

372:72  
B84e.  
Ej<sup>1</sup>

Instituto para la Investigación Educativa  
y el Desarrollo Pedagógico - IDEP



\*000187\*

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN  
"CONSTRUYENDO LA NOCIÓN DEL CONCEPTO DE VOLUMEN"  
(CONTRATO 073).

INSTITUCIÓN PONENTE  
C, E. D. NUEVO SAN ANDRÉS DE LOS ALTOS J.T.

INVESTIGADORES  
MARGOT BUITRAGO  
MARÍA AIDEE TORRES FUENTES  
MARCO A. FERIA ( Asesor)

INFORME FINAL

AMANDA CORTES  
INTERVENTORA

INSTITUTO INVESTIGACIÓN EDUCATIVA  
Y DESARROLLO PEDAGÓGICO (IDEP).  
BOGOTÁ, D.C.  
NOVIEMBRE 15 DEL 2001

Inventario IDEP  
155

0272-30-01-2008

## **PRESENTACIÓN**

El proyecto de investigación “CONSTRUYENDO LA NOCIÓN DEL CONCEPTO DE VOLUMEN” fue desarrollado durante el periodo académico año 2001 con un grupo de estudiantes de grado séptimo del CED NUEVO SAN ANDRES DE LOS ALTOS J.T.

En el presente informe se relacionan los fundamentos teóricos, metodológicos y didácticos concernientes tanto al diseño como a la implementación y análisis de la propuesta didáctica y, a la reflexión teórica que suscitó la Categorización y el análisis del proceso de intervención en el aula, lo que permitió proponer una estrategia de apropiación del concepto de volumen desde el modelo didáctico de percepción comparación y estimación.

A continuación se hace una descripción de los capítulos que hacen parte del cuerpo de este informe:

En el capítulo uno EL PROBLEMA, sustenta las elaboraciones conceptuales que sirvieron de base para la formulación del objeto de la investigación, además de presentar los objetivos del proyecto

En el capítulo dos MARCO TEÓRICO se da cuenta de los referentes epistemológicos, disciplinares y didácticos, que permitieron consolidar una visión teórica del equipo que hace la propuesta además de ampliar el horizonte conceptual con miras a una cualificación de los procesos de intervención en el aula.

En el capítulo tres se presenta el DISEÑO METODOLÓGICO DE LA INVESTIGACION, en el cual se da cuenta del enfoque investigativo del proyecto además de las etapas del proceso y las actividades de intervención en el aula

En el capítulo cuatro ANÁLISIS DEL PROCESO DE INVESTIGACIÓN en el cual se validan las categorías de análisis propuestas, las fases de análisis de las actividades, los instrumentos de recolección de la información y la Categorización de cada una de las actividades.

En el capítulo cinco hace referencia a los RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN, teniendo en cuenta aspectos como los desarrollos conceptuales de los estudiantes, las dificultades encontradas en la investigación, los objetivos del proyecto entre otros.

Finalmente en el capítulo ANEXOS se hace la presentación del sistema de instrumentos generado por esta investigación que permiten validar el modelo didáctico propuesto para la construcción del concepto de volumen, en una cartilla. Así como también se incluyen registros de observación de campo. \*

## TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN.....	7
1. OBJETO Y JUSTIFICACIÓN DEL PROYECTO .....	10
1.1 El Problema de la investigación .....	10
1.2 Antecedentes y Justificación .....	10
1.3. Objetivos del proyecto.....	12
1.3.1 Objetivos Generales.....	12
1.3.2 Objetivos Específicos .....	12
1.4. Contexto de desarrollo del trabajo de investigación.....	13
2. MARCO TEORICO .....	14
2.1. Referentes Epistemológicos .....	14
2.1.1 De las concepciones a los conceptos .....	14
2.1.1.1 La conceptualización en el aula.....	17
2.1.1.2 El para que de la Conceptualización.....	18
2.1.1.3 Concepciones de espacio en el niño .....	20
2.1.2 Lenguaje y la Construcción de los Conceptos.....	22
2.1.2.1 La Representación en Geometría.....	23
2.1.3. Acerca de la Argumentación .....	25
2.1.3.1 Clases de argumentación .....	26
2.1.3.2 Conectores lógicos en la argumentación .....	27
2.2. Referentes Disciplinar .....	28
2.2.1 Acerca del conocimiento matemático.....	28
2.2.2. Fundamentación del concepto de volumen .....	31
2.2.2.1 Propiedades de los cuerpos.....	31
2.2.2.2 Diferentes concepciones del concepto de volumen.....	33
2.2.2.3 Fundamentación matemática del concepto de volumen .....	35
2.3. Referentes Didácticos.....	39
2.3.1 El Modelo de Van Hiele .....	39
Nivel 1: Reconocimiento .....	40
Nivel 2: Análisis .....	40
Nivel 3: Clasificación .....	40
Nivel 4: Deducción.....	41
Nivel de Transición .....	42
2.3.2 Modelo didáctico de intervención. ....	49
Percepción .....	49
La Comparación .....	50
Estimación .....	51
3. DISEÑO METODOLÓGICO DE LA INVESTIGACIÓN.....	54
3.1 Enfoque Metodológico .....	54
3.2 Etapas del Proyecto .....	56
3.3 Actividades de intervención .....	57

3.3.1	Diseño de actividades primera etapa del proyecto .....	57
3.3.1.1	Prueba Diagnóstica (ver anexo 1).....	57
3.3.1.2	Actividades para la Construcción de Conceptos Asociados al Concepto De Volumen .....	59
	Descripción de la actividad.....	60
	Descripción de la actividad.....	62
3.3.2	Diseño de actividades fase de retroalimentación del proyecto.....	65
3.3.3	Diseño de actividades segunda etapa del proyecto.....	66
3.3.3.1	Actividades para la etapa de percepción.....	66
	Descripción de la actividad.....	67
	Descripción de la actividad.....	68
3.3.3.2	Actividades para la etapa de Comparación.....	69
3.3.3.3	Actividades para la etapa de Estimación .....	73
4.	ANÁLISIS DEL PROCESO DE INVESTIGACIÓN.....	76
4.1	Categorías de Análisis .....	76
4.2	Fases en el análisis de cada actividad.....	77
1.	Aplicación : .....	77
2.	Análisis:.....	79
3.	Retroalimentación: .....	81
4.	Sistematización:.....	83
4.3	Instrumentos de recolección de información.....	85
4.4.	Categorización de cada una de las actividades.....	86
4.4.1	Categorización de actividades primera etapa del proyecto .....	86
4.4.1.1	Fases De Aprendizaje .....	86
4.4.2	Categorización de actividades fase de retroalimentación del proyecto ....	96
4.4.2	Categorización de actividades segunda etapa del proyecto.....	97
4.4.2.1	ACTIVIDAD No 11 Juguemos con los recipientes .....	98
4.4.2.2	ACTIVIDAD No. 12 Ordenando el cuarto .....	103
4.4.2.3	ACTIVIDAD No. 13 Jugando con los Policubos y ACTIVIDAD No. 14 Divirtámonos con nuestra imaginación .....	106
5.	RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN .....	115
5.1	Respecto al concepto disciplinar .....	115
5.2	Respecto al cumplimientos de los objetivos del proyecto.....	116
5.3	Respecto al modelo de Van Hiele y su incidencia en el proyecto.....	116
5.4	Respecto a la investigación en el aula .....	117
5.5	Respecto a la valoración del proceso de aprendizaje de los estudiantes .....	118
6.	BIBLIOGRAFÍA .....	120
7.	ANEXOS .....	123
	Anexo No. 1 PRUEBA DIAGNÓSTICA .....	124
	Anexo No. 2 FASE RETROALIMENTACIÓN “CONCENTRÉMONOS CON LAS CURVAS “ .....	125
	Anexo No. 3 ACTIVIDAD No. 1 “ RECORRIDOS LIBRES” .....	126
	Anexo No. 4 ACTIVIDAD No. 2 “ RECORRIDOS DIRIGIDOS”. .....	127

## INDICE DE TABLAS

Tabla 1. ONTOGÉNESIS DEL ESPACIO EN EL HOMBRE (ADAPTADO DE PIAGET E INHELDER, 1948) .....	21
Tabla 2. Tipos de Argumento .....	26
Tabla 3 Conectores lógicos en la argumentación .....	27
Tabla 4 . Algunos ejemplos de propiedades de los cuerpos .....	32
Tabla 5 . Paralelo entre volumen y capacidad .....	35
Tabla 6 . ACTIVIDAD No. 1 Recorridos Libres .....	47
Tabla 7. ACTIVIDAD No. 3 Jugando con las curvas .....	83
Tabla 8. Análisis Actividad No.2 Jugando con los recorridos (Anexo Sistema de Instrumentos) .....	88
Tabla 9. Análisis Actividad No. 3 Jugando con las curvas .....	89
Tabla 10. Análisis de la Actividad No. 3 Jugando con las curvas .....	90
Tabla 11. Análisis de la Actividad No. 3 Jugando con las curvas .....	91
<b>Tabla 12. Análisis de la Actividad No. 4. Jugando con Polígonos .....</b>	<b>92</b>
<b>Tabla 13. Análisis de la Actividad No. 4. Jugando con Polígonos .....</b>	<b>93</b>
Tabla 14. Análisis de la Actividad No. 4. Jugando con Polígonos .....	94
Tabla 15. Análisis de la Actividad No. 4. Jugando con Polígonos .....	94

## INTRODUCCIÓN

Se requieren de muchas condiciones para un desenvolvimiento adecuado del proceso de enseñanza – aprendizaje; desde la didáctica de la matemática y a partir de los procesos de construcción de conceptos matemáticos, se enuncian algunas condiciones las cuales deberíamos asegurar los maestros para posibilitar tales procesos, entre ellas:

- Una organización de los contenidos matemáticos que responda a una concepción de la matemática como unidad, tanto en sus objetos de estudio como en sus métodos.
- Un proceso sistemático cuyo gestor principal es el profesor y cuyo actor principal es el estudiante.
- Un alumno motivado para comprometerse con las nuevas experiencias de aprendizaje.
- Las experiencias previas son importantes.
- El tiempo necesario que permita trabajar un contenido matemático para su verdadera asimilación e integración.

Desde esta perspectiva la enseñanza de la Geometría nos ofrece una gran gama de posibilidades, la geometría nos permite visualizar conceptos y procesos, es un punto de encuentro entre la matemática como teoría y la matemática como modelo, es un símbolo

para reflexionar, comprender, comunicar, automatizar, facilitar la creatividad y desarrollar un pensamiento argumentativo y deductivo.

Consideramos que la necesidad de la enseñanza de la geometría en el ámbito escolar responde, en primer lugar, al papel que la geometría desempeña en la vida cotidiana, un conocimiento geométrico básico es indispensable para desenvolverse en la vida cotidiana: para orientarse reflexivamente en el espacio; para hacer estimaciones sobre formas y distancias; para hacer apreciaciones y cálculos relativos a la distribución de los objetos en el espacio, etc.

Las investigaciones sobre el proceso de construcción del pensamiento geométrico parecen indicar, que éste sigue una evolución muy lenta desde unas formas intuitivas iniciales de pensamiento, hasta las formas deductivas finales, y que éstas corresponden a niveles escolares bastante más avanzados.

Este proyecto hace énfasis en una geometría de carácter más experimental e intuitiva sin desconocer la importancia de los procesos inductivos y deductivos, los cuales están presentes en la estructuración del pensamiento geométrico.

El espacio del niño está lleno de elementos geométricos, con significado concreto para el estudiante puertas, ventanas, mesas, pelotas, etc. En su entorno cotidiano, en su barrio, en su casa, en su colegio, en sus espacios de juego, aprende a organizar mentalmente el espacio que le rodea, a orientarse en el espacio.

Este contexto nos parece especialmente útil para desarrollar las enseñanzas geométricas, de una forma que resulte significativa para los estudiantes. El estudio de su entorno próximo y familiar, por la motivación e interés que puede despertar y por ser fuente inagotable de objetos susceptibles de observación y manipulación. De ahí que para el desarrollo de nuestra propuesta asumamos el modelo de Percepción - Comparación - Estimación.

Partiendo de situaciones que resultaran familiares para los estudiantes (recorridos habituales, formas de objetos conocidos...) y mediante actividades manipulativas, lúdicas (recorte, modelado, etc), buscamos ir fomentando el desarrollo de los conceptos geométricos que consideramos preliminares para la construcción del concepto de Volumen, para luego acceder a este. En el estudio de elementos del plano, polígonos y cuerpos geométricos, las actividades fueron de reconocimiento en el espacio y manipulativas, como construcción con palillos, recorte y modelado, sin entrar en la formalización de los conocimientos con fórmulas matemáticas.

El uso del lenguaje, la predicción de resultados y la posterior reflexión sobre ellos, la evaluación del progreso cualitativo de los estudiantes en grupo como individual, de las técnicas de trabajo, la forma de agrupamiento para realizar las tareas, los trabajos de clase, las intervenciones, debates; estuvieron presentes a lo largo del desarrollo del proyecto como vehículo para lograr establecer el grado de adquisición de los conceptos por parte de los estudiantes, así como también para reflexionar sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje que se desarrollaba en el aula.

## **1. OBJETO Y JUSTIFICACIÓN DEL PROYECTO**

### **1.1 El Problema de la investigación**

El problema que nos planteamos en el presente trabajo corresponde a las dificultades en la comprensión del concepto de volumen en los estudiantes de grado sexto 7° del C. E. D. Nuevo San Andrés de los Altos J. T.

### **1.2 Antecedentes y Justificación**

Con base en nuestra experiencia como docentes de matemáticas y física en educación media, encontramos que los estudiantes de grados superiores presentan dificultad en el manejo del concepto de volumen, observando que sólo lo relacionan con la aplicación de fórmulas y sistemas de unidades, dejando de lado la comprensión de este concepto, lo cual se hace evidente en el confuso manejo de los conceptos asociados como volumen - capacidad, área-espacio, tal como lo muestran estudios realizados por autores como Vergnaud, Piaget y Lovell, las cuales se sustentan en el marco teórico, y otras referencias de investigaciones como la de área y perímetro (García Justina; y otras. Asociación Anillo de Matemáticas) apoyada por el IDEP.

Otras causas que identificamos relevantes para el problema de investigación corresponden: a la poca importancia de la geometría en el currículo escolar, respaldada por la falta de continuidad en los procesos de aprendizaje del estudiante durante el nivel de educación básica primaria, su transición a secundaria y durante todo el nivel de educación, así como también la falta de relación de los modelos geométricos con la vida cotidiana del estudiante lo cual no permite una adecuada comprensión de los conceptos que a nivel básico se intenten construir en él.

Desde esta perspectiva nuestro proyecto de investigación está basado en dos premisas fundamentales:

- Confrontarnos con la forma como nuestros estudiantes se relacionan con el saber, conociendo sus intenciones y sus motivaciones, a través de la comunicación escrita oral, y gráfica.
- Nunca se termina de aprender como se aprenden las matemáticas, lo cual implica que los currículos como las metodologías sean transitorias.

Es por ello que este proyecto de investigación pretendió a través de la geometría analizar los procesos que el estudiante lleva a cabo en la construcción de la noción de concepto de volumen.

Teniendo en cuenta que nuestro Proyecto Educativo Institucional está orientado hacia la búsqueda de valores humanos como la autenticidad, la búsqueda de la verdad y la constancia de los deberes por parte de todos los miembros de la comunidad educativa,

consideramos que este proyecto de investigación guarda una estrecha relación con el PEI ya que busca que el estudiante comprenda que es el principal autor en la construcción de los conceptos que aquí tratamos los cuales son importantes en su relación con el entorno, enriqueciendo además el desarrollo integral del niño al fortalecer las relaciones interpersonales entre los estudiantes y profesores, la tolerancia y el respeto por la opinión del otro; de esta manera el desarrollo de las facultades intelectuales y las aptitudes específicas de cada individuo buscarán el equilibrio personal .

### **1.3. Objetivos del proyecto**

#### **1.3.1 Objetivos Generales**

El presente proyecto tuvo como objetivo general “ Desarrollar una estrategia de intervención en el aula que permita mejorar los niveles de comprensión del concepto de volumen en los estudiantes de l grado séptimo del C. E. D. Nuevo San Andrés de los Altos J.T.”

#### **1.3.2 Objetivos Específicos**

Los objetivos específicos, que se trazaron para el desarrollo del proyecto atendieron cuatro aspectos:

- Propender por el uso y valoración del lenguaje oral y escrito que se constituye en un aspecto primordial en el proceso de la adquisición de conocimiento matemático, a partir de la argumentación y validación de saberes al interior del aula.

- Validar otras formas de hacer matemática en el aula a partir del cambio en las concepciones de las relaciones maestro –conocimiento, maestro- estudiante y estudiante- conocimiento.
- Indagar sobre la forma como los estudiantes construyen la noción del concepto de volumen y los conceptos asociados a este.
- De acuerdo a los resultados obtenidos validar categorías de análisis y acciones estratégicas que permitan la creación o estructuración de un currículo en matemáticas acorde con las necesidades del estudiante y del PEI de la institución.

#### **1.4. Contexto de desarrollo del trabajo de investigación**

Este proyecto se desarrolló con 35 Estudiantes del curso 701 del C.E. D. Nuevo San Andrés de los Altos J.T., cuyo rango de edades está entre los 11 y 15 años, encontrándose una moda de 11 años. Se tomó una muestra de 25 estudiantes, aunque las actividades se aplicaron a toda la población objeto.

Esta investigación se adelantó durante dos años así: año 2000 desarrollo de la primera etapa de la investigación, con los estudiantes de grado sexto de la institución.; y durante el año 2001 se desarrolló el período de retroalimentación de la primera etapa y se ejecutó la segunda etapa del proyecto, con los estudiantes ahora en grado séptimo de la misma institución, etapa financiada por el IDEP.

## **2. MARCO TEORICO**

### **2.1. Referentes Epistemológicos**

#### **2.1.1 De las concepciones a los conceptos**

La Concepción es entendida como una producción de la realidad, por cuanto es considerada una estructura de recepción la cual se compone por un conjunto de imágenes e ideas explicativas utilizadas por el individuo para razonar frente a situaciones problemáticas, cabe señalar que las concepciones se producen en estrecha relación con las sensaciones. Mientras que la Noción es entendida como el elemento primario del conocimiento que el individuo se forma frente a la realidad, la noción es la materia de juicio que permite al individuo el inicio de la transformación mental de la realidad.

En la formación de conceptos es fundamental relacionar los nuevos conocimientos con los saberes previos (concepciones), a demás de realizar la reconstrucción de los esquemas de conocimiento que conllevan al individuo a un reconocimiento de la realidad dándose el primer paso hacia la abstracción de esta ( nociones).

En el estadio de desarrollo cognoscitivo, el niño accede al plano simbólico- representativo y comienza a contar con un instrumental primigenio: LAS NOCIONES. Ellas constituyen las primeras herramientas gnoseológicas representativas para conocer la realidad próxima y

con ellas se agrupan y / o se relaciona, hechos, objetos no presentes en el campo actual. Cosas que se vuelven a presentar al cerebro. Con la ayuda de la palabra ahora es posible referirse, mediante signos, a lo que se ha dejado de vivir.

El profesor De Zubiría afirma, que sin ambigüos, con las nociones el niño “ organiza la fachada del mundo físico, social y humano, la realidad a secas en clases, captura relaciones externas”. De otra forma, “ descubre las analogías periféricas entre objetos, captura las relaciones visibles. Las analogías entre los objetos dan lugar a las nociones de clase ( vasos, personas, rectángulos, perros, carros, cuerpos sólidos....) De las relaciones fenomenológicas se pasa a las relaciones ( arriba- abajo, derecha- izquierda, antes-ahora-después) y de las transformaciones que producen unas cosas sobre otras ( romper, jalar, explotar, pegar) se va también a las nociones operacionales “(1)

Las nociones en este desarrollo cognoscitivo, alimentado en una etapa por la pre - escuela vuelven herramientas viejas pero ellas pasan a un almacén, a un aparato conceptual que es nuevo en lo que toca a su organización.

Piaget plantea, que las nociones de clase, las clases aisladas establecen nexos( infraordinación y / o supraordenación) con otras clases también aisladas dando lugar a una enramada de clases, es decir, sistemas clasificatorios o conceptos clasales.

Se da luego un paso importante que estabiliza los conceptos preformados cuando la clasificación, las series y los operadores comienzan a unirse para producir conceptos teóricos como reflejo de lo real, como algo sistemático. Kosik opina, que se da el concepto

de la cosa cuando se tiene la comprensión de ella y comprender lo que la cosa es significa conocer su estructura. El rasgo más característico del conocimiento es la descomposición del todo. “El concepto y la abstracción tienen significado de un método que descompone el todo unitario para poder producir mentalmente la estructura de la cosa, es decir, para comprender la cosa”

Los conceptos en tanto que agrupaciones organizadas de nociones, en un momento nuevo, deben convertirse en sistemas más complejos, es decir en conceptos más elaborados (CATEGORIAS), con una organización interna interconceptual.

El concepto volumen, agrupa las nociones de cualidad, propiedad, cuerpo, sólido, capacidad, frontera, puede verse como unidad cualificada que debe relacionarse con otros conceptos asociados más superiores. Se ha pasado a las categorías. Estas suponen la captura del contexto referencial del concepto.

Quiere decir, que las redes conceptuales son también un aparato cognitivo más complejo, cuya armazón interna son los conceptos ordenados y correlacionados.

La categoría es una estructura armada consistentemente de conceptos. “Es un aparato que abarca leyes complejas vistas en su dimensión abstracta. “En general, en este estadio se está en el límite del pensamiento formal. Aún no se da la transición de lo abstracto, lo cual viene siendo objeto del pensamiento dialéctico”.

Como el acto de enseñar-aprender debe suponer el desarrollo cognoscitivo del alumno y el saber se manifiesta en parte, en un dominio de la teoría, en la capacidad para conceptualizar, se puede notar que el maestro enseña, bien matemáticas, biología, física, o, idiomas, entonces hay una pregunta básica: ¿Qué es la aritmética como teoría? o la física o la música o la historia? . En algún momento de la clase se hace conceptualización (Teorización) o se habla de conceptos básicos o de fundamentación teórica. Esto hace parte del acto de enseñar la ciencia porque es de suponer que no enseñamos magia u otros tipos de discursos.

El problema que se ha venido planteando: ¿Cuál es la participación del alumno en la conceptualización?; Se da un proceso de construcción teórica en clase o en las distintas actividades de aprendizaje?, conduce a una reflexión sobre los procesos de conceptualización y aunque no es cierto que todo lo que se puede preguntar con sentido sea una pregunta intencionalmente cognitiva de las cosas, además de las preguntas que requieren de un análisis puramente estructural, existen preguntas intencionalmente cognitivas cuya respuesta se da a partir de un análisis ontológico y semántico.

#### **2.1.1.1 La conceptualización en el aula**

La conceptualización es siempre la edificación de un sistema más o menos afinado y consistente de enunciados que unifican, amplían y profundizan ideas, las cuales en el estadio nocional del estudiante habían sido mas o menos intuitivas, imprecisas e inconexas; es el conocimiento de base desde donde partimos, en otras palabras elaborar un sistema conceptual que intenta representar algunos aspectos interrelacionados de sistemas reales.

En cualquier caso, su construcción no suele hacerse de un modo claro y lógicamente consistente. Su resultado puede llamarse una teoría natural, un borrador que puede ser replanteado o reemplazado por posteriores desarrollos, discusiones y aplicaciones.

En los primeros pasos de la conceptualización no hay que preocuparse mucho de las condiciones lógicas con excepción de la consistencia semántica (homogeneidad y conexión de conceptos básicos). Hay que tener en cuenta que las nociones, axiomas, reglas y sus consecuencias (correlatos), deben quedar formulados en forma clara para ser formalizados con instrumentos lógicos y técnicos.

La elaboración conceptual de la experiencia lleva siempre a alguna idea, a un problema, a una conjetura, una hipótesis. Si continuamos elaborando la idea inicial con los instrumentos tomados de nuestro trasfondo conceptual, se podría llegar a un sistema de hipótesis interrelacionadas pero distinguibles, lo que constituye un sistema conceptual.

#### **2.1.1.2 El para que de la Conceptualización**

Desde un enfoque didáctico, el sentido de la conceptualización tiene varios perfiles, entre otros:

La sistematización del conocimiento estableciendo relaciones lógicas entre entidades antes inconexas.

La explicación de hechos, objetos, fenómenos por medio de hipótesis que impliquen las proposiciones que expresan dichos hechos.

Incrementar el conocimiento derivando nuevas proposiciones de las premisas en conjunción con otras informaciones relevantes.

Orientar la investigación bajo el planteamiento y reformulación de problemas; mediante la recolección de nuevos datos.

Presentar un mapa de un sector de la realidad, objetos reales, acompañado de un procedimiento para producir nuevos datos

Los términos de Concepción, Noción y Concepto se encuentran asociados frecuentemente al proceso de formación, de asimilación o de aprendizaje que puede seguir el sujeto y solamente pueden ser comprendidos en estrecha relación.

En el proceso de abstracción a través del cual se forman los conceptos, se considera indispensable partir de las concepciones del sujeto, pasar por las nociones que ha elaborado para llegar a los conceptos que ha construido.

Por lo tanto, en la formación de conceptos es fundamental relacionar los nuevos conocimientos con los saberes previos (concepciones), a demás de realizar la reconstrucción de los esquemas de conocimiento que conllevan al individuo a un

reconocimiento de la realidad dándose el primer paso hacia la abstracción de esta (Nociones).

### **2.1.1.3 Concepciones de espacio en el niño**

Para el niño, la percepción de su espacio reviste gran importancia puesto que en él se desenvuelve, lleva a cabo sus actividades y lo reconoce como propio; así cada uno de ellos, lo ve de manera diferente, lo organiza y reestructura de acuerdo a su sentir, a sus necesidades, a la utilización a la que lo destine, etcétera.

El concepto de espacio es de una elaboración muy lenta en el niño y exige la construcción y asimilación de ciertas relaciones esenciales que debemos tener presentes para ayudar a los estudiantes a captar su significado. Los conceptos espaciales se construyen a través de una inagotable cadena de acciones ejecutadas sobre objetos ubicados en el espacio, acciones motoras al comienzo, que son internalizadas más tarde para integrar así el sistema de operaciones. En los primeros meses de vida del niño, la primera noción espacial de un objeto, la asocia a su experiencia táctil, progresivamente va a diferenciar el espacio que lo rodea de su propio cuerpo empezando a conocer los objetos que alcanza y toca y en la medida que logra desplazarse por sí solo, su espacio se amplía paulatinamente pudiendo explorarlo y conocerlo aun cuando seguirá ligado a su propio cuerpo durante un largo tiempo.

Aunque el espacio no cambia, durante nuestro desarrollo individual pasamos por diferentes etapas en la concepción de éste. (Ver Tabla No 1)

**Tabla 1. ONTOGÉNESIS DEL ESPACIO EN EL HOMBRE (ADAPTADO DE PIAGET E INHELDER, 1948)**

EDAD en años	ETAPA	FORMA PSICOLÓGICA DEL ESPACIO	CONCEPTO ESPACIAL
1- 4	Bebé	TOPOLÓGICA	Caliente-frío cercano-lejano lleno-vacío
4 - 11	Niño	PROYECTIVA	arriba-abajo adelante-atrás izquierda-derecha
11-	Adolescente Adulto	EUCLIDIANA	medidas métricas (estimaciones toscas) perspectiva renacentista

En matemática las relaciones espaciales se clasifican en: topológicas, proyectivas y euclidianas.

*La topología* estudia las relaciones y propiedades espaciales que se refieren a características de la realidad circundante como:

- Proximidad o acercamiento, corresponde al manejo de la noción de vecindad entre elementos, puntos, etc.
- Separación, capacidad de poder separar o disociar elementos próximos.
- Orden o sucesión espacial, cuando dos elementos próximos pero separados se pueden ubicar uno antes y otro después.

- Cierre, "en una serie ABC, el elemento B es percibido como situado entre A y C, los cuales forman un 'cierre' a lo largo de una dimensión" (Piaget e Inhelder, 1956, p. 8).
- Continuidad, cuando una línea o superficie es considerada como un todo continuo.

En el *espacio proyectivo* se pasa de un análisis del objeto a un análisis del objeto en relación a otro, aunque no se efectúe medición. Piaget e Inhelder "aseguran que el espacio proyectivo aparece, psicológicamente, cuando un objeto empieza a ser mentalmente considerado, no en aislamiento, sino en relación a un 'punto de vista'. Esto es, el niño empieza a apreciar como se presentan los objetos cuando son contemplados desde diferentes posiciones". (Lovell, 1977, p. 120). La prueba para verificar estas destrezas son: la construcción de dibujos en perspectiva, proyección de sombras, coordinación de perspectivas, secciones geométricas, rotación y desarrollo de superficies.

En cuanto al *espacio euclidiano*, podemos decir que los objetos pueden ser localizados en él por medio de sistemas de referencias (largo, ancho, alto) desarrollándose en el niño ideas métricas. Así puede dibujar un rectángulo y medir sus lados, sus ángulos, su superficie, etc.

### **2.1.2 Lenguaje y la Construcción de los Conceptos**

El *lenguaje*, como expresión humana, es un medio de comunicación y el *pensamiento* es la facultad humana por medio de la cual nos podemos asombrar, asomándonos a la razón; ambos tienen un origen común y han servido a los mismos propósitos.

Para la escuela soviética, el origen del lenguaje estriba en considerar que este surge como proceso del trabajo conjunto y está dentro de las leyes naturales como instrumento necesario del pensamiento del hombre y medio de interrelación con la naturaleza.

El lenguaje nace con el hombre y ha desempeñado en la vida humana un papel fundamental es una de las circunstancias básicas para la concepción del propio hombre y su pensamiento. Con la aparición de las palabras nos encontramos en condiciones de abstraer de los objetos lo que mencionamos como sus propiedades y podemos acercarnos a la contemplación distinguiendo las relaciones existentes entre las cosas como algo distinto de sí mismas. Gracias a la capacidad del lenguaje es posible pasar del conocimiento de objetos y fenómenos singulares a su reflejo generalizado en forma de conceptos.

La relación entre lenguaje y pensamiento es íntima y de aquello hablan las investigaciones realizadas por Eisenson (1938) que manifiesta que el sujeto habla consigo mismo y piensa en voz alta. Las ideas que surgen de los objetos materiales aparecen primero en ideas similares a las del tacto. Luego pasan a tener significado intelectual; inmediatamente el significado halla expresión en el llamado lenguaje interior que finalmente por acción de la mente los símbolos comienzan a articularse. La función de la palabra, o la oración, es movilizar sus correspondientes, y cuanto más abstracta la idea más importante es la palabra.

### **2.1.2.1 La Representación en Geometría**

El término "representación" se aplica tanto a los estados mentales cuyo origen es el proceso perceptivo consciente, así como también a expresiones externas, modelos y enunciados -en algún lenguaje o mediante alguna técnica de reproducción.

Es fundamental entender a la representación como un medio con contenido propio y establecer la diferencia entre este contenido y el referente.

En el desarrollo del aprendizaje matemático en el niño y el adolescente desempeña un papel de primer orden la experiencia y la inducción. A través de operaciones concretas, como contar, comparar, clasificar, relacionar, el sujeto va adquiriendo representaciones lógicas y matemáticas, que más tarde valdrán por sí mismas de manera abstracta y serán susceptibles de formalización en un sistema plenamente deductivo, independiente ya de la experiencia directa.

Existen representaciones al servicio propio del conocimiento geométrico y representaciones que gracias a la geometría posibilitan hacer mapas, planos y diseños, entre ellas se encuentre la representación gráfica, entendida como un lenguaje para expresar y construir los conocimientos geométricos; se realiza por medio de esquemas, dibujos, más sencillos y directos que los símbolos de la escritura, es el lenguaje ideal para la intuición geométrica, la percepción visual y en definitiva la percepción espacial por cuanto no sólo es importante para expresar formas, sino que lo es para comprender razonamientos.

Hay dos formas de representación gráfica, la gráfica plana en la cual se encuentran dos posibilidades la reproducción exacta de la figura inicial por medio de un cambio de escala la cual exige un pequeño razonamiento de proporcionalidad y la reproducción perspectiva que implica reconocer una figura desde diferentes puntos de vista; y la representación gráfica del espacio que permite comunicar y expresar información espacial percibida al observar los objetos tridimensionales.

### 2.1.3. Acerca de la Argumentación

El interés por la argumentación ha aparecido como un interés por las formas de razonamiento que escapan a las normas y los esquemas lógicos y que surgen espontáneamente tan pronto como hay un debate con alguien.

Se considera como argumento todo aquello que se ofrece, o todo lo que es utilizado, para justificar o para refutar una proposición.

Un argumento es la respuesta a la pregunta “ ¿ por qué enuncia o cree tal cosa usted? ”

La argumentación tiene una importancia enorme en la vida social y educativa. Utilizamos la argumentación para justificar nuestros pensamientos o nuestros comportamientos, para persuadir a los demás de nuestros puntos de vista, para influir sobre el comportamiento de los otros, como base para la toma de decisiones. De hecho, ámbitos de tanta importancia social como la política o la administración de justicia se basan en la argumentación.

La capacidad para argumentar correctamente suele ir emparejada con la capacidad de influir sobre las personas y es un reflejo de la organización del pensamiento.

En todo proceso argumentativo, se distinguen tres elementos: el objeto, la tesis y los argumentos:

El *objeto* de la argumentación es el tema sobre el cual se va a argumentar.

La *tesis* es la posición que el argumentador, tiene respecto al tema de argumentación.

Los *argumentos* son las razones en las que basamos nuestra posición ante el tema objeto de la argumentación.

### 2.1.3.1 Clases de argumentación

A la hora de preparar una argumentación se pueden utilizar diferentes clases de argumentos.

Los más importantes son los argumentos racionales, los de hecho, los de ejemplificación y los de autoridad.

**Tabla 2. Tipos de Argumento**

TIPOS DE ARGUMENTO	EJEMPLO
Argumentos racionales: Se basan en las ideas y verdades admitidas y aceptadas por el conjunto de la sociedad.	«No hay que contaminar el mar», por que el mar es una fuente de vida.
Argumentos de hecho. Son aquellos que se basan en pruebas observables.	«Este año ha llovido muy poco», por que los pantanos están a un tercio de su capacidad.
Argumentos de ejemplificación. Son aquellos que se basan en ejemplos concretos.	«La mayoría de los países desarrollados aprovechan sus residuos», como en Alemania donde se recicla papel usado desde hace muchos años y en Japón donde se fabrica objetos de plástico a partir de plástico ya usado.
	«En todas las épocas, el dinero ha tenido un

Argumentos de autoridad. Son aquellos que están basados en la opinión de una persona de reconocido prestigio.	gran poder», se puede apoyar en el siguiente argumento de autoridad: Ya dijo Quevedo: «Poderoso caballero es don dinero».
---	--

### 2.1.3.2 Conectores lógicos en la argumentación

En la siguiente tabla, se presentan los conectores lógicos utilizados en el proceso de la argumentación, con un ejemplo ilustrativo.

**Tabla 3 Conectores lógicos en la argumentación**

CONECTOR	EXPLICACIÓN
Explicativo: Relaciona una idea con su causa o efecto.	Causa – efecto: Por lo tanto, por consiguiente, entonces, por tal motivo, a causa de esto... Efecto – causa: Las causas de esto es, se debe a, es resultado de, sucede por...
Comparativo: Establecen relaciones de similitud o equivalencia.	Así mismo, tanto como, igualmente, del mismo modo, se parecen a...
Deductivos: Particularizan, detallan o ejemplifican una idea general ya expuesta.	Por ejemplo, entre otros están como, así tenemos...
Inductivo: Antecedan una idea general, luego de haberla particularizado, detallado o ejemplificado.	En general, en conclusión, en últimas, en definitiva, generalizando...
Conjuntivos: Señalan suma, adición.	Y, además, también, otro, incluso, de la misma manera...

## **2.2. Referentes Disciplinar**

### **2.2.1 Acerca del conocimiento matemático.**

En esta investigación se asume el aprendizaje de la noción de volumen en el espacio escolar producto de la evolución de las interacciones entre un saber, en este caso el de volumen, un sistema educativo y unos alumnos con el fin de desarrollar dicho saber por parte del sujeto ( Bouzzaqui, 1981), en esta interacción el alumno construye el conocimiento pasando por concepciones sucesivas, las cuales no han sido tenidas en cuenta por la enseñanza. Desde este punto de vista se podría sustentar la construcción de un concepto matemático como un proceso en el que el alumno resignifica el saber matemático escolar, expresado por maestros, textos y programas, a partir de sus propias concepciones; la no conceptualización puede atribuirse a la disyunción entre las concepciones de los maestros y los alumnos acerca de la noción.

Por esta razón, es bien importante y justificado hacer un trabajo de las nociones a partir de las concepciones desarrolladas por los estudiantes antes y después de la intervención escolar.

En el proceso de adquisición de los saberes, por diversas causas, algunas de dichas situaciones cobran más importancia que otras, lo que genera la aparición de conocimientos locales dando lugar a la concepción ( Bouzzaqui, 1989, pag 4),

Al asumir esta definición de concepción se privilegia el estado psicológico del individuo con respecto a una noción matemática, es decir, a lo que ocurre en su cerebro con respecto al saber, dando lugar a un sentido de la concepción individual; dentro de una situación didáctica se identifican concepciones en cada uno de sus componentes, entonces existen concepciones manifestadas por los profesores, por los textos y programas y por la misma matemática.

En cuanto a las concepciones de los alumnos, con respecto al proceso de enseñanza aprendizaje se tienen en primer lugar las concepciones iniciales o espontáneas que son aquellas que construye el niño antes de una intervención didáctica.

En este aspecto es importante resaltar que los estudiantes nunca parten de cero, antes de cualquier intervención didáctica, ha desarrollado una o varias concepciones a partir de su propio contexto.

En segundo lugar, las concepciones inducidas por la enseñanza las cuales son ganadas a partir de las concepciones iniciales tienen una influencia del maestro, los textos escolares de matemáticas y de los mismos programas del área; estas concepciones se explicitan o circulan a partir de imágenes mentales, representaciones, palabras relacionadas con la noción, definiciones, propiedades, teoremas que son a veces falsos, procesos algorítmicos.

A su vez, estas concepciones pueden ser controladas, es decir, construidas por los alumnos y provocadas por el maestro en forma intencional con el fin que adquieran una noción; y

descontroladas que son aquellas construidas por los alumnos durante el aprendizaje de una noción y que no son provocadas de manera intencional por el maestro.

Las concepciones difundidas por los textos y programas son también el resultado de la transposición didáctica, un grupo de expertos transforma el objeto matemático en un objeto de aprendizaje; en consecuencia los contenidos de la disciplina matemática, son en la mayoría de las ocasiones, totalmente diferentes a los contenidos de las matemáticas estudiadas en la escuela. Por lo tanto en la escuela se necesita desarrollar nuevas formas de representar, simbolizar, y comunicar las ideas matemáticas, pues la génesis histórica de una noción matemática tienen su origen en un largo proceso de desarrollo histórico de la misma, ella, antes de alcanzar el nivel bajo el cual se conoce, ha pasado por múltiples etapas con las que ha sido trabajada de varias maneras, dando la posibilidad de resolver determinado tipo de problemas en cada una de las épocas por las que ha trascendido.

Estas al igual que las anteriores, son el resultado de un colectivo, las concepciones de una noción matemática no pertenecen a un sola persona, sino a una concepción colectiva propia de una época y para su interpretación requiere de un conocimiento amplio del vocabulario, del contexto y de las matemáticas del momento en que se ubica la concepción.

El estudio de la concepción de volumen desde la disciplina matemática puede aportar elementos para comprender la naturaleza de la noción. A través de este estudio se pueden identificar las características o propiedades esenciales de dicha noción en el campo disciplinar; un estudio del volumen desde los aportes de la epistemología aporta

información sobre el desarrollo de la noción de volumen en el sujeto, sus representaciones, su evolución y los obstáculos que debe superarse en su obtención, si se desarrollara un estudio de la noción de volumen desde la educación matemática, éste nos aportara información acerca de los elementos que se priorizan en el aula para la enseñanza aprendizaje de la noción, es decir los saberes, los maestros, los currículos, los textos, la didáctica, los medios u objetos de enseñanza.

## **2.2.2. Fundamentación del concepto de volumen**

### **2.2.2.1 Propiedades de los cuerpos**

Las propiedades de los cuerpos, son las diferentes maneras como estos se presentan al observador, pudiendo estas ser *propiedades generales* aquellas que son comunes a todos los estados de la materia, ó ser *propiedades particulares* aquellas que se refieren solamente a determinados cuerpos.

Las *propiedades generales* de los cuerpos son aquellas enteramente inseparables de éste, cualquiera que sea el estado en que se encuentre, y tales que las conserva constantemente en todas las alteraciones y cambios que dicho cuerpo pueda sufrir.

Las *propiedades particulares* son aquellas que no son inherentes a todos los cuerpos, y reflejan la influencia de la realidad exterior sobre nuestros sentidos, producen diversas sensaciones por medio de las propiedades generales.

“Entre las *propiedades generales* hay dos, *el volumen y la impenetrabilidad*, esenciales en la existencia de la materia, por lo que se denominan cualidades inherentes, para diferenciarlas de las restantes; así, no podrán considerarse como materia las sombras ni las imágenes obtenidas en los espejos, por carecer de la propiedad de ser impenetrables.”

(Blanco 1999)

Volumen: Es la propiedad que tienen todos los cuerpos de ocupar un lugar en el espacio.

Impenetrabilidad: Propiedad que poseen los cuerpos de no poder ocupar simultáneamente una misma porción del espacio.

**Tabla 4 . Algunos ejemplos de propiedades de los cuerpos**

PROPIEDADES GENERALES	PROPIEDADES PARTICULARES
Volumen (Extensión)	Tenacidad
Inercia	Dureza
Movilidad	Elasticidad

*La capacidad* es el volumen de un cuerpo que tiene cabida en el hueco existente en otro cuerpo. *Volumen*, por otro lado, es el espacio ocupado por cualquier cuerpo. De hecho, conocida la capacidad de un cuerpo, se determina el volumen de la sustancia que contiene. Teniendo en cuenta lo anterior la capacidad se puede considerar como una propiedad particular, por que depende de una propiedad general.

#### **2.2.2.2 Diferentes concepciones del concepto de volumen**

Para Vergnaud, el volumen es una magnitud física que puede ser eventualmente medida directamente (ejemplo de los recipientes), en ese caso el volumen soporta propiedades que son inherentes a las medidas unidimensionales. Pero al mismo tiempo la medida del volumen puede ser calculada mediante una combinación de informaciones sobre magnitudes de otra naturaleza (medidas lineales y superficies), esto implica, más que la simple utilización de fórmulas (paralelepípedo, prisma, pirámide, esfera...) una concepción tridimensional del volumen, además de considerar que estos dos aspectos del volumen deben ser trabajados con coordinación para lo cual es útil un trabajo de rellenado. Según sus investigaciones el concepto de volumen no se capta hasta los 14 o 15 años, ya que en edades inferiores, las definiciones de volumen presentan tres categorías de respuestas: de tipo perímetro (es todo el largo de la habitación), de tipo área (es el conjunto de toda la habitación) de masa (es el interior de algo, o es llenar de agua o aire una caja) lo cual muestra la confusión del volumen con el peso y la masa.

En cuánto al concepto de volumen Piaget y sus colaboradores realizaron diversas experiencias sobre la conservación de cantidades continuas entre las cuales se destaca su

estudio sobre conservación de líquidos que son trasvasados a recipientes con distintas formas concluyendo que a partir de los seis y medio a los ocho años el niño reconoce que la cantidad de líquido permanece constante aunque se vierta en un recipiente con distinta forma, lo cual implicaría que el niño a partir de dicha edad está en condiciones de adquirir el concepto de capacidad, estos investigadores realizan experiencias similares a las de la aritmetización del área, pero con cubos en lugar de cuadrados obteniendo los mismos resultados. Además realizan pruebas específicas sobre la conservación del volumen interno donde se aprecia el carácter tardío de la comprensión de la constancia del volumen total de un sólido que se deforma ( frente a otras cualidades como cantidad de materia, peso etc).

En Martínez (1989) se encuentra que Lunzer en 1960 no encontró que niños entre los seis a catorce años entendiera el volumen como “lo que está rodeado por caras limitadoras”, sin embargo considera que la conservación del volumen surge entre los 6 a 8 años señalando que la conservación del desplazamiento del volumen puede reconocerse espontáneamente en una cierta etapa del desarrollo, pero debido a que la escuela no facilita actividades de inmersión, ya que esta conservación precisa la del volumen, se alcanza más tarde. Le parece dudoso que la multiplicación de las 3 dimensiones aparezca espontáneamente en el niño para determinar el volumen de un sólido, y ello se debe a la influencia de la escuela.

El mismo Martínez (1989) indica que Lovell y Ogilvie en 1961 consideran que para los alumnos de primaria el volumen desalojado parece depender del peso del objeto sumergido, de la profundidad a que es sumergido, del tamaño del recipiente y de otros factores que no influyen. Estos investigadores piensan “ que es posible que los niños pudieran aprender más rápidamente cuestiones relativas al volumen si en la escuela se

llevasen a cabo experiencias que pusieran de relieve simultáneamente la efectividad de los factores influyentes y la inoperancia de los otros “.

**Tabla 5 . Paralelo entre volumen y capacidad**

<b>VOLUMEN</b>	<b>CAPACIDAD</b>
Propiedad de los cuerpos	Cualidad de los cuerpos
Espacio ocupado. Sugiere una cosa que reclame espacio.	Espacio, con capacidad de ser llenado. Sugiere un recipiente para poner cosas en él.
Depende de los cambios de temperatura y presión, a los que se encuentre expuesto el cuerpo.	Depende del objeto que contiene y de lo que va a contener.
Las medidas de volumen son utilizadas para objetos de tres dimensiones, que permiten medir linealmente cada una de ellas.	Las medidas de capacidad se usan para referirse a la cantidad de sustancia que cabe en un cuerpo.
Existen verbos específicos para expresar las acciones de medir esta magnitud, ej: <i>cubicar</i>	Existen verbos específicos para expresar las acciones de medir esta magnitud, ej: <i>aforar , arquear</i>
El modelo matemático para trabajar el volumen, atiende la utilización de fórmulas en tres aspectos: Cuando se refiere a cuerpos geométricos. Cuando se refiere a regiones geométricas. (Espacios limitados por diferentes tipos de superficies) Regiones espaciales. (Sólidos en revolución)	La matemática no ha elaborado ningún modelo para la capacidad como tal, por lo que hay que recurrir a su relación con el volumen.

### 2.2.2.3 Fundamentación matemática del concepto de volumen

La siguiente fundamentación teórica matemática, surgió de la discusión que llevó a cabo el equipo de investigación con el profesor Jesús Hernando Pérez alcázar, Profesor de la Universidad Nacional (Departamento de Matemáticas) y Asesor Pedagógico de la Asociación Anillo de Matemáticas.

Hay un momento histórico llamado de la medida o espacios métricos, en este proceso hay que diferenciar muy bien entre lo que es una magnitud y su medida, según los Griegos “ toda cualidad es una magnitud, en ese sentido toda cualidad se explicita a partir de un característica”.

En el caso de la longitud que es una cualidad, esta existe así no haya número; en lo cualitativo lo medible son las magnitudes, un caso particular es la longitud de algo y otro caso es tener longitud, en el ejemplo anterior si hablamos de segmentos lo asociamos a los longitudes a partir de una relación de equivalencia entre líneas.

La línea es una abstracción puramente matemática a nivel escolar, el borde de una mesa no es una línea pues en el mundo físico no hay líneas, en el caso del borde de una regla ese borde tiene una forma de segmento, o línea, a partir de esta consideración hablamos del objeto matemático línea y para medirla se utiliza el compás el cual no hace parte del mundo físico.

Luego en lo didáctico se debe trabajar primero con segmentos y luego con otras líneas, la relación que se establece con un objeto que tiene longitud es ponerle número a esa magnitudes. Luego las magnitudes de este contexto son absolutas y la medida es relativa por que se le asigna un número a una línea dependiendo del patrón de medida.

Entre las magnitudes hay unas como la distancia, y es la única que los matemáticos llaman métrica, por que cuando se habla de distancias se habla de parejas ordenadas. En el caso de la distancia  $d(A, B)$ , se habla de un espacio métrico, cuya teoría matemática definida

como: cualquier conjunto (X) en el cual hay una distancia simbólicamente escrito todo de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 d(X) &\longrightarrow \mathbb{R} \\
 (a, b) &\longrightarrow d(a, b) \\
 d(a, b) &\geq 0 \leftrightarrow a = b \\
 d(a, b) &= d(b, a) \\
 d(a, c) &\leq d(a, b) + d(b, c).
 \end{aligned}$$

Esta consideración teórica permite que la palabra métrico introduzca al sujeto en los espacios métricos y esta estructura matemática tiene tres momentos: primer momento es el de la distancia y esto nos conduce a la topología, el segundo momento el de las áreas y nos conduce a los polígonos, a los planos espaciales, a las superficies planas, el tercer momento es el de los sólidos que nos conduce al espacio de las tres dimensiones.

A partir de estos tres momentos cabe la pregunta ¿Qué es lo que tiene volumen?, entonces el volumen se asocia a los cuerpos y en esta instancia se habla de sólidos; **esta palabra no existe en la física sino en el lenguaje común a partir de él lo metemos en la matemática y le damos una estructura ya sea euclidiana, de Riemman o de Lobachevsqui.**

Luego son los sólidos los que tienen volumen es el caso de los paralelepípedos, los cilindros, los cubos, las pirámides. Desde la teoría matemática se pueden afirmar tienen volumen la reunión o unión matemática entre ellos también la tienen es el caso:

$$(X) = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 = S$$

En general todo sólido tiene capacidad si lo imagino como un recipiente, si tengo un sólido y otro y reúno esos sólidos obtengo otro sólido.

Estas características de los sólidos nos permiten axiomatizar el concepto de volumen para ello, se proponen dos niveles y sus axiomas: nivel 1 llamado lo susceptible de ser medido y esto es tener longitud, tener superficie y tener volumen, entonces lo que hacemos en matemáticas es hacer abstracciones:

Conjunto  $(X)$  donde hay puntos en  $R_1, R_2$  y  $R_3$

Definimos cierto subconjunto de  $(B)$ , entonces  $(X, B)$  y para poder tener  $B$  se deben fijar unos axiomas:

- $(\emptyset \in B)$  entonces, una superficie vacía tiene área, vacío susceptible de ser medido.
- Si un tipo es susceptible de ser medido entonces el complemento de  $A$  también lo es, ejemplo si un cubo tiene volumen lo que está por fuera también.

Esto es: Si  $A \subseteq B \rightarrow C_A \subseteq B$

- Si  $V_1, V_2, V_3, \dots \in B \rightarrow U_B \in B$

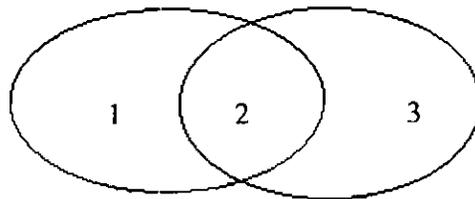
El nivel dos hace referencia a como se mide, y es la función que le asignamos a cada cosa susceptible de ser medido, de modo que le asignamos un número, por supuesto esto lo hacemos a partir de unos axiomas:

- $B \xrightarrow{u} R$   $u$  es la medida.  $B$  es lo susceptible de ser medido.
- La medida del vacío es cero,  $u$  de  $\emptyset = 0$
- La medida de cualquier cosa susceptible de ser medida es mayor que cero,

$$u(A) \geq 0$$

- Si A es susceptible de ser medido, y B es subconjunto de A Entonces la medida de A es mayor o igual que la medida de B. Esto es; si  $B \subseteq A$  entonces  $u(A) \geq u(B)$ .
- Si a una unión disyunta de cosas susceptibles de ser medibles, la medida de la unión es la suma de la medida de las que se unen.

Esto es;  $u \cup A_i = \sum u(A_i)$ , visto de otra forma



$$AT = A_1 + A_2 + A_3 \dots$$

## 2.3. Referentes Didácticos

### 2.3.1 El Modelo de Van Hiele

Analizar las bases del aprendizaje en cualquier área del conocimiento, implica también analizar los distintos niveles de conocimiento que sobre esa área se pueda presentar; En Llorens (1996), VAN HIELE propone estructurar el aprendizaje en un área del conocimiento como lo es la geometría, por medio de la estratificación de los procesos de

aprendizaje en el conocimiento humano, utilizando para ello una serie de niveles de conocimiento que permiten categorizar los distintos grados de representación del espacio.

El modelo está conformado por cuatro niveles, que describen características del proceso de pensamiento, siendo estos "reconocimiento", "análisis", "clasificación" y "deducción". A continuación se presenta una sinopsis de los niveles:

### **Nivel 1: Reconocimiento**

En el nivel inicial o básico, el espacio es simplemente observado y las propiedades de las figuras no son reconocidas explícitamente.

### **Nivel 2: Análisis**

En nivel 2 comienza un análisis de los conceptos geométricos. Por ejemplo, a través de la observación y la experimentación los estudiantes empiezan a discernir las características de las figuras. Estas propiedades que surgen se usan para conceptualizar clases de formas. Es notorio que las figuras tienen partes y son reconocidas mediante ellas; en este nivel los estudiantes pueden hacer generalizaciones pero sin embargo, aún no las pueden explicar, debido a que todavía no establece las interrelaciones entre las figuras, ni entienden las definiciones.

### **Nivel 3: Clasificación**

En este nivel, los estudiantes pueden establecer las interrelaciones en las figuras, deducen

propiedades de una figura y reconocen clases de figuras, entienden la inclusión de clases, las definiciones adquieren significado. Sin embargo, el estudiante en este nivel, no comprende el significado de la deducción como un todo ni el papel de los axiomas. Algunos resultados obtenidos de manera empírica se usan a menudo conjuntamente con técnicas de deducción. Se pueden seguir pruebas formales; pero los estudiantes no ven como el orden lógico podía ser alterado ni perciben tampoco cómo articular una demostración a partir de premisas diferentes o no familiares.

#### **Nivel 4: Deducción**

En este nivel el estudiante entiende el significado de la deducción como una manera de establecer una teoría geométrica, un sistema axiomas, postulados, definiciones, teoremas y demostraciones. Una persona puede construir, y no nada más memorizar, demostraciones, percibir la posibilidad del desarrollo de una prueba de varias maneras, entender la interacción de condiciones necesarias y suficientes y distingue entre una afirmación y su recíproca.

En este modelo cada nivel tiene sus propios símbolos lingüísticos y sus propios sistemas de relaciones para conectar esos símbolos. Así, una relación que es "correcta" en un nivel puede ser modificada en otro, (La inclusión de un grupo, por ejemplo, un cuadrado es también un rectángulo, ¡y un paralelogramo!). Un estudiante en el nivel 1 no concibe que esta clase de anidado puede darse realmente. Este tipo de nociones y su lenguaje correspondiente, sin embargo, son fundamentales para el nivel 2.

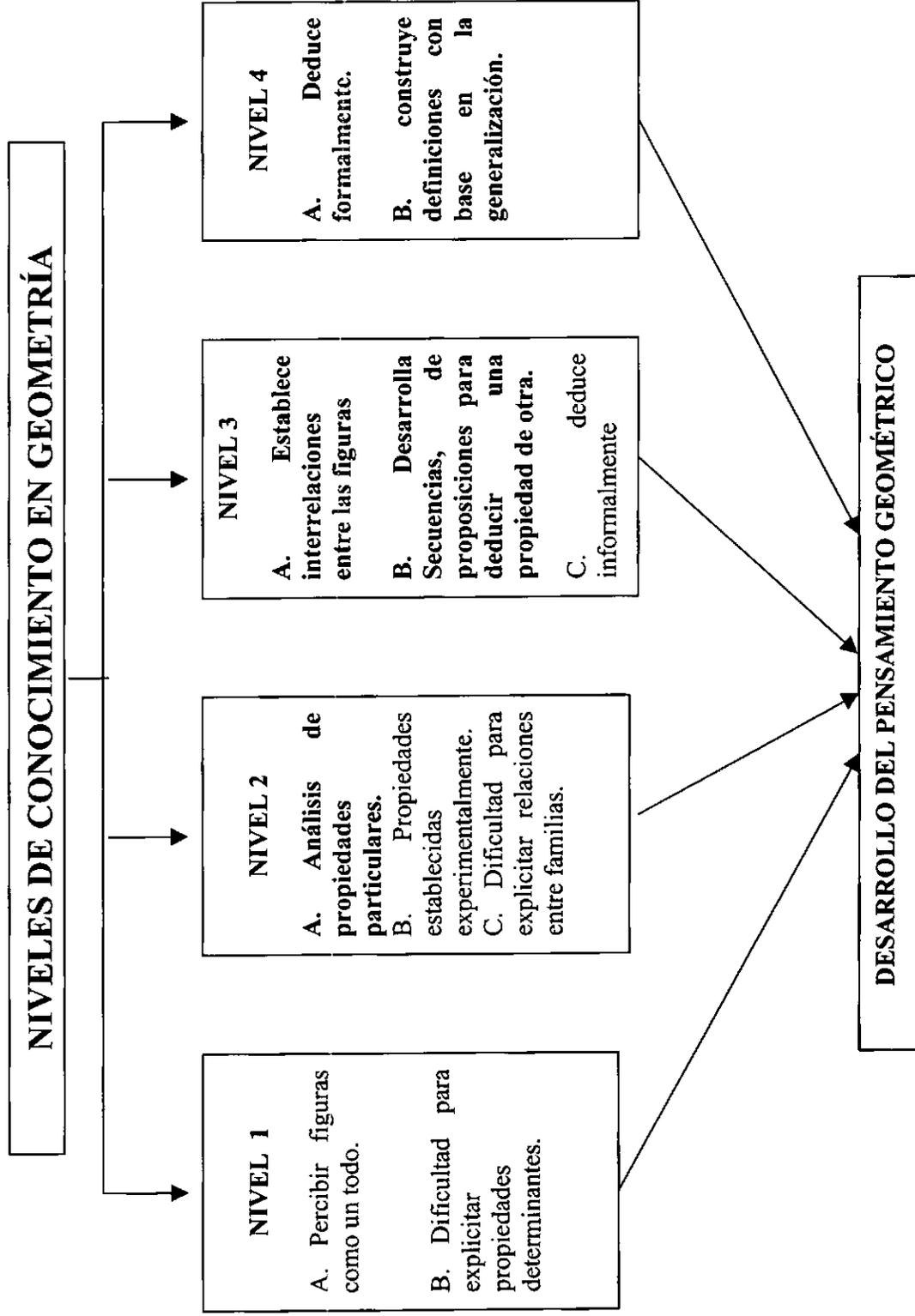
## **Nivel de Transición**

El aprendizaje es una experiencia diferente para cada persona y es un proceso absolutamente individual, el modelo de Van Hiele no descuida esto y por el contrario lo manifiesta en dos de sus propiedades más relevantes: La secuencial y la de ascenso.

Como secuencial entendemos que una persona debe avanzar en orden a lo largo de los niveles, para desempeñarse con éxito en un nivel particular, un educando debe haber asimilado las estrategias de los niveles precedentes; y como modelo de ascenso, se afirma que pasar o no de un nivel a otro depende más del contenido y los métodos de orientación recibidos que de la edad, ningún método de orientación lleva a un estudiante a brincar un nivel, algunos incrementan los progresos, mientras que otros retardan o incluso previenen un movimiento entre niveles.

Partiendo de la flexibilidad que el modelo de Van Hiele permite y teniendo en cuenta que cada estudiante es un universo propio y que en el grupo de estudiantes no sólo se presentan las diferencias cognitivas, sino que también debemos agregar los conocimientos y las experiencias previas de cada niño y que una verdadera y auténtica atención a la diversidad implica entonces, respetar esta realidad y actuar en ella con eficacia, consideramos pertinente la inclusión de niveles de transición, pues se hace evidente que ciertos estudiantes están en niveles intermedios, es decir en determinada etapa de su proceso de aprendizaje puede encontrarse que el estudiante tiene características del nivel precedente y del nivel posterior.

MODELO DE VAN HIELE



Los esposos VAN HIELE consideran que el paso de un nivel a otro es totalmente independiente de la edad en la cual se encuentre el individuo, ya que muchas personas que se encuentran en un determinado nivel pueden continuar en él por mucho tiempo si no han tenido la oportunidad de enfrentarse con experiencias que les inviten a pasar al siguiente nivel.

Es importante que el maestro tenga en cuenta que en un nivel pueden existir ciertos elementos que se manifiestan implícitamente en el razonamiento de un estudiante, pero que en la medida en que se avanza de nivel se convierten en elementos explícitos en el razonamiento del niño; Por ejemplo un chico puede considerar que una curva abierta puede ser una cancha de fútbol (en este momento él se refiere a la malla que rodea la cancha) y argumentar su posición con base en el hecho de que las curvas abiertas tienen un hueco para poder entrar, aquí se observa que el concepto de curvas abiertas se encuentra implícito para las personas que se ubican en el nivel de reconocimiento ya que ellas tratan de argumentar subjetivamente, con base a su experiencia próxima o a su cotidianidad, ahora si le sugerimos una serie de recorridos dibujados en una hoja, donde se le pide ubicar el punto de salida para cada uno a partir del cual seguirá con su dedo el camino del recorrido hasta encontrar su correspondiente punto de llegada, de manera que se cuestione al estudiante sobre la coincidencia o no del punto de llegada con el punto de salida en cada uno, es en este momento donde se inicia un desequilibrio cognitivo que permitirá por medio de constantes reflexiones y preguntas oportunas sacar a flote el concepto de curvas abiertas, volviéndose de esta manera un concepto explícito para el muchacho que ingresa a un nuevo nivel de razonamiento.

Una de las características del modelo de Van Hiele es que es secuencial, es decir que para construir un concepto, el estudiante siempre atravesará por cada uno de los niveles sin omitir ninguno, lo cual hace en forma lineal. Consideramos que el avance de un nivel a otro no sucede de forma inmediata, sino que permite un periodo de transición, en el cual el niño puede tener características del nivel anterior y del siguiente nivel, es así como en el ejemplo anterior, mientras en el nivel de reconocimiento un niño puede considerar una curva abierta como aquella que no termina en el mismo sitio y tiene un hueco para poder entrar, otro niño en el nivel de análisis argumenta objetivamente utilizando la comparación entre un objeto y otro, pasando de lo visual a lo experimental concreto «Si fuera abierta no terminaría allá, por que si es cerrada terminaría en la misma parte, pero como es abierta, no termina ahí». Mientras que un niño que se encuentra en el nivel de transición (1-2), tiende a deducir conclusiones por experimentación, argumentando que «Si el punto inicial y el punto final no coinciden se tiene una curva abierta, de lo contrario será cerrada». Manifestando de esta manera características de ambos niveles Reconocimiento (1) y Análisis (2).

Para facilitar el seguimiento de los procesos de aprendizaje del alumno dentro del aula de clase, se consideró utilizar para cada actividad propuesta la siguiente tabla de frecuencias de los estudiantes en cada uno de los niveles de razonamiento incluyendo sus argumentaciones en cada nivel.

**Tabla 6 . ACTIVIDAD No. 1 Recorridos Libres**

NIVEL	%	CARACTERÍSTICA
<b>RECONOCIMIENTO</b>	<b>25.1</b>	Argumenta subjetivamente, con base a su experiencia próxima o a su cotidianidad ( Ejemplos:- «es curva cerrada por que tiene forma de flecha». - «Es abierta por que no termina en el mismo sitio y tiene un hueco para poder entrar. »)
TRANSICIÓN (1-2)	<b>58.3</b>	Deduce conclusiones por experimentación, argumentando que « si el punto inicial y el punto final no coinciden se tiene una curva abierta, de lo contrario será cerrada. »)
<b>ANÁLISIS</b>	<b>16.6</b>	Argumenta objetivamente utilizando la comparación entre un objeto y otro, pasando de lo visual a lo experimental concreto (Ej: «Si fuera abierta no terminaría allá, por que si es cerrada terminaría en la misma parte, pero como es abierta, no termina ahí. »)

Cada nivel lleva asociado un tipo de lenguaje para comunicarse y un significado específico del concepto analizado; lo cual pone en alerta a los maestros con aquellos estudiantes que

aparentan un nivel de razonamiento superior al que realmente tienen porque han aprendido vocabulario y formas de trabajar propios del nivel superior, aunque realmente no los comprenden ni saben utilizar correctamente, siendo este el típico caso de un aprendizaje memorístico en la enseñanza tradicional centrado en la manipulación de fórmulas para la resolución de problemas cuantitativos.

En este contexto el trabajo central del profesor es conseguir que sus alumnos lleguen a ser conscientes del uso que están haciendo de esos elementos implícitos de su razonamiento y aprendan a utilizarlos de manera voluntaria, donde ese uso voluntario y correcto les permitirá alcanzar el siguiente nivel de razonamiento

Con esto no debemos olvidar que la enseñanza no tiene razón de ser si los actores de la comunicación no tienen el mismo código de interpretación, por ello si queremos que nuestros estudiantes nos entiendan realmente, debemos inicialmente situarnos en su nivel, en vez de pretender que ellos se sitúen en el nuestro.

Con la utilización del modelo de Van Hiele se hace evidente que los estudiantes tienen su propio ritmo de aprendizaje, en nuestra propuesta didáctica pretendemos que estas diferentes connotaciones se hagan explícitas lo que nos permite identificar el nivel de razonamiento en el cual se encuentra cada uno de nuestros estudiantes, posibilitándonos a través de la reflexión el diseño de actividades que permitan al estudiante acceder a un nivel superior.

### **2.3.2 Modelo didáctico de intervención.**

En la construcción del concepto de volumen consideramos importante partir de la discusión teórica entre propiedades generales y propiedades particulares de los cuerpos, esta discusión nos permitió elaborar actividades que conllevaran a que el estudiante estableciera diferencias entre cualidad primaria y cualidad secundaria; haciéndose indispensable realizar un estudio integral de la propiedad que nos permita aislarla, comparar objetos respecto a ella, además de plantear la necesidad de estimar la medida del volumen de un objeto, aplicando siempre estos conocimientos a situaciones de la vida cotidiana.

Desde esta perspectiva consideramos validar y complementar el modelo didáctico propuesto por M<sup>ª</sup> angélica del Olmo y su grupo de investigación (1986) el cual toma como punto de partida la Percepción del concepto, continuando con un proceso de comparación, y estimación, del mismo; las actividades propuestas para desarrollar este modelo didáctico buscaron conducir al estudiante a un progreso gradual en la comprensión del concepto.

#### **Percepción**

La percepción del volumen de un cuerpo implica la elaboración de representaciones mentales del objeto a partir de las diferentes informaciones que recibimos mediante nuestros sentidos, esta puede ser de dos tipos:

- **Áptica** cuya información se obtiene por medio del tacto, al tocar, y palpar se conoce y reconocen algunas de las características de los objetos (forma, tamaño textura).
- **Visual** exige el desarrollo de una serie de habilidades entre las que se destacan el saber ver y el saber interpretarlas cuales no son innatas e instantáneas, sino que deben ser aprendidas.

Estas representaciones mentales son fiel reflejo del espacio percibido por el niño.

### **La Comparación**

Es una capacidad cognitiva de los más altos niveles en las operaciones mentales que desarrolla un individuo, establece relaciones de semejanza y diferencia entre los objetos conduciendo a la clasificación según las características de los objetos

Reuven Feurestein considera que las operaciones son el conjunto de acciones interiorizadas, organizadas y coordinadas, por medio de las cuales una persona elabora información, procedente de muchas fuentes internas o externas; generalmente las actividades mentales pasan por una gama de niveles que van desde las más simples, hasta las más complejas y que se manifiestan en operaciones que se mueven desde las más primitivas, como el reconocimiento de objetos muy familiares, hasta los niveles más altos que exigen operaciones como la identificación, la comparación, clasificación, seriación y todo tipo de razonamientos.

En la construcción del concepto de volumen se pueden realizar tres tipos de comparaciones : Capacidad – capacidad .

Volumen – Volumen.

Capacidad – Volumen .

### **Estimación**

Estimar corresponde a un juicio de valor del resultado de una operación numérica o de la medida de una cantidad, en función de circunstancias individuales del que lo emite, donde las intuiciones y experiencias propias del sujeto que estima tienen importancia destacada.

Existen dos tipos de estimación:

1. Estimación en cálculo o cálculo estimativo, el cual está referido únicamente a las operaciones aritméticas y a los juicios que pueden establecerse sobre sus resultados.
2. Estimación en medida, el cual está referido a los juicios que pueden establecerse sobre el valor de una determinada cantidad o bien la valoración que nos merece el resultado de una medida.

Laurent (1976) considera que "estimación es una habilidad mental para hacer conjeturas en cálculo y medida con una formación previa, caracterizado por ser un proceso educable".

Según Reys (1984) La estimación se caracteriza por que:

1. Consiste en valorar una cantidad o el resultado de una operación.

2. El sujeto que debe hacer la valoración tiene alguna información referente o experiencia sobre la situación que debe enjuiciar.
3. La valoración se realiza por lo general de forma mental.
4. Se hace con rapidez y empleando números sencillos.
5. El valor estimado no es necesariamente exacto, pero si adecuado para tomar decisiones.
6. El valor asignado admite diferentes aproximaciones, dependiendo de quién realice la valoración.

### *Aproximación en la estimación*

La aproximación es considerada una parte importante dentro de la estimación, pero no la agota. La aproximación se ocupa de determinar un valor numérico y su grado de proximidad a otro valor numérico no utilizable directamente, por alguna otra cosa y nada más, lo cuál gana en precisión.

### Causas de la estimación

1. Imposibilidad de un valor exacto.
2. Imposibilidad de tratamiento numérico exacto.
3. Limitaciones humanas y carencia de medidas.
4. Consistencia de la información.

### *Razones para enseñar estimación*

<b>DE EN LA VIDA</b>	<b>UTILIDAD EN LA ESCUELA</b>	<b>DE FORMACIÓN DEL CONOCIMIENTO</b>	<b>ESCOLAR DEL PENSAMIENTO.</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Se emplea en situaciones reales.</li> <li>➤ Atiende a la razonabilidad de los resultados.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Es un recurso de aprendizaje.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Completa la visión de la matemática.</li> <li>➤ Mejora el contenido actual de la instrucción.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Potencia estrategias propias en la matemática de la vida diaria.</li> <li>➤ Conecta con la resolución de problemas.</li> </ul>

## **ESTRATEGIAS DE ESTIMACIÓN CON MEDIDA**

Estas estrategias conllevan a la elección de un término de comparación o unidad de referencia y al establecimiento de una relación sensata entre la cantidad a estimar y la unidad.

La estimación con medida requiere de ciertas capacidades y destrezas previas como:

1. Interiorización de la unidad de medida: la cual corresponde a la referencia perceptiva que tiene cada uno de los sujetos respecto a unidades principales de medida de magnitudes básicas que por apreciación visual es posible que el sujeto que estima sea capaz de reconocerla, construirla o señalar dimensiones aproximadas a la unidad elegida.
2. Conocimiento de referentes: que corresponde al conocimiento de la medida de cantidades que resultan muy próximas entre sí, por superposición visual o directa ( pulgada , brazada, pie, etc., ).
3. Técnicas Indirectas: aplicación de fórmulas.

Las estrategias para la estimación de medida se pueden clasificar según que la cantidad a estimarse pueda asociarse con alguna unidad o referente, ó por descomposición de la cantidad a estimar, entre estas estrategias, se encuentran:

1. Por Comparación: la cual consiste en asociar la cantidad a estimar con alguna unidad o referente. Encontrándose tres casos:
  - Primer caso: unidad a estimar igual a cantidad estimada.
  - Segundo Caso: unidad a estimar múltiplo de la cantidad estimada.
  - Tercer Caso: unidad a estimar divisor de la cantidad estimada.

Por Descomposición / Recomposición : Cuando hay que valorar una cantidad constituida por diferentes partes o elementos fácilmente distinguibles en el objeto considerado., lo que implica realizar:

- Una descomposición mental de la cantidad a valorar, apoyándose en la percepción del objeto con sus propias peculiaridades.
- Una estimación particular por comparación en cada una de las partes descompuestas.
- Una valoración total de las cantidades estimadas.

Al principio los niños utilizan diferentes estrategias para determinar el volumen de un cuerpo; siendo importante para ello extendernos sobre las siguientes preguntas ¿Qué cuerpos empaquetan el espacio? Y ¿cuales cuerpos teselan mejor el espacio?.

Es importante tener en cuenta que las actividades se aplicarán a todos los estudiantes categorizando una muestra de 25 estudiantes .

### **3. DISEÑO METODOLÓGICO DE LA INVESTIGACIÓN**

#### **3.1 Enfoque Metodológico**

En el proceso de investigación es necesaria la evaluación permanente de los objetivos, las acciones y las estrategias de la investigación, con el fin de reconceptualizar, realizar ajustes, y plantear estrategias de solución ante las dificultades presentadas, que permitan reorientar el trabajo de intervención didáctica en el aula; Este proceso es posible a través de la utilización de la técnica de triangulación entendida como las relaciones que se establecen dentro del aula entre el saber disciplinar, el estudiante y el profesor, la cual se explicita desde el análisis de los registros de los estudiantes, los registros de campo y el desarrollo del marco conceptual de este proyecto.

Para describir nuestro enfoque particular en el aula, propusimos una investigación de tipo cualitativo, basado en la Investigación –acción, por considerarlo una alternativa metodológica que permite la producción de resultados como efecto de la interacción continua entre los procesos de reflexión, observación, diseño, puesta en escena, análisis y teorización al interior del aula.

El proyecto se desarrolló a partir de un enfoque cualitativo, que da cuenta del proceso de investigación mediante la observación y registro de los avances en la apropiación conceptual de los estudiantes.

El enfoque metodológico se sintetiza así:

- Apropiación conceptual desde la mirada disciplinar, epistemológica, y didáctica, en particular del concepto, y en general de la educación matemática.
- Identificación de los elementos conceptuales y categorías de análisis que pueden permitir evaluar todo el proceso investigativo.

En general el enfoque investigativo del proyecto trata de establecer una relación directa entre los elementos conceptuales, métodos y procedimientos orientados hacia la conceptualización en el aula, en el contexto de las actividades de intervención de cada una de las etapas de la misma.

De manera que el desarrollo metodológico del proceso investigativo se llevó a cabo bajo una estructuración didáctica paulatina que partió desde el diseño didáctico de las actividades, aplicado en tres etapas (Unidad Didáctica) y la Implementación de este diseño didáctico desarrollado en cuatro fases para cada una de las actividades propuestas ( Aplicación, Análisis, Retroalimentación y Sistematización de la actividad).

### **3.2 Etapas del Proyecto**

El proyecto se desarrolla en tres etapas fundamentales así:

- La primera etapa buscó la comprensión por parte de los niños de conceptos asociados al concepto de volumen, los cuales consideramos preliminares en la construcción de este concepto; De manera que partiendo de situaciones que resultaran familiares para los estudiantes (recorridos habituales, formas de objetos conocidos...) y mediante actividades manipulativas, lúdicas ( recorte, modelado, etc), buscamos ir fomentando el desarrollo de los conceptos geométricos que consideramos preliminares para la construcción del concepto de Volumen, para luego acceder a este. En el estudio de elementos del plano, polígonos y cuerpos geométricos, las actividades fueron de reconocimiento en el espacio y manipulativas, como construcción con palillos, recorte y modelado, sin entrar en la formalización de los conocimientos con fórmulas matemáticas, proponiéndose un total de 6 actividades.
  
- La etapa de Retroalimentación se orientó como una etapa de ajuste en donde fue posible a través de la evocación de las actividades anteriormente realizadas, resaltar los

aprendizajes logrados, como también mirar las dificultades que se presentaban en cuanto a la comprensión de los conceptos trabajados en la primera etapa, así como también, sirvió como un periodo de acople para los estudiantes que ingresaron por primera vez al trabajo con esta propuesta

- La segunda etapa centró su atención en el diseño, implementación y evaluación de actividades que condujeran al estudiante a un progreso gradual en la comprensión del concepto, teniendo como eje la relación entre volumen y capacidad. Es así como desde la discusión teórica entre propiedades generales y particulares de los cuerpos consideramos estructurar actividades bajo el Modelo Didáctico de PERCEPCIÓN – COMPARACIÓN – ESTIMACIÓN el cual conlleva al estudiante a realizar un estudio integral de la propiedad.

### **3.3 Actividades de intervención**

#### **3.3.1 Diseño de actividades primera etapa del proyecto**

##### **3.3.1.1 Prueba Diagnóstica (ver anexo 1)**

Entendiendo que diagnosticar implica la descripción sucinta de las actividades mentales del individuo antes de intervenir en la construcción activa de un concepto; y que el aplicar una prueba diagnóstico nos permite reconocer un conjunto de signos que fijan el carácter peculiar de la estructura mental de tipo cognitivo de un individuo antes de interferir significativamente con transformaciones de tipo estructural en el desarrollo del

pensamiento de un individuo. Nos parece importante explicitar que el carácter de esta prueba diagnóstica no fue del todo disciplinar, nuestro propósito fue el de conocer algunas características del proceso cognitivo del estudiante.

#### **3.3.1.1.1 Objetivos Prueba Diagnóstica:**

- Identificar el conjunto de acciones interiorizadas, organizadas y coordinadas por medio de las cuales el estudiante elabora información procedente de muchas fuentes internas o externas.
  
- Establecer la etapa de razonamiento en la cual se encuentran los estudiantes teniendo en cuenta el modelo de Van Hiele.

#### **3.3.1.1.2 Análisis prueba diagnóstica por preguntas**

##### **Intencionalidad de las preguntas de la prueba**

Tanto la primera como la segunda pregunta buscaron centrar la atención de los estudiantes, con el fin de poder conocer en que nivel de observación se encuentran.

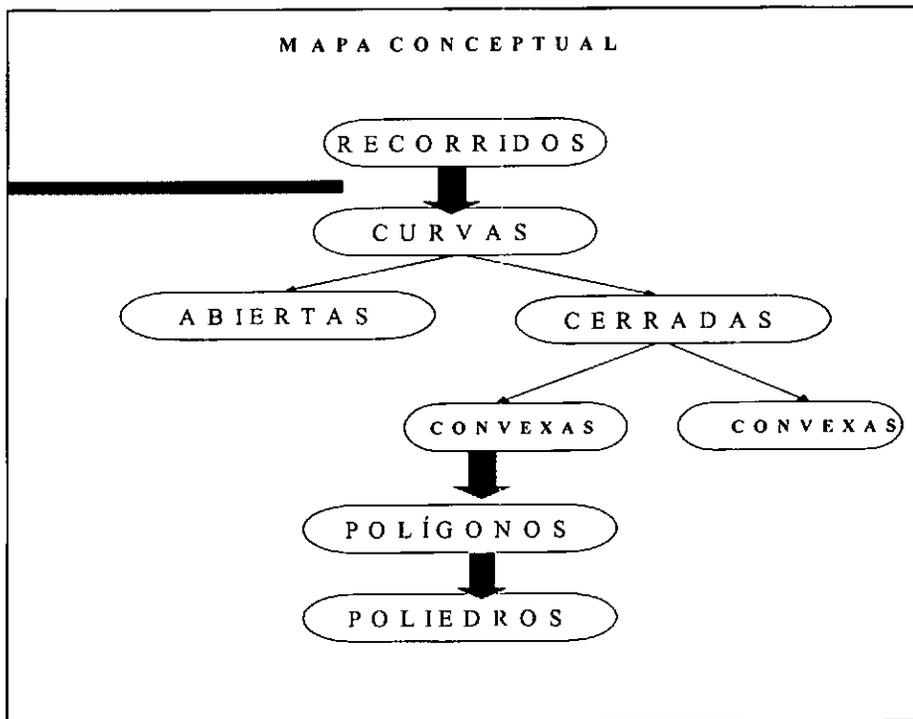
La pregunta 3 a) así como la cuarta pregunta buscó estimular visualmente al estudiante, de manera que pueda identificar características implícitas determinantes en cada uno de los elementos presentados generando así categorías de clasificación que permitan la comparación respecto a la forma y tamaño de los objetos.

La quinta pregunta buscó identificar las ideas previas de los estudiantes respecto al concepto de área, además de conocer el tipo de argumentación empleada por el niño en la justificación de su respuesta.

### **3.3.1.2 Actividades para la Construcción de Conceptos Asociados al Concepto De Volumen**

#### **Mapa Conceptual**

En el siguiente mapa conceptual hemos considerado aquellos conceptos preliminares al concepto de volumen, cuya comprensión creemos son base fundamental en la construcción del mismo; con base en este mapa se estructuraron las actividades que se propusieron en cada una de las fases de aprendizaje comprendidas en la primera etapa de nuestro proyecto.



A continuación presentamos una descripción de cada una de las actividades de esta etapa en donde incluimos el propósito de la actividad y la forma como se llevó cabo.

La guía de la actividad puede observarse en el anexo **Sistema de Instrumentos** (cartilla).

### 3.3.1.2.1 ACTIVIDAD No.1. Recorridos Libres

Esta actividad permite el desarrollo de la ubicación espacial del estudiante, así como también permitió identificar a partir de las representaciones gráficas de los estudiantes, si presentan dificultades en la ubicación espacial..

#### Descripción de la actividad

Se propuso a los estudiantes realizar diversos recorridos sobre la cancha de baloncesto, de manera que por parejas un estudiante realizaba su desplazamiento dejándolo marcado con arena, mientras que su compañero lo representaba gráficamente indicando el punto de referencia elegido. Al estudiante se le entregó una hoja en blanco, para que desarrollara la actividad.

**Ver la actividad en el anexo: Sistema de Instrumentos.**

### **3.3.1.2.2 ACTIVIDAD No.2 Jugando con los recorridos**

Esta actividad buscó que a partir de la comparación de recorridos, el estudiante llegara a la generalización del concepto de curvas abiertas y curvas cerradas.

#### **Descripción de la actividad**

En esta segunda actividad se presentó a los estudiantes una serie de recorridos dibujados en una hoja, donde se le pidió que identificaran un punto de salida, a partir del cual seguirían con su dedo el camino del recorrido hasta encontrar un punto de llegada, para luego contestar las preguntas que aparecían en la hoja; finalmente se le solicitó al estudiante seguir nuevamente con lana aquellos recorridos en los cuales el punto de partida y el de llegada coinciden, además de darles un nombre y seguir con lápices de colores aquellos recorridos donde estos puntos no coinciden y luego darles un nombre.

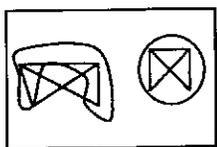
#### **Actividad No. 3 Jugando con las curvas**

Esta actividad tiene como propósito construir el concepto de convexo y no convexo.

### Descripción de la actividad

La actividad se desarrolla de la siguiente manera: En la primera parte se muestra al estudiante una serie de figuras simples y se le pide que las clasifique en los conjuntos de curvas abiertas (conjunto A) y cerradas (conjunto B). Luego se le solicita a un estudiante que muestre en el tablero su clasificación.

Posteriormente los estudiantes pintarán con diferente color el interior y exterior de cada una de las figuras del conjunto B, colocando en el interior de la figura diferentes puntos, los



cuales unirán por medio de segmentos de recta, como se muestra en la figura . Cuestionándolos si en cada una de las figuras todas las líneas trazadas yacían en el interior de esta.

#### 3.3.1.2.4 Actividad No. 4 Jugando con Polígonos

Esta actividad buscó orientar al estudiante en la construcción del concepto de polígono, a través de la manipulación de palillos y plastilina.

### Descripción de la actividad

La actividad se presentó en dos partes:

□ La primera parte se desarrolló de la siguiente manera:

1. Tomando el conjunto B de la actividad anterior, se solicitó a los estudiantes clasificar las figuras en convexas y no convexas.

2. Se solicitó a un estudiante realizar la clasificación en el tablero y se discutió el criterio de selección.
  3. Tomando solamente las figuras convexas se pidió a los estudiantes que elaboraran una nueva clasificación de las figuras, justificando el nuevo criterio de selección.
  4. Luego se les pidió reproducir cada una de las figuras convexas, utilizando los palillos y la plastilina..
  5. Finalmente se les pidió que compararan las figuras construidas con las dibujadas.
- En la segunda parte se utilizarán como materiales palillos, plastilina, y papel seda de diferente color. La cual se desarrolló de la siguiente manera:
1. Se presentó al estudiante una serie de polígonos de diferente No. de lados y se le pidió que los construyera utilizando la plastilina, los palillos y los forrara en papel.
  2. Se le solicitó completar la tabla que aparece en la guía, respondiendo las preguntas planteadas.

#### **3.1.1.2.5 Actividad No. 5 Juguemos con Poliedros**

La siguiente actividad tuvo como propósito identificar los polígonos que forman parte de un cuerpo.

### **Descripción de la actividad**

La actividad se desarrolló de la siguiente forma:

1. Se mostró a los estudiantes diferentes cuerpos (poliedros) elaborados por nosotras.
2. Los estudiantes construyeron cada cuerpo (poliedro) utilizando palillos y plastilina, además de que forraran las caras con papel.
3. Se le solicitó a los niños dibujar las caras de cada uno de los cuerpos (poliedros), identificando su nombre y No. de lados.
4. Luego se les pidió a los estudiantes representar en el papel cada cuerpo, desglosándolo en cada una de sus caras, indicando el No. de figuras (polígonos), que se necesitarían para formar nuevamente el cuerpo, para finalmente completar la tabla que aparece en la guía.

#### **3.1.1.2.6 Actividad No. 6 Construyendo Cuerpos**

El propósito de esta actividad fue llevar a cabo una retroalimentación del trabajo realizado con los estudiantes en la construcción de conceptos de polígono y cuerpo geométrico

Por medio de la construcción de la maqueta de la iglesia del barrio utilizando palillos, plastilina y papel seda de diferentes colores;

### **Descripción de la actividad**

Esta actividad se desarrolló de la siguiente forma:

1. Se le solicitó a cada uno de los estudiantes dibujar en una hoja la iglesia del barrio, ( el frente, la parte de atrás, y los lados). Esto lo debían traer como punto de partida para esta actividad.
2. Luego se les pedía que utilizando los palillos y la plastilina construyeran la maqueta que representara la iglesia del barrio.
3. Además debían forrar cada una de las caras de la iglesia
4. Para posteriormente responder ¿Cuántos y cuáles polígonos identificas en la maqueta que construiste? , y luego dibujarlos.

### **3.3.2 Diseño de actividades fase de retroalimentación del proyecto**

El período de retroalimentación permitió a los estudiantes con los cuales se venía desarrollando el proyecto la evocación de las actividades anteriormente realizadas, en él fue posible resaltar los aprendizajes logrados, como también mirar las dificultades que se presentaban en cuanto a la comprensión de los conceptos trabajados en la primera etapa, este período sirvió como acople para los estudiantes que ingresaron por primera vez al trabajo con esta propuesta.

Concebimos el período de retroalimentación como punto de partida para la formulación de estrategias que permitieran suplir las dificultades encontradas, tuvo una duración de 2 meses iniciándose en Febrero del 2001 y finalizando en el mes de Marzo.

**CONCÉNTRESE CON LAS CURVAS (ver anexo 2)**

Este instrumento tuvo como propósito didáctico que el niño construyera curvas y figuras poligonales a partir de las características o propiedades que se le presentaban, como también el proceso reversible al momento de presentarle una curva o una figura poligonal el niño el la describía haciendo alusión a sus propiedades en forma oral o escrita, posibilitando de esta manera el manejo de categorías de clasificación

### **3.3.3 Diseño de actividades segunda etapa del proyecto**

El diseño de las actividades de ésta segunda etapa se encuentra fundamentado en los conceptos preliminares al concepto de volumen, los cuales fueron trabajados en la etapa anterior; con estas actividades se buscó conducir al estudiante a un progreso gradual en la construcción y comprensión del concepto de volumen, bajo el modelo didáctico de PERCEPCIÓN – COMPARACIÓN – ESTIMACIÓN.

#### **3.3.3.1 Actividades para la etapa de percepción**

Tomar como punto de partida la Percepción, nos permitió centrar el trabajo de los estudiantes en la identificación de las cualidades de los objetos; las cuatro actividades que conformaron esta etapa son las siguientes: (La guía de la actividad puede observarse en el anexo **Sistema de Instrumentos** cartilla).

##### **3.3.3.1.1 Actividad No 7 ¿Qué se le puede medir?**

**Descripción de la actividad:**

Al estudiante se le suministraron objetos como: Cajas de cartón, cilindros de madera de diferentes tamaños, baldes, balones, estuches de forma cilíndrica y aros de diferentes tamaños, con el propósito que los observaran y los manipularan, indicando que se puede medir de cada uno de ellos y en que forma.

En esta actividad los estudiantes realizaron descripciones verbales y representaciones gráficas.

#### **3.3.3.1.2 Actividad No 8 ¿Qué Rellena Mejor?**

Es una actividad de llenado que involucró el reconocimiento de diferentes objetos, utilizando para ello la percepción óptica.

##### **Descripción de la actividad**

Inicialmente se presentó a los estudiantes los siguientes cuerpos (una probeta, un crisol, una cápsula y un balón de vidrio) con el fin de que al manipularlos, dieran respuesta a la primera pregunta de la guía.

Posteriormente se planteó la situación problema de Julián y Martín, entregándole a los estudiantes los siguientes elementos: agua, perlas, arena, cubitos de madera; además de los siguientes recipientes una probeta, un crisol, una cápsula, caja de crema, un estuche rollo fotográfico, una cubeta y un balón de vidrio. Con el fin de que respondieran los literales de la a hasta la g.

En esta situación los estudiantes realizaron descripciones, predicciones y comprobaciones de sus respuestas explicando la estrategia utilizada para resolverla.

### **3.3.3.1.3 Actividad No 8 B ¿Qué Empaqueta Mejor?**

Las actividades 8B y 8C tuvieron como propósito que el estudiante, empleando diferentes cuerpos y sustancias, determinara aquellos elementos que mejor empaquetan un cuerpo, Explicando las razones de su elección.

#### **Descripción de la actividad**

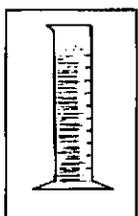
Se planteó la situación problema del papá de Camilo entregándole a cada grupo de estudiantes los siguientes recipientes una probeta, un crisol, una cápsula, caja de crema, un estuche rollo fotográfico, una cubeta y un balón de vidrio; con el fin de que dieran respuesta a los literales desde la a hasta la g.

En esta situación los estudiantes realizaron descripciones, representaciones gráficas, predicciones y comprobaciones de sus respuestas explicando la estrategia utilizada para resolverla.

### **3.3.3.1.4 Actividad No 8 C ¿Qué Empaqueta Mejor?**

#### **Descripción de la actividad**

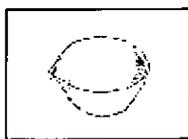
A los estudiantes se les pidió que eligieran uno entre los siguientes cuerpos: probeta, crisol, cápsula, caja de crema, estuche rollo fotográfico, cubeta o balón de vidrio, el cual debía llenar por completo con arena y sin trasvasarlo indicar hasta donde esta misma cantidad de arena llenaría los demás cuerpos, Explicando su respuesta; además de completar la tabla que aparece adjunto.



Probeta



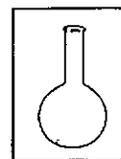
Crisol



Cápsula



Cubeta



Balón de Vidrio

### 3.3.3.2 Actividades para la etapa de Comparación

Continuando con la orientación del modelo didáctico; las actividades de esta fase centraron su atención en los procesos de comparación adelantados por el niño, entre las cualidades de los cuerpos que él manipula con el fin de establecer relaciones de semejanza y diferencia, lo cual conduce a su clasificación. Para ello se propuso las siguientes actividades:

#### 3.3.3.2.1 Actividad No 9. Inmersión

El propósito de esta actividad fue el de orientar la construcción del concepto de impenetrabilidad el cual consideramos fundamental para la construcción del concepto de volumen.

### **Descripción de la actividad**

Esta actividad se dividió en tres partes:

1. En la primera parte, se le presentó al estudiante un recipiente con perlas y una cápsula de plástico, el cual debía introducir lentamente al interior del recipiente, describiendo lo observado. Dando respuesta a los numerales desde el uno hasta el siete.
  2. En la segunda parte de esta actividad se le suministró al estudiante un plato hondo, un recipiente completamente lleno de agua y un recipiente lleno de aceite, el cual se desarrolló como se indica en los numerales del uno al cuatro.
  3. En la tercera parte de la actividad se les proporciona a los estudiantes media hoja tamaño carta la cual colocaron sobre el piso y se les pidió que por parejas trataran de pararse (sin empinarse), acomodándose simultáneamente sobre la misma hoja explicando si esto es posible y porqué.
- Por último se pidió a los estudiantes que compararan las explicaciones dadas en cada una de las partes de esta actividad, encontrando semejanzas y diferencias, con el fin de elaborar una conclusión.

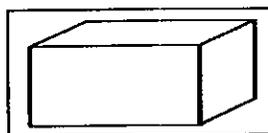
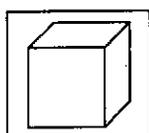
### 3.3.3.2.2 Actividad No 10 Modelado

Esta actividad permitió la comparación entre los volúmenes de los diferentes cuerpos, por medio del recuento de las unidades de construcción utilizadas.

#### Descripción de la actividad

Esta actividad se compone de dos partes:

1. En la primera parte literales A y B, se buscó conocer el nivel de comprensión del concepto de impenetrabilidad alcanzado por los estudiantes, a partir de dos preguntas de tipo abierto, que permitieron poner a prueba la comprensión del mismo, conduciéndolos a una generalización.
2. La segunda parte buscó cuestionar al estudiante sobre ¿Qué representa cada uno de los cubos de azúcar utilizados en el modelado de cada cuerpo?. Proporcionándole a los estudiantes dos cuerpos que servían de modelo en esta actividad: un cubo (cuerpo No.1) y un prisma rectangular (cuerpo No.2), los dos cuerpos deben ocupar el mismo volumen, Además se les proporcionó cubos de azúcar y cubos de madera de un centímetro cúbico, para que modelaran los cuerpos 1 y 2. Posteriormente se entregaron los cuerpos No.3 y No.4 que corresponden a prismas rectangulares de igual volumen entre ellos, pero diferente a los anteriores. (cuerpo No.1 y 2).



Cuerpo No.1

Cuerpo No.2

### **3.3.3.2.3 Actividad No 11 Juguemos Con Los Recipientes**

Esta actividad permitió mediante la manipulación de líquidos o sólidos la comparación entre las capacidades de diferentes cuerpos, apoyados en procesos de observación comparación y descripción.

#### **Descripción de la actividad:**

En esta actividad se le proporcionó a cada grupo de estudiantes diferentes recipientes, los cuales inicialmente serían descritos por ellos para ser posteriormente manipulados en cada una de las situaciones problemas planteadas. Dentro de los recipientes proporcionados se encuentran: vasos desechables de 1 onza (Cuerpo No.0), 1.5 onzas (Cuerpo No.5), 2 onzas (Cuerpo No.4) , 7 onzas (Cuerpo No.1) , botella de gaseosa 192 ml (Cuerpo No.2) , botella de jugo hit (Cuerpo No.9), vaso de plástico transparente de 7 onzas (Cuerpo No.3) , vaso plástico de colores 7 onzas (Cuerpo No.6) , vaso transparente de plástico de 8 onzas (Cuerpo No.7) y frasco de 7 onzas (Cuerpo No.10).

Nota: Es importante tener en cuenta que los recipientes con igual capacidad, tenían diferentes dimensiones.

Con esta actividad se buscó que los estudiantes plantearan hipótesis frente a la pregunta ¿Cuál de todos los recipientes almacena mayor cantidad de líquido?, contrastando sus hipótesis con los resultados obtenidos.

#### **3.3.3.2.4 Actividad No. 12 “Ordenando El Cuarto**

Esta actividad permitió la comparación entre volumen y capacidad .

#### **Descripción de la actividad**

Esta actividad se dividió en dos partes :

1. La primera parte buscó que el niño estimara y comparara la capacidad de las cajas suministradas con el fin de dar solución a la situación problema planteada.  
Posteriormente se le solicitó al estudiante estimar de nuevo la capacidad de otra caja que en el momento no podía manipular, la cual debía permitir guardar 17 cassettes , además de estimar su precio, enfrentando al estudiante con preguntas intencionalmente cognitivas que le permitieran de algún modo resolver la nueva situación planteada.
2. La segunda parte de esta actividad buscó a que el niño utilizara nuevamente algunos de los conceptos asociados al de volumen (Reconocimiento de polígonos) trabajados en la primera etapa de este proyecto.

#### **3.3.3.3 Actividades para la etapa de Estimación**

Continuando con la orientación del modelo didáctico; las actividades de esta fase centraron su atención en los procesos de estimación adelantados por el niño por medio del desarrollo de dos actividades.

### **3.3.3.3.1 Actividad No 13 Jugando con los policubos**

Esta actividad tuvo como propósito brindar al estudiante un contexto ( el juego con policubos) que le permitiera visualizar en qué consiste medir volúmenes, estimulando para ello el desarrollo de capacidades como razonamiento espacial e inferencial, además de la utilización de la representación en el plano de figuras tridimensionales.

#### **Descripción de la actividad**

Esta actividad se dividió en tres partes :

1. En la primera parte a cada grupo de estudiantes se le proporcionaron 45 cubos de azúcar, pegante y una planilla de puntos, los cuales utilizaron para formar bicubos, tricubos y tetracubos, dando respuesta a los literales A-C, para luego representarlos gráficamente en la planilla de puntos literal D.
2. En la segunda y tercera parte los estudiantes realizaron representaciones mentales de los cuerpos con el fin de dar respuesta a las preguntas formuladas, empleando para ello proyecciones virtuales estimando el número de cubos faltante para completar el policubo.

### **3.3.3.3.2 Actividad No.14 Divirtámonos con nuestra imaginación**

#### **Descripción de la actividad:**

Esta actividad buscó que el estudiante realizara representaciones mentales del policubo suministrado gráficamente y estimara el número de cubos que faltaban para completar el modelo

No debemos olvidar que las tres etapas ( percepción, comparación y estimación) de este modelo didáctico siempre estuvieron presentes durante el desarrollo de cada actividad propuesta, de manera que, la intencionalidad de cada una, es la que nos conduce a enfatizar más en la etapa a la que ella corresponde, obteniendo de esta manera el sistema de instrumentos para la construcción del concepto de volumen propuesto en este proyecto.

## 4. ANÁLISIS DEL PROCESO DE INVESTIGACIÓN

### 4.1 Categorías de Análisis

Las Categorías de análisis elegidas para el desarrollo de la investigación se trabajaron a partir del planteamiento del problema, los objetivos, y los referentes conceptuales de la propuesta.

Desde lo disciplinar consideramos como categoría de análisis la Diferenciación e identificación de los conceptos de volumen y capacidad , A partir del análisis de las cualidades primarias y secundarias de los objetos.

Desde los objetivos, la categoría de análisis correspondió a las diferentes Formas de representación ( espontáneas, verbales argumentación , gráficas) que permiten la confirmación de una respuesta posible a una pregunta planteada, la cual se manifiesta durante secuencias de acciones graduales y con alto índice de continuidad

Como tercera categoría de análisis se encuentran los conceptos asociados al Modelo de Van Hiele los cuales contribuyeron a indicar los desarrollos conceptuales de los estudiantes.

Por último los procesos de reversibilidad partir de lo bidimensional llegando a lo tridimensional o de lo tridimensional a lo bidimensional, también se consideraron como nuestra cuarta y última categoría de análisis.

#### **4.2 Fases en el análisis de cada actividad**

Al tomar como punto de partida tanto el problema como los objetivos de la investigación la elección de las categorías de análisis hicieron posible que la planificación de las actividades como la observación de las mismas centraran su atención en examinar los procesos de construcción de los estudiantes en su interacción con el saber y con los docentes.

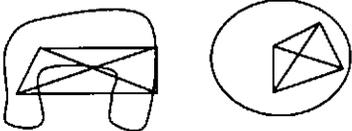
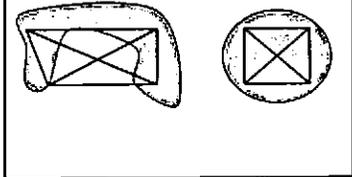
Con base en las anteriores consideraciones, se llevó a cabo una acción investigativa que involucró un proceso de cuatro fases fundamentales en cada actividad propuesta:

##### **1. Aplicación :**

Corresponde a la puesta en juego del diseño didáctico que propende por el avance en la construcción del concepto, esta fase permitió la recopilación de los registros de aula comprendidos en los trabajos y manualidades que en grupo o individualmente realizaron los estudiantes durante el desarrollo de la actividad, además de observar sus acciones durante el proceso de construcción, las hipótesis inferidas, el desarrollo de la competencia comunicativa dentro de las discusiones presentadas, así como también la orientación que el

profesor le da a esta discusión, y el registro en el diario de campo del docente; esta fase se efectuó dentro de la hora de clase.

La siguiente matriz permite al docente registrar los argumentos de los estudiantes frente a una situación o pregunta planteada en esta fase, por ejemplo en la actividad No. 3 Jugando con las Curvas, sobre Cóncavo y Convexo, donde se solicita al estudiante que reproduzca en su hoja cada una de las figuras del conjunto B dispuestas en el tablero, de manera que pueda unir con una recta los puntos que se encuentran al interior de cada figura, podemos observar que ante la pregunta planteada los argumentos de varios estudiantes son los siguientes:

SITUACIÓN PLANTEADA	NOMBRE DEL ESTUDIANTE	ARGUMENTO
¿ Qué diferencia hay entre las líneas trazadas en las figuras A y B?	Raúl Bermúdez	 <p style="text-align: center;">A                      B</p> <p>«En la figura A las líneas están afuera del dibujo, y las otras (B) dentro de él»</p>
¿ Qué diferencia hay entre las líneas trazadas en las figuras A y B?	Yuli Andrea Ospina	 <p>«La diferencia es que lo de adentro es verde y lo de afuera es amarillo»</p>

<p>¿ Qué diferencia hay entre las líneas trazadas en las figuras A y B?</p>	<p>Yuli Andrea Vargas</p>	<div data-bbox="885 284 1239 469" data-label="Image"> </div> <p>«En la figura A las líneas tocan el interior y el exterior, en la figura B las líneas tocan sólo el interior de la figura». «Interior es de colores, el exterior es verde claro».</p>
---	---------------------------	---

## 2. Análisis:

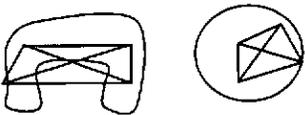
Corresponde al momento en el cual el equipo de investigación se reunió a sistematizar la información obtenida en los registros a partir de las categorías de análisis, así como los avances y dificultades observadas en la fase anterior, proporcionando el espacio para elaborar aquellas preguntas y situaciones que pueden orientar mejor la discusión sobre el objeto cognitivo de la actividad.

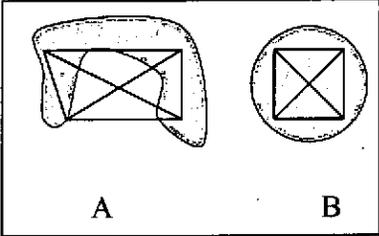
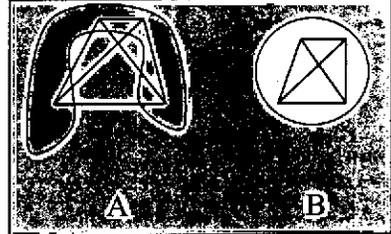
A continuación presentamos un ejemplo de la fase de análisis que se llevó a cabo de la actividad No. 3 Jugando con las curvas, sobre cóncavo y convexo.

Observar los registros de los estudiantes y los registros de los docentes, encontramos que la gran mayoría de los niños se refiere a la pregunta individualizando las parejas de figuras señaladas, es decir, aíslan cada una de las parejas y se limitan a contestar la diferencia

entre las líneas trazadas en las figuras que la componen, sin tener en cuenta que se puede extender estas diferencias a todas las parejas y generalizar de este modo una nueva caracterización y posteriormente una nueva clasificación de las figuras cerradas presentadas en el conjunto B, por esta razón decidimos que la socialización en la siguiente fase se iniciaría retomando algunas de las respuestas que voluntariamente expresaran los estudiantes analizando cada una de las parejas de figuras propuestas, estableciendo así un paralelo entre las semejanzas y diferencias que en las respuestas se encontraran, de esta manera centramos la atención de los estudiantes en las características generales que conservan las líneas trazadas en las figuras que componen cada pareja y ubicamos dentro de esas semejanzas las demás figuras del conjunto B; de este modo se logra ampliar un poco más el campo de visión de algunos estudiantes orientando ahora la discusión hacia la generalización de una característica propia de las figuras cerradas.

En esta fase se enriqueció un poco más la matriz anterior, puesto que ubicamos en el nivel de razonamiento a cada uno de los estudiantes así:

SITUACIÓN PLANTEADA	NOMBRE DEL ESTUDIANTE	ARGUMENTO	NIVEL DE RAZONAMIENTO
¿ Qué diferencia hay entre las líneas trazadas en las figuras A y B, , C y D, E y F?	Raúl Bermúdez	 <p data-bbox="695 1560 714 1586">A</p> <p data-bbox="899 1560 918 1586">B</p> <p data-bbox="615 1639 1001 1759">«En la figura A las líneas están afuera del dibujo, y las otras (B) dentro de él»</p>	ANÁLISIS

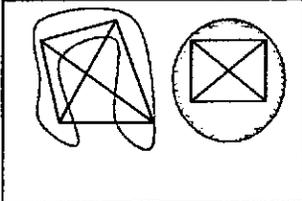
<p>¿ Qué diferencia hay entre las líneas trazadas en las figuras A y B, C y D, E y F?</p>	<p>Yuli Andrea Ospina</p>	 <p>«La diferencia es que lo de adentro es verde y lo de afuera es amarillo»</p>	<p>RECONOCIMIENTO</p>
<p>¿ Qué diferencia hay entre las líneas trazadas en las figuras A y B, C y D, E y F?</p>	<p>Yuli Andrea Vargas</p>	 <p>«En la figura A las líneas tocan el interior y el exterior, en la figura B las líneas tocan sólo el interior de la figura». «Interior es de colores, el exterior es verde claro».</p>	<p>ANÁLISIS</p>

### 3. Retroalimentación:

Es el momento en el cual se desarrolló con los estudiantes la discusión que permitió afianzar el objetivo de la actividad propuesta, colocando a prueba aquellas preguntas intencionalmente cognitivas que no surgieron durante la primera fase o desarrollando las situaciones problema que surgieron en la fase anterior y que permitieron esclarecer el camino hacia la construcción del concepto; esta fase se desarrolló durante la siguiente clase.

A continuación presentamos un ejemplo de la fase de retroalimentación que se llevó a cabo de la actividad No. 3 Jugando con las curvas, sobre cóncavo y convexo.

Puesta a prueba las observaciones de la fase anterior encontramos durante la socialización que algunos estudiantes realizan afirmaciones como «Las figuras A, C, F, H, I, J, L y M Mantienen todas las líneas compartiendo tanto el interior como el exterior de las figuras, mientras que las figuras B, D, E, G, y K tienen todas sus líneas en el interior de la figura» lo cual nos indica que se está comprendiendo el concepto construido; Consideramos este el momento justo para utilizar los nombres técnicos con los que se reconocerán de ahora en adelante estos conceptos y acordamos con todos los niños llamar al primer grupo de figuras cóncavas y al segundo convexas. De esta manera también encontramos entre los niños afirmaciones como « La A es cóncava porque tiene las líneas por fuera, la B es convexa por que tiene las líneas por dentro». « La diferencia es que la A es cóncava y la B es convexa».

SITUACIÓN PLANTEADA	NOMBRE DEL ESTUDIANTE	ARGUMENTO	NIVEL DE RAZONAMIENTO
¿Qué diferencia hay entre las líneas trazadas en las figuras A y B?	Oscar Javier Torres	 <p>«La A es cóncava porque tiene las líneas por fuera, la B es convexa por que</p>	CLASIFICACIÓN

		tiene las líneas por dentro».« La diferencia es que la A es cóncava y la B es convexa».	
--	--	---	--

#### 4. Sistematización:

Esta fase permitió la reestructuración de la actividad propuesta dentro de los instrumentos didácticos, como efecto de las dos fases anteriores; lográndose en definitiva la inclusión de la actividad dentro del sistema de instrumentos para la construcción del concepto de volumen.

Consideramos indispensable incluir dentro del diseño de la actividad la asignación directa de las letras para cada figura, puesto que en la actividad propuesta a los estudiantes esta asignación sólo se hizo cuando se colocaron las figuras en el tablero lo que dio lugar a que varios niños no asignaran las letras correspondientes a las figuras, generando caos en el momento de referirse a una de ellas, esto también nos hace reflexionar sobre la importancia de los puntos de referencia en el desarrollo de una actividad.

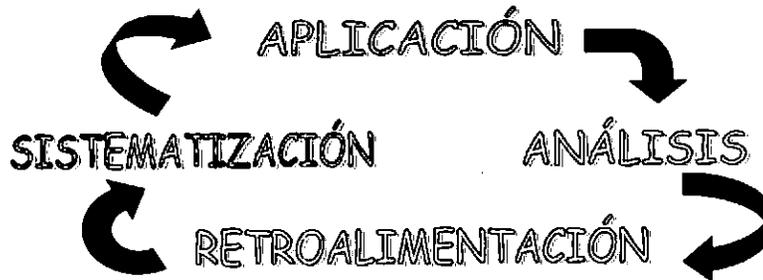
Finalmente llevamos a cabo la elaboración de la matriz de frecuencias de los estudiantes, su ubicación en los niveles de razonamiento y los argumentos más representativos de cada nivel así:

**Tabla 7. ACTIVIDAD No. 3 Jugando con las curvas**

NIVEL	%	CARACTERÍSTICA
RECONOCIMIENTO	31.2	<p>No emplea las condiciones dadas, para llevar a cabo la contrastación entre dos figuras dadas ( Ej:«Se diferencian en que la A va unida en cuadrado y la B no».)</p> <p>Describe los objetos según su aspecto físico reconociendo semejanzas y diferencias lo que usa para clasificarlos ( Ej: «La figura E tiene forma de Triángulo y la figura F tiene forma de sombrero».</p>
ANÁLISIS	62.5	<p>Deduce nuevas relaciones entre componentes informalmente y por experimentación ( ej: «En la figura A un pedazo de la línea se sale y en la figura B toda la línea queda por dentro»).</p>
CLASIFICACIÓN	6.3	<p>Realiza clasificaciones lógicas descubre nuevas propiedades con base en las ya conocidas ( ej: «En las que tengan forma de curvas (entradas) una parte de la línea recta se sale de la figura, y en las otras por eso no se salen»</p>

De esta manera se genera para cada actividad un proceso investigativo del tipo:

## PROCESO INVESTIGATIVO PARA CADA ACTIVIDAD



### 4.3 Instrumentos de recolección de información

Los instrumentos de recolección de información que se utilizaron en el desarrollo de este proyecto, se tomaron por los mismos maestros investigadores, en algunos casos asumiendo diferentes roles, como: registrar y aplicar estrategias de intervención.

Los instrumentos de recolección de la información para esta etapa son:

- ❑ Registro del desarrollo de las actividades de los estudiantes, individual o en grupo.
- ❑ Registro de observación del desarrollo de las actividades por parte de los docentes investigadores.
- ❑ Registro de sistematización del desarrollo de las actividades.
- ❑ Registro de vídeo y audio dependiendo de la actividad programada.

#### **4.4. Categorización de cada una de las actividades**

##### **4.4.1 Categorización de actividades primera etapa del proyecto**

###### **4.4.1.1 Fases De Aprendizaje**

Estas fases corresponden a descripciones sobre cómo puede el profesor organizar las diversas actividades en el aula, para que los estudiantes estén en capacidad de acceder a un nivel de razonamiento superior al cual se encuentran actualmente. Estas fases se repiten entre nivel y nivel, pero el lenguaje y el tipo de preguntas desequilibrantes es diferente.

###### **4.4.1.1.1 Primera Fase o de Información**

De acuerdo al mapa conceptual, consideramos el plantear a los estudiantes como primera actividad la realización de diversos recorridos sobre la cancha de baloncesto, de manera que por grupos un alumno realiza su desplazamiento dejándolo marcado con arena, mientras que su compañero lo dibuja desde un punto de referencia elegido por él mismo e indicado en su dibujo. (ver anexo 3)

Con esta actividad los estudiantes demostraron no poseer dificultades en la ubicación de las dependencias del colegio al dibujarlas en su hoja de papel, lo cual les permitió establecer puntos de referencia para la ubicación de su compañero al inicio, durante y al final de su recorrido. Al finalizar los estudiantes se referían a la actividad con agrado, manifestando su deseo por que llegara la próxima clase para trabajar más.

#### **4.4.1.1.2 Segunda Fase o de Orientación Dirigida**

En esta fase los estudiantes exploran el campo de investigación por medio del material que les ha suministrado el profesor, el cual puede estar formado por diversas actividades dirigidas al descubrimiento y aprendizaje de los conceptos y propiedades fundamentales del área de estudio en cuestión.

Como segunda actividad presentamos a los estudiantes una serie de recorridos dibujados en una hoja, donde se le pide identifique un punto de salida, a partir del cual seguirá con su dedo el camino del recorrido hasta encontrar un punto de llegada, para luego contestar las preguntas que aparecen en la hoja; finalmente se le pide al estudiante seguir nuevamente con lana aquellos recorridos en los cuales el punto de partida y el de llegada coinciden, además de darles un nombre y seguir con lápices de colores aquellos recorridos donde estos puntos no coinciden además de nombrarlos.

La fase de orientación va dirigida a reelaborar los conceptos de curvas abiertas y curvas cerradas los cuales consideramos previos a la construcción de la noción del concepto de volumen, para ello continuaremos planteando otras actividades que nos permitan profundizar aún más en la construcción de estos conceptos.

##### **4.4.1.1.2.1 Análisis fase No. 2. Actividad Jugando con los recorridos. Recorridos propuestos**

(curvas abiertas y cerradas) Actividad de lana y colores. (anexo Sistema de Instrumentos Actividad No. 2)

A lo largo de la fase se llevan a cabo importantes observaciones, entre ellas:

Los estudiantes realizan continuas asociaciones entre los conceptos cerrado y redondo.

**Tabla 8. Análisis Actividad No.2 Jugando con los recorridos (Anexo Sistema de Instrumentos)**

NIVEL	%	CARACTERÍSTICAS
TRANSC. (0-1)	7	No trabaja, no es recursivo.
RECONOCIMIENTO	62	<p>* Argumenta subjetivamente, con base a su experiencia próxima o a su cotidianidad (Ej: cancha (curvas abiertas), círculo ( cerradas).</p> <p>* Describe los objetos según su aspecto físico, específicamente a su material, sin tener en cuenta las características de los recorridos (Ej: «lanacamino, colograma»).</p>
TRANSICIÓN. (1-2)	18	<p>* Describe Informalmente las características de los recorridos, manifestando poco ingenio en el nombre de los conjuntos (ej: « Caminos de lana ya que los puntos coinciden y caminos de color ya que los puntos no coinciden»)</p>
ANÁLISIS	13	<p>* Argumenta objetivamente , da nombre a los conjuntos atendiendo as las características de los recorridos (Ej: «Recorridos abiertas, Recorridos cerradas, curvas abiertas, curvas cerradas«).</p> <p>* Uso de términos desconocidos para el maestro, pero la explicación corresponde a las características de los recorridos (Ej: « Latinosos»).</p>

Estas actividades se encuentran claramente orientadas hacia sus objetivos de tal forma que las estructuras características de cada actividad son presentadas en forma gradual y progresiva al estudiante

#### 4.4.1.1.3 Tercera Fase o de Explicitación

En esta fase cual se invitó al estudiante a participar fundamentalmente en un diálogo donde cada uno de ellos activa sus modelos para intentar modelar aquel sector de la realidad que se presenta como problema, esta fase permitió al estudiante explicitar sus modelos y teorías y al maestro establecer sus propias hipótesis acerca de los modelos de sus alumnos en donde podrá describir y evaluar el estado del proceso de construcción o reconstrucción de modelos, además de permitirle asumir una posición de interlocutor válido que actúa en función del estado del proceso.

Al respecto proponemos al estudiante la siguiente actividad, actividad No. 3 Jugando con las Curvas ( Ver anexo Sistema de Instrumentos), cuyo objetivo fue construir el concepto de convexo y no convexo. Donde encontramos que:

- Con respecto a la construcción del concepto de curvas abiertas y cerradas:

**Tabla 9. Análisis Actividad No. 3 Jugando con las curvas**

NIVEL	%	CARACTERÍSTICA
RECONOCIMIENTO	25.1	Argumenta subjetivamente, con base a su experiencia próxima o a su cotidianidad ( Ejemplos:- «es curva cerrada por que tiene forma de flecha». - «Es abierta por que no termina en el mismo sitio y tiene un hueco para poder

		entrar. »)
TRANSCISIÓN (1-2)	58.3	Deduce conclusiones por experimentación, argumentando que «si el punto inicial y el punto final no coinciden se tiene una curva abierta, de lo contrario será cerrada.
ANÁLISIS	16.6	Argumenta objetivamente utilizando la comparación entre un objeto y otro, pasando de lo visual a lo experimental concreto (Ej: «Si fuera abierta no terminaría allá, por que si es cerrada terminaría en la misma parte, pero como es abierta, no termina ahí. »)

□ Con respecto a la identificación del interior y el exterior de una figura:

**Tabla 10. Análisis de la Actividad No. 3 Jugando con las curvas**  
Con respecto a la identificación del exterior e interior de una figura

NIVEL	%	CARACTERÍSTICAS
RECONOCIMIENTO	50	Antes de iniciar la actividad no reconoce componentes y propiedades de los objetos explícitamente ( ej: confusión entre el borde y el exterior). Argumenta subjetivamente con base en su experiencia próxima (ej: «la O es una vocal cerrada y como círculo tiene forma de O entonces el círculo es una figura cerrada».) Deduce conclusiones partiendo de la observación, más no de la experimentación en base a lo concreto ( ej: «El interior es la parte de la figura que se ubica más rápidamente»).
ANALISIS	50	Deduce nuevas relaciones entre componentes informalmente y por experimentación ( ej: «Sólo se puede hablar de interior cuando la figura es cerrada, porque no tiene por donde salir»).

□ Con respecto a la construcción del concepto de cóncavo y convexo:

**Tabla 11. Análisis de la Actividad No. 3 Jugando con las curvas**  
 Con respecto a la construcción de los conceptos cóncavo y convexo

NIVEL	%	CARACTERÍSTICA
RECONOCIMIENTO	31.2	No emplea las condiciones dadas, para llevar a cabo la contrastación entre dos figuras dadas ( Ej:«Se diferencian en que la A va unida en cuadrado y la B no».) Describe los objetos según su aspecto físico reconociendo semejanzas y diferencias lo que usa para clasificarlos ( Ej: «La figura E tiene forma de Triángulo y la figura F tiene forma de sombrero».
ANÁLISIS	62.5	Deduce nuevas relaciones entre componentes informalmente y por experimentación ( ej: «En la figura A un pedazo de la línea se sale y en la figura B toda la línea queda por dentro».
CLASIFICACIÓN	6.3	Realiza clasificaciones lógicas descubre nuevas propiedades con base en las ya conocidas ( ej: «En las que tengan forma de curvas (entradas) una parte de la línea recta se sale de la figura, y en las otras por eso no se salen».

Al finalizar el desarrollo de la parte de la actividad que corresponde a la construcción e los conceptos de figuras cóncavas y convexas se realizó una socialización de las respuestas obtenidas con el fin de orientar la discusión al concepto de figuras convexas y no convexas.

Es así como en esta fase se llevan a cabo constantes transformaciones en las concepciones del estudiante, buscando conseguir que las experiencias adquiridas se unan a los símbolos lingüísticos precisos y que los estudiantes aprendan a expresarse con la precisión que su

nivel de razonamiento les permita, esta reflexión continua permite al estudiante fortalecer sus argumentaciones por medio del establecimiento de una nueva red de relaciones entre los conceptos propios del área que han sido construidos.

#### 4.4.1.1.4 Cuarta Fase o de Orientación Libre

Esta fase busca que los estudiantes afiancen los conceptos construidos en el problema inicial, lo cual se puede conseguir por medio de la formulación por parte del docente, de nuevos problemas, los cuales requieren para su solución algunos de los conceptos trabajados en el problema inicial.

En esta fase propusimos al estudiante la siguiente actividad que tuvo por objetivo, Orientar al alumno en la construcción del concepto de polígono, a través de la manipulación de palillos y plastilina.

Al realizar el análisis de esta actividad encontramos que:

- **Con respecto a la construcción del concepto de polígono (Primera parte: construcción de figuras con palillos)**

**Tabla 12. Análisis de la Actividad No. 4. Jugando con Polígonos**

Primera parte: construcción de figuras con palillos

NIVEL	%	CARACTERÍSTICAS
RECONOCIMIENTO	16.6	Deduce conclusiones partiendo de la observación,

		mas no de la experimentación en base a lo concreto( Ej: «La figura A es diferente a la B porque la A es ovalada y la B es circular»)
TRANSICIÓN (1-2)	66.6	Deduce conclusiones partiendo de la observación y de experiencias realizadas anteriormente ( ej: : «Al construir la figura A al hacer lo redondo el palillo se va como rompiendo; No me quedó idéntica porque la figura es redonda y al hacerla con los palillos me queda como un cuadrado»)
TRANSICIÓN (2-3)	16.8	Describe Los objetos en sus componentes y propiedades ( Ej: : « Es una figura cerrada y tiene segmentos de recta ») Realiza un razonamiento hipotético- deductivo ( Ej: «La figura A puede realizarse rompiendo los palillos para irla construyendo circularmente»)

- Con respecto a la construcción del concepto de polígono (Segunda parte: construcción de figuras con palillos)

**Tabla 13. Análisis de la Actividad No. 4. Jugando con Polígonos.**

Segunda Parte: construcción de figuras con palillos

NIVEL	%	CARACTERÍSTICAS
TRANSICIÓN (0-1)	15.4	No justifica la elección de sus respuestas.
TRANSICIÓN (1-2)	61.4	Deduce conclusiones partiendo de la observación y de experiencias realizadas anteriormente ( Ej: : « Al tratar de hacerla los palillos se parten y no se deben partir», «No porque si se hacen con dos queda una parte abierta y no se podría construir una figura cerrada»)
ANÁLISIS	23.2	Argumenta objetivamente utilizando la ejemplificación ( ej: « No porque si uno va a

		formar un cuadrado, no se puede con dos palillos, faltarían dos y así no se forma una figura abierta») )
--	--	--

- Con respecto a l análisis de las respuestas a la pregunta : ¿Cuál es el número mínimo de palillos que se necesitan para formar un polígono?

**Tabla 14. Análisis de la Actividad No. 4. Jugando con Polígonos**

Con respecto al análisis de las respuestas a la pregunta : ¿Cuál es el número mínimo de palillos que se necesitan para formar un polígono?

NIVEL	%	CARACTERÍSTICAS
TRANSICIÓN (0-1)	15.4	No justifica la elección de sus respuestas.
RECONOCIMIENTO	46.1	Argumenta subjetivamente con base a su experiencia próxima o cotidiana ( Ej: : « Se necesitan cuatro palillos» ; « Se necesitan tres palillos»)
ANÁLISIS	38.5	Deduce a partir de las relaciones entre los componentes de la figura y con base a experiencias anteriores ( ej: « Se pueden formar figuras con tres palillos. Por ejemplo un triángulo»)

- Con respecto a l análisis de las argumentaciones referentes al cuadro que se les pide completar encontramos:

**Tabla 15. Análisis de la Actividad No. 4. Jugando con Polígonos**

NIVEL	%	CARACTERÍSTICAS
RECONOCIMIENTO	77.4	Propone nombres sin interiorizar la información (ej: mezcla el sufijo edro y como prefijo utiliza el número de lados « octaedro) Nombra los polígonos más conocidos de

		<p>acuerdo a su experiencia (ej:« triángulo, rectángulo, cuadrado».</p> <p>Nombra los polígonos de acuerdo a las relaciones que establece con el medio (ej: «Trapezio, Falda - meseta »).</p>
TRANSICIÓN (1-2)	15.3	<p>Deduce el nombre de los polígonos utilizando como prefijo el número de lados y como sufijo la terminación ágono. ( Ej: «nueveágono, diezágono ».)</p>
ANÁLISIS	7.3	<p>Deduce nuevas relaciones entre los componentes de manera informal y por experimentación ( ej: « A mayor número de lados la figura va haciéndose cada vez más redonda»; « de nueve lados redondel, de diez lados ultra redonda »</p>

#### 4.4.1.1.5 Quinta Fase o de Integración

Es importante que los estudiantes adquieran una visión general de los conceptos, métodos y teorías construidas, que ahora tienen a su disposición. En esta fase se motivó a los estudiantes a realizar una reflexión sobre todo el campo que han explorado, de modo que se pueda evaluar el trabajo realizado, además de verificar la integración de los nuevos conceptos en la red de conocimientos construida por él.

Por ello se planteó al estudiante una primera actividad la cual se llamó “JUGANDO CON LOS POLIEDROS” cuyo objetivo era que el estudiante identificara los polígonos que forman parte de un cuerpo; desarrollándose de la siguiente forma. (Ver anexo Sistema de Instrumentos. Actividad No. 5).

Además se propuso a los estudiantes una última actividad titulada “JUGUEMOS CON LOS POLÍGONOS” en la que se le propone llevar a cabo la construcción de la maqueta de la iglesia del barrio utilizando palillos, plastilina y papel seda de diferentes colores; Consideramos que esta actividad encerró el trabajo realizado con los estudiantes en la construcción del concepto de polígono y nos acerca un poco más a nuestro objetivo general que es la construcción del concepto de volumen. (Ver anexo Sistema de Instrumentos. Actividad No. 6).

#### **4.4.2 Categorización de actividades fase de retroalimentación del proyecto**

### **CONCÉNTRERE CON LAS CURVAS**

( ver anexo 2 )

Este instrumento tuvo como propósito didáctico que el niño construyera las curvas a partir de las características o propiedades que se le presentaban, como también el proceso reversible al momento de presentarle una curva y el niño la describía haciendo alusión a sus propiedades en forma oral o escrita, posibilitando de esta manera el manejo de categorías de clasificación.

El modelo de Van Hiele nuevamente es tomado en esta fase como categoría de análisis , obteniéndose los siguientes resultados:

### **FASE DE RETROALIMENTACIÓN**

#### 4.4.2.1 ACTIVIDAD No 11 Juguemos con los recipientes

##### 4.4.2.1.2 Fase de aplicación

Se conformaron ocho grupos, con cuatro integrantes cada uno. Se pidió que nombraran un coordinador en cada grupo (él se encargaría de dar a conocer las respuestas del grupo en la socialización que más adelante se realizará).

Inicialmente se presenta a los estudiantes dos grupos de cuerpos con capacidades distintas entre los grupos, pero equivalente al interior del grupo; en el primer grupo se encontraban los cuerpos No. 1, 2, 3 y en el segundo grupo estaban los No. 7 y 9. los cuales describieron.

En la situación problema se presentaron a los estudiantes los cuerpos No. 1, 6, y 10 los cuales tienen la misma capacidad pero diferentes dimensiones.

Y en la tercera parte se presentan a los estudiantes los cuerpos No. 4 y 5 los cuales poseen igual altura, pero diferente capacidad.

En cada una de estas partes de la actividad los niños fueron cuestionados sobre lo mismo, de manera que siempre buscaron la respuesta a la siguiente pregunta:

*¿Cuál de todos los recipientes almacena mayor cantidad de líquido? Crea una estrategia que permita comprobar tu respuesta.*

*Registro del Docente (Septiembre 2001)*

Donde se recopilan las respuestas dadas por los estudiantes.

ESTUDIANTE	DESCRIPCIÓN CUERPO	RESPUESTA
Elidí Tatiana Valderrama, Fredy	«No.4 es más alto, más ancho tiene un fondo , el cuerpo No.5	«En el cuerpo No.4 porque es más grande y alto que en el No. 5

<b>Barón, Erika Sandoval</b>	es más pequeño, de menor altura que el otro y ambos tienen la misma forma»	porque es más pequeño.»
<b>Carolina Contreras, Jhonn Cuevas, Tatiana Barrero y Alejandro Sarmiento.</b>	«No. 4 redondo, pequeño, blanco y ancho arriba y poco abajo; el No. 5 es redondo, pequeño, blanco y más pequeño que el 4 abajo.»	«En el No. 4 porque es más ancho abajo que en el No. 5 »
<b>Federmán Prieto, Giovanni Castro, Jeimy Wiesner y Magda Vasquez</b>	«No. 9 es un recipiente que mide más o menos 20 cm, es de color transparente y en la mitad tiene laminita roja; No. 7 es ancho arriba y delgado abajo, es transparente y mide de largo más o menos 7cm.»	«En la botella (No.2) porque creemos es el objeto que cabe más líquido, porque es el más largo.»

### Fase de análisis

Esta actividad se ha categorizado teniendo en cuenta las diferentes Formas de representación (espontáneas, verbales - argumentación , gráficas) que permiten la confirmación de una respuesta posible a una pregunta planteada.

Como se ha analizado en las actividades posteriores a la actividad No.8, en las descripciones realizadas por los estudiantes el grupo de investigación ha seguido paso a paso las categorías de clasificación tenidas en cuenta por los estudiantes en sus descripciones encontrando que se mantienen las categorías según la Forma, el Color, el Material, y la Función, encontramos que en esta actividad algunos estudiantes realizan estimaciones en cuanto al Tamaño **«No. 9 es un recipiente que mide más o menos 20 cm, es de color transparente y en la mitad tiene laminita roja; No. 7 es ancho arriba y delgado abajo, es transparente y mide de largo más o menos 7cm.»**, Cabe anotar que varios estudiantes al describir los cuerpos, se ubican dentro de una categoría de clasificación y establecen referentes tomando uno de ellos para compararlo con el otro. **« No.4 es más alto, más ancho tiene un fondo , el**

**cuerpo No.5 es más pequeño, de menor altura que el otro y ambos tienen la misma forma».**

En cuanto a las Respuestas dadas a la pregunta planteada encontramos aún hay estudiantes que no argumentan su respuesta limitándose a elegir un cuerpo, En un grupo de estudiantes aún no se han puesto de acuerdo en la respuesta al pregunta pues cada miembro del grupo tiene su propia respuesta algunos justificada, otros no, siendo radicales en su posición; y otros grupos que mantienen posiciones muy sólidas ante esta pregunta; por ello consideramos iniciar la fase de retroalimentación cuestionando sobre **¿Cómo podrían demostrar que su respuesta es verdadera y porqué?**, a aquellos estudiantes que tomaron una posición radical.

### **Fase de retroalimentación**

Puesta a prueba las observaciones de la fase anterior encontramos durante la socialización que algunos estudiantes realizan afirmaciones como **« El cuerpo No. 3 es es el que almacena mayor cantidad de líquido, porque el cuerpo No. 1 es más angosto que el No3, pero es más grande, el 3 es más pequeño pero mucho más ancho que el 1, por eso cabe más agua en el No. 3 »** lo cual nos indica que se está tomando la característica de ser ancho para implicar mayor capacidad; continuando con la discusión se encuentran otro tipo de afirmaciones como **«El No. 3 , pues es más ancha ya que la altura de los otros cuerpos es aproximada»** ó **«Es el 2, porque es más ancho que los demás , aunque sea más bajo que otros»** de modo que se solicita a uno de estos estudiantes indicar la estrategia utilizada para verificar su respuesta, uno de ellos afirma que llenó por completo uno de los recipientes y trasvasó el líquido en los demás, cuando lo realizó, se observó que no tuvo la precaución de no derramar el líquido, por lo que otro compañero afirma que no es válido lo que está haciendo, se vuelve a realizar la experiencia y se observa que en los recipientes que conforman un grupo almacenan la misma cantidad siempre y cuando no se derrame una gota, ante esta situación se pregunta a los estudiantes que sucedió y algunos afirman **« en**

**los tres cabe la misma cantidad de líquido Así sea un cuerpo más largo, y delgado como la botella No. 2; comparado con otro No.1 que es más pequeño pero más ancho, en los dos cabe la misma cantidad porque uno compensa al otro.»** Observándose que este estudiante encuentra que existe compensación del espacio llenado por el líquido, la cual depende de las medidas del recipiente, lo angosto en un recipiente alto, compensa lo pequeño en un recipiente ancho, y Viceversa, Lo alto en un recipiente angosto compensa lo ancho en un recipiente pequeño. Encontrando afirmaciones como **«El No. 7 tiene igual cantidad que el No. 9 porque el fondo de la botella es más angosto y es más alto que el vaso, por que si el vaso es más angosto en el fondo y grueso en el comienzo eso lo compensa para que le quepa la misma cantidad de agua».** Observándose con estas afirmaciones que los estudiantes se están acercando a determinar que la capacidad de un recipiente no depende solamente de lo alto o bajo que pueda ser un cuerpo sino que implica tener en cuenta simultáneamente otras dimensiones del cuerpo (largo, ancho ,alto) las cuales pueden compensar el espacio llenado por una sustancia.

### **Fase de sistematización**

Hemos observado que los estudiantes llevan a cabo procedimientos de exploración global, las cuales se consideran como las diferentes conductas de exploración, espontáneas, abiertas que toma el niño ante la presencia de los objetos y por sus propiedades más aparentes o más sobresalientes, así como por las preguntas implícitas o explícitas que se plantean, tales como: ¿qué es este objeto?, ¿para qué sirve?, ¿cómo es?, ¿qué puedo hacer con él?, etc.

En nuestro caso proponemos al estudiante que describa el objeto, no damos pautas para esta descripción, lo que buscamos es llegar a establecer si los estudiantes consideran el objeto por una sola de sus propiedades o por más.

Lo cual nos ha permitido ver que en general las conductas de exploración global del niño lo han llevado a una secuencia de exploración más amplia, constituyéndose en el punto de partida para una secuencia de exploración organizada, en cuanto que ante la presencia de un objeto no sólo toman una propiedad sino que reconocen varias de este, como son: forma, tamaño, material, color.

#### **4.4.2.2 ACTIVIDAD No. 12 Ordenando el cuarto**

##### **4.4.2.2.1 Fase de aplicación**

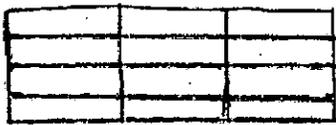
- En la primera parte de esta actividad se le plantea al estudiante una situación problema y además se le suministra tres cajas sin tapa de diferente tamaño pero de igual capacidad, con el fin de que el niño estime y compare la capacidad de las cajas suministradas con el fin de dar solución a la situación problema planteada. Luego se le solicita al estudiante estimar de nuevo la capacidad de otra caja que ahora no puede manipular, la cual debe permitir guardar 17 cassettes, además de estimar su precio, enfrentando al estudiante con preguntas intencionalmente cognitivas que le permitirán de algún modo resolver la nueva situación planteada.
  
- La segunda parte de esta actividad busca que el niño utilice nuevamente algunos de los conceptos asociados al de volumen (Reconocimiento de polígonos) trabajados en la primera etapa de este proyecto.

#### **Registro de un estudiante**

El siguiente registro muestra la forma como los estudiantes desarrollaron la actividad, sus representaciones gráficas desde lo tridimensional a lo bi-dimensional.

#### **Registro No. 1**

La relación es que con el mismo número y la misma cantidad que es una parte de la caja que escogimos ordenadamente.



3 caja



2 caja



1 caja

ordenación de los casettes en cada caja.

Longitud: Lo que un objeto tiene de el extremo de arriba a el extremo de abajo.

Ancho: Lo que tiene un objeto de izquierda a derecha o de d. a izq.

Alto: Lo que tiene un objeto de la parte donde está colocada hasta arriba.

② Le conviene la que le vale \$600 porque si es la más grande casetas que se ajusta a los 17 casetes

③ Para casettes le servirían la que vale \$100 de 17x7 y la de \$400 de 11x4x7.

④ De. pronto si o de pronto no según necesites por las medidas de las cajas

#### 4.4.2.2 Fase de Análisis

Se lleva a cabo la discusión sobre la caja que permite guardar mejor los 12 cassetes proporcionados encontrándose que la gran mayoría de niños eligen la No. 1 porque permite guardar los cassetes de varias formas, es decir a lo largo y a lo ancho, mientras que las demás sólo permite acomodar los cassetes de una sólo forma o a lo largo ó a lo ancho pero no ambas, tal como lo muestra la representación gráfica que realiza el estudiante en el registro No. 1 de esta actividad.

Cuando se le pide a los estudiantes contar sin manipular, ni dibujar la caja, sobre cómo estaban ordenados los cassettes dentro de la caja elegida, encontramos aún dificultades en lo que representa largo, ancho y alto; Por lo que se acuerda iniciar la socialización cuestionándonos sobre que es largo ancho y alto.

#### 4.4.2.2.3 Fase de Retroalimentación

Iniciada la sesión se cuestiona a los niños para indicar en varios cuerpos de diferentes formas, ubicados dentro del salón cuál será el largo, el ancho y el alto del cuerpo, la gran mayoría reconoce fácilmente el alto, mostrando dificultades entre largo y ancho; sobretodo cuando se les ocurre rotar el cuerpo.

Ante esta situación se solicita a los estudiantes construir una definición de largo, ancho y alto; encontrando respuestas como:

ALTO: «es la distancia desde el piso hasta arriba del cuerpo, es decir desde donde empieza hasta donde termina pero verticalmente.»

LARGO : «es la distancia más grande entre lo de adelante y lo de atrás de un cuerpo.», otro niño afirma que puede ser «la distancia más grande de izquierda a derecha.»

ANCHO: «es la distancia más corta entre adelante y atrás o entre la derecha y la izquierda.»

En este momento un niño afirma que «esto es falso porque cuando yo muevo el cuerpo (lo gira) la medida de lo que llamamos alto ya no es la misma, porque ya no esta de pie, ahora está acostada, de manera que así pasa con lo demás, por lo tanto las definiciones están mal».

En cuánto a la relación encontrada entre el resultado de la operación y el número de cassettes varios niños afirman que cada cassette ocupa un espacio pequeño del interior de la caja, por lo tanto la unión de esos espacios dará como resultado el espacio interior de la caja.

#### 4.4.2.2.4 Fase de Sistematización

podemos observar dos cosas muy importantes con esta actividad, a sabers:

##### El manejo de lo dimensional

A partir de la concentración en una dimensión a las relaciones en tres dimensiones, esta es

solo cualitativa , pues aquí se enfrentan a un problema de transformación, no pueden disociar las tres ideas de altura, forma y volumen mediante descomposición y recomposición métrica

#### En Cuanto Ala Conservación De Volumen

Reconoce que no varia la cantidad de materia contenida en las superficies limítrofes, la conservación no se extiende a lo que denominamos volumen ocupado( cantidad de espacio ocupado por el objeto como un todo, en relación con otros objetos a su alrededor.

#### Con respecto a la estimación.

Los alumnos miden correctamente utilizando patrones establecidos, algunos aun no llevan a cabo multiplicaciones matemáticas, luego no establecen relaciones numéricas entre longitudes, superficies y volúmenes como tales, no logran comprender como multiplicando longitudes, se obtienen productos en términos de unidades lineales, cuadradas, o cúbicas.

#### **4.4.2.3 ACTIVIDAD No. 13 Jugando con los Policubos y ACTIVIDAD No. 14 Divirtámonos con nuestra imaginación**

Hemos decidido analizar las actividades No. 13 y No. 14 correspondientes a **la etapa de estimación** debido a la similitud que presentan estas dos actividades en cuanto a su finalidad.

##### **4.4.2.3.1 Fase de Aplicación**

La actividad No. 13 se presentó en dos partes, en la primera parte a cada grupo de estudiantes se le proporcionaron 45 cubos de azúcar, pegante y una planilla de puntos, los cuales utilizaron para formar bicubos, tricubos y tetracubos. En la segunda y tercera parte los estudiantes realizaron representaciones mentales de los cuerpos con el fin de estimar la cantidad de cubos que hacen falta para llenar la caja pedida.

Así mismo en la actividad No.14 los estudiante realizaron representaciones mentales del policubo suministrado gráficamente para estimar el número de cubos que faltaban para completar el modelo

### **Registro de un estudiante**

El siguiente registro muestra el desarrollo de la actividad, cuando los estudiantes estiman el número de cubos de azúcar que faltan para completar el cubo, además de estimar el volumen total, el volumen faltante.

INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EDUCATIVA  
Y DESARROLLO PEDAGÓGICO (IDEP)  
PROYECTO DE INVESTIGACIÓN  
"CONSTRUYENDO LA NOCIÓN DEL CONCEPTO DE VOLUMEN"  
C. E. D NUEVO SAN ANDRÉS DE LOS ALTOS J.T.  
GEOMETRÍA. GRADO SÉPTIMO  
ACTIVIDAD No. 7  
JUGANDO CON LOS POLICUBOS

NOMBRES: Ledy Tatiana Valderrama  
Alexandra Calma  
Fredy Alexander Barón

FECHA: Octubre 23/07

1) Utiliza los cubos de azúcar, para el desarrollo de esta actividad, ten en cuenta la siguiente información:

"Si adosas (pegas) dos cubos iguales haciéndolos coincidir en una cara, formas una figura que llamaremos bicubo."

Si realizas lo mismo con tres cubos iguales, formas una figura que llamaremos tricubo."

Si realizas lo mismo con cuatro cubos iguales, formas una figura que llamaremos tetracubo."

H. ¿Cuántos tricubos diferentes se pueden formar? Explica tu respuesta

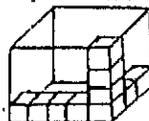
I. Dibújalos en la planilla de puntos. ¿Cuál es el volumen de cada uno de ellos? Explica tu respuesta

J. ¿Cuántos tetracubos diferentes se pueden formar? Explica tu respuesta

K. Dibújalos en la planilla de puntos. ¿Cuál es el volumen de cada uno de ellos? Explica tu respuesta.

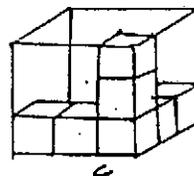
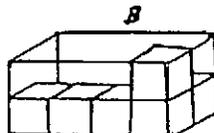
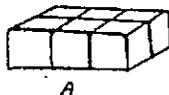
2) En la caja hay 5 cubos a lo largo, 3 cubos a lo ancho y 4 cubos a lo alto.

- A. ¿Cuántos cubos hay en una capa? 15  
B. ¿Cuántos cubos hay en dos capas? 30  
C. ¿Cuántos cubos se necesitaron para llenar la caja? 60



3) Observen las cajas y completen la siguiente tabla:

Características	Caja A	Caja B	Caja C
# Cubos a lo largo	<u>3</u>	<u>4</u>	<u>3</u>
# Cubos a lo ancho	<u>2</u>	<u>2</u>	<u>3</u>
# Cubos a lo alto	<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>
# Cubos en una capa	<u>6</u>	<u>8</u>	<u>9</u>
Volumen de la caja	<u>46</u>	<u>128</u>	<u>243</u>

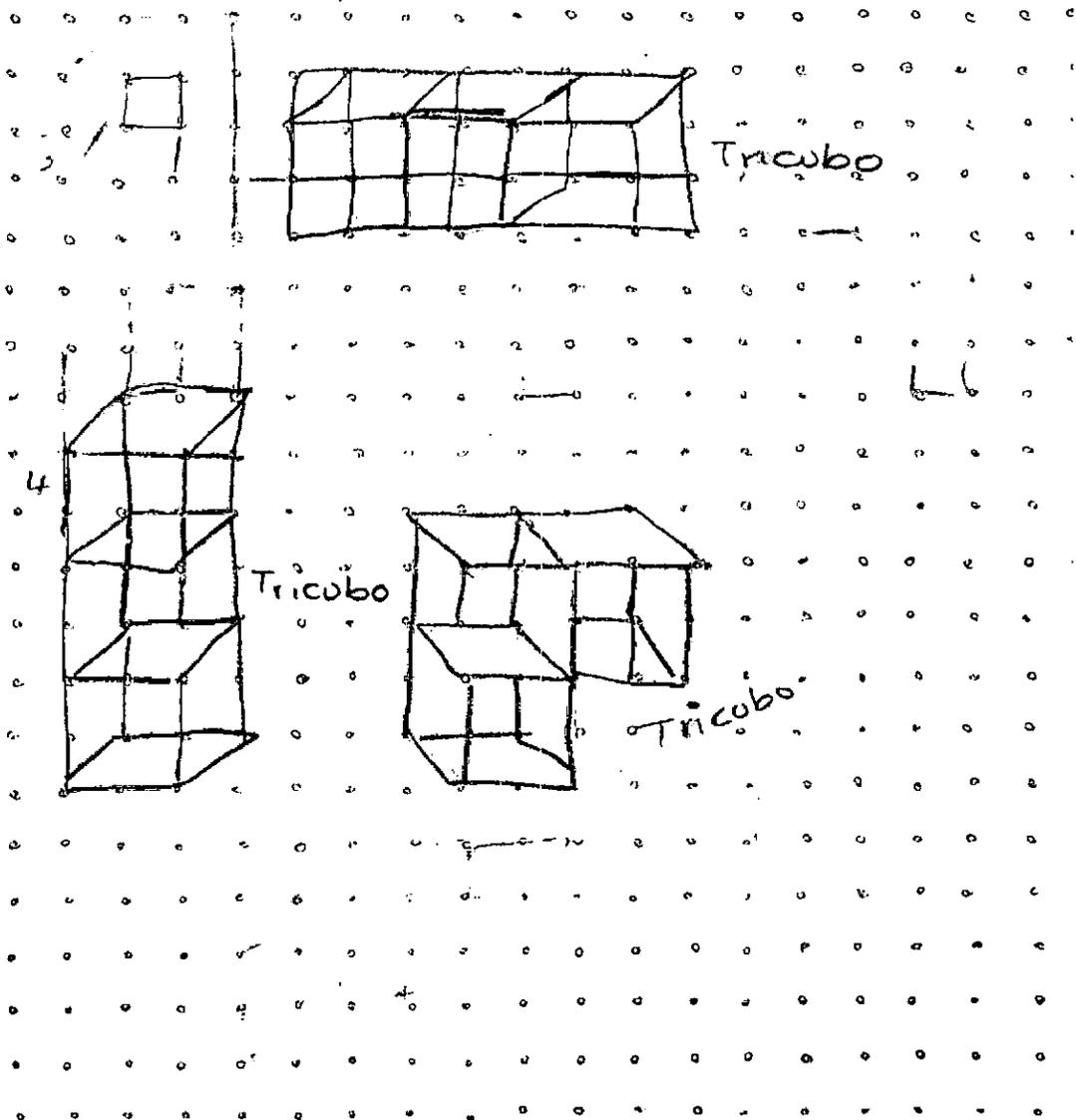


## Registro No. 2

El siguiente registro muestra las representaciones gráficas de las figuras construidas por los estudiantes



Planilla de puntos



4.4.2.3.2 Fase de Análisis

Al observar los registros de los estudiantes, encontramos que en cuanto a la primera parte de la actividad No. 13 con respecto a la construcción de los bicubos, tricubos y tetracubos

surgió la discusión, sobre cuando corresponde decir que dos tetracubos son iguales, para algunos estudiantes acomodaban de diferente forma los tetracubos y lo contaban como si este fuera otro tetracubo, por esta razón consideramos iniciar la fase de retroalimentación cuestionando a los estudiantes sobre las diversas figuras que se pueden armar con un tetracubo, con un tricubo y un bicubo, sin repetir figura, para centrar la atención en aquellas afirmaciones donde se dice que dos tetracubos dispuestos de manera semejante se cuentan como figuras diferentes.

### **Fase de Retroalimentación**

Al cuestionar a los estudiantes sobre la situación planteada en la etapa anterior encontramos discusiones como la siguiente, la cual refleja que los estudiantes están comprendiendo que el cambiar la posición no altera las propiedades comunes de un objeto

Registro de Audio  
Actividad No. 14. Jugando con los Policubos

Jeisson: Miren arme otro tetracubo

Leonel: Ese que armó es idéntico al que yo ya había hecho antes

Jeisson: No. Mire que se ven diferentes, es según usted lo mire

Leonel: Es el mismo, lo que sucede es que lo acomodó diferente

Jeisson: No, así no es.

Profesora: Jeisson : ¿Será que tu eres el mismo cuando estas acostado boca  
abajo, qué cuando estás de pie, o inclinado?

Jeisson: Si. Si soy el mismo por que no cambia mi apariencia, sino la forma  
como me acomodo.

Leonel: Pues lo mismo sucede con el tetracubo.

### Fase de Sistematización

Tanto la actividad No. 13 como la actividad No.14, nos permitieron tener una visión sobre la forma como los estudiantes se encuentran en el manejo del concepto de volumen y en la medida de este, encontrando que la mayoría de los estudiantes realizan esta medición por comparación, es una actividad que permite recordar a los estudiantes en qué consiste medir, ya que ellos se descubrirán contando cubitos, para dar las respuestas correspondientes. Evitándose el cálculo volúmenes exclusivamente en base a la realización de cálculos por

aplicación de fórmulas, lo que necesariamente aleja demasiado al estudiante del proceso de medición en sí mismo.

A continuación se presenta un registro de audio en donde se evidencia lo anterior:

**Registro de Audio**  
**Actividad No. 14. Jugando con los Policubos**

Profesora: ¿Cuál de los tetracubos que armaron tiene mayor volumen y por qué?

Alejandro: Todos tienen el mismo volumen

John: Si, todos tienen el mismo volumen por que ocupan la misma cantidad de espacio.

Profesora: ¿Cómo podrías demostrar que ocupan la misma cantidad de espacio?

John: Midiendo el volumen

Profesora: ¿Cómo ?

John: Todos están conformados por el mismo número de cubitos de azúcar y cada cubito de azúcar lo tomamos como una partecita del espacio que ocupa el tetracubo, por lo tanto el volumen de cada tetracubo es igual a 4.

Profesora: ¿Cómo podrías determinar el volumen de la caja que está representada en la guía utilizando los cubos de azúcar?

Continuación Registro de Audio  
Actividad No. 14. Jugando con los Policubos

John: Digamos que cada cubito tiene 1cm de alto, de ancho y de largo, entonces calculo cuantos cubos caben a lo largo de la caja y por ejemplo me da 5, luego cuantos caben a lo ancho de la caja y digamos me da 4 y luego cuantos caben a lo alto y digamos me da 3, entonces el volumen sería 60.

Profesora: ¿60?

Leonel: Es el mismo, lo que sucede es que lo acomodó diferente

Jeisson: No, así no es.

Profesora: Jeisson : ¿Será que tu eres el mismo cuando estas acostado boca abajo, qué cuando estás de pie, o inclinado?

Jeisson: Si. Si soy el mismo por que no cambia mi apariencia, sino la forma como me acomodo.

Leonel: Pues lo mismo sucede con el tetracubo.

Angie: Si por que se multiplican los resultados, que es lo mismo que decir que el cubo se repite 60 veces

Encontramos que en estas dos actividades No. 13 y 14 los estudiantes desarrollaron:

- La habilidad para interpretar información espacial que se obtiene directamente por medio del sentido de la vista o que se presenta de manera codificada.
- La habilidad para imaginar y anticipar transformaciones espaciales.
- La habilidad para crear e interpretar representaciones visuales de conceptos cuyo origen no es visual.

Permitiéndonos analizar la visualización, la interpretación de información espacial, la localización, la resolución de problemas por parte del estudiante, además de las habilidades relacionadas con la utilización del lenguaje.

## 5. RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN

### 5.1 Respecto al concepto disciplinar

A continuación describimos los aportes más significativos que hacen referencia al desarrollo conceptual que los estudiantes lograron en la apropiación del concepto volumen; para ello el proyecto hace énfasis en las operaciones lógicas, vale decir, sin multiplicación numérica, aunque con frecuencia los elementos y relaciones implicadas pueden expresarse en términos cuantitativos necesarios, pues la didáctica aplicada desde la percepción, comparación y la estimación lo permite.

A través del proceso investigativo desarrollado en la construcción del concepto de volumen es posible presentar tres niveles de adquisición de este:

- El nivel que hace referencia a las operaciones cualitativas de los cuerpos, es el caso de la conservación,
- El segundo nivel que hace referencia al logro de operaciones de comparación (estimación de medida) en una, dos y tres dimensiones con el objeto de predecir el

valor numérico, con base a la estrategia de intervención: percepción, comparación, y medida. Se encontró que los estudiantes miden correctamente utilizando patrones establecidos, algunos aun no llevan a cabo multiplicaciones matemáticas, luego no establecen relaciones numéricas entre longitudes, superficies y volúmenes como tales.

- Por último el nivel que hace referencia sobre la medida vista desde la concepción de magnitud como una cualidad de los cuerpos, a los cuales se les puede asociar la característica de poderse medir; en términos de unidades de longitud que se efectúan en una, dos y tres dimensiones.

## **5.2 Respecto al cumplimiento de los objetivos del proyecto**

Al realizar una valoración sobre el cumplimiento de los objetivos del proyecto es posible encontrar que en cuanto al objetivo general se desarrolló una estrategia de intervención en el aula la cual permitió mejorar los niveles de comprensión del concepto de volumen en los niños de grado séptimo, lo cual se hizo evidente a partir del análisis de cada actividad con base a las categorías de análisis propuestas. (Ver sistema de instrumentos )

En cuanto a la indagación sobre la forma como los estudiantes construyen el concepto de volumen y los conceptos asociados a este, fue posible establecer tres niveles de adquisición del concepto, los cuales fueron desarrollados en la parte de conclusiones referidas a lo disciplinar.

## **5.3 Respecto al modelo de Van Hiele y su incidencia en el proyecto**

Este modelo didáctico permitió desarrollar una categorización que atendió dos aspectos muy importantes, los desarrollos conceptuales y el desarrollo de la capacidad argumentativa; en cuanto a los desarrollos conceptuales encontramos que no sólo se trabaja sobre los conceptos específicos de la disciplina sino que con este tipo de proyectos se evidencia la existencia de conceptos asociados que permiten explorar la interdisciplinariedad y la transdisciplinariedad de los saberes en el aula, lo que hace posible pensar en cambiar la práctica pedagógica tradicional centrada en el estudio aislado de las disciplinas por una práctica pedagógica que se interese más por la integración de currículos; en cuanto al desarrollo de la capacidad argumentativa encontramos posible con este proyecto la creación de ambientes que permitan a los estudiantes construir y sustentar su conocimiento geométrico a partir de las reflexiones individuales y colectivas permitiendo de esta manera potenciar a los estudiantes a niveles de argumentación cada vez mayores.

#### **5.4 Respecto a la investigación en el aula**

La experiencia que aporta este tipo de proyectos a la formación docente investigador e innovador se podrían sintetizar en:

- La conversión de un saber erudito en un saber enseñable
  
- La facultad para pensar lingüística y matemáticamente

- El conocimiento de lo pedagógico como un medio para entender las teorías del aprendizaje y los saberes, lo cual permitió la toma de decisiones, la planificación de actividades, la implementación de rutinas heurísticas y la solución de problemas al interior del aula.

En relación con la intervención en el aula la experiencia desarrollada por el equipo a partir del proyecto en mención podría sintetizarse en el cambio de la concepción de enseñar matemáticas desde una perspectiva de respeto por las diferencias , tanto en lo conceptual como en lo humano.

El proyecto ha propiciado un ambiente de clase que promueve en el estudiante el ejercicio del pensamiento crítico, la toma de decisiones siendo relevante el proceso a través del cual el niño logra su aprendizaje.

### **5.5 Respeto a la valoración del proceso de aprendizaje de los estudiantes**

La observación del grupo de estudiantes objeto del proyecto durante el tiempo de la investigación permitió construir una visión global del progreso experimentado en su aprendizaje, de sus hábitos de trabajo y de sus actitudes ante el mismo. En cuanto a los aprendizajes fue posible desde de la observación directa del trabajo en clase y el análisis de los registros de los estudiantes a partir de las respuestas dadas a una pregunta, en cuanto a la forma como las argumenta, o cómo justifica la actividad realizada; en cuanto a las actitudes y los hábitos de cada estudiante fue posible observarlas en los equipos de trabajo,

a través de las intervenciones individuales opiniones o discusiones en el grupo, soluciones aportadas, participación y respeto por las ideas de sus compañeros.

## 6. BIBLIOGRAFÍA

1. **Aebli, H.** (1973). Una didáctica fundada en la psicología de Jean Piaget. Buenos Aires: Edit Kapeluz.
2. **Alsina, Claudi Y Otros.**(1989) El material en la enseñanza aprendizaje de la geometría. En Invitación a la didáctica de la geometría. Editorial Síntesis. Madrid.
3. \_\_\_\_\_ . (1997). ¿Porqué geometría? Propuestas Didácticas para la Eso. Editorial Síntesis. Madrid.
4. \_\_\_\_\_ . (1990). Materiales para Construir la Geometría. Madrid: Editorial Síntesis.
5. **Angulo D, F.** (1998) La formación del profesor de ciencias: fundamentos teóricos en una perspectiva de autorregulación metacognitiva. En revista Educación y pedagogía, Enseñanza de las Ciencias. Universidad de Antioquia Facultad de Educación . Vol. X. No. 21 Mayo-agosto.
6. **Astolfi, J.P., Peterfalvi, B. y Vérin A.** (1991) Compétences méthodologiques en Sciences experimentales. París: Institut National de Recherche Pédagogique.
7. **Ausubel, D.P.** (1968), Psicología educativa: Un punto de vista Cognoscitivo. Editorial Trillas, México. En Llorens, J.A. y Jaime De, M. El medio Cultural y la formación de los conceptos científicos: Una aproximación lingüística. Infancia y Aprendizaje.39 (40) pp. 47-55.
8. **Bacherard, G.** (1985). La Complejidad Esencial de la Filosofía Científica. En Autor libro (eds.). El Nuevo Espíritu Científico. México: Editorial Nueva Imagen.
9. **Bang. V. Greco. P.** (1971) La Epistemología del Espacio. Buenos Aires: Ateneo Editores.
10. **Briones. G.**(1992). La Investigación En El Aula Y En La Escuela. Bogotá: Editor SECAB.
11. **Bartolomeis, F.** (1986). La Actividad Educativa, Laia, Barcelona. En Alsina Invitación a la Didáctica de la Geometría. Editorial Síntesis. Barcelona
12. **Cascallana, M.** (2000). Iniciación a la Matemática. Madrid: Editorial Santillana aula XXI.
13. **Chamorro, y Belmonte.** (1994). El Problema de la medida: Didáctica de las magnitudes lineales. Editorial Síntesis. Madrid.
14. **Dickson, L. y Otras.** (1991). El Aprendizaje De Las Matemáticas. Madrid: Edit Labor.
15. **Dienez, Z.P.** (1972) La Geometría A Través De Las Transformaciones. Barcelona: Edit Teide.
16. **Dienez, Z.P.** (1973) Exploración Del Espacio Y Práctica De La Medida. Barcelona: Edit Teide, 1973

17. **Elliott, J.** (1989). Conocimiento, poder y Evaluación del profesor. En Wilfred, Carr. (eds). Calidad de la enseñanza e investigación acción. Sevilla: Editorial Díada, pp. 155-174.
18. \_\_\_\_\_ (1984). Investigación Acción En Educación. Madrid: Ediciones Morata, 1994, capítulo IV.
19. **Glaserfeld, E.; Hienostroza, J.** (1999). Condiciones Necesarias para la Construcción de Conceptos Matemáticos. University of Georgia. PMME – UNISON. En Matemáticas Elementales. Lima.
20. **Gómez, C.**(1990).La Adquisición del Lenguaje Matemático: Símbolo y Significado. Buenos Aires: Santillana.
21. **Guillén,G.** (1997). Poliedros. Editorial Síntesis. Madrid.
22. **Gutierrez, A.** (1998). Las representaciones planas de cuerpos 3- dimensionales en la enseñanza de la geometría espacial. Bogotá: Revista EMA. Investigación e innovación en educación matemática. Volumen 3, No 3, Julio de 1998. P. 193- 220.
23. \_\_\_\_\_.(1991) Área de Conocimiento Didáctica de la Matemática. Editorial Síntesis. Madrid.
24. **Hernán, y Carrillo.** (1999). Recursos en el aula de matemáticas. Editorial Síntesis. Madrid.
25. **Holloway, G.E.T.**(1986). Concepción de la Geometría en el Niño según Piaget. Barcelona: Edit Paidós.
26. **Hopkins, D.** (1989) Investigación en el aula: Guía del Profesor. PPU Barcelona.
27. **Kline, M.**(1992). El Pensamiento Matemático De La Antigüedad A Nuestros Días.Tomo 1,2,3. Madrid: Alianza Editoria.
28. **Latorre, A., y otro** (1987). El Maestro Investigador. La investigación en el aula. Editorial Graó, Barcelona
29. **Llorens, J.** (1996) Aplicación del Modelo de Van Hiele al concepto de aproximado local. En ICME 8º Congreso Internacional de Educación Matemática. Sevilla España : En Summa 22. junio, p 13-24.
30. **Lovell, K. R.** (1977). Desarrollo de los Conceptos Básicos Matemáticos y Científicos en los niños. Editorial Morata. Barcelona.
31. \_\_\_\_\_ (1989). El aprendizaje de los conceptos científicos y matemáticos en el niño. Madrid: Ediciones, Morata.
32. **Lurcat, L.** (1979). El Niño y el Espacio. México: Fondo de cultura económica, 1ª Ed en español.
33. **Martínez , A., y Colaboradores** ( 1989). Una Metodología Activa y Lúdica de Enseñanza de la Geometría Elemental. Editorial Síntesis.Madrid.
34. **Martínez, M.** (1997). “ Anexo 2: Ejemplos de Categorización”. En La Investigación Cualitativa Etnográfica En Educación. Bogotá: Círculo de lectura Alternativa Ltda., 3ª reimpresión., 145-146.
35. \_\_\_\_\_ (1997). “Anexo 3: Ejemplo del proceso de Estructuración”. En la Investigación Etnográfica En Educación. Bogotá: Círculo de Lectura Alternativa Ltda., 1997, 3ª reimpresión., 147-152
36. \_\_\_\_\_ (1997). “Anexo 3 : Ejemplo del proceso de Estructuración”. En: La investigación cualitativa etnográfica en Educación: Bogotá: Circulo de Lectura

- Alternativa LTDA.
37. **Martnic, S.** (1979) Evaluación De Proyectos. Conceptos Y Herramientas Para El Aprendizaje. México: COMEXANI-CEJUV.
  38. **Mercer, N.** (1995) La Construcción Guiada del Conocimiento. Editorial Paidós. Barcelona
  39. **Moreno; Garzón y Gallardo, Y.,** (1993).” Unidades, Variables, Valores Y Constructos” En : Modulo 3: Recolección de información. Serie Aprender a investigar. Bogotá: ICFES, 3ª Ed., 1993. 31-39.
  40. **Not, L.,**(1994). Pedagogías Del Conocimiento. México: Fondo de Cultura Económica, 1994.
  41. **Novark, J.D.** (1991). Ayudar a los alumnos a aprender cómo aprender. La opinión de un profesor-investigador. Enseñanza de las ciencias. 9 (3), pp. 215-228.
  42. **NTCM.**(1992). Estándares Curriculares y de Evaluación par la Educación Matemática. Traducción al español de la Sociedad Andaluza de educación matemática, Sevilla ( España) .
  43. **Ortiz M., y otros** (1997).Construcción de Sistemas Numéricos y de Medición. Asociación Anillo de Matemáticas, A.M.A. Santa Fe de Bogotá D.C.
  44. **Piaget, J.,** ( 1924). El Lenguaje y el Pensamiento en el niño pequeño. 2º ed. Piados
  45. \_\_\_\_\_(1973) Introducción a la Epistemología Genética I, Pensamiento Matemático. Buenos Aires: Editorial Paidós,1973.
  46. **Pimm, D.**(1990). Hablando Matemáticamente. Madrid: Ediciones Morata.
  47. **Polya, G** (1972). Como Plantear y Solucionar Problemas. México. Edit Trillas.
  48. **Porlán, R** (1993).Constructivismo y Escuela. Hacia un Modelo de Enseñanza- Aprendizaje basado en la Investigación. Editorial Díada. Sevilla.
  49. **Puig, L.,** (1995). Problemas Aritméticos Escolares. Madrid: Edit. Síntesis.
  50. **Recio, Martínez, y otros.** (1989).Una metodología activa y lúdica de enseñanza de la geometría elemental. Editorial Síntesis. Madrid.
  51. **Resnick, L.,** (1990). La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos. Barcelona: Edit Paidós, 1990.
  52. **Rojano, T.** (1994). La Matemática escolar como lenguaje. Nuevas perspectivas de investigación y enseñanza. México: CINVESTAV. IPN. Enseñanza de las Ciencias, 1994
  53. **Santos, L.** (1995) ¿Qué Significa Aprender Matemática?. Educación matemática Volumen 7 No 1. Abril . Grupo Editorial Iberoamericano.
  54. \_\_\_\_\_ (1994). La Resolución de Problemas en el Aprendizaje de las Matemáticas. Cuadernos de investigación No 28 junio de 1994.México: CINVESTAV. IPN.
  55. **Sauvy, J., y Somonne S.,** (1980). El Niño ante el Espacio. Madrid: Pablo del Río Editor, 1ª Ed en español.
  56. **Segovia, Castro, y otros.** (2000). Estimación en calculo y medida. Editorial Síntesis. Madrid.
  57. **Skemp, R.**(1980). Psicología Del Aprendizaje De Las Matemáticas. Madrid: Ediciones Morata, 1980.
  58. **Tezanos, A.,**(1998). Una Etnografía de la Etnografía Aproximaciones Metodológicas para la Enseñanza del Enfoque Cualitativo – Interpretativo para la Investigación Social. Capítulo 5 Enseñando A observar y a registrar. Colección

Pedagogía SXXI. Bogotá: Ediciones Antropos LTDA. 1998.

59. **Vygotsky, L. S.** (1979). El Desarrollo de los Procesos Psicológicos Superiores, Barcelona, Editorial Crítica.

## 7. ANEXOS

1. Anexo No. 1 PRUEBA DIAGNÓSTICA
2. Anexo No. 2 FASE RETROALIMENTACIÓN “ JUGANDO CON LAS CURVAS “
3. Anexo No. 3 ACTIVIDAD No. 1 “ RECORRIDOS LIBRES”.
4. Anexo No. 4 ACTIVIDAD No. 2 “ RECORRIDOS DIRIGIDOS”.
5. Anexo No. 5 SISTEMA DE INSTRUMENTOS DIDÁCTICOS (CARTILLA) “ Y DEL ESPACIO QUÉ?

## 7. ANEXOS

1. Anexo No. 1 PRUEBA DIAGNÓSTICA
2. Anexo No. 2 FASE RETROALIMENTACIÓN “ JUGANDO CON LAS CURVAS “
3. Anexo No. 3 ACTIVIDAD No. 1 “ RECORRIDOS LIBRES”.
4. Anexo No. 4 ACTIVIDAD No. 2 “ RECORRIDOS DIRIGIDOS”.
5. Anexo No. 5 SISTEMA DE INSTRUMENTOS DIDÁCTICOS (CARTILLA) “ Y DEL ESPACIO QUÉ?

# Anexo No. 1 PRUEBA DIAGNÓSTICA

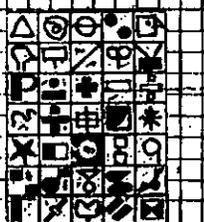
## INSTITUTO INVESTIGACIÓN EDUCATIVA Y DESARROLLO PEDAGÓGICO (IDEP). PROYECTO "CONSTRUYENDO LA NOCIÓN DEL CONCEPTO DE VOLUMEN" CED. NUEVO SAN ANDRÉS DE LOS ALTOS J.T. PRUEBA DIAGNÓSTICA.

**Prueba Diagnóstica de Geometría**

NOMBRE: \_\_\_\_\_ Edad: \_\_\_\_\_

Resuelve al reverso de esta hoja, cada uno de los siguientes enunciados, teniendo en cuenta, escribir claramente las razones que te llevan a concluir lo que concluyes.

1. En algunos cuadrillos de la parte izquierda hay dibujos exactamente iguales a otros de la derecha. Encuéntralos y márcalos. Cada par con una señal.

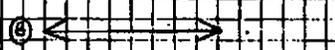
	
--	--

Número de dibujos iguales en ambas tablas: \_\_\_\_\_  
Número de dibujos diferentes: \_\_\_\_\_

2. Observa detenidamente cada una de las siguientes imágenes y encuentra los 6 errores que se han cometido en la reproducción. Señala en uno de los dibujos las 5 diferencias.

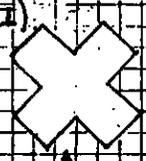
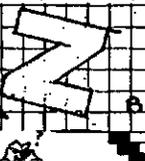
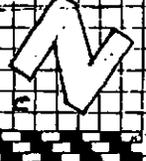
	
---	--

3. a). Indique cual de las dos líneas es más larga y diga ¿Por qué?

①       ② 

4. Diga cual de las dos figuras que se encuentran en el tablero es más grande y ocupa mayor espacio. Recuerde justificar su respuesta.

5. En cada caso diga cual de las figuras ocupa mayor espacio y por qué?

I)       II)       III) 

A)       B) 

3 b). Realmente están torcidos los azulejos?



**Anexo No. 2 FASE RETROALIMENTACIÓN “CONCENTRÉMONOS CON LAS CURVAS “**

**INSTITUTO INVESTIGACIÓN EDUCATIVA  
Y DESARROLLO PEDAGÓGICO (IDEP).  
PROYECTO “CONSTRUYENDO LA NOCIÓN DEL CONCEPTO DE VOLUMEN”  
CED. NUEVO SAN ANDRÉS DE LOS ALTOS J.T.**

**CONCENTRÉMONOS EN LAS CURVAS**

**NOMBRE:** \_\_\_\_\_ **EDAD** \_\_\_\_\_

Completar el siguiente cuadro dibujando las curvas que cumplen con la característica enunciada por la maestra; en las últimas filas deberás escribir cuales son las características de las curvas que se encuentran dibujadas.

<b>CURVA</b>	<b>CARACTERÍSTICA</b>
	ES UNA CURVA ABIERTA.
	ES UNA CURVA CERRADA
	ES UNA CURVA CÓNCAVA O NO CONVEXA
	ES UNA CURVA CONVEXA

**Anexo No. 3 ACTIVIDAD No. 1 “ RECORRIDOS LIBRES”**

**INSTITUTO INVESTIGACIÓN EDUCATIVA  
Y DESARROLLO PEDAGÓGICO (IDEP).**

**PROYECTO “CONSTRUYENDO LA NOCIÓN DEL CONCEPTO DE VOLUMEN”**

**CED. NUEVO SAN ANDRÉS DE LOS ALTOS J.T.**

**ACTIVIDAD No. 1 RECORRIDOS LIBRES**

**NOMBRE:** \_\_\_\_\_ **EDAD:** \_\_\_\_\_

Dibuje el colegio visto desde arriba, luego sobre la cancha de baloncesto realice diversos recorridos, mientras su compañero los traza en el dibujo indicando punto de salida y punto de llegada. posteriormente cambiaran sus funciones.

**Anexo No. 4 ACTIVIDAD No. 2 “ RECORRIDOS DIRIGIDOS”.**

**INSTITUTO INVESTIGACIÓN EDUCATIVA  
Y DESARROLLO PEDAGÓGICO (IDEP).**

**PROYECTO “CONSTRUYENDO LA NOCIÓN DEL CONCEPTO DE VOLUMEN”**

**CED. NUEVO SAN ANDRÉS DE LOS ALTOS J.T.**

**RECORRIDOS PROPUESTOS**

**NOMBRE:** \_\_\_\_\_ **EDAD** \_\_\_\_\_

1. Ubica un punto de salida para cada recorrido e identificalo con una letra mayúscula.
  - 1.1. Apartir de ese punto sigue con tu dedo el camino de cada uno de los recorridos, marcando con otra letra mayúscula, el punto final de cada camino.
  - 1.2. Existen caminos en los cuales el punto de partida coincide con el punto de llegada SI \_\_\_ NO \_\_\_ Cuántos?, sigue estos recorridos nuevamente, pero ahora pega lana sobre ellos.
  - 1.3 Existen caminos en los cuales el punto de partida no coincide con el punto de llegada SI \_\_\_ NO \_\_\_ Cuántos?, sigue estos recorridos nuevamente, utilizando diferentes lápices de colores.
  - 1.4. Teniendo en cuenta la característica común que tienen todos los recorridos seguidos por lana ¿qué nombre le darías? \_\_\_\_\_ y a los recorridos marcados con lápices de colores ¿Qué nombre le darías?

