizaje del álgebra, el precálculo y el cálculo 8
2.1.2. Necesidades 10
2.1.3. Expectativas del proyecto 11
2.2. POBLACIÓN 13
2.3. METODOLOGÍA 14
2.3.1. Revisión del pensum de matemáticas 14
2.3.2. Visión funcional del precálculo 18
2.3.3. Programa de asesoría 21
2.3.4. Diseño de talleres usando tecnología portátil 22
2.3.5. Puesta en práctica de la innovación en el aula 26
2.3.6. Evaluación de la innovación 32
2.4. RESULTADOS LOGRADOS 36
2.4.1. Cambios en los estudiantes 36
2.4.2. Cambios en los profesores 48
2.4.3. Cambios en el ámbito institucional 53
2.4.4. Dificultades 55
2.5. PROYECCIÓN DE LA EXPERIENCIA EN TÉRMINOS DE SOSTENIBILIDAD, COBERTURA Y EXPANSIÓN 56
2.6. BIBLIOGRAFÍA 58
ANEXO 59
Taller Nº 1: Dobleces 59
Taller Nº 2: Dados 61
Taller Nº 3: Funciones Trigonométricas 64
Talleres de Funciones afines y cuadraticas 73

1. IDENTIFICACIÓN

Dirección: Carrera 35 B este # 88ª sur

Teléfonos: 762 21 30 y 768 40 61

Jornadas: Mañana y Tarde

Sector: Oficial

Número de estudiantes: 1250

Localidad: Quinta (Usme), Barrio Brasilia.

Niveles educativos: Preescolar, Básica Media y Básica Secundaria

Nombre del Rector: Martha Soler (encargado)

Responsables de la experiencia institución escolar: Carmen Cecilia Martínez Buitrago

Responsable de la experiencia IDEP: **Aurelio Usón Jaeger**

Fecha de realización: 15/01/2000-15/11/2001

Página web proyecto: http://ued.uniandes.edu.co/servidor/ued/proyecto/icep2/paginainicial.htm

Correo electrónico de contacto: http://camartin@uniandes.edu.co

Palabras claves:

Calculadoras graficadoras

Resolución de problemas

Trabajo en equipo

Precálculo

Funciones y diferentes sistemas de representación.

2. CARACTERIZACIÓN

2.1. JUSTIFICACIÓN

La experiencia reportada por profesores e investigadores que han considerado la utilización de la tecnología portátil en los últimos años (por ejemplo, ver Gómez y Waits (2000)) sugieren la necesidad de que las instituciones escolares se informen, desarrollen y generen espacios de reflexión en torno al papel que está jugando y que puede jugar la utilización de la tecnología portátil en el aula. Gracias a la posibilidad que ofrece de manejar dinámicamente los objetos matemáticos en múltiples sistemas de representación dentro de esquemas interactivos, la tecnología abre espacios para que el estudiante pueda vivir nuevas experiencias matemáticas (difíciles de lograr en medios tradicionales como el lápiz y el papel) en las que él puede manipular directamente los objetos matemáticos dentro de un ambiente de exploración.

Estas experiencias matemáticas serán fructíferas siempre que se tenga en cuenta la complejidad del contenido matemático a enseñar, la complejidad de los procesos cognitivos involucrados en el aprendizaje de las matemáticas y el papel fundamental que deben jugar los diseñadores del currículo y los profesores en el diseño e implementación de situaciones didácticas que, teniendo en cuenta las dificultades y las necesidades de los estudiantes, aprovechen la tecnología para crear espacios en los que el estudiante pueda construir un conocimiento matemático más amplio y potente. El principal aporte de la tecnología consiste en que la interacción entre ella, el profesor y el estudiante está cambiando la visión que los actores tienen del contenido matemático y del proceso didáctico. El papel y el impacto de la tecnología, y específicamente de la informática educativa, en la educación matemática puede verse analizando los tipos y características de estas herramientas computacionales, el papel de nuevas tecnologías como las

calculadoras gráficas y el papel del profesor en estos nuevos ambientes tecnológicos.

La tecnología y la informática educativa ofrecen la oportunidad para que se consolide no solamente una nueva visión del contenido matemático, sino también nuevas visiones acerca de las relaciones didácticas y del papel de los diversos agentes didácticos en el proceso de la construcción del conocimiento matemático por parte del sujeto. En este sentido, la tecnología puede convertirse en un elemento central del sistema didáctico como agente didáctico con funciones explícitas e importantes en el funcionamiento del sistema.

En consonancia con lo anterior, vemos como imperiosa la implementación del uso de la tecnología y la informática, y en particular de la tecnología portátil, para mejorar la calidad del aprendizaje de las matemáticas en nuestra institución, con el fin de dar a los estudiantes herramientas para afrontar su vida profesional y laboral. Además desde hace un tiempo existe en la institución la preocupación por encontrar estrategias alternativas para que los estudiantes construyan unas matemáticas más sólidas y pierdan la fobia por la asignatura; esta preocupación nos ha generado el interés por participar en proyectos en donde se ponga de manifiesto, además de la utilización de la tecnología en si misma, los aportes pedagógicos y didácticos que se derivan de la misma.

Por otra parte, la participación de algunos profesores del área en proyectos y programas relacionados con temas de informática educativa nos ha mostrado posibilidades y alternativas de cómo se puede integrar la tecnología a currículos como los de matemáticas. Experiencias como la anterior nos ha servido de catalizador de nuestra práctica docente y nos impulsan a lanzarnos y enfrentarnos a nuevas propuestas con la esperanza de que nuestro accionar, al desarrollar la

misma, contribuya a subsanar algunas debilidades tanto personales como de nuestra institución y nuestros estudiantes.

En el apartado anterior ya mencionamos como algunas experiencias de participación en proyectos relacionados con el tema de informática educativa nos han aportado vivencias tanto teóricas como prácticas que nos han despertado el interés por participar en propuestas como la que nos ocupa. En particular podemos mencionar la participación de algunos de los miembros del equipo innovador, en proyectos tales como ICEP (Innovación curricular en precálculo para la educación media, 2000) y en programas de formación permanente de docentes tales como "Introducción a la matemática contemporánea desde los ordenadores lógicos" (Corporación Escuela Pedagógica Experimental, 2000), "Esquema de desarrollo y formación profesional en educación matemática para profesores de matemáticas de secundaria" (Universidad de los Andes, 1998) y "La transición aritmética-álgebra" (Universidad Distrital, 2000).

A través de la participación en estos proyectos y programas de formación hemos podido evidenciar que la interrelación o integración que puede lograr la informática con todas las áreas del currículo escolar es de amplio alcance; desde el punto de vista de las herramientas de propósito general, las hojas electrónicas, los procesadores de texto, los programas de diseño gráfico, etc., apoyan determinados ejercicios que desarrollan habilidades, destrezas y conceptos generales. Igualmente hemos podido evidenciar que para el desarrollo de competencias matemáticas específicas, estas herramientas ofrecen limitadas posibilidades, frente a otras diseñadas específicamente para ello.

En la actualidad existe una amplia variedad de herramientas computacionales educativas diseñadas específicamente para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (cabri, derive, regla y compás y math graph), en particular, la

tecnología portátil, puede considerarse como una de las últimas herramientas mencionadas arriba. De esta tecnología sobresale, por sus amplias posibilidades de generar ambientes de aprendizaje, las llamadas calculadoras graficadoras que pueden considerarse como microcomputadores.

2.1.1. Calculadoras gráficas: tecnología e informática educativa en la enseñanza y el aprendizaje del álgebra, el précalculo y el cálculo.

Las calculadoras comenzaron a utilizarse en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas desde los años 70 cuando aparecieron las primeras máquinas de bajo costo que permitían hacer las operaciones aritméticas básicas. En la actualidad existen diversos tipos de calculadoras: desde la calculadora aritmética, pasando por las calculadoras científicas y gráficas, hasta máquinas que tienen la capacidad para hacer cálculos simbólicos y permiten la utilización de programas como el Cabri-geómetra y el Derive. Todas estas máquinas tienen características comunes: tienen un teclado y una pantalla (cuyo tamaño varía según el modelo), pero principalmente son máquinas de bajo costo y totalmente portátiles. Su portabilidad las diferencia de los computadores. Mientras que estos son un recurso compartido y disponible ocasionalmente, usualmente por iniciativa del profesor, las calculadoras son un recurso individual, disponible libremente y utilizado por iniciativa del estudiante. El hecho que su utilización se dé dentro de un contexto y una forma que es fundamentalmente diferente de la de los computadores da lugar a que las consideremos de manera especial.

Las calculadoras avanzadas (como las calculadoras gráficas) tienen la capacidad para manejar de manera parcialmente dinámica por los menos dos sistemas de representación los objetos matemáticos (gráfico, simbólico y en algunos casos tabular). Se diferencian de los computadores, desde el

punto de vista de sus potencialidades didácticas, en que la mayoría de los modelos tienen poca capacidad para la interactividad. Sin embargo, las calculadoras son un medio de trabajo que ofrece un espacio permanente y fácilmente acequible para la experimentación y la verificación del trabajo matemático. La experimentación y la verificación son ejemplos de formas de actuar del sujeto en el sistema didáctico que son difíciles de lograr en medios tradicionales como el lápiz y el papel.

El impacto de la utilización de las calculadoras en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas ha dependido hasta ahora de dos tipos de factores. Desde el punto de vista social e institucional, ha dependido del grado con que el sistema educativo en general, y la institución educativa en particular, permiten su utilización en el salón de clase, en el trabajo del estudiante en la casa y en las pruebas de evaluación (Ruthven, 1996). Por el otro, también ha dependido, desde el punto de vista de sus efectos en el aprendizaje, de la forma como su utilización se encuentre integrada al diseño y al desarrollo del currículo en cuestión. A nivel institucional, las diferencias surgen de la medida en la que la utilización de las calculadoras está permitida y de si la institución misma apoya el acceso de los estudiantes a esta tecnología. Desde el punto de vista de su utilización en el salón de clase, las diferencias dependen del acceso a la tecnología que se permite a los estudiantes, del conocimiento y el uso que el profesor hace de ella en la clase, de la manera como las tareas que se le proponen a los estudiantes aprovechan sus potencialidades, y de la disponibilidad de las máquinas en las pruebas de evaluación. Con base en estas categoría es posible identificar tres fases en la integración de las calculadoras al currículo: introducción, adaptación y consolidación. Los efectos de la utilización de las calculadoras en el sistema curricular pueden depender de la fase de integración en que se encuentren.

Las investigaciones acerca de los resultados de la utilización de calculadoras graficadoras (Gómez y Fernández) muestran que los efectos de la integración de la tecnología en el currículo de matemáticas se centran en la construcción y consolidación (por parte de los diseñadores del currículo, de los profesores y de los estudiantes) de nuevas formas de ver tanto el contenido matemático, como la relación entre los estudiantes, los agentes didácticos (profesor y tecnología entre otros) en la construcción por parte del estudiante de un conocimiento matemático más potente.

2.1.2. Necesidades.

Tradicionalmente la asignatura de matemáticas en la institución, se ha considerado por los estudiantes como monótona, aburrida y difícil, y siempre ha tenido una gran mortalidad académica. Creemos que esto se debe a la metodología con la que hasta el momento se ha trabajado en las clases y a la falta de profesores en algunos años. Estas razones han llevado a los profesores a buscar estrategias para superar dichas dificultades.

Por otra parte la institución se encuentra en un proceso de cambio acerca del tipo de énfasis en el tipo de formación que se quiere ofrecer, en la actualidad los estudiantes salen con un bachillerato en comercio o en electricidad; dichas materias se incluyen desde el grado sexto y su intensidad semanal se aumenta en los grados noveno, décimo y undécimo.

En este momento los docentes y directivos se han conscientizado acerca de las necesidades y ventajas de la tecnología en el proceso de formación de los estudiantes y ha decidido cambiar el pensum de tal forma que ahora ofrecerá un bachillerato clásico con énfasis en tecnología, esto solo es posible de realizar si se tiene apoyo desde cada área.

Por otra parte los profesores de matemáticas participaron el año anterior en el proyecto ICEP[1] (Innovación Curricular en Precálculo) y vieron la necesidad de continuar implementando el proyecto en la institución pues así se apoya el proyecto de cambio de énfasis en la institución y se trata de dar soluciones a los problemas de desmotivación y mortalidad académica en el área. Además la mayoría de materiales necesarios para cumplir los objetivos propuestos en ICEP solamente pudieron ser adquiridos por la institución a finales de año y los talleres que se tenían diseñados haciendo uso de la calculadora graficadora no se implementaron en todos los cursos.

También creemos que el proyecto como está diseñado impulsa el desarrollo de competencias argumentativas y comunicativas en los estudiantes lo cual es muy importante teniendo en cuenta que el eje del PEI de la institución es la comunicación.

2.1.3. Expectativas del proyecto

El proyecto busca que con la implementación de una metodología distinta a la tradicionalmente utilizada en la clase de matemáticas se produzcan cambios en la institución que se reflejen en una mayor calidad en los procesos de enseñanza y aprendizaje de los conceptos matemáticos involucrados.

- En cuanto a la población escolar se busca que:

[1] ICEP fue un proyecto coordinado por Cristina Carulla, Patricia Perry, Edgar Guacaneme y Gloria Neira miembros de "una empresa docente", que se desarrolló entre los años 1999 y 2000 con la financiación del IDEP y se realizó en los colegios: CED La Amistad JT (Kenedy), CED Brasilia JT y JM (Usme) y Colegio Miguel Antonio Caro JM (Engativa)

- Desarrollen un pensamiento de alto nivel que les permita enfrentarse con mayor éxito y solidez a los exámenes de Estado e ingreso a la educación superior.
- Cambien la actitud respecto al trabajo en la clase de matemáticas, pues tradicionalmente en la institución la materia ha sido vista como difícil, aburrida y monótona; además se ha presentado mucha mortalidad académica, el proyecto busca hacer ver la matemática como una materia dinámica, activa y que tiene aplicaciones en situaciones prácticas. Esperamos acabar con el miedo y la fobia por la asignatura.
- Interactuén con el profesor y la calculadora graficadora y se hagan conscientes de la importancia de la tecnología portátil como herramienta de apoyo para facilitar el aprendizaje.
- Utilicen los conceptos matemáticos involucrados (funciones) en las actividades propuestas para modelar situaciones de la vida cotidiana.
- Empleen los medios e instrumentos de la tecnología para tener una visión amplia del alcance de las matemáticas que se refleje en un nivel de mayor calidad en cuanto al análisis, la interpretación, la comparación, una mejor capacidad de razonamiento y la facilidad de comunicarse matemáticamente.

- En cuanto a los profesores se busca que:

- Sean conscientes de la importancia de conocer y usar los avances tecnológicos necesarios en la actualidad para que el estudiante pueda avanzar con mayor facilidad en su proceso de aprendizaje.
- Busquen metodologías alternas que hagan del trabajo en matemáticas algo llamativo, interesante, creativo y dinámico. En particular se quiere

explorar la utilización de la tecnología portátil como una herramienta que permite idear otras formas de enseñanza de las matemáticas.

- Mejoren las relaciones con estudiantes y colegas. Por la misma concepción que se tiene acerca de la dificultad de la materia las relaciones entre profesores y estudiantes no se caracterizan precisamente por la cordialidad, con el proyecto buscamos cambiar esa idea errónea de que el profesor de matemáticas es un ser superdotado y que la matemática es una ciencia a la que muy pocos tienen acceso.
- Se capaciten continuamente para conocer las investigaciones y teorías respecto al uso de tecnología en la educación matemática y puedan mejorar su práctica en el aula.
- Intercambien ideas con otros profesores de la institución y de otras instituciones por medio de la red de Internet que permita enfrentar las dificultades en equipo.
- Motiven a los profesores de otras asignaturas a implementar en sus clases la utilización de las calculadoras graficadoras, especialmente en áreas como ciencias, física, estadística y comercio; de tal forma que en un futuro se pueda realizar una correlación de áreas que haga del aprendizaje un proceso significativo e integrador.

2.2. *POBLACIÓN.*

La experiencia innovadora se desarrolló en los grados décimo y undécimo del CED Brasilia Zona Quinta (Usme), en la jornada tarde y en el grado noveno en la jornada mañana.

El grado décimo está formado por 4 cursos, tres de ellos con modalidad en comercio y uno en electricidad. En estos cursos existen 137 estudiantes.

El grado undécimo está formado por 3 cursos, dos en modalidad comercial y uno en electricidad, existen 123 estudiantes en este nivel.

El equipo innovador estuvo conformado por los profesores de matemáticas de la Jornada Tarde: Carmen Cecilia Martínez quién implementó la propuesta en los cursos 1004 y 1102, Jorge Eliecer Tolosa en el curso 1101 y Omar Eduardo Torres en los cursos 1001, 1002, 1003 y 1103. En la Jornada Mañana el profesor Alvaro Rene Arévalo implementó algunos talleres en grado Noveno.

2.3. METODOLOGÍA

El proyecto de innovación se desarrolló en diferentes etapas que incluyeron la revisión del pensum de matemáticas, el diseño de una propuesta de logros e indicadores de logro para los grados décimo y undécimo, la puesta en práctica de una visión funcional del precálculo, el diseño de talleres usando tecnología portátil, la participación permanente en el programa de asesoría contratado con *una empresa docente* (centro de investigación en educación matemática de la Universidad de los Andes), la puesta en práctica en los cursos y una evaluación permanente de la innovación.

2.3.1. Revisión del pensum de matemáticas.

En los meses de noviembre de 2000 y enero de 2001 los docentes innovadores, en el marco de la planeación institucional, revisaron el pensum de matemáticas de la institución y realizaron los ajustes necesarios para implementar la propuesta en grado décimo y undécimo, así mismo se acordó ir implementando algunos talleres en grado noveno en las dos jornadas con miras a ir introduciendo gradualmente la utilización de las calculadoras

graficadoras en todos los niveles y no esperar hasta la educación media para hacer uso de las ventajas didácticas de esta tecnología.

En la institución tradicionalmente en el grado décimo se trabajaban las funciones trigonométricas pero enfocadas como relaciones entre los lados de un triángulo rectángulo, se enfatizaba en la parte procedimental para hallar los lados o los ángulos de un triángulo usando las relaciones o los teoremas del seno y del coseno, para demostrar identidades trigonométricas y para resolver ecuaciones. Para la realización de gráficas se utilizaba el papel milimetrado.

El grado undécimo estaba dedicado al estudio del cálculo, se retomaba el concepto de función como tradicionalmente aparece en los libros de referencia utilizados por los estudiantes y se enfatizaba en la parte procedimental para hallar límites y derivadas; por cuestiones de tiempo la parte dedicada a las aplicaciones generalmente no se veía.

El grupo de docentes reorganizó el contenido matemático para estos grados atendiendo a una visión funcional, es decir, enfatizó en el hecho de que las funciones son objetos abstractos que para poderlos conocer deben ser representados y caracterizados desde diversos sistemas. También tuvo en cuenta para la organización la resolución de problemas como eje orientador.

Para grado décimo se acordó el estudio de las funciones lineales, afines, cuadráticas y trigonométricas y para grado undécimo las funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas, en los diferentes sistemas de representación y realizando las conexiones existentes entre ellos, de tal forma que el énfasis se hiciera en el conocimiento conceptual y no en el procedimental como tradicionalmente se ha realizado.

La propuesta de logros e indicadores de logro diseñada para estos grados aparece a continuación:

LOGROS E INDICADORES DE LOGROS GRADO DÉCIMO

LOGROS	INDICADORES DE LOGRO
1. Identifica una función en los diferentes sistemas de representación.	1. Representa gráficamente una función lineal. 2. Halla la representación simbólica de una función lineal. 3. Reconoce cuando una tabla de datos es una función lineal. 4. Establece conexiones entre los diferentes sistemas de representación.
2. Interpreta conceptos de pendiente en diferentes sistemas.	1. Reconoce el valor de la pendiente a partir de una gráfica. 2. Gráfica una función lineal a partir de un punto y la pendiente. 3. Aplica la formula para hallar la pendiente de una recta conociendo dos puntos. 4. Establece conexiones entre las diferentes formas de representación.
3. Identifica una función cuadrática en los diferentes sistemas de representación.	1. Reconoce gráficamente una función cuadrática. 2. Reconoce cuando una tabla de datos corresponde a una función cuadrática. 3. Realiza la gráfica de una función cuadrática de acuerdo a las características de los parámetros (a, b y c). 4. Establece conexiones entre las diferentes formas de representación.
4. Modela problemas usando funciones lineales y cuadráticas.	1. Identifica las variables de un problema 2. Halla la relación entre variables. 3. Elabora la representación simbólica de un problema.

	4. Gráfica funciones cuadráticas.
4. Reconoce funciones logarítmicas	1. Halla diferencias entre funciones logarítmicas y exponenciales. 2. Reconoce una función logarítmica simbólicamente. 3. Gráfica una función logarítmica. 4. Reconoce gráficamente una función logarítmica. 5. Modela problemas aplicando funciones logarítmicas.
5. Reconoce funciones trigonométricas.	1. Halla las características de las funciones trigonométricas. 2. Representa gráficamente las funciones trigonométricas. 3. Halla el dominio y recorrido de cada función trigonométrica.

LOGROS E INDICADORES DE LOGROS GRADO UNDÉCIMO

LOGROS	INDICADORES DE LOGRO
1. Utiliza la calculadora gráfica para modelar situaciones problema.	1. Hace conjeturas sobre una situación problema. 2. Verifica conjeturas utilizando la calculadora gráfica. 3. Halla la relación entre variables de un problema. 4. Elabora la representación simbólica de un problema.
2. Identifica una función exponencial en sus diferentes sistemas de representación	1. Halla diferencias entre funciones cuadráticas y exponenciales. 2. Reconoce una función exponencial simbólicamente. 3. Grafica una función exponencial. 4. Reconoce una gráfica de una función exponencial. 5. Modela problemas aplicando funciones exponenciales
3. Identifica una función logarítmica en sus diferentes sistemas de representación.	1. Halla diferencias entre funciones logarítmicas y exponenciales. 2. Reconoce una función logarítmica simbólicamente.

	3. Grafica una función logarítmica. 4. Reconoce una gráfica de una función logarítmica. 5. Modela problemas aplicando funciones logarítmicas.
4. Identifica cada una de las funciones trigonométricas.	1. Reconoce gráficamente las características de las funciones trigonométricas. 2. Representa gráficamente las funciones trigonométricas.
5. Aplica las funciones trigonométricas en la solución de problemas.	1. Establece las relaciones trigonométricas en triángulos. 2. Soluciona problemas usando teorema del seno. 3. Soluciona problemas usando teorema del coseno. 4. Soluciona problemas usando triángulos rectángulos.

2.3.2. Visión funcional del precálculo

Como se mencionó antes el lenguaje matemático permite representar un objeto matemático de diversas maneras a partir de diferentes campos conceptuales con sus reglas particulares de funcionamiento.

Particularmente las funciones pueden representarse por los menos desde tres sistemas: simbólico (algebraico), tabular y gráfico; algunos autores aluden también a un sistema de representación dado por el lenguaje natural bien sea oral o escrito.

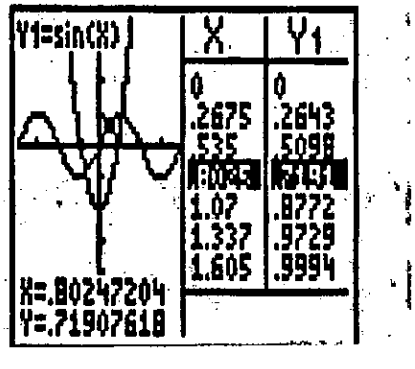
En la representación simbólica (o algebraica) se identifica el tipo de variación que existe y se escribe una expresión que relacione las variables, generalmente la variación se simboliza por f(x) seguido del símbolo igual y de

la respectiva expresión, de acuerdo a las características de la variable independiente se determina el tipo de función, por ejemplo:

Si el máximo exponente es 1 es de la forma $f(x)= mx+b$.
Si el máximo exponente es 2, es de la forma $f(x)= ax^2+bx+c$.
Si es un exponente la función es de la forma $f(x)= ab^x$.

La representación gráfica es un dibujo, un conjunto de puntos que se realiza generalmente en el plano cartesiano (en el caso de las funciones de variable real) y en el que se relacionan algunos valores de la variable dependiente con su respectiva imagen.

La representación tabular, es una lista o tabla de valores numéricos, que relaciona algunos valores de la función, esta representación es de tipo discreto pues no siempre es posible mostrar todos los valores que puede tomar la función.



En la calculadora TI 83 plus aparece por ejemplo la representación gráfica, simbólica y tabular de la función seno simultáneamente

Cada sistema de representación no puede considerarse como ente aislado, si se quiere que el estudiante adquiera dominio en el concepto de función se deben diseñar actividades que le permitan establecer conexiones entre los sistemas y caracterizar un objeto (punto máximo, asíntota, etc) en cada uno de ellos. Las conexiones no son inmediatas, no se puede por ejemplo,

estudiar solamente la representación gráfica de la función lineal y luego pasar a su representación simbólica olvidando los enlaces que se pueden realizar.

Janvier (1987) utiliza para manejar el concepto de función una tabla para mostrar el tipo de procesos de traducción que ocurren normalmente entre los sistemas de representación mencionados. No hay, en general, una manera única de llenar dicha tabla, esto depende en gran parte del contexto en el que se está trabajando. La tabla se presenta a continuación:

a / De	Situaciones (descripciones verbales)	Tablas	Gráficas	Fórmulas
Situaciones (descripciones verbales)		Medir	Dibujar	Modelar
Tablas	leer		Marcar puntos	Ajustar
Gráficas	Interpretar	Terminación de una lectura		Ajustar curvas
Fórmulas	Reconocer parámetros	Calcular	Dibujar	

A pesar de las limitaciones que se le pueden encontrar, la tabla es muy útil para dar una idea general de las preguntas que pueden surgir en los procesos de resolución de problemas, ayuda de una manera simple a ilustrar una variedad de aspectos relacionados con el manejo de conceptos y procedimientos y permite ver toda la complejidad que hay detrás de un análisis de esta naturaleza. Janvier señala que aunque la diagonal no se ha

llenado, también allí se dan procesos de cambio entre un mismo tipo de representación, él propone llamarlo transposición.

2.3.3. Programa de asesoría

Puesto que la innovación es la continuación del proyecto ICEP (Innovación Curricular en Precálculo) desarrollado por *una empresa docente*[2] se consideró fundamental seguir contando con su asesoría, pues la entidad tiene amplia experiencia en programas de formación de docentes y en la implementación de proyectos de innovación con tecnología portátil, para ello la institución contrató un programa de asesoría técnica y pedagógica.

Dicha asesoría se contrató para ser realizada presencial y virtualmente (vía Internet). La asesoría presencial se realizó con participación del grupo innovador en seminarios, talleres y reuniones; estas actividades generalmente fueron programadas y desarrolladas los días sábados o en jornada contraria.

La asesoría virtual se realizó permanentemente a través del correo electrónico y de la participación en una lista de discusión (http://icep2@ued.uniandes.edu.co) para aprovechar los avances en la comunicación, a través de dicha lista se discutieron por un lado, algunos documentos relativos a las diversas temáticas consideradas en los talleres (Using Logarithms to explore power and Exponential Functions, James R. Rahn y Barry A. Berndes, 1994; Rate of Change of Exponential Functions: A Precalculus Perspective, Brian Bradie, 1998 y Time for Trigonometry, Harris

[2] *Una empresa docente* es un centro de investigación en Educación Matemática de la Universidad de los Andes de Bogotá Colombia.

S. Shultz y Maretin V. Bonsangue, 1995), y por otro lado, las propuestas mismas de los talleres diseñados por los docentes durante el proyecto.

El programa de asesoría tuvo tres componentes: uno didáctico, uno técnico y otro metodológico. En el componente didáctico se abordaron aspectos relacionados con el contenido matemático involucrado en el proyecto (funciones lineales, cuadráticas, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas), se estudiaron algunos artículos acerca de los mismos y se diseñaron talleres usando la tecnología portátil.

En el componente técnico la entidad asesoró al grupo innovador en el manejo de la calculadora TI 83 plus, sus posibilidades en el aula y la solución de posibles errores o problemas que se presentan en su utilización. Así mismo, se capacitó a los docentes en el manejo eficiente en herramientas de Internet (correo electrónico y navegadores) y de algunas de sus posibles aplicaciones didácticas en el aula.

En la parte metodológica se consideraron aspectos relacionados con el manejo de la información, la sistematización y la parte administrativa del proyecto, así como en la preparación de informes al IDEP y de aspectos relacionados con el diseño de la página WEB.

2.3.4. Diseño de talleres usando tecnología portátil.

Los docentes participantes en el proyecto estudiaron algunos documentos acerca de las funciones exponenciales y trigonométricas, material suministrado por la entidad asesora, que sirvió como base para diseñar talleres que permitieran a los estudiantes modelar situaciones por medio de

estas funciones y utilizar la calculadora graficadora como herramienta para verificar sus hipótesis. La mayoría de documentos se encuentran en inglés[3].

Se estableció que en cada taller se debía especificar:

1. La intencionalidad, es decir los objetivos, lo que se espera que los estudiantes aprendan con la actividad.

2. Las consideraciones metodológicas, que incluyen los materiales a utilizar; la estrategia de implementación, es decir la forma del trabajo en el aula (trabajo en grupo, individual o puestas en común); el papel del profesor y del estudiante y aspectos específicos (conceptos y procedimientos matemáticos) que requiere un estudiante para resolver con éxito la actividad.

3. Las consideraciones acerca de las preguntas. Se especifican algunas características de las preguntas o actividades, así como de las posibles respuestas que pueden dar los estudiantes.

4. Las consideraciones acerca del papel de la calculadora graficadora. Puesto que los talleres se diseñan para hacer uso de la calculadora se debe especificar cual va a ser su papel y los momentos de la actividad en los que se va a utilizar. Es importante mencionar las ventajas que tiene y

[3] Tres de estos artículos fueron traducidos por Edgar Guacaneme (coordinador del grupo asesor): Using Logarithms to explore power and Exponential Functions, James R. Rahn y Barry A. Berndes, 1994; Rate of Change of Exponential Functions: A Precalculus Perspective, Brian Bradie, 1998 y Time for Trigonometry, Harris S. Shultz y Maretin V. Bonsangue, 1995.

especificar porque la actividad no se puede realizar solamente con lápiz y papel.

5. Las consideraciones acerca de la observación del taller y sus resultados. Es muy importante reportar lo observado en el desarrollo del taller, las fortalezas y las dificultades que tienen los estudiantes y el uso que hacen de la calculadora; todo ello con miras a redefinir los talleres para una aplicación posterior en otros cursos.

Durante el proyecto se utilizaron para el estudio de las funciones lineales y cuadráticas los talleres diseñados por algunos integrantes de *"una empresa docente"* en el marco del proyecto ICEP 2000[4]. Estos talleres (seis en total) hacen referencia a una caja sin tapa, construida a partir de una hoja de papel de 24 cm de largo por 20 cm de ancho, a la que se recortan en las esquinas cuadrados congruentes de lado x; los talleres abordan el estudio de ocho funciones, dos afines (para el largo y ancho de la caja), cinco cuadráticas (área del papel desperdiciado, área del papel utilizado, área de la base, área de las caras laterales de la caja) y una función cúbica (capacidad de la caja).

Para el estudio de las funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas los docentes innovadores diseñaron los siguientes talleres:

- **Dobleces.** Al estudiante se le propone doblar una hoja por la mitad sucesivamente y representar el número de regiones en función del número de dobleces, posteriormente se le pide representar el área de cada región en función del número de dobleces.

[4] Los talleres utilizados fueron diseñados por Patricia Perry y Edgar Guacaneme, investigadores de una empresa docente, en este documento aparecen los 3 primeros talleres en el anexo 1.

- **Dados.** Este taller se diseñó utilizando ideas sugeridas en el artículo "using logarithms to explore power and exponential functions" (James R. Rahn y Barry A. Berndes, 1994). La actividad consiste en realizar sucesivos lanzamientos de dados (por ejemplo 300) e ir sacando de la muestra aquellos que caigan en un número acordado previamente hasta dejar un número pequeño de dados (por ejemplo 6). Luego se representa el número de dados que van quedando en función del número de lanzamientos.

- **El reloj.** Este taller se diseñó utilizando ideas sugeridas en *"Time for trigonometry"*, (Harris S. Shultz y Martin V. Bonsangue, **año**). El artículo presenta 5 actividades que pretenden introducir las funciones seno y coseno a partir de un trabajo con un reloj de manecillas. La actividad consiste en establecer la relación entre el tiempo y la distancia vertical medida desde el extremo de cada hora al techo (línea horizontal) en un reloj circular, luego con la calculadora el estudiante puede encontrar que las gráficas corresponden a desplazamientos verticales y horizontales de la función seno.

Manejo de la calculadora. Este taller se diseñó para introducir a los estudiantes en el uso de algunos comandos básicos y opciones de representación de funciones y relaciones en la calculadora.

En los tres primeros talleres se enfoca el estudio de aspectos relacionados con las funciones exponenciales y trigonométricas; en éstos los estudiantes utilizan la calculadora graficadora para modelar las situaciones, poner a prueba hipótesis y representar gráficamente y simbólicamente las relaciones entre las variables. Las actividades propuestas aparecen en el Anexo 1, las

consideraciones metodológicas y didácticas se pueden consultar en la página web del proyecto:

http://ued.uniandes.edu.co/servidor/ued/proyecto/icep2/paginainicial.htm .

2.3.5. Puesta en práctica de la innovación en el aula.

La metodología utilizada para el desarrollo del proyecto en el aula tuvo dos fases, en la primera, los estudiantes con la asesoría permanente del profesor trabajan en grupo los talleres propuestos (generalmente entregados en fotocopias) y en la segunda fase, se hacía una plenaria para que cada grupo expusiera los resultados de su trabajo, intercambiara ideas con todos los estudiantes y corrigiera errores. El momento de la plenaria se aprovechó también para profundizar en los conceptos involucrados en los talleres.

La metodología se apoyó en los siguientes aspectos:

- *El trabajo en equipo.*

El equipo innovador diseño los talleres para ser desarrollados en grupo (de máximo 4 estudiantes), pues considera que el conocimiento es un proceso que se construye socialmente; la discusión, la exposición de ideas y juicios y los acuerdos que se hacen al interior del grupo para resolver un problema son fuente primordial para que el estudiante aprenda de los demás, pueda expresar sus ideas, sea capaz de descubrir errores y sea tolerante y respetuoso de la opinión del otro.

La colaboración y participación de todos los integrantes del grupo fue muy importante para el logro los objetivos, al interior de cada equipo de trabajo se

estableció una asignación de funciones que nació por iniciativa propia de acuerdo a los intereses de cada uno de los integrantes.

- *Una nueva visión acerca del papel del estudiante.*

La idea fuerte al respecto es que el estudiante se considera como participante activo y constructor de su conocimiento, es un gestor de su proceso de aprendizaje, por medio del trabajo en grupo debe aprender a descubrir sus propios errores, a ensayar diversas alternativas para la solución de un problema y a saber escuchar las sugerencias y opiniones de los compañeros.

A través de la participación activa el estudiante está en capacidad de autoevaluarse, identificando sus fortaleza y debilidades, y de evaluar el trabajo de compañeros, profesores y proyecto en general, se espera también que aprenda a comunicarse matemáticamente expresando sus ideas en un lenguaje técnico propio de la asignatura y que sea capaz de argumentar las hipótesis y conjeturas.

Con el proyecto se busca que el estudiante desarrolle un pensamiento de alto nivel, es decir que le de significado a los conceptos matemáticos dentro de un contexto específico, que sea capaz de buscar diversas alternativas para resolver una tarea y no solo manipule mecánicamente expresiones simbólicas.

- *Una nueva visión acerca del papel del profesor.*

La visión que se tenia del profesor de matemáticas como dueño de la verdad y como un simple transmisor del conocimiento ha cambiado en los últimos años gracias al desarrollo que la Educación Matemática ha tenido en países como Francia, España, Estados Unidos, entre otros, y que ha tenido repercusiones en nuestro país.

En la actualidad se considera que el profesor debe facilitar el aprendizaje de los conceptos matemáticos, para ello se requiere de una persona que sea abierta a los cambios, que busque diversas estrategias para que sus estudiantes puedan acceder con éxito al conocimiento y que el proceso no sea solo instructivo, memorístico y carente de significado.

Los profesores de matemáticas del CED Brasilia conscientes de la importancia de su labor y de los cambios que se están sucediendo en el proceso educativo han iniciado un proceso de transformación tendiente a mejorar la calidad de la educación matemática en la institución, para ello se han venido preparando en postgrados, seminarios y proyectos de formación permanente de docentes.

Se considera que para el éxito del proyecto de innovación se requiere de personas creativas, dinámicas, que estén constantemente en un proceso de reflexión y autoevaluación y dispuestas a trabajar en equipo. Su papel debe estar encaminado al diseño de un currículo que responda a las necesidades de los estudiantes y que involucre la tecnología portátil como un elemento importante dentro del proceso.

En el aula al aplicar los talleres diseñados, debe orientar el trabajo de los estudiantes propiciando un ambiente adecuado que les permita una participación activa y hacer un seguimiento de los avances y dificultades de éstos para potenciar sus capacidades y habilidades así como para ayudarle a superar sus deficiencias.

Igualmente para el éxito del proyecto se requiere que el profesor participe activamente en el programa de asesoría con "una empresa docente" cumpliendo con las actividades que allí se propongan.

A nivel de área es necesario que los docentes innovadores aprovechen este espacio para discutir los avances y dificultades del proyecto y busquen soluciones en equipo a las dificultades que se puedan presentar, así mismo para comentar los resultados de la aplicación de los talleres en cada curso, haciendo énfasis en las fortalezas y debilidades para redefinirlos para futuras aplicaciones.

Igualmente el profesor debe despertar en los estudiantes la curiosidad por el uso racional de las calculadoras graficadoras y propiciar un espacio para hacer un análisis crítico de sus alcances y limitaciones.

- *Resolución de problemas como eje orientador.*

La resolución de problemas en la actualidad juega un papel fundamental en la nueva visión acerca de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, el matemático Halmos (1980, p. 159, citado en Schoenfeld, 1992) corrobora esta posición al afirmar:

> *¿En qué consisten realmente las matemáticas?, ¿axiomas (como el postulado de las paralelas)?¿teoremas (como el teorema fundamental del álgebra)?¿pruebas (como la de Gödel)?¿?definiciones (como la definición de dimensión de Menger)? ¿teorías (como la teoría de las categorías)? ¿fórmulas (como la fórmula de la integral de Cauchy)?¿?métodos (como el método de aproximaciones sucesivas)?*
>
> *Las matemáticas no podrán ciertamente existir sin estos ingredientes; son esenciales. Sin embargo, es posible argüir que ninguno de ellos está en el corazón del tema y que la principal razón para la existencia de los matemáticos es para que resuelvan problemas y que esto, por consiguiente, es en lo que realmente consisten las matemáticas: problemas y soluciones.*

Se busca que el estudiante desarrolle, a través de la actividad de resolución de problemas, un pensamiento de alto nivel caracterizado por involucrar la incertidumbre, la autorregulación, el esfuerzo, la complejidad, la posibilidad de establecer múltiples soluciones y no ser algorítmico.

En la estrategia de resolución de problemas se diseñan actividades (talleres, preguntas, tareas) que sean interesantes para los estudiantes, que requieran experimentar, conjeturar, intentar y descubrir, que tengan relación con un entorno específico y puedan modelar situaciones; de tal forma que la matemática sea una disciplina que tenga sentido en su aplicación práctica y

permita al estudiante desarrollar sus capacidades de comunicación y argumentación.

Los talleres diseñados en el proyecto permiten modelar situaciones reales por medio de funciones lineales, afines, cuadráticas, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas. Para ser desarrollados el estudiante debe leer comprensivamente, partir de casos particulares para llegar a generalidades, describir y contrastar procesos, formular hipótesis, verificar los resultados en la calculadora, utilizar nociones de conceptos matemáticos vistos anteriormente y argumentar las respuestas.

- *Una nueva visión acerca de la evaluación.*

Tradicionalmente la evaluación se ha considerado como una herramienta para calificar o descalificar a los estudiantes, para hacer promoción de un grado a otro y en algunos casos es usada para castigarlos. La implementación de la innovación exigió que esos paradigmas cambiaran y que el ensayo y el error se convirtieran en fuentes valiosos de aprendizaje.

La evaluación se concibe en el proyecto como un proceso que permite que los participantes (estudiantes y profesores) establezcan una comunicación con el objeto de mejorar en el aprendizaje de los conceptos matemáticos involucrados. Al estudiante se le evalúa la participación activa en los grupos de trabajo y en las exposiciones, la capacidad para argumentar y comunicar los resultados, la coherencia en los argumentos, la utilización de diversas estrategias para la solución de los problemas, la experimentación y verificación de conjeturas.

2.3.6. Evaluación de la innovación.

Para evaluar la innovación y el grado de alcance de los objetivos propuestos se utilizaron las siguientes estrategias:

- *Coevaluación de los docentes participantes.*

La entidad asesora diseñó un formato para evaluar el desempeño de cada uno de los profesores participantes, el documento consta de tres columnas, en la primera se discriminan los objetivos de evaluación en los que se hace referencia a cuestiones didácticas, técnicas y metodológicas; en la segunda aparecen los indicadores de cada objetivo y en la tercera el espacio para que cada docente escriba la valoración de acuerdo a su desempeño.

El formato se diligenció individualmente de acuerdo a una reflexión acerca de la participación y grado de compromiso con el proyecto, posteriormente la valoración fue socializada en las reuniones de área para que todos los integrantes pudieran hacer los comentarios pertinentes y sugerencias para mejorar el desempeño personal. Una vez realizada la Coevaluación y con los ajustes necesarios el formato se envió a la entidad asesora quien analizó cada reporte y remitió un documento dando cuenta de las apreciaciones acerca del trabajo individual y colectivo e hizo algunas sugerencias y recomendaciones para mejorar aquellos aspectos en los que existía alguna debilidad.

Aunque los docentes estuvieron durante todo el proyecto en un proceso permanente de autoevaluación se acordó con la entidad asesora establecer

dos momentos dentro del proyecto para diligenciar el formato, una en el mes de junio y otra en noviembre.

- *Evaluación de los estudiantes*

Para evaluar los talleres realizados, al finalizar la clase se recogía un cuaderno de apuntes o la guía de un estudiante de cada grupo y se revisaba el trabajo realizado, dando importancia al planteamiento de hipótesis y a la argumentación utilizada para sustentar ideas; luego se hacían comentarios por escrito a estos trabajos para que los estudiantes hicieran las correcciones o aclaraciones correspondientes. En el momento de la plenaria se evaluaba la participación individual de cada uno para socializar el trabajo realizado por el grupo.

Luego de las plenarias realizadas y de los momentos específicos para profundizar en los conceptos se hicieron algunas actividades (más cortas que los talleres) para ser evaluadas individualmente y haciendo uso de la calculadora, al igual que en los talleres en dichas evaluaciones se hicieron los comentarios pertinentes para que los estudiantes corrigieran sus errores, la mayoría de veces los comentarios se hacían en forma de pregunta que permitieran al estudiante descubrir por si mismo sus errores.

La mayoría de actividades fueron pensadas para que el estudiante trabajara en grupo en las horas de clase sin embargo se dejaron algunas actividades para ser desarrolladas individualmente en la casa (tareas) y en la siguiente clase eran revisadas, estas actividades no requerían el uso de la calculadora y a veces servían como complemento a los talleres o para profundizar en algunos aspectos.

Para hacer una autoevaluación de los estudiantes se diseñó un formato en el cual se tuvieron en cuenta los objetivos del proyecto y al igual que en el caso de los profesores se indago acerca de la participación y compromiso en el proyecto, dicho formato fue diligenciado individualmente por los estudiantes en mes de julio y luego cada profesor analizó los resultados y los socializó en cada curso haciendo sugerencias para continuar con el proyecto.

Los resultados de la autoevaluación permitieron identificar fallas en la organización interna de los grupos que hicieron que en algunos cursos se hiciera una distribución nuevamente de los equipos de trabajo, también se hicieron recomendaciones para evitar el monopolio en el manejo de la calculadora por parte de algunos estudiantes, pues esta fue una queja frecuente de algunos de ellos que manifestaban que en las evaluaciones individuales no podían solucionar los problemas pues no conocían el manejo técnico de la misma porque siempre era una persona la que la usaba.

A pesar de los esfuerzos de los profesores y de los mismos estudiantes por motivar la participación, algunos no colaboraban en los equipos de trabajo, no cumplían con las tareas asignadas, ni llevaban apuntes coherentes de todos los talleres o faltaban mucho a clase; por lo tanto no alcanzaron con los logros que se habían establecido.

Para estos estudiantes se diseñaron actividades de recuperación con las mismas características de los talleres iniciales, hubo casos en los que algunos estudiantes reincidieron en su incumplimiento y definitivamente perdieron la asignatura.

- *Análisis de los resultados en cada curso*

En el marco de las reuniones de área cada profesor comentaba los resultados de los respectivos talleres haciendo énfasis en las dificultades presentadas, en aspectos específicos observados (utilización de algún procedimiento o concepto en forma poco usual), en el uso de la calculadora, en la forma de solución que los estudiantes hicieron de los problemas técnicos de la misma y su relación con los conceptos.

Los comentarios acerca de la experiencia vivida al desarrollar los talleres en cada curso permitieron que en ocasiones se redefinieran las actividades haciendo ajustes en su redacción o en la metodología de la clase, igualmente fueron importante los comentarios de los asesores acerca de la pertinencia y coherencia de los talleres.

- *Resultados del examen de estado ICFES.*

A pesar de que los talleres fueron diseñados para desarrollar las capacidades de análisis, síntesis y argumentación, se hizo una preparación previa al examen del ICFES de 2 sesiones de clase (cada una de 90 minutos) para que los estudiantes tuvieran conocimiento previo del tipo de preguntas.

Aunque los resultados en el área de matemáticas no fueron tan buenos como se esperaba, consideramos que el proyecto si logro que a los estudiantes les fuera bien en aquellas preguntas que tenían que ver con el concepto de función, pues el colegio quedo ubicado en un nivel alto en la parte de núcleo común correspondiente al desempeño en variabilidad.

2.4. *RESULTADOS LOGRADOS*

El proyecto logró algunos cambios que se evidenciaron en los estudiantes, profesores y en la institución.

2.4.1. *Cambios en los estudiantes*

- *Cambio de actitud hacia la asignatura.*

El interés por la asignatura fue evidente ya que la participación en clase, las consultas al docente, las consultas entre los integrantes del grupo y entre grupos hizo del aula un sitio agradable de trabajo. El estudiante se preocupó por superar sus dificultades en cuanto al manejo técnico de la calculadora y a los mismos conceptos matemáticos:

> *"Para mí me parece que si he aprendido muchas cosas aunque he tenido dificultades pero poco a poco las he ido superando cuando tengo dudas respecto a la calculadora le pregunto a mis compañeros y cuando ellos no entienden, sugerimos la ayuda de la profesora."*

> *"Cuando tengo alguna dificultad miro en la calculadora para mirar si lo que hice está bien o me falta algo. Cuando tengo un problema busco ayuda para desarrollarlo."*

> *"En este caso lo que he aprendido es bastante. Unas de esas cosas es graficar funciones, como la lineal, la cuadrática, etc. Se escribir en ellas las diferentes ecuaciones para de esta forma realizar gráficas y tablas que nos permiten ver la información más clara, y si en algún momento me equivoco se corregirlo. Se buscar en la tabla los diferentes datos que nos piden, basándome en la teoría e instrucciones, como puntos de corte o aproximaciones, valores más altos y más*

bajos, etc. Además encontrando lugares de crecimiento y decrecimiento en las gráficas"

Para los estudiantes cobró especial importancia el trabajo en equipo como forma de aprendizaje, al interior de cada grupo los integrantes asignaron funciones de acuerdo a las características de cada integrante. Las opiniones de algunos estudiantes corroboran este hecho:

"Una de las cosas más trabajadas en el grupo donde yo estoy situada es la participación, donde aprovechamos las ideas buenas y descartamos las demás, para un buen desarrollo del trabajo"

"El trabajo en grupo es muy constructivo e interesante porque cuando se trabaja en grupo tiene uno distintas opiniones y puede hacer debates y así llegar a una sola conclusión."

"En mi grupo trabajamos en equipo cuando alguien tiene una duda y el resto del grupo le explica, tratamos siempre de terminar los trabajos propuestos por el maestro en la clase, todos colaboramos frente al trabajo propuesto."

"Con el grupo con el que he estado trabajando, hay un acuerdo mutuo para realizar cualquier tipo de actividad del área puesto que todos mostramos un interés por el trabajo a realizar y cada uno desempeña una función, el trabajo se hace equitativamente y los más importante es que nos preocupamos por que todos tratemos de entender sobre el tema."

Las anteriores respuestas también evidencian que el proyecto logró que el estudiante sea más autónomo e independiente del profesor, al momento de iniciarse la propuesta curricular las preguntas más frecuentes indagaban acerca de si el procedimiento era el correcto. Hoy día los estudiantes preguntan más acerca de cómo corregir errores en la calculadora y dedican

más tiempo a buscar las soluciones por sí mismos, además han perdido el temor a equivocarse y aprovechan los errores para aprender de ellos.

- *Mayor dominio en conceptos y procedimientos matemáticos.*

Consideramos que los estudiantes han construido sólidamente los conceptos involucrados en el proyecto, esto se evidencia en:

- La caracterización que hacen de las funciones usando un lenguaje técnico propio de la matemática y usando los diversos sistemas de representación; una vez encontrada la función que modela una situación los estudiantes escriben las características de la misma de acuerdo al contexto de la situación en la que se esté trabajando, por ejemplo hallan el dominio y el recorrido, las variables que intervienen y el tipo de dependencia entre ellas, mencionan los intervalos en los que la función es creciente o decreciente. Los siguientes registros de apuntes de estudiantes ponen de manifiesto el dominio en los temas:

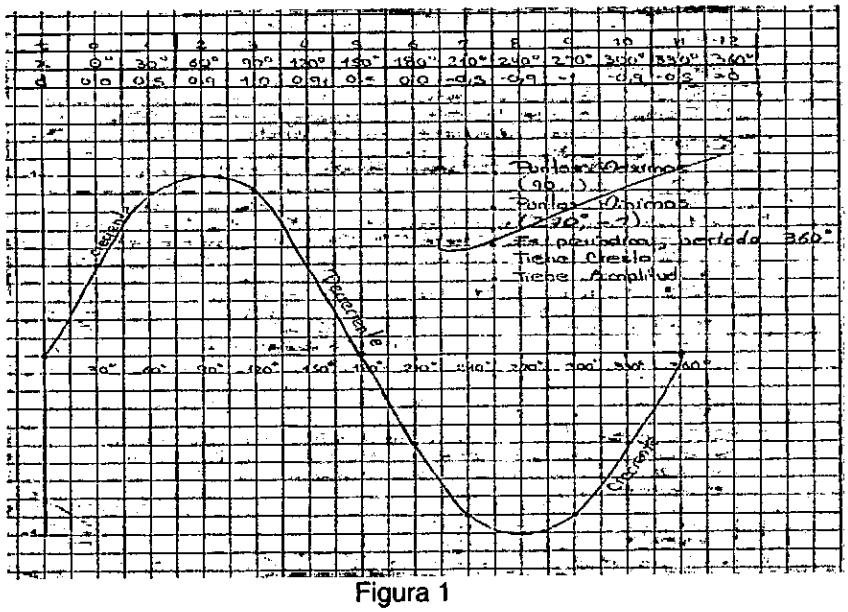


Figura 1

La actividad presentada en la figura 1 ilustra el trabajo de los estudiantes de grado décimo realizado en la hoja de actividades 4 del taller de funciones trigonométricas (anexo 1), se observa la utilización de las representaciones tabular y gráfica y algunas características de la función.

El siguiente ejemplo mostrado en la figura 2, tomado de los apuntes de una estudiante de undécimo, presenta las características identificadas por su grupo de trabajo para la función que relaciona el número de dobleces y el área de cada región, actividad propuesta para el estudio de la función exponencial en el taller de dobleces (anexo 1).

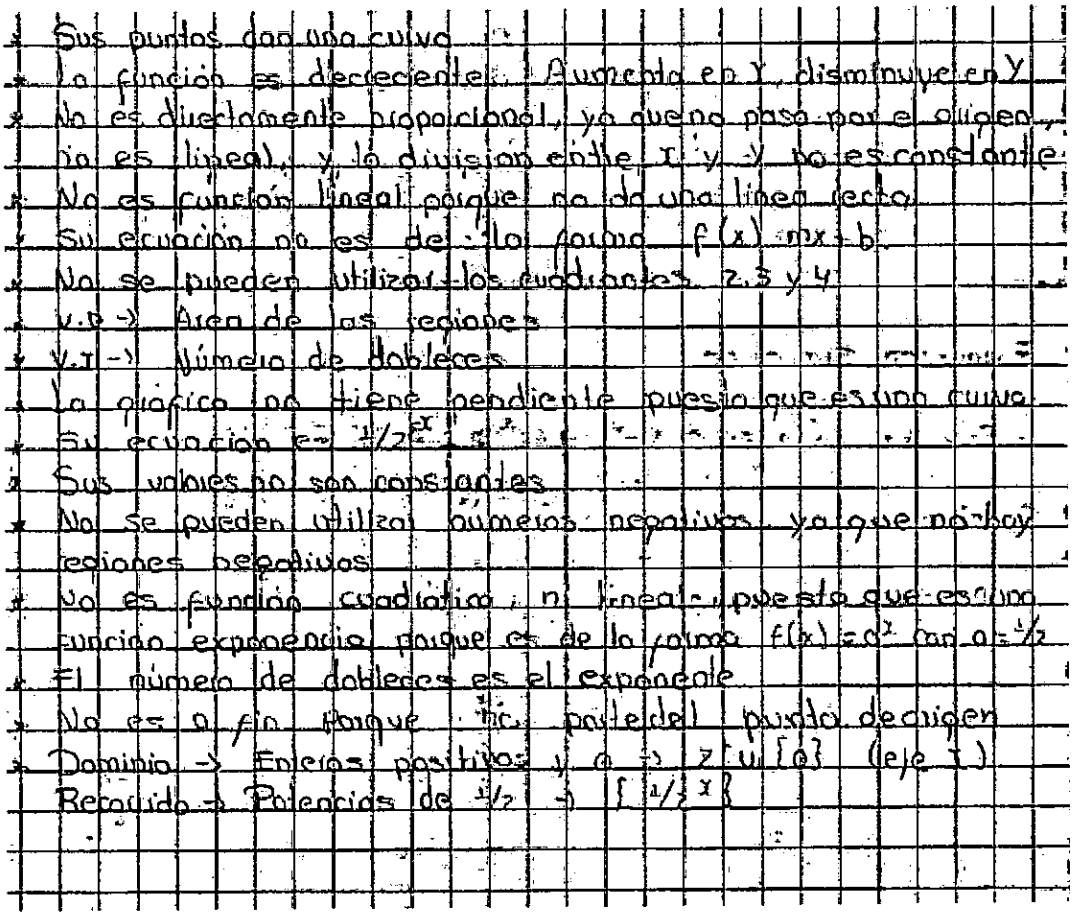

* Sus puntos dan una curva
* La función es decreciente. Aumenta en X, disminuye en Y
* No es directamente proporcional, ya que no pasa por el origen, no es lineal, y la división entre X y Y no es constante.
* No es función lineal porque no da una línea recta.
* Su ecuación no es de la forma f(x) mx+b.
* No se pueden utilizar los cuadrantes 2, 3 y 4
* V.D -> Area de las regiones
* V.I -> Número de dobleces
* La gráfica no tiene pendiente puesto que es una curva
* Su ecuación es $1/2^x$
* Sus valores no son constantes
* No se pueden utilizar números negativos ya que no hay regiones negativas
* No es función cuadrática ni lineal, puesto que es una función exponencial porque es de la forma $f(x)=a^x$ con $a=1/2$
* El número de dobleces es el exponente
* No es a fin porque no parte del punto de origen
* Dominio -> Enteros positivos y 0 -> $Z^+ \cup \{0\}$ (eje x)
Recorrido -> Potencias de 1/2 -> $\{1/2^x\}$

Figura 2

El grupo identificó las variables, la expresión simbólica que liga mismas, el dominio y el recorrido, el tipo de curva y además estableció características que la hacen diferente a las funciones vistas anteriormente, particularmente la diferenció de la lineal por el tipo de variación que se sucede.

Con la realización de los talleres los estudiantes lograron puntualizar algunos elementos que sugieren una buena consolidación con respecto al concepto de función. El ejemplo presentado en la figura 3 sirve para ilustrar las características que identificaron los estudiantes de undécimo para las funciones lineales, cuadráticas y exponenciales luego de la realización de las respectivas actividades para el estudio de estas funciones.

Se observa en estos apuntes que los sistemas de representación más utilizados para caracterizar las funciones fueron los simbólico y el gráfico.

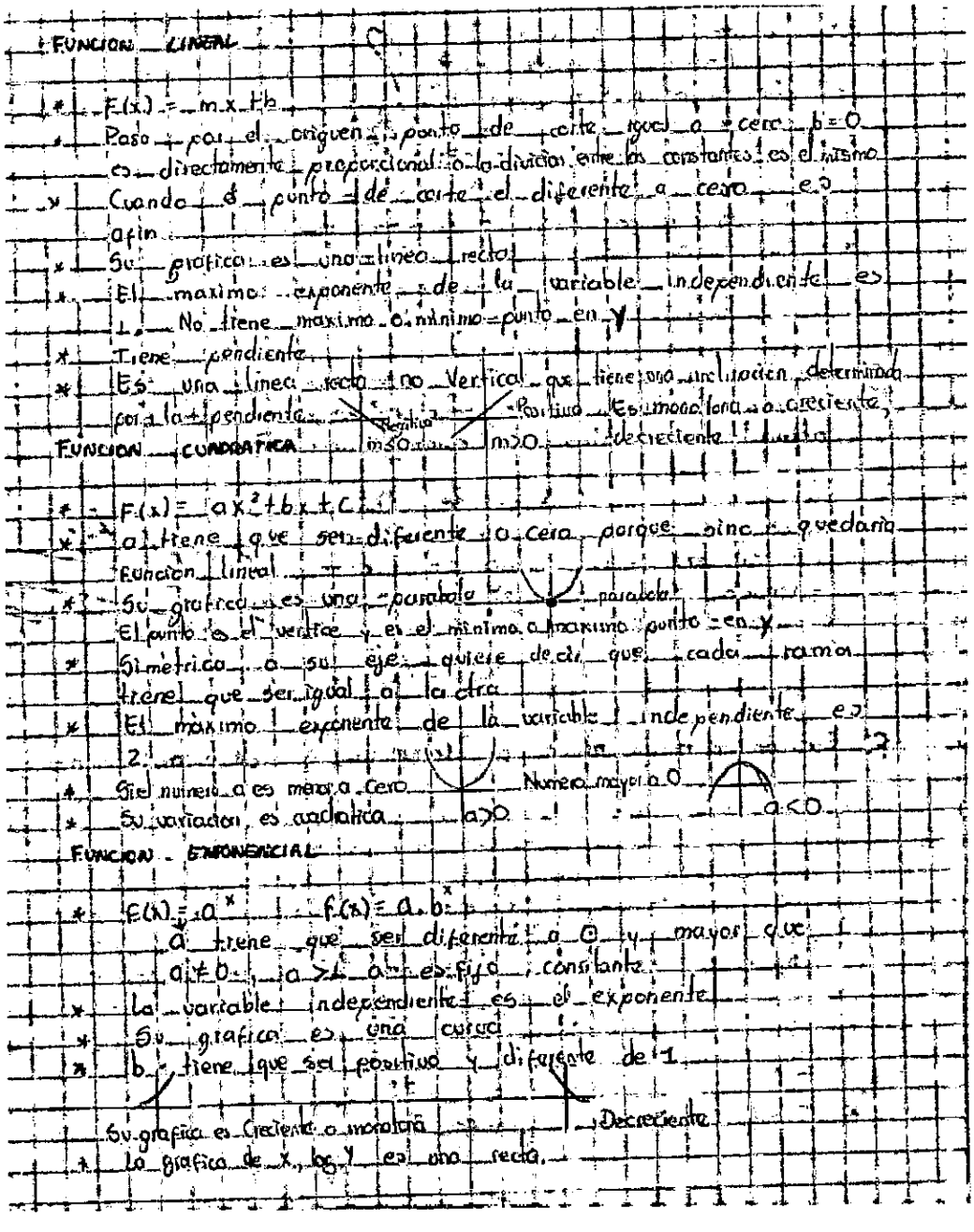


Figura 3

El estudio de las familias de funciones permitió a los estudiantes observar y conjeturar acerca de los cambios que se suceden en la gráfica

cuando se cambia un parámetro de la función y se mantienen fijos los demás; el ejemplo que se presenta en la figura 4 muestra la gráfica del conjunto de funciones *f(x) = Sen (ax)* para valores de *a* entre *0* y *1* y las conclusiones acerca de los cambios que se suceden:

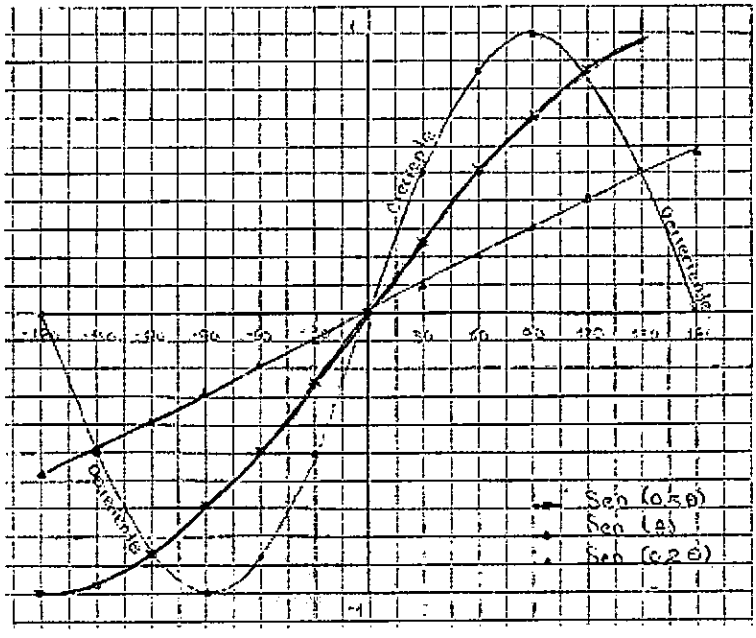


Figura 4

Las conclusiones presentadas respecto al cambio en la gráfica de la función seno al hacer contracciones y dilataciones fueron las siguientes:

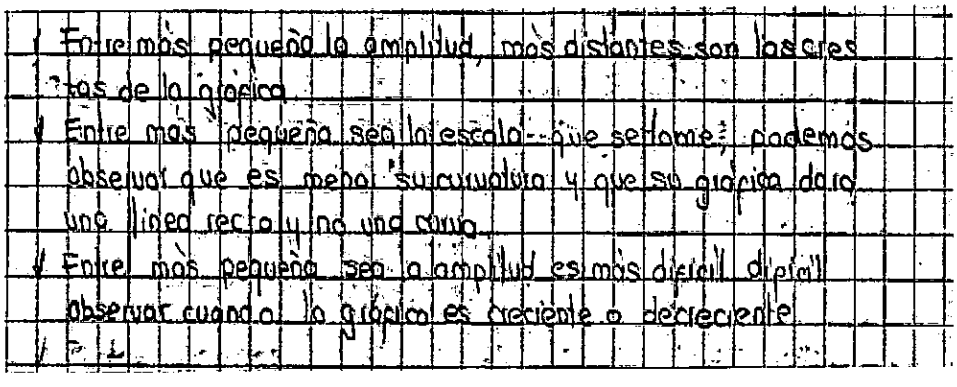

Entre más pequeño la amplitud, más distantes son las crestas de la gráfica.
Entre más pequeña sea la escala que se tome, podemos observar que es menor su curvatura y que su gráfica da una línea recta y no una curva.
Entre más pequeña sea la amplitud es más difícil observar cuando la gráfica es creciente o decreciente.

Figura 5

Un hecho importante y novedoso para los estudiantes fue la forma de encontrar la expresión simbólica de la función exponencial sin hacer uso de la calculadora. Para ello aprendieron a trabajar con papel semilogarítmico y con las propiedades de los logaritmos, esto fue muy importante pues brinda la posibilidad de encontrar la expresión cuando no se cuenta con la calculadora en la clase o en la casa.

- A pesar de que no lo hacen explícitamente los estudiantes al resolver los talleres y modelar situaciones por medio de funciones han aprendido a diferenciar entre variables continuas y discretas[5] dependiendo del contexto de la situación, esto se evidencia en el tipo de gráfica que realizan, solo puntos para el caso de variables discretas y líneas o curvas para el caso de las continuas.

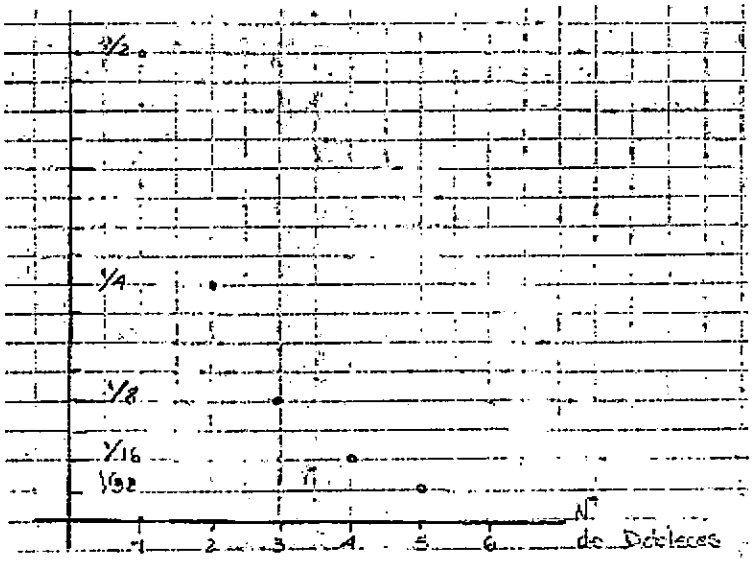


Figura 6

[5] una variable continua es la que representa a todos los números reales comprendidos entre dos números fijos, es decir el dominio de la función son los números reales de un intervalo.
Una variable discreta es aquella que representa solamente a puntos aislados de un intervalo, el dominio de la función es el conjunto de números naturales.

La figura 6 muestra la representación gráfica realizada por los estudiantes para ilustrar la relación entre el número de dobleces y el área de cada región de acuerdo a la actividad propuesta para el estudio de la función exponencial en el taller de dobleces (anexo 1). Además, afirman que "no se pueden utilizar los cuadrantes 2, 3 y 4 ni los números fraccionarios porque no hay dobleces ni tampoco se pueden hacer pedazos de doblez como por ejemplo un medio o un cuarto."

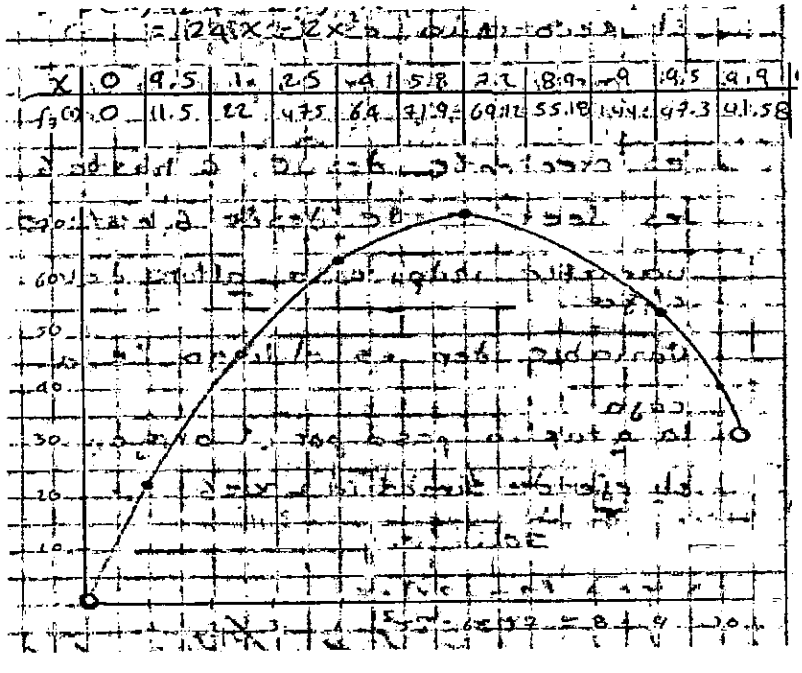


Figura 7

La figura 7 muestra la representación realizada por los estudiantes para ilustrar la relación entre la medida del lado del cuadrado con la medida del área de una de las cara determinadas por el largo de la caja, actividad propuesta para el estudio de la función cuadrática (anexo 1).

- A través del uso de la calculadora han aprendido a diferenciar el doble significado del signo menos, pues éste simboliza por un lado la resta entre números y por otro el inverso aditivo de un número positivo. Al comienzo del proyecto los estudiantes tuvieron mucha dificultad para cuadrar o ajustar las escalas de las gráficas porque al hacer uso de la opción WINDOW utilizaban el - en lugar de (-) para números negativos, igualmente se equivocaban al escribir en el menú de expresiones algebraicas pues utilizaban el símbolo (-) para indicar la resta entre los términos de la expresión. A medida que se avanzó en el proyecto esta dificultad se superó.

- *Uso de la calculadora para modelar problemas.*

La calculadora se convirtió en una herramienta para que los estudiantes modelaran algunas situaciones y por medio de ella pudieron probar hipótesis acerca de los fenómenos observados, fue un medio para el diagnóstico, la comprobación y la experimentación, que permitió el análisis y estudio de las funciones.

Un hecho importante es que los estudiantes buscaron diversas estrategias para resolver los problemas y no esperaron a que el profesor les indicara lo que tenían que hacer, al respecto ellos comentaron:

"Al comienzo de los talleres es muy difícil establecer la gráfica y mucho más la ecuación, pero al pasar un poco de tiempo se capta la idea principal o lo que se quiere alcanzar: la gran cantidad de soluciones que se pueden dar a el problema matemático y poco a poco se van eliminando y dando unas razones claras de porque esa expresión no es la correcta para realizar el taller. La calculadora también se utiliza para darle una mayor seguridad a las respuestas."

"Trato de dar diferentes opciones para solucionar un problema y utilizando la calculadora miro si esta opción es la correcta utilizando las gráficas, tablas, escalas, etc. Si esta no es la solución busco nuevas alternativas de solución, utilizo la representación simbólica, la gráfica y la ecuación cuando es necesario para poder resolver y tener una clara conclusión del problema que estoy solucionando."

"Opino, junto a mi grupo diferentes opciones para modelar una situación problemática, para después concretar si es aplicable o no; la calculadora nos permite resolver dudas acerca del problema y ver varios aspectos de la función... utilizamos sistemas tabular, gráfico y simbólico para la representación de objetos matemáticos; según nuestros conocimientos sobre el tema y la calculadora, realizamos conjeturas y relacionamos ideas entre sí"

Otro aspecto importante que se observó en los estudiantes fue la exploración de comandos en la calculadora distintos a los inicialmente considerados en la clase, por ejemplo pudieron dividir la pantalla en dos ventanas de tal forma que podían trabajar simultáneamente la representación tabular y la gráfica de las funciones; también usaron por iniciativa propia la opción de regresión trigonométrica para encontrar las expresiones simbólicas de los relojes 3 y 4 propuestos en la primera actividad de funciones trigonométricas.

Consideramos que los estudiantes en su mayoría aprendieron con rapidez el manejo técnico de la calculadora así como la solución de problemas de configuración y el manejo de los mensajes de errores.

- *Mejor desempeño en competencias comunicativas y argumentativas.*

El trabajo en grupo, la preparación de exposiciones para la presentación de trabajos y la sustentación de ideas hicieron que el estudiante mejorara su comunicación escrita y verbal, algunas evidencias de esto se observan al

analizar los cuadernos de apuntes, las ideas expuestas en guías y talleres, y en la autoevaluación realizada, así como en la utilización de un lenguaje técnico propio del área.

El proceso de comunicación entre estudiantes y profesor se mejoró porque la tolerancia, el respeto por las ideas de los integrantes del grupo y el saber escuchar se convirtieron en un elemento importante.

Los estudiantes se preocuparon por presentar los trabajos con un buen nivel de calidad, concretos, entendibles y con una justificación coherente de las ideas presentadas. Estos aspectos también se vivenciaron en la toma de apuntes; algunos comentarios fueron los siguientes:

> *"Considero que los apuntes que tomo durante la clase son buenos e importantes para un buen entendimiento a la hora de estudiar. Soy ordenada a la hora de presentar trabajos y en las secciones de la misma. Tal vez tenga errores que son muy pequeños en algunas construcciones gramaticales."*

> *"Siempre intentamos justificar las ideas que se han planteado y siempre buscamos que sean lo más claras posibles. Nos guiamos por el orden de las preguntas, para dar las respuestas, al redactar los documentos intentamos al máximo no tener errores de ortografía y construir el texto lo mejor posible".*

> *"Creo que mis ideas si son coherentes porque me gusta justificarlas y al mismo tiempo saber el porqué de su procedimiento".*

> *"Tratamos de que nuestros trabajos sean ordenados, entendibles y concretos pero en ciertas ocasiones fallamos en la escritura ya que no encontramos la manera de explicarnos y tal vez no las hacemos lo suficientemente claras pero siempre estudiamos los puntos que tenemos que explicar en el tablero a los compañeros y profesora".*

2.4.2. *Cambios en los profesores.*

- *Mayor dominio en estrategias para la construcción de diseños curriculares.*

A través de la interacción con los asesores y profesores participantes en el proyecto se discutieron aspectos relativos al diseño curricular como son los análisis de contenido, de errores y dificultades de los estudiantes, de cuestiones metodológicas y didácticas para el diseño de actividades de aula.

Dentro de estos aspectos, la elaboración de mapas conceptuales para los temas involucrados se convirtió en una herramienta que permitió a los profesores no solo enriquecer su propio conocimiento acerca de la matemática sino también reflexionar acerca de cuestiones de tipo metodológico y didáctico y para diseñar actividades que permitieran a los estudiantes construir activamente los conceptos.

El proceso de reflexión vivido en el transcurso de la innovación se centro en la interacción entre la tripla "profesor, estudiantes y conocimiento matemático", y permitió cambiar la visión del papel del profesor y del estudiante en el proceso de aprendizaje, así como del papel de la tecnología portatil en la construcción del conocimiento.

Como consecuencia del trabajo realizado los docentes elaboraron una serie de talleres para el estudio de funciones, éstos se fundamentaron en el estudio y análisis de algunos artículos respecto a las funciones exponenciales y trigonométricas que presentan ideas diferentes a las que usualmente se utilizan en los libros de matemáticas consultados en el aula; el

profesor pudo así tener mayor independencia para organizar la secuencia de temas.

Para el diseño de estos talleres los profesores debieron establecer el tipo de conocimiento matemático que se quería privilegiar, el tipo de conocimiento que un estudiante debía tener para responder satisfactoriamente las actividades y las condiciones necesarias para desarrollar el trabajo.

- *Participación activa en el programa de asesoría.*

Los profesores cumplieron activamente con las actividades propuestas por la entidad asesora, lo que se evidenció en la participación en los seminarios, asesorías, talleres de lectura, participación en la lista de discusión y presentación de informes acerca de la implementación de talleres. A pesar que muchas de estas actividades necesitaron de tiempo extra en las jornadas contrarias y los fines de semana los profesores estuvieron dispuestos a hacer sacrificios para lograr el éxito en los objetivos planteados.

Las temáticas tratadas en los seminarios y en el material bibliográfico suministrado por los asesores fue muy importante para el diseño de las actividades.

- *Cambio de actitud hacia la organización del conocimiento matemático escolar.*

El proyecto permitió que los profesores hicieran una reflexión acerca de los conceptos matemáticos involucrados, de su importancia y de la complejidad que existe en torno a su enseñanza y aprendizaje. Se vio la necesidad de

hacer diseños de aula que permitan presentar los conceptos en forma secuencial e integradora y que tengan en cuenta las consideraciones acerca del aprendizaje de los estudiantes.

El estudio de material bibliográfico acerca de las funciones exponenciales y trigonométricas permitió que los profesores descubrieran aspectos nuevos acerca del conocimiento matemático mismo, por ejemplo fue muy enriquecedor conocer las distintas formas de identificar una función exponencial en el sistema tabular y el estudio de la función seno por medio de un experimento físico.

Otro hecho importante y novedoso fue el conocimiento del taller que diseñó la entidad asesora para el estudio del teorema del coseno y funciones trigonométricas usando una construcción en el programa Cabri y la calculadora; esta actividad presenta una posibilidad distinta a la tradicional para aproximarse al estudio de las relaciones trigonométricas y sus aplicaciones. Por ejemplo, el área de un triángulo usualmente se presenta como ejemplo de una función cuadrática y con el taller se ilustró la posibilidad de presentarla en términos de relaciones trigonométricas.

Este taller nos pareció muy interesante y esperamos más adelante poder aplicar algunas de las ideas presentadas allí en el aula, pues por medio de la experimentación que se propone los estudiantes pueden aplicar algunos conceptos trigonométricos (como el teorema del coseno) que usualmente son difíciles de deducir con el método tradicional.

- *Adquisición de nuevos conocimientos acerca de la calculadora, el computador y de herramientas de Internet.*

Durante el transcurso del año cada docente adquirió más destrezas en la utilización de aplicaciones de la calculadora y en el manejo y solución de los mensajes de error; también fue muy enriquecedor el conocimiento de las aplicaciones de los instrumentos CBR (Calculator-Based-Ranger) y CBL (Calculator-Based-Laboratory)[6] que convierten la calculadora en un laboratorio portátil de física, química y biología.

Consideramos que el proyecto permitió que cada docente aprendiera a hacer uso de las herramientas de Internet y estableciera un sistema de comunicación eficiente por medio del correo electrónico con los asesores y con los profesores de las otras dos instituciones en las que se desarrolló la innovación. Fue muy importante para los profesores aprender por ejemplo a enviar mensajes con archivos adjuntos, hacer uso de navegadores (buscadores como por ejemplo yahoo, google, lycos, etc.) para buscar información y consultar páginas como la de la Texas Instruments (www.ticalc.com) que tiene actividades para el uso de la calculadora graficadora.

La participación en la lista de discusión (www.icep2@ued.uniandes.edu.co) fue un elemento muy importante para establecer una red de comunicación que permitió intercambiar información acerca de los talleres y las actividades

[6] El CBR y CBL son accesorios adicionales que se conectan a la calculadora TI 83 plus y que recopilan datos del mundo real.
El CBL recopila datos de temperatura, luz y voltaje usando diferentes sondas.
El CBR recopila información mediante una sonda sónica integrada.

propuestas por los asesores y ayudó a superar algunas de las dificultades que se presentaron.

De igual manera los profesores aprendieron a utilizar herramientas modernas en la presentación y difusión del proyecto, por ejemplo, se utilizó el view screen[7] para presentar algunas aplicaciones en la calculadora, también se utilizo el videobeam para hacer la interface entre programas de computación (como Microsoft Word, Excel y PowerPoint) utilizados para la socialización del proyecto; con este tipo de ayudas las presentaciones se hicieron más ágiles y llamativas. Así mismo se adquirió destreza en el manejo del scaner, elemento que se utilizó para registrar los talleres realizados por los estudiantes.

- *Creación de espacios para el trabajo en equipo al interior del área.*

Al igual que los estudiantes se vio la necesidad de trabajar en equipo para enfrentar los retos del proyecto, elaborar estrategias de enseñanza, cumplir con las actividades programadas por la entidad asesora y evaluar críticamente el trabajo de los estudiantes y el desempeño personal de cada profesor participante en la innovación.

Las reuniones de área se utilizaron para discutir los avances y dificultades del proyecto; de igual manera se hicieron reuniones fuera de la institución en horas diferentes a la jornada de trabajo para cumplir con todas las actividades propuestas, pues un proyecto como este requiere de mucho tiempo con el que no se cuenta en las instituciones.

2.4.3. *Cambios en el ámbito institucional.*

- *Cambio de actitud de los directivos y profesores hacia el área.*

Durante las socializaciones realizadas en la institución los profesores de las diferentes áreas manifestaron un gran interés por conocer los alcances y aplicaciones del proyecto hacia las diferentes áreas, especialmente el uso de los accesorios de la TI 83 Plus como el CBR y el CBR para poner en práctica las aplicaciones en ramas como la física, biología, química y tecnología; particularmente los profesores de áreas como física y estadística manifestaron su intención de hacer uso de las calculadoras el próximo año en sus clases.

Para los profesores de otras áreas fue novedosa la metodología de trabajo por la misma concepción que se tiene acerca de la matemática como una materia rígida y que se dedica únicamente a la mecanización de algoritmos para la adquisición de conceptos, les llamó la atención el hecho de buscar estrategias nuevas para la enseñanza de la matemática y que se propicie la experimentación y la argumentación.

El proyecto se ha considerado como un ejemplo para las demás áreas pues ha impulsado un proceso de cambio en cuanto a metodología y visión de los procesos de enseñanza y aprendizaje. Los conocimientos de los profesores en cuanto a diseño curricular pueden ser aprovechados por cualquier otra área.

---

[7] El view screem es un dispositivo de cristal líquido que a través de un retroproyector muestra las imágenes

- *Implementación de un nuevo pensum en el área de matemáticas.*

Puesto que el proyecto está en marcha desde el año 2000 se ha logrado institucionalizar un nuevo programa curricular que tiene como eje principal la visión funcional del precálculo y el uso de las calculadoras graficadoras como herramienta para el aprendizaje.

La institución ha dado amplia libertad a los profesores para hacer los ajustes necesarios en la metodología y en la organización del contenido matemático de tal forma que se pueda cumplir satisfactoriamente con los requerimientos del proyecto. Igualmente durante el horario se creó un espacio para la reunión de área que antes no existía y que permitió desarrollar algunas actividades propuestas por los asesores.

La propuesta de evaluación utilizada en el proyecto permitió que disminuyera la mortalidad académica, si bien no se pudo acabar con la perdida de logros en la asignatura, el número de estudiantes que no superaron las deficiencias fue menor que en los años anteriores.

- *Adquisición de materiales para el área.*

La institución no cuenta con suficiente material didáctico para el área de matemáticas, los recursos asignados por el IDEP permitieron la compra de calculadoras graficadoras, esto es muy importante teniendo en cuenta que éstas son costosas y que el colegio no cuenta con presupuesto para su adquisición.

---

creadas en la pantalla de una calculadora TI 83 plus.

En este momento se cuenta con 16 calculadoras TI 83 plus compradas con los recursos del proyecto y con 20 adicionales y un view screen que se encuentran en comodato con la entidad asesora (*una empresa docente).*

- *Reconocimiento a nivel de la localidad y a nivel de los profesores de matemáticas.*

La socialización del proyecto en eventos como RACE (Reunión Anual del Club Ema, Universidad de los Andes), Expociencia Juvenil y reunión de rectores de la localidad ha permitido que la institución sea reconocida como un establecimiento que impulsa procesos de innovación en cuanto a metodología y formación de sus profesores.

2.4.4. Dificultades.

- *Falta de continuidad para aplicar los talleres.*

La institución se vio afectada por la realización de dos paros en el transcurso del año que no permitieron la aplicación de todos los talleres que se habían planeado inicialmente, además la perdida de clases hizo que algunos estudiantes perdieran el interés por la asignatura.

- *Poco tiempo para el trabajo en equipo.*

Las dos horas semanales de reunión de área no fueron suficientes para responder con todas las exigencias del proyecto, pues en este espacio se deben asumir también muchas actividades extras que determina el consejo académico, como por ejemplo, planeación de jornadas pedagógicas, actos

culturales, comisiones de evaluación y promoción, reuniones de profesores, etc.

Un proyecto como el presentado aquí requiere de mucho trabajo por parte de los profesores y de tiempo que no se tiene en las instituciones, los profesores no solo debemos cumplir con una carga académica de 24 horas, sino que debemos dedicar las llamadas "horas libres" a la atención de padres, a la participación de otros proyectos propios de la institución (democracia, educación sexual, etc) y a la planeación de actividades curriculares de cada curso y a la preparación y corrección de evaluaciones.

- *Problemas con el correo electrónico.*

En algunas oportunidades la comunicación con la entidad asesora y con los otros colegios no fue eficiente y oportuna por que el servidor de la universidad se dañaba o estaba en mantenimiento y algunos profesores no podían acceder desde el colegio o la casa a la red, esto hizo que en varias ocasiones los mensajes enviados no fueran recibidos a tiempo.

También se presentaron para enviar mensajes con documentos adjuntos, muchas veces llegabas vacíos o no permitían su lectura.

2.5. *PROYECCIÓN DE LA EXPERIENCIA EN TÉRMINOS DE SOSTENIBILIDAD, COBERTURA Y EXPANSIÓN*

Los docentes de matemáticas de la institución que participaron este año en el proceso de innovación junto con la entidad asesora tienen previsto continuar desarrollando el proyecto durante el año 2002, no se hará un programa de

asesoría tan riguroso como el realizado durante el presente año. En el mes de enero se elaborará la propuesta a *una empresa docente* y se llegaran a acuerdos para que al finalizar el año las calculadoras que están en comodato sean donadas a la institución.

La propuesta se empezará a aplicar desde grado octavo en las dos jornadas pues consideramos que los talleres de funciones lineales y cuadráticas pueden modificarse para ser utilizados en este nivel y que no se debe esperar hasta los grados décimo y undécimo para hacer uso de la calculadora graficadora.

2.6. *BIBLIOGRAFÍA*

Bradie B. (1998). *Rate of change of exponential funcion:* A precalculus perspective. En: *The Mathematics Theacher,* Vol. 91, No 3, pp. 224-230, 237.

Confrey Jere and Smith Erick (1995). *Splitting, Covariation and their role in development of Exponential Functions.* En *Journal for Research in Matematics Education,* Vol 26, No 1, pp 66-86.

Driscoll, P y Olwell, D. (1998). *Precalculus*, New York: . Mc Graw Hill, pp 317-360.

Gómez Cristina, Carulla Cristina y Valero Paola (1998). *Situaciones Problemáticas de Precálculo*, Bogotá Una empresa docente Universidad de Los Andes.

Janvier, C. (1987). *Traslation Process in Mathematics Education.* En C. Janvier (Ed.), Problems of representation in the teaching and learning of mathematics, pp. 19-26, London: LEA, Publishers.

Rahn James R. Barry and A. Berndes. (1994). *Using the Logarithms to Explore Power and Exponential Function.* En *The Mathematical theacher,* Vol 87, No 3, pp 161-166.

Shultz Harris S. and Bonsangue Martin V. (1995). *Time for trigonometry.* En *The Mathematical theacher,* Vol 88, No 5, pp 393-396.

ANEXO 1

CENTRO EDUCATIVO DISTRITAL BRASILIA
GRADO UNDÉCIMO JORNADA TARDE

TALLER Nº 1: DOBLECES

GUÍA DE TRABAJO

A los estudiantes se les entrega una guía con el siguiente conjunto de preguntas:

(a) Doblen una hoja de papel por la mitad y luego ábranla. ¿Cúantas regiones se formaron?

(b) Doblen el papel por la mitad dos veces. ¿Cúantas regiones se formaron?, ¿cuántas regiones se formarán al doblar por la mitad tres veces?

(c) Identifiquen las variables que intervienen en esta situación y elaboren una tabla que muestre la dependencia entre dichas variables.

(d) Describan cómo calcular el número de regiones para cualquier número de veces que se doble el papel por la mitad.

(e) Escriban una ecuación para encontrar el número de regiones si usted sabe el número de dobleces. R representa el número de regiones y F representa el número de dobleces.

(f) Utilicen la calculadora para realizar la gráfica de la función encontrada. Describan dicha gráfica e indiquen las escalas utilizadas y justifiquen porque eligieron esos valores y no otros.

(g) Escriban el mayor número de características de esta función.

(h) Existen diferencias entre este tipo de función y las vistas anteriormente (lineales y cuadráticas)?. Si la respuesta es afirmativa cuáles son estas diferencias?

(i) Supongan que tenemos un pedazo de papel mágico que se puede doblar indefinidamente. Si se dobla el papel por la mitad 10 veces, cuántas regiones se forman?

CENTRO EDUCATIVO DISTRITAL BRASILIA
GRADO UNDÉCIMO JORNADA TARDE

TALLER Nº 2: DADOS

GUÍA DE TRABAJO

Para el taller que se plantea en esta ocasión se le propone al estudiante que siga la siguiente secuencia de instrucciones que se ha dividido en dos partes.

Primera parte: usar la calculadora para encontrar la expresión simbólica de una función exponencial.

Tomar un número determinado de dados y seleccionar previamente una cifra (de 1 a 6) que al salir en un dado lanzado determinará su exclusión de la muestra. Después de cada lanzamiento se debe contar, registrar y excluir de la muestra aquellos dados que han sacado la cifra seleccionada; el proceso se debe continuar hasta que queden excluidos de la muestra todos los dados.

1. Con los datos experimentales complete la siguiente tabla.

Número de lanzamientos (N)	**Número de dados lanzados**	**Número de dados que registran la cifra seleccionada**	**Número de dados restantes (D)**
1			
2			
...			

2. Elabore una gráfica que relacione el número de lanzamientos (N) y el número de dados restantes (D). Para ello utilice la opciones de listas y gráficas que le

proporciona la calculadora graficadora, utilice una escala conveniente.

a) Describa la gráfica escribiendo la mayor cantidad de características.

b) ¿Qué tipo de función es: lineal, cuadrática, exponencial o de otro tipo no visto? Justifique la respuesta.

c) Escriba las razones por las que crea que la función es decreciente.

3. Utilice la opción de listas de la calculadora para elaborar una tabla. Escriba en L1 el número de lanzamiento y en L2 el número de dados restantes. Luego en el menú STAT busque la opción CALC y en ella elija la opción de ExpReg, ¿Qué observa?
4. Escriba en el menú de expresiones simbólicas la correspondiente función tomando los valores de la expresión encontrada en la regresión realizada y elabore la gráfica de dicha función, ¿Qué observa?

Segunda Parte: Como encontrar la expresión simbólica sin usar la opción de regresiones.

5. Complete la siguiente tabla. Para ello puede utilizar si lo desea la opción de listas de la calculadora.

Número de lanzamientos	**Número de dados restantes (D)**	**Logaritmo de número de dados restantes (D)**
1		
2		
...		

6. Realice en papel semilogarítmico la gráfica que relaciona el número de lanzamientos y el logaritmo del número de dados restantes. Escriba la mayor cantidad de características de esta gráfica.

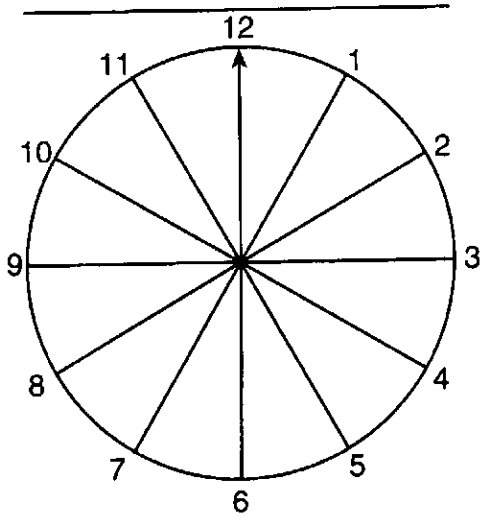
7. Trace una recta tomando la mayor cantidad de puntos y halle la pendiente de la misma.
8. Asuma que $m=log(b)$ y halle el valor de b, luego observe en la gráfica el intercepto con el eje Y (llámelo c) y en forma similar a lo realizado con la pendiente haga que $c=log(k)$ y halle el valor de k.
9. Realice la gráfica de la función $f(x)=kb^x$, describa dicha función y compárela con la obtenida por medio de la regresión.

TALLER 3

HOJA DE TRABAJO 1

Primera parte

Reloj 1. El reloj de la figura siguiente tiene un radio que mide 3 cm. y su centro está a 3,5 cm. del segmento que representa el techo. Mida la distancia ***d*** que hay del techo al extremo del horario en cada hora en punto, comenzando desde las 12:00, hora que se asume como $t = 0$.

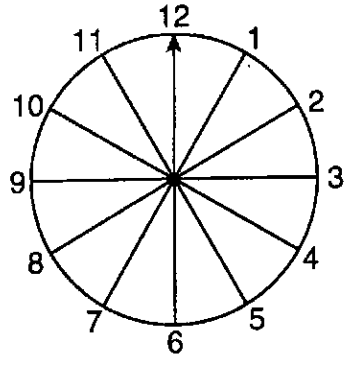


Registre sus mediciones en la tabla siguiente:

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
d													

¿Qué valores de ***d*** podrían obtenerse para ***t*** = 13, 14, 15, ..., 24?

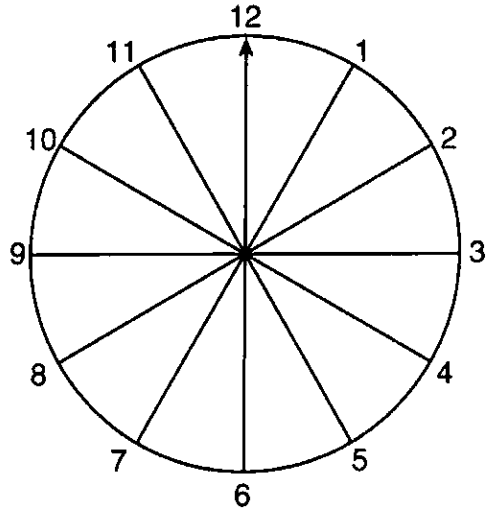
Reloj 2. El reloj de la figura siguiente tiene un radio de 2 cm. y su centro está a 3,5 cm. del segmento que representa el techo. Mida y registre las distancias como lo hizo en *Reloj 1*.



t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
d													

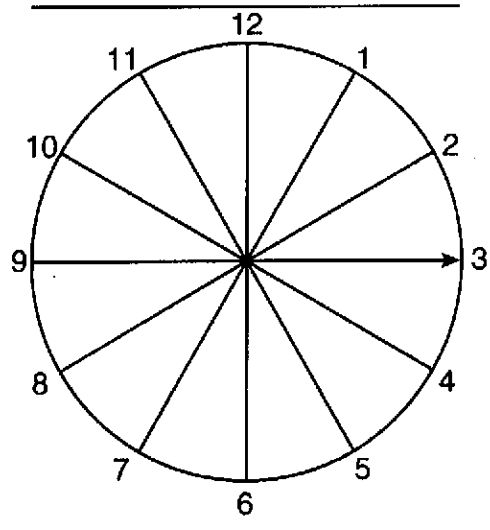
Segunda parte

Reloj 3. El reloj de la figura siguiente tiene un radio de 3 cm. y su centro está a 5 cm. del segmento que representa el techo. Mida y registre las distancias como lo hizo anteriormente.



t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
d													

Reloj 4. El reloj de la figura siguiente tiene un radio de 3 cm. y su centro está a 3,5 cm. del segmento que representa el techo. Mida y registre las distancias como lo hizo en *Reloj 1*, *Reloj 2* y *Reloj 3*, pero ahora comience en las 3:00, hora que se asume como $t = 0$.



t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
d													

HOJA DE TRABAJO 2

1. Realice en papel milímetrado una gráfica para cada reloj ubicando los puntos relativos a los datos recopilados.

2. Identifique y describa las semejanzas y las diferencias existentes entre las cuatro gráficas.

3. Escriba la mayor cantidad de características de dichas gráficas.

HOJA DE TRABAJO 3

1. Bosqueje en papel milímetrado la gráfica de la distancia del extremo del horario del reloj al techo, como una función del tiempo para cada uno de los relojes citados a continuación.

Reloj 5

Medida del radio = 4 cm.

Distancia del techo al centro = 6 cm.

Hora inicial = 12:00

Reloj 6

Medida del radio = 5 cm.

Distancia del techo al centro = 5 cm.

Hora inicial = 12:00

Reloj 7

Medida del radio = 4 cm.

Distancia del techo al centro = 6 cm.

Hora inicial = 6:00

Reloj 8

Medida del radio = 3 cm.

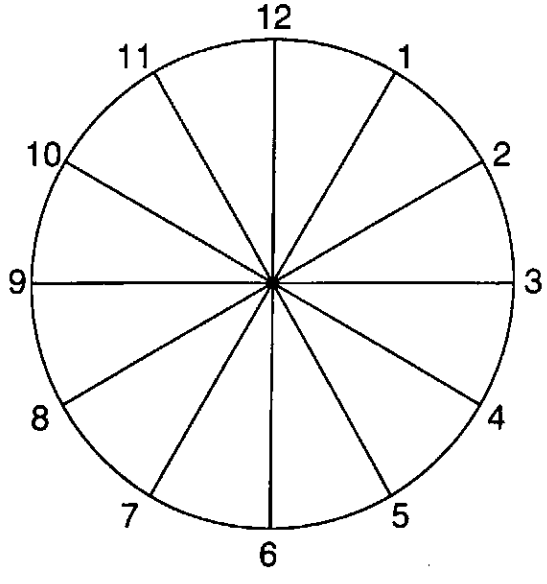
Distancia del techo al centro = 6 cm.

Hora inicial = 9:00

2. Explique cómo hizo las predicciones.

Hoja de trabajo 4

El reloj de la siguiente figura tiene un radio de una unidad. Sea ***X***, una nueva variable, que hace referencia al ángulo generado por el horario al girar a partir de las 12:00, hora.



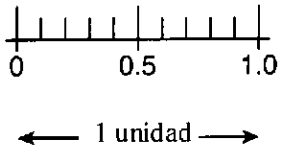
tomada como ***t*** = 0.

Complete los datos de la segunda fila de la siguiente tabla.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
X	0°	30°		90°				210°					
d	0,0			1,0				-0,5					

Corte o calque la regla que aparece enseguida. Use la unidad de esta regla para verificar que el radio del reloj es una unidad. Use la regla para medir la distancia ***d*** comprendida entre el segmento vertical que pasa por el centro del reloj y el extremo del horario del mismo. Considere que ***d*** es positiva cuando el horario esté a la derecha del segmento horizontal y negativa cuando esté a la izquierda.

Comience la medición para las 12:00, hora considerada para $t = 0$. Registre sus resultados en la tercer fila de la tabla.



HOJA DE TRABAJO 5

En la Hoja de trabajo 4, la función que expresa ***d*** en términos de ***X***, se llama la función seno. Así, si ***X*** es el ángulo generado por el horario al girar a partir de las 12:00, entonces el seno de ***X*** es la distancia perpendicular del segmento vertical que pasa por el centro del reloj al extremo del horario. Esta ecuación se escribe como ***d*** = sen***X***.

1. Use una calculadora, configurada en modo de grados (MODE DEGREE), para calcular sen 0°, sen 30°, sen 60°, etc. Compare cada valor con el valor de *d* registrado en su tabla de la Hoja de trabajo 4. ¿Qué encuentra?

2. En la calculadora graficadora, digite la expresión 3,5+3 sen(30(***X***-3)) para Y_1. Construya una tabla con 0 como valor inicial de ***X***, e incrementos en ***X*** de 1. Compare la tabla resultante con la que obtuvo para el reloj 1 en la primera parte de la Hoja de trabajo 1; asegúrese de que la calculadora está configurada en modo de grados. ¿Qué encuentra?

3. Repita el anterior procedimiento usando 3,5+2 sen (30(***X***-3)) para Y_2, y compare la tabla resultante con la que obtuvo para el reloj 2 en la primera parte de la Hoja de trabajo 1. ¿Qué encuentra?

4. Qué fórmulas para Y_3 y Y_4, podrían generar las tablas de los relojes 3 y 4 obtenidas en la segunda parte de la Hoja de trabajo 1.

TALLER FUNCIÓNES AFINES Y CUADRÁTICAS

Consiga una hoja cuadriculada de 20cm. y 24cm. de dimensiones, colbón y tijeras. Trabaje ordenadamente en cada uno de sus cuadernos, sin tachones.
Para la actividad siguiente se van a organizar en grupos e 4 estudiantes. Inicialmente habrá un trabajo individual, luego un trabajo en el grupo de 4 y para terminar habrá una puesta en común en la que cada grupo expondrá un resumen del trabajo que realizó.

Trabajo Individual

1) Con la hoja de papel cuadriculado, de 20 cm. por 24 cm. que cada uno de ustedes trajo y siguiendo la misma estrategia que les mostré para hacer una caja sin tapa, cada uno de ustedes va a construir su propia caja. Queremos que entre todos los alumnos de este curso haya mucha variedad en los tamaños de las cajas construidas; para ello asegúrese de que su caja sea de diferente tamaño a las construidas por sus compañeros de grupo.

2) ¿Qué medida tiene el lado del cuadrado que recortó?
3) Con el dato anterior, calcule las medidas de la caja construida Escriba una descripción de lo que hizo.
4) Mida el largo, el ancho y la altura de la caja. ¿Coinciden dichas medidas con los datos calculados en el punto anterior?
5) ¿Qué cantidad (área) de papel se desperdicio al construir la caja de la manera como se hizo?. Describa por escrito como se llegó a su respuesta.
6) ¿Qué cantidad (área) de papel tiene la caja? Explique como llegó a su respuesta.

Trabajo en grupos de 4

1) En la siguiente tabla registren los datos correspondientes a la caja de cada uno de los 4 integrantes del grupo.

Nombre del estudiante	Altura de la caja	Largo de la caja	Ancho de la caja	Área del papel desperdicia do	Área del papel de la caja

2) Cada uno de los integrantes del grupo debe explicar oralmente a sus compañeros como calculó las medidas de su caja registradas en las últimas 4 columnas de la tabla. Para cada una de las medidas incluidas en la tabla, escriban que similitudes y diferencias encontraron en los procedimientos expuestos.
3) Describan como podrán calcular los datos correspondientes a las últimas 4 columnas de la tabla para cualquiera de los alumnos de otro grupo.
4) Si *x* representa la medida del lado de cualquier cuadrado en cualquiera de las cajas construídas y *l* representa la medida del largo de la caja, escriban una ecuación que les permitan construir *l* a partir de *x*.
5) Si *x* representa el lado de cualquier cuadrado recortado en cualquiera de las cajas construidas y *a* representa la medida del ancho de la caja, escriban una ecuación que les permita calcular *a* a partir de *x*.
6) Si *x* representa la medida del lado de cualquier cuadrado recortado en cualquiera de las cajas construidas y *d* representa el área del papel desperdiciado, escriban una ecuación que les permita calcular *d* a partir de *x*.
7) Si *x* representa la medida del lado de cualquier cuadrado recortado en cualquiera de las cajas construidas y *u* representa el área del papel desperdiciado, escriban una ecuación que les permita calcular *u* a partir de *x*.
8) Pidan a otro grupo la tabla que registra los datos de sus cajas. Con estos datos pongan a prueba las cuatro ecuaciones que establecieron anteriormente. Es decir usen las medida de los cuadrados recortados para calcular *l*, a. *d*. u y comparen l os resultados obtenidos con los datos de la tabla. Reporten por escrito el resultado de la prueba, ilustrando algunos de los cálculos realizados.
9) Determinen si el siguiente enunciado es falso o verdadero y expliquen su respuesta. Entre las cuatro ecuaciones que quedaron determinadas en los puntos 4 a 7, hay algunas que representan funciones afines y otras no.
10) Con base en sus respuestas a los puntos 6 y 7, describan las ecuaciones que representan el área del papel desperdiciado y el área del papel que tiene la caja.
11) Preparen una breve exposición del trabajo realizado por el grupo en la que destaquen la manera como llegaron a las ecuaciones mismas, incluso si éstas no funcionan al ponerlas a prueba en el punto anterior.

SEGUNDO TALLER FUNCIÓN AFÍN Y CUADRÁTICA

Para trabajar en la situación que se plantea a continuación van a seguir organizados en los mismos grupos que para el primer taller. También ahora se quiere lograr una gran variedad de tamaño de cajas, así que asegúrese que el tamaño de sus cajas sea diferente al tamaño de las cajas de sus compañeros de grupo.

Trabajo Individual

1) Con la misma estrategia usada en el primer taller y usando el mismo tamaño de papel 24cm.por 20 cm.), construya una caja muy alta. Determine las tres medidas de la caja y calcule el área de tal caja y el área del papel desperdiciado.
2) Con la misma estrategia usada en el primer taller y usando el mismo tamaño de papel (24cm. por 20 cm.), construya una caja muy baja. Determine las tres medidas de la caja y calcule el área del papel de la caja y el área del papel desperdiciado.

Trabajo en grupo de 4

Acerca de las cajas muy altas

1) En las filas 3 a 6 de la siguiente tabla registren los datos correspondientes a las cajas muy altas que cada uno de los 4 integrantes del grupo construyó (organicen ascendentemente los datos correspondientes a la altura de la caja).

1 2	Nombre del estudiante	Medidas de la caja construida			Área del papel de la caja	Area del papel desperdiciado
		altura	largo	Ancho		
3						
4						
5						
6						
7						
8						
9						
10						

2) Juan y Mercedes, alumnos que están realizando este taller, hacen respectivamente las siguientes afirmaciones:

"en el contexto en el que estamos trabajando, la caja de mayor altura que se puede construir, así sea en la imaginación, es la que tiene altura 11.999 cm."

"en el contexto en el que estamos trabajando, la caja de mayor altura que se puede construír, así sea en la imaginación, es la que tiene altura 9.999 cm."

¿Cuál de los dos alumnos tiene razón?. Explique su respuesta.

3) ¿En el grupo de ustedes se ha construido la caja de mayor altura posible?. Explique su respuesta,
4) En las filas 7 a 10 de la tabla anterior, registren en forma ascendente la medida de la altura de cuatro cajas (de tamaños diferentes) que se pueden construir, por lo menos en la imaginación, en el contexto dado y que tengan altura mayor que las ya construidas. Calculen también el resto de medidas que están implicadas en la tabla.

5) Examinen la tabla que han elaborado y describan, en términos generales, como varían las medidas del largo, del ancho, el área del papel de la caja y el área del papel desperdiciado cuando la medida de la altura se hace cada vez más grande, en el contexto dado.

Acerca de las cajas muy bajas

6)En las filas 3 a 6 de la siguiente tabla registren los datos correspondientes a las cajas muy bajas que cada uno de los cuatro integrantes del grupo construyó(organicen descendentemente los datos correspondientes a la altura de la caja). *(Segundo taller)*

1	Nombre del estudiante	Medidas de la caja construida			Área del papel de la caja	Area del papel desperdiciado
2		altura	largo	Ancho		
3						
4						
5						
6						
7						
8						
9						
10						

7) Un estudiante de un grupo dice haber construido en su imaginación una caja de altura 0.001 cm. y afirma que esa es la caja de menor altura en el contexto en el que se está trabajando. Si consideran que el estudiante tiene la razón, expliquen por qué; y si consideran que el estudiante no tiene la razón, construyan un argumento para convencerlo de que no tiene la razón.
8) ¿En el grupo de ustedes se ha construido la caja de menor altura posible? Expliquen su respuesta.
9) En las filas 7 a 10 de la tabla anterior, registren en forma descendente la medida de la altura de cuatro cajas (de tamaños diferentes) que se puedan construir, por lo menos en la imaginación, en el contexto dado y que tengan altura menor que las ya construidas. Calculen también las otras medidas que están implicadas en el resto de la tabla.
10) Examinen la tabla que han elaborado y describan, en términos generales, como varían las medidas del largo, el ancho, el área del papel, el área del papel desperdiciado cuando la medida de la altura se hace cada vez más pequeña, en el contexto dado.

Acerca de cualquier caja

11) Den dos valores (los llamaremos e y q) muy próximos entre sí, que sean la medida de la altura de dos cajas en el contexto en el que se está trabajando. Para las dos cajas que quedan así determinadas, calculen las medidas del largo, el ancho , el área del papel y el área del papel desperdiciado. ¿Se podría construir una caja que tuviera altura w entre e y q? Den un valor para w. Hagan algún tipo de estimativo(no se les pide que hagan cálculos) para la medida del largo y el ancho de la caja de altura w , para el área del papel y el área del papel desperdiciado de tal caja.
12) Con respecto al punto anterior, ¿el valor que dieron a w es el único posible? Expliquen su respuesta.
13) En el contexto en el que estamos trabajando, ¿habría dos cajas de alturas diferentes entre las cuales no se podría encontrar una tercera caja de altura intermedia? Explique su respuesta.
14) Expresen el conjunto que representa todos los valores que podría tomar la medida del lado del cuadrado recortado para construir cualquier caja en este contexto.
15) Expresen el conjunto que representa todos los valores que podría tomar la medida del largo de cualquier caja construida en este contexto.
16) Expresen el conjunto que representa todos los valores que podría tomar la medida del ancho de cualquier caja construida en este contexto.
17) Expresen el conjunto que representa todos los valores que podría tomar la medida del papel de la caja y del papel desperdiciado de cualquier caja construida en este contexto.

Preparen una breve exposición del trabajo realizado por el grupo en la que destaquen la manera como llegaron a determinar los conjuntos de valores en las preguntas 14 a 18 y los conjuntos mismos.

TERCER TALLER: FUNCIONES POLINÓMICAS

En el contexto en el que estamos trabajando hay otras dos funciones que queremos estudiar en este taller, ellas son función *área de la base de la caja* y la función *capacidad de la caja.*

TRABAJO INDIVIDUAL

1) Para las tres cajas que construyó en los dos talleres anteriores, calcule la medida del área de la base y la medida de la capacidad. Explique como calculó cada uno de los valores. En la tabla escriba, en cada caso, los procedimientos aritméticos realizados y su resultado.

altura	Área de la base de la caja	Capacidad de la caja

TRABAJO EN GRUPOS DE 4

Reúnan los datos de las tablas individuales en la siguiente tabla. Atendiendo la altura ordénelos ascendentemente. Describan algunas características de los datos registrados en cada una de las columnas de la tabla, para ello consideren por ejemplo, si los datos están ordenados, el tipo de orden de los datos, en que lugar de la columna se ubica el menor o el mayor de los datos y hacia que valores se tiende en los extremos de las columnas.

altura	Área de la base de la caja	Capacidad de la caja

Teniendo en cuenta el(los) procedimiento(s) usado(s) para calcular la medida del área de la base y la medida de la capacidad de la caja en los casos particulares, escriban expresiones simbólicas que sirvan para calcular las medidas del área de la base y de la capacidad de cualquier caja en términos de la medida de la altura de la caja. Representen con x la altura de la caja, con b la medida del área de la base de la caja, y con c, la medida de la capacidad de la caja.

Para una caja cuya altura es 3.63 cm., la medida del área de la base es 213,27cm^2 y la capacidad es 774.16cm^3. ¿Las expresiones simbólicas que ustedes dieron en el ítem anterior corroboran estos valores?

Examinen la tabla elaborada en el punto 2 y la de otros grupos para hacer una conjetura acerca de cuáles son los valores que puede tomar la medida del área de la base,
Usen la calculadora para verificar si su conjetura parece ser razonable. Describan por escrito los procesos utilizados. Expresen el conjunto que representa todos los valores que podría tomar la medida del área de la base de cualquier caja construída en este contexto.

Examinen las tablas de sus compañeros de grupo y de otros grupos para hacer una conjetura acerca de cuáles son todos los valores que puede tomar la medida de la capacidad de la caja. Usen la calculadora para verificar si su conjetura parece ser razonable. Describan por escrito los procesos utilizados (seguramente será necesario modificar las opciones Tblstar y ∇Tbl de TBLSET de manera que pueda tomar valores de x cada vez más juntos entre sí y más cercanos al valor que corresponde a la de mayor capacidad). Exprese el conjunto que representa todos los valores que podría tomar tomar la medida de la capacidad de cualquier caja construida en este contexto.

Con base en los resultados encontrados en los talleres anteriores y en éste completen la siguiente tabla. En la columna titulada Expresión simbólica"utilicen la notación que se emplea para las funciones, en la que se expresa el hecho de que hay una variable de la que depende la función.

Nombre de la función	Expresión Simbólica	Posibles valores de la función (todos)
Largo de la caja		
Ancho de la caja	$F_2(x)$ =a=-2x+20	
Área del papel		

desperdiciado		(0,400)
Área del papel de la caja		
Área de la base		
Çapacidad de la caja		

7) Preparen una breve exposición del trabajo realizado por el grupo en la que destaquen las expresiones simbólicas encontradas para calcular la medida del área de la base y de la capacidad de cualquier caja construida en el contexto, y la forma como llegaron a ellas. También deben hablar de la forma como llegaron a determinar los conjuntos de valores que pueden tomar la medida del área de la base y la medida de la capacidad de cualquier caja y expresar cuáles son esos conjuntos .