COMPRENSIÓN DE ALGUNOS CONCEPTOS ARITMÉTICOS EN PROFESORES DE PRIMARIA

MARTHA BONILLA ESTEVEZ
NEILA SÁNCHEZ HEREDIA
MARTHA VIDAL ARIZABALETA

Santafé de Bogotá, D.C
UNIVERSIDAD DISTRITAL - IDEP
PROYECTO CURRICULAR DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
Octubre 14 de 1998

TABLA DE CONTENIDO

1. CONOCIMIENTO PROFESIONAL DEL PROFESOR

1.1 PAPEL DEL PROFESOR:

Desde una mirada retrospectiva podemos afirmar que el rol y el status del profesor ha venido cambiando. Del apóstol de la educación, mirado desde la perspectiva lasallista, se intenta pasar a una perspectiva tecnicista y de allí a una perspectiva profesional.

Desde hace ya varios años se ha comenzado a realizar investigaciones que pretenden dar cuenta de las características de la profesión de un profesor. En un comienzo las investigaciones buscaban la correlación entre las características personales del profesor y los logros de los estudiantes (medidos mediante test y pruebas de contenidos), los cuales no dieron índices positivos. Un segundo periodo de estos estudios se basó en la concepción que el maestro eficaz era aquel que usa métodos instruccionales bien definidos, lo que dio paso del profesor con determinadas características personales al profesor que usaba determinadas conductas en el aula (procesos de enseñanza) correlacionados con los logros de los estudiantes (producto de enseñanza). Las investigaciones que se refirieron a estas características las denominaron proceso-producto (Goody Brophy, 1986, Pérez Gómez, 1983).

Una de las discusiones planteadas al paradigma proceso-producto fue la concepción que le subyace de aprendizaje ; y a partir de allí, el rol asignado al estudiante (receptor de un conocimiento ya elaborado), esta concepción no se corresponde con los indicadores de las investigaciones que se preocupan por la forma como aprenden los estudiantes, cuyos resultados indican que los niños construyen el conocimiento y no sólo repiten lo que se les dice. Desde esta perspectiva los procedimientos tradicionales utilizados para evaluar el aprendizaje de los niños proporcionan una descripción distorsionada de este aprendizaje (Romberg y Carpenter, 1986).

Es por ello que se empieza a considerar como relevante reconocer que los niños al entrar a la escuela tienen un conocimiento a partir del cual van organizando y relacionando el que el profesor o los textos les proporcionan. Es tarea del profesor evaluar los conocimientos previos de los estudiantes y a partir de estos organizar su instrucción (contenido, métodos). Desde esta nueva perspectiva el maestro es visto como un "formador intelectual" en la medida en que su función principal está relacionada con ayudarle a sus estudiantes a desarrollar comprensión de la realidad, realidad cambiante permanentemente. Ya no es visto como simple técnico hábil en el manejo de estrategias en el aula (conductas efectivas) ni se afirma que sus actuaciones en el aula provengan sólo del conocimiento de la materia a enseñar.

Al complejizar la mirada desde la que se examina y comprende el conocimiento, el aprendizaje y la enseñanza, por lo tanto el aula y las actuaciones que en ella se encuentran, pueden aparecer preguntas nuevas, una de ellas es ¿de dónde provienen las formas de actuar del profesor en el aula ?. En particular ¿cuál es el papel que en ellas juega la experiencia del profesor ?. Livington y Borko (1989) analizaron las diferencias entre los profesores expertos y los profesores sin experiencia. Concluyeron que los profesores sin experiencia tienen dificultades para captar la información que es útil para la enseñanza, relacionada con los acontecimientos desarrollados en clase, debido a la falta de esquemas cognitivos claves que les permitan acceder fácilmente a las actividades instruccionales, contenidos y estudiantes ; a las dificultades que involucra el razonamiento pedagógico o procesos de la transformación de la materia en formas pedagógicas adaptables a la habilidad y el conocimiento de los estudiantes, y a la falta de conocimiento sobre la didáctica. Por tal razón ellos afirman que, en la formación de profesores se debe tener en cuenta la coherencia entre la formación de tipo teórico recibida y el tipo de trabajo práctico que posteriormente deben desarrollar. Un ejemplo de deformación se puede encontrar en la contradicción establecida entre la aceptación teórica del constructivismo como teoría válida del aprendizaje y la forma expositiva y tradicional de enseñanza que predomina en las carreras de formación de profesores.

De acuerdo a esta nueva conceptualización del profesor, Shoenfeld (1989) dice que se debe empezar a buscar una nueva dialéctica en el aula de matemáticas entre el contenido, los estudiantes y el profesor. Llinares (1990) cita al investigador Berliner quien señala:

"Los profesores eficaces son aquellos que comunican un curriculum que se corresponde con los resultados. Los profesores eficaces proporcionan a sus estudiantes mejores oportunidades de aprender...ajustando el curriculum a los resultados".

Dadas las argumentaciones referidas anteriormente, se hace necesario preguntar entonces sobre ¿Cuál es el conocimiento que debe poseer el profesor para que pueda permitir y generar mayores condiciones para el aprendizaje. En términos generales la pregunta es: ¿Qué es lo que actualmente, y basados en la literatura existente, se conoce como el conocimiento profesional del profesor de matemáticas y cuáles son sus componentes?

1.2 CONOCIMIENTO PROFESIONAL DEL PROFESOR

Al indagar sobre la cognición del profesor en el contexto profesional, las investigaciones realizadas en esta temática se han centrado en tratar de dar respuestas a preguntas sobre distintos aspectos: la cognición, el conocimiento, las creencias, las concepciones, el contexto de trabajo, etc. y de esa conjunción de ideas es que se ha generado el término englobante "conocimiento profesional del profesor" . Es por ello que se puede considerar el conocimiento profesional del profesor como el engranaje de los diferentes tipos de conocimiento (saberes) que debe poseer un profesor (saber científico, saber profesional y saber común-práctico)[1], y sus experiencias previas de formación que le determinan unas particulares rutinas de actuación, la mayoría de las veces de tipo inconsciente, pero que son las que le permiten un desempeño en las aulas de clase.

En los últimos años son varios los autores que se han interesado por describir las distintas componentes del "conocimiento profesional de profesor", cada uno lo concibe de manera diferente.

Refiriéndose al término conocimiento profesional Bromme y Tillema (1995), citado por García Blanco (1997) hacen una distinción según tres perspectivas: la cognitiva, la sociohistórica y creencias. Desde la perspectiva cognitiva este conocimiento se desarrolla como producto de la acción profesional, mediante la integración del conocimiento teórico y no sólo mediante la acumulación de un saber. Desde la perspectiva sociohistórica "el conocimiento profesional evoluciona gradualmente en un proceso de enculturación del profesor en un contexto de trabajo el cual es en sí mismo parte de una cierta cultura". Estos autores también consideran que los sistemas de creencias están incluidos en la conceptualización del conocimiento profesional entendido como conocimiento orientado a la práctica pedagógica del docente.

[1] Ponte (1992) citado por Llinares, Salvador. Conocimiento profesional del profesor de matemáticas: conocimiento, creencias y contexto en relación a la noción de función.(Conferencia IV Encuentro de Investigación en Educación Matemática, Portugal. Abril 1995). p3.

De cualquier manera la caracterización del conocimiento profesional del profesor, ha venido siempre marcada por la tensión existente entre el conocimiento teórico acumulado por las investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje (teórico) y el conocimiento derivado de la práctica de los profesores que se ha ido formando a lo largo de su experiencia profesional (práctica). Llinares (1990).

La tensión ha venido marcada por la diferencia de estos dos tipos de conocimiento, el teórico es general e independiente del contexto, razón por la cual los docentes no consideran de interés el conocimiento que viene desde allí y el conocimiento práctico, derivado de situaciones concretas, al cual los investigadores no le dan mucho valor por considerarlo pura experiencia sin reflexión. Este divorcio se refleja en las opiniones de los profesores cuando afirman (profesores en ejercicio y estudiantes para profesores) que lo desarrollado teóricamente no les ha servido para resolver las situaciones que se les presentan en la práctica pedagógica.

La búsqueda de los elementos caracterizadores de un conocimiento profesional específico del profesor de matemáticas, debe permitir encontrar nuevas perspectivas de actuación en la formación de profesores, con lo que se espera mejorar los procesos de enseñanza y de aprendizaje en las clases de matemáticas a través del trabajo del profesor .

Feiman-Nemser y Folden (1986) consideran como componentes del conocimiento específico, el conocimiento práctico del profesor, formado por creencias, intuiciones, hábitos y experiencias anteriores, formas de superar y valorar determinadas dificultades y, un conjunto de técnicas instruccionales y destrezas de gestión de la clase que capacitan al profesor para hacer su trabajo en la escuela (conocimiento personal orientado a la acción). Al considerar que el conocimiento del profesor está generado por la interacción entre la formación teórica previa y la experiencia práctica, es decir es el producto de la interacción entre el conocimiento científico y los conocimientos adquiridos mediante la experiencia práctica, reconocen que el conocimiento profesional se genera en un contexto institucional.

Leinhardt y Greeno (1986) consideran la enseñanza como una destreza cognitivamente compleja y por ello han conjeturado que las destrezas del profesor para conseguir una enseñanza efectiva se apoya en dos sistemas fundamentales de conocimiento: el conocimiento de la estructura de la lección y el conocimiento de la materia que enseña.

En las aulas escolares en general y en particular en las matemáticas, existe una doble interacción entre el profesor, los estudiantes y el contenido. Una en el sentido de la organización de acciones con un objetivo determinado, y la otra la relacionada con la comunicación de un contenido en particular.

La interpretación de estos dos sistemas específicos permiten al profesor formular planes, integrando objetivos y acciones con el contenido completo de las clases de matemáticas, que se ponen de manifiesto en las tareas que se desarrollan en la enseñanza. Por lo tanto las acciones en las aulas están caracterizadas tanto por las reglas que organizan la participación social como por las demandas y objetivos que provienen del contenido. (Doyle, 1986)

Desde esta perspectiva podemos considerar que los profesores expertos poseen una estructura de conocimiento muy compleja que les permite integrar los siguientes sistemas fundamentales en el conocimiento:

1. Conocimiento de un conjunto de acciones organizadas conectadas entre sí (esquemas de acción)
2. Esquemas de información que les permite conseguir y tomar nota de determinadas informaciones generadas por la actividad y que podrán usar en la organización y realización de actividades posteriores, permitiendo una flexibilidad apropiada natural en el transcurso de la clase.

Es por ello que en este estudio consideramos que un profesor experto es quien sabe:

- la materia a enseñar, conoce sobre las conductas de sus estudiantes y características de situaciones de enseñanza.
- cómo enseñar los diferentes tópicos del currículo usando múltiples representaciones del tema a enseñar, moviéndose de las representaciones al concepto y viceversa.
- identificar los momentos en los que puede modificar el plan de la clase de acuerdo a los comentarios de los estudiantes porque es capaz de evaluar los procesos de aprendizaje de un alumno.
- determinar cuando sus estudiantes han aprendido y cuando no y puede cambiar el esquema de actividades previstos disminuyendo así la dificultad presentada en el aprendizaje por los estudiantes.
- Utilizar las preguntas que sus estudiantes hacen para aclarar aún más el tema tratado y logra establecer relaciones rápidamente entre los diferentes elementos del conocimiento.

Este tipo de competencias se adquiere como producto de una síntesis entre práctica pedagógica y la teoría, que le permite generar un conocimiento mediante el cual identifica una serie de factores presentes en el aula de clase e interactuar con ellos en la medida en que debe tomar decisiones propias de la enseñanza.

El aspecto clave que permite determinar el conocimiento base para la enseñanza, según Shulman (1987), se encuentra en la interacción del conocimiento del contenido y la pedagogía, en la capacidad del profesor para transformar su conocimiento del contenido en representaciones pedagógicas fuertes y adaptables a las diferentes habilidades y conocimiento previo de los estudiantes.

Según este autor el conocimiento base para la enseñanza comprende tres aspectos:

- El conocimiento específico de la materia
- El conocimiento de contenido pedagógico
- El conocimiento curricular.

i. El conocimiento específico se refiere al conocimiento de la materia que poseen los profesores, "es la cantidad y organización del conocimiento per se en la mente del profesor" que no sólo debe comprender que algo es así sino también debe comprender por qué es así.

ii. Conocimiento del contenido pedagógico: integración de diferentes componentes del conocimiento del profesor que forman una amalgama especial de contenido y pedagogía, que caracteriza la comprensión de cada uno lo cual le permite tener un estilo personal.. Está compuesto por el conocimiento de la materia para enseñar, el conocimiento de la pedagogía general y el conocimiento de las metas y objetivos de la educación.

Para nuestro caso, los profesores de matemáticas deben comprender temas particulares, procedimientos, conceptos y relaciones entre ellos, deben saber sobre la naturaleza del conocimiento de las matemáticas, de dónde proceden, qué significa saber y hacer matemáticas (cuál ha sido la evolución del conocimiento matemático, los errores, los estancamientos, la dinámica de la producción de conocimiento). El profesor debe establecer relaciones entre el conocimiento y sus diferentes modos de representación, ya que éstos puede hacer que el maestro amplíe la comprensión conceptual de las ideas y conocimientos matemáticos, y contribuye a la comprensión de aprender a enseñar matemáticas.

El conocimiento de la materia para enseñar se refiere a:

- Las características del aprendizaje de los aspectos involucrados en tal materia, métodos instruccionales, creencias epistemológicas del profesor de la materia que enseña .
- Conocimiento de las fases por las que paulatinamente deben pasar los estudiantes para llegar a la construcción de las nociones y conceptos a aprender.
- Conocimiento del profesor de las teorías sobre el conocimiento conceptual y procedimental.
- Conocimiento de estrategias y procedimientos que le ayuden al estudiante a conectar lo que está aprendiendo con lo que ya conoce.
- Creencias epistemológicas que tienen los profesores sobre las matemáticas y su enseñanza.

EL conocimiento de la pedagogía general se refiere a:

- Técnicas y principios pedagógicos generales, estrategias para el manejo, gestión y organización del aula de clase y de la organización escolar.

El conocimiento de metas y objetivos de la educación desde una perspectiva general:

- Fines de la educación, en nuestro país están por ejemplo :la ley general de educación, plan decenal, etc, todas las reglamentaciones que con respecto a la profesión docente y al quehacer educativo se tienen como marcos legales que contextualizan la labor del docente.

El conocimiento de currículo: Está integrado por los siguientes aspectos:

- Conocimiento de materiales curriculares, que sirvan como herramientas para facilitar la comprensión en el aula.
- Conocimiento de otras disciplinas escolares con el fin de poder correlacionar o interactuar de acuerdo a temáticas afines con la disciplina en la cual se inscribe la materia objeto de enseñanza.
- Conocimiento del currículo de los siguientes cursos, lo que permite determinar metas y objetivos más claros en la enseñanza de la materia que se está desarrollando en el momento.

- En nuestro caso, debe entenderse que la materia se refiere a las matemáticas.

1.3 PERSPECTIVAS DE APROXIMACIÓN AL PROBLEMA DEL CONOCIMIENTO PROFESIONAL DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

Son varios los estudios que permiten establecer características principales para la comprensión del problema del conocimiento profesional del profesor. En particular, se destacan tres perspectivas:

- Perspectiva de aprender a enseñar
- Perspectiva desde el trabajo profesional
- Perspectiva cognitiva

1.3.1 PERSPECTIVA DE APRENDER A ENSEÑAR:

Estudios realizados por Shulman (1986,1987) ; Peterson (1988) ; Leinhardt y sus colaboradores (1990) ; Llinares (1991c) ; Fennema y Loef (1992) ; Bromme (1994) ; Lappan y Thoule-Lubienski y Wilson (1994) establecen que esta perspectiva aborda problemáticas relacionadas con: "qué conocen los profesores de su materia, dónde y cuándo adquieren ese conocimiento, cómo y por qué ese conocimiento es transformado durante la enseñanza o formación del profesor y cómo el conocimiento se usa en la enseñanza de la clase".

Estos estudios han tenido dos grandes marcos teóricos de análisis: uno para los componentes del conocimiento profesional base, y otro para el proceso de razonamiento pedagógico del profesor.

CONOCIMIENTO BASE

CONOCIMIENTO DE LA MATERIA ESPECÍFICA	$\mapsto$	CONOCIMIENTO MATEMÄTICO DEL PROFESOR
CONOCIMIENTO DE CONTENIDO PEDAGÓGICO	$\mapsto$	LIGADO A LOS PROCESOS DE INSTRUCCIÓN, FORMACIÓN, COMPRENSIÓN Y MEDIOS DE APRENDIZAJE
CONOCIMIENTO CURRICULAR	$\mapsto$	RELACIONADO CON LA ORGANIZACIÓN DE LA ENSEÑANZA.

1.3.2 PERSPECTIVAS DESDE EL TRABAJO PROFESIONAL:

Hay varios enfoques al respecto, en donde se observa la búsqueda de integración de los conocimientos a nivel cognitivo, a nivel práctico y a nivel profesional.

Los aspectos más importantes se pueden encontrar en los tópicos referenciados por los siguientes autores:

AUTORES	TÓPICOS
LLINARES (1991 a,b,c)	Dotar de significado a procedimientos matemáticos Conocimiento de matemáticas Conocimiento de aprendizaje de las nociones matemáticas y conocimiento del proceso instructivo.
BROMME (1994)	Descomposición analítica del conocimiento profesional de los profesores teniendo en cuenta: • Conocimiento de la matemática como disciplina. • Conocimiento de las matemáticas escolares • Conocimiento de la filosofía de las matemáticas escolares • Conocimiento de la pedagogía. • Conocimiento de la pedagogía específica de la materia.
FENNEMA Y LOEF (1992)	Énfasis en el conocimiento situado, en el contexto en el que se desenvuelve un docente, los aspectos que señalan son: • Conocimiento matemático • Conocimiento pedagógico y • Conocimiento de las cogniciones de los aprendices en matemática.

En éste último enfoque el conocimiento del profesor se contextualiza en el aula y ofrece una perspectiva para la acción, dado su carácter dinámico e interactivo.

Es importante tener en cuenta que aunque son varios los enfoques que se han elaborado, sin embargo se tiene claro que cada uno aporta elementos significativos para los procesos de enseñanza aprendizaje que no son excluyentes.

1.3.3 PERSPECTIVA COGNITIVA:

La idea principal de esta perspectiva se centra en considerar "la enseñanza como una destreza cognitiva compleja" que puede analizarse de manera similar a otras destrezas cognitivas.

En el siguiente cuadro comparativo se pueden apreciar las aproximaciones de los componentes y organización del conocimiento del profesor, en donde cada uno hace énfasis en alguno de los conocimientos asociados o prioriza algunos de ellos.

DISTINTAS APROXIMACIONES A LAS COMPONENTES, ORGANIZACIÓN DEL CONOCIMIENTO PROFESIONAL[2]

AUTORES	COMPONENTES (conocimiento de...)	GENERACIÓN énfasis epistemológico	ORGANIZACIÓN énfasis cognitivo
Elbaz, 1983	• contenido • *de sí mismo* • del currículo • del entorno • métodos de enseñanza		• jerárquico -reglas prácticas -principios prácticos - imágenes
Schön, 1983,1987		• práctico • generado en contexto de acción a través de la reflexión	
Shulman,1986-1989	• la materia específica • contenido pedagógico • curricular		• proposicional • de casos • estratégico
Peterson, 1988	• *las características* del aprendizaje de las nociones específicas • la enseñanza de tópicos concretos • los propios procesos cognitivos		• *estructuras* cognitivas
Ernest, 1989	• las matemáticas • otras materias específicas • la enseñanza de las matemáticas • la organización y el manejo de la clase • del contexto en la enseñanza de las matemáticas • la educación		
Leihnhardt, 1990	• la materia • *la estructura de la lección*	• situado	• agendas • *esquemas* • *rutinas*
Llinares, 1991	• *matemáticas* • del aprendizaje de las nociones matemáticas • del proceso instructivo	• contextualizado en la clase de matemáticas • puesto de manifiesto en la realización de las tareas profesionales del profesor.	
Fennema y Loef, 1992	• matemáticas • pedagogía • las cogniciones de los aprendices en matemáticas	• interactivo y dinámico • contextualizado en el aula	
Ponte, 1992		• carácter social e individual • *descriptivo* • *proposicional* • activo y procedimental • de control	
Blanco, 1994			• estático • dinámico
Bromme, 1994	• matemáticas como disciplina	• integración cognitiva del	

[2] Tomado de Blanco Maria Mercedes. *Conocimiento profesional del profesor de matemáticas.* Editorial Kronos. 1997. p 39-40.

	• matemáticas escolares • filosofía de las matemáticas escolares • *pedagogía general* • *pedagogía específica de la materia*	conocimiento desde diferentes disciplinas durante la formación práctica y experiencia personal	
Fenstermacher, 1994		• formal • práctico	
Lappan y Therle-Lubienski, 1994	• matemáticas • pedagogía de las matemáticas • estudiantes como aprendices de matemáticas.		

La importancia de esta esquematización estriba en el carácter multidimensional que han asumido las investigaciones sobre el conocimiento profesional del profesor, que implican el análisis de variados contextos, en donde lo cultural cobra sentido.

De otro lado, es posible establecer también relaciones transversales en el análisis del conocimiento del profesor de matemáticas relacionadas con:

- *Relación entre conocimiento y práctica profesional*

  (Romberg, 1988, Tom y Valli, 1990 ; Sánchez, 1992). Aquí el análisis se orienta al carácter profesional y a la profesionalización de la enseñanza, destacándose que a nivel profesional, el profesor debe:

  a. poseer un conocimiento como resultado de la formación y de la experiencia
  b. utilizar el conocimiento para toma de decisiones y elaboración de juicios en la profesión
  c. elaborar conocimientos, desarrollar conflictos y cambios en la profesión.

  Del conocimiento ligado a la práctica profesional han surgido cuestionamientos relacionados con la "práctica", el "conocimiento práctico personal", el "conocimiento en acción", la "reflexión en la acción", la "reflexión sobre la práctica", elementos de investigación que se recogen en la corriente denominada "epistemología de la práctica" apoyada en los trabajos de Schön (1983,1987). De otra parte autores como Ponte (1994) han puntualizado acerca de la **validez** de los conocimientos generados a través de la práctica profesional y han establecido el análisis de otras vías diferentes para este tipo de conocimiento, diferenciadas substancialmente de los enfoques tradicionales derivados de las investigaciones en educación en el campo teórico, filosófico y científico.

- *Relación entre conocimiento y creencias*

El problema de las relaciones entre conocimientos y creencias ha sido planteado por varios investigadores e igualmente desde diversas perspectivas. Autores como Thompson (1992), Ernest (1989), Brown y Cooney (1982), Grossman (1989), entre otros plantean grosso modo que las creencias de los profesores sobre enseñanza y aprendizaje están relacionadas con la forma en que ellos piensan sobre la enseñanza, con la forma con que ellos aprenden de sus experiencias y cómo se conducen en la clase, observándose claramente una relación intrínseca con el conocimiento de contenido pedagógico.

Existen por tanto en el conocimiento profesional del profesor componentes objetivos y subjetivos que se han tratado de dilucidar en las investigaciones en el campo de la educación matemática. Puede decirse que siendo aspectos que coexisten, su comprensión determina campos de acción y reflexión sobre el contenido concreto de las matemáticas y las relaciones básicas entre los procesos de enseñanza aprendizaje de las mismas.

- *Relación entre conocimiento de contenido pedagógico y conocimiento de las matemáticas*

En el campo de la educación matemática, Llinares (1991c,1994a) plantea

> *"que el conocimiento de contenido pedagógico se configura por la integración de los diferentes dominios identificados desde el análisis de la tarea profesional del profesor. La idea central para distinguir el conocimiento que fundamenta la enseñanza está en la capacidad del profesor para transformar el conocimiento de matemáticas en representaciones que le sean útiles a él y a los alumnos en cuanto al mayor desarrollo de los objetivos de la enseñanza. Esta capacidad vendrá propiciada por la intersección - interrelación entre contenido y pedagogía, una amalgama que es la forma propia de comprensión profesional de los profesores"*[3]

Cabe destacar con respecto de la consideración específica de un conocimiento de contenido pedagógico, que se han suscitado varias controversias que indican que la distinción entre conocimiento de contenido pedagógico y el conocimiento de la materia (matemáticas) no es muy clara, debido a que puede considerarse que : "todo conocimiento es en formas varias, pedagógico" (Mc Ewan y Bull, 1991). Sin embargo, ha sido posible establecer desde diversos puntos de las investigaciones realizadas, que hay diferenciaciones y multiplicidad de formas de los procesos de enseñanza aprendizaje en los que el conocimiento de contenido pedagógico ha puesto en evidencia el carácter transversal y longitudinal de la obtención de dichos

[3] Citado por M Blanco, op. cit. p 47

conocimientos, en los que la complejidad de las variables citadas en los ítemes anteriores, dan relevancia a esta diferenciación.

Para el caso de la presente investigación el conocimiento de contenido pedagógico es el constructo básico mediante la cual se espera lograr una mayor comprensión del manejo de los conceptos aritméticos por parte de los profesores en ejercicio de la educación básica primaria.

1.4 EL CONOCIMIENTO PROFESIONAL DEL PROFESOR Y LOS PROGRAMAS DE FORMACIÓN.

Es claro que al diseñar programas de formación de profesores se asume diferentes perspectivas epistemológicas que determinan la selección de los contenidos, los entornos de aprendizaje, las formas de evaluación, es decir todo aquello que constituye el currículo declarativo. Por ello podemos afirmar que estructurar un programa de formación con la lente de una disciplina debe generar currículos (ó propuestas de programas) diferentes a aquellos que tengan como eje principal el denominado "conocimiento base" para la enseñanza.

Las investigaciones sobre el conocimiento profesional del profesor arrojan un conjunto de perspectivas acerca de lo que se considera el conocimiento base para la enseñanza que todo profesor (estudiante para profesor ó profesor en ejercicio) debe poseer.

Aún clarificando las componentes del conocimiento profesional del profesor, a los formadores de profesores les compete encontrar información acerca de cómo este conocimiento se relaciona con la práctica, ya que una de las características de la profesión del profesor es que ella es eminentemente práctica en la medida en que su ámbito de actuación es el aula de clase.

La tensión entre conocimiento científico y conocimiento práctico, ha estado presente en el debate sobre cómo entender el conocimiento profesional del profesor, del cual derivar información que permita la toma de decisiones sobre los contenidos y estructuración de los programas de formación de profesores. En el trasfondo de este debate está una discusión epistemológica que engloba aspectos relativos a: ¿qué se entiende por conocimiento ?, ¿cuál es el status del conocimiento práctico del profesor ?, ¿cómo se genera el conocimiento profesional del profesor ?

En este sentido las investigaciones realizadas han ido arrojando resultados que permiten comprender mejor aspectos tales como las cogniciones de los profesores, el papel de las creencias y de los contextos socio-culturales, el papel de los saberes prácticos y sus caracterización, en lo que se ha denominado el proceso de aprender a enseñar matemáticas.

1.4.1 EL CONOCIMIENTO PEDAGÓGICO EN EL PROCESO DE ENSEÑAR MATEMÁTICAS.

Como ya se referenció en el apartado anterior, el aporte de Shulman - en opinión de los autores consultados -en relación a la caracterización del conocimiento profesional del profesor es el haber descrito lo que él denominó "conocimiento de contenido pedagógico", dominio en el cual está como contexto muy particular "la materia que enseña". Este reconocimiento hace que se pueda afirmar -desde el campo de la educación matemática- que las matemáticas mismas como disciplina se han de incorporar al conocimiento del profesor en al menos dos aspectos: el conocimiento sobre las matemáticas y el aspecto relativo a cómo se aprende las matemáticas, aspectos que de alguna manera determinan el cómo enseñar.

Noddings - citado por Llinares - al considerar la existencia de un conocimiento específico para la enseñanza de las matemáticas, hace alusión a los problemas de la relación que necesariamente debe existir entre conocimiento de las matemáticas y el conocimiento de contenido pedagógico y enfatiza la necesidad de decidir sobre cuándo esos dos dominios de conocimiento se deben incorporar en los programas de formación. Al respecto Shulman, propuso una organización del conocimiento profesional del profesor que engloba: el conocimiento proposicional, el conocimiento de casos y el conocimiento estratégico. Desde diferentes perspectivas (Fenstermacher y, McEwan y Bull) se ha criticado el constructo conocimiento de contenido pedagógico, sin embargo,

> *"desde el propio campo de la educación matemática, Cooney (1994 a) considera como relevante en la noción de Shulman la integración de contenido y pedagogía).. esta idea es apoyada por Bromme (1994) .. con lo que subraya un rasgo característico del conocimiento profesional, cuyo contenido inicialmente procede de distintos dominios (entre los que se identifica el conocimiento de contenido pedagógico específico de las matemáticas), integrándose y articulándose en las situaciones prácticas"*[4]

---

[4] Llinares, Salvador. Del conocimiento sobre la enseñanza para el profesor al conocimiento del profesor sobre la enseñanza: implicaciones en la formación de profesores de Matemáticas. 1995. P163.

El contexto de análisis definido en este trabajo de investigación, que dará como resultado la estructuración de una propuesta de actualización de profesores de primaria, se enmarca en la reflexión sobre el diseño del programa de formación tomando como eje el **conocimiento profesional del profesor**, entendido como una integración de diferentes ámbitos: las investigaciones desarrolladas, las intervenciones en la práctica y los procesos de reflexión de las mismas.

En particular y tomando como referencia la idea de conocimiento de contenido pedagógico, se pretende involucrar en los procesos de formación de profesores, la comprensión por parte del profesor de los procesos por los cuales los niños aprenden determinadas nociones. Concretamente las nociones involucradas en los procesos de resolución de problemas verbales de estructura aditiva y multiplicativa y, de los conceptos involucrados en los algoritmos de las cuatro operaciones. Una de las creencias que están implícitas en el trabajo es la idea de que el conocimiento y la comprensión del profesor de este tipo de características del aprendizaje de los niños influye en el desarrollo de la enseñanza que realiza. De manera particular se espera que con este tipo de conocimiento el profesor aprenda a diseñar tareas y a gestionar aprendizaje significativo en sus intervenciones en el aula.

Tanto las investigaciones realizadas sobre cómo aprenden los niños determinados conceptos y procedimientos matemáticos como las investigaciones que pretenden dar cuenta del conocimiento y comprensión que tienen los profesores sobre la materia que enseñan, permiten a los formadores de profesores tener referentes diferentes al diseñar entornos de aprendizaje para los profesores en ejercicio Con ello se espera que dado que, los profesores tendrán una mejor comprensión de lo que sucede en sus aulas y la manera como ellos pueden ayudar a los niños a comprender mejor, los resultados de los aprendizajes comprensivos mejorarán, contribuyendo así al mejoramiento de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas a nivel de la básica primaria.

1.5 LAS MATEMÁTICAS ESCOLARES: SU COMPRENSIÓN Y USO POR PARTE DE LOS PROFESORES DE PRIMARIA:

En la mayoría de los profesores de la básica primaria sus conocimientos matemáticos provienen de los aprendido durante el periodo como estudiantes de la enseñanza básica primaria y básica secundaria, que les ha permitido estar en contacto con una instrucción en matemáticas formándose una idea de lo que puede llegar a considerarse el objeto de estudio de los programas curriculares de la enseñanza básica. Desde los primeros años ha estado vinculado con "ejercicios" de sumar, restar, multiplicar, dividir .... con resolución de "problemas" de cálculos matemáticos. Esta manera de hacer matemáticas ha generado concepciones sobre lo que es enseñar y aprender matemáticas en las aulas de primaria, que los ubica en un modelo de enseñanza instruccional caracterizado por ser un modelo implícito, no reflexivo y aprendido en la práctica de su formación, se repite la forma en que ellos aprendieron, sin que para ello se hagan mayores explicaciones acerca del qué enseñar, cómo enseñar y del para qué enseñar, dado que estas cuestiones se presuponen dadas por las autoridades competentes o por las legislaciones educativas, en nuestro caso por el Ministerio de Educación, las secretarias de educación ó los textos escolares.

El manejo de algoritmos y la memorización y asimilación de diversos procedimientos de manejo de reglas han sido en gran parte las actividades matemáticas desarrolladas por dichos maestros, las matemáticas para ellos son las de los libros texto producto del currículo de matemáticas desarrollados con ellos.

1.5.1 EL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO :

Tal como lo afirma Llinares (1996), uno de los aspectos relevantes, planteados en el contexto de la comprensión por parte de los profesores de la básica primaria es la naturaleza de dicha comprensión en relación a los conceptos, símbolos, reglas y procedimientos matemáticos, la relación entre la comprensión de los procedimientos y el significado dado de los procedimientos, reglas y algoritmos.

La naturaleza del aprendizaje matemático, como objeto de investigación ha sido tratada por investigadores en educación matemática, quienes se han centrado en la caracterización del conocimiento matemático como las relaciones entre el conocimiento conceptual y el conocimiento procedimental. Según Hiebert y Lefevre, citados por Llinares (1996),

> *"El conocimiento de procedimiento consta de dos partes. Una parte es la relativa al conocimiento de los sistemas de representación de símbolos matemáticos. Por ejemplo los símbolos para los diferentes tipos de números (naturales, "7/4" fracciones, 3.566 decimales, etc.), las diferentes operaciones matemáticas ("+", "-", "x", "÷ " ,log) y las reglas sintácticas para manejar y aceptar la corrección formal de la representación de dichos símbolos ("2/ + 7/ =" puede ser una expresión formalmente no correcta frente a "2/3 + 1/5 = ")*

> *En segundo lugar, el conocimiento de procedimiento consiste en el conocimiento de reglas y algoritmos para desarrollar alguna tarea matemática (por ejemplo el procedimiento de calcular fracciones equivalentes, el algoritmo para calcular la raíz cuadrada de un número, etc.) es el conocimiento de los diferentes pasos en el desarrollo de los procedimientos reglas y algoritmos" (Llinares, pág. 282)*

Para estos mismos autores el conocimiento conceptual es rico en relaciones y se genera construyendo relaciones de diferente naturaleza entre partes de contenidos, un ejemplo de ello lo tenemos cuando se estudia el concepto de suma en los números naturales teniendo diferentes contextos: suma como cambio (dada una condición inicial y una final existe una forma de pasar de una situación a la otra), de comparación (cuánto más?), de combinación (suma de elementos de conjuntos en donde se toma parte + parte = todo) y de igualación (se usa la expresión tener tanto como). y con diferentes modos de representación (conjuntos, modelos lineales, regletas y funcional) El concepto de suma se tiene cuando se es capaz de identificar en los diferentes, contextos una relación que indica la operación de sumar (añadir, compensar, reunir, agrupar).

La importancia de la identificación de estos dominios de conocimiento radica en el papel que desempeñan las relaciones múltiples entre ellos en el proceso de aprendizaje de las matemáticas y la diferente naturaleza de dichas relaciones (Silver, 1986, citado por Llinares, 1996).

La experiencia nos lleva a afirmar que por el alto énfasis en el conocimiento de tipo procedimental, dado en los programas escolares, los estudiantes no siempre construyen el conocimiento conceptual y sus interrelaciones con el conocimiento de tipo procedimental. El tipo de enseñanza que los profesores realizan: preocupación porque los resultados de los ejercicios sean correctos, porque se conozcan las tablas de multiplicar, porque se aprenda los "pasos" de cada algoritmo, porque se apliquen las fórmulas correctas en un ejercicio determinado etc. propician esta situación.

1.5.2 EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS.

Con los avances de la sicología cognitiva

> *"hoy se admite, de manera generalizada que el aprendizaje es un proceso constructivo, entendiendo por tal aquel proceso en el que se adquieren nuevos conocimientos mediante la interacción de las estructuras presentes en el individuo con la nueva información que le llega; de forma que los nuevos datos, en cuanto que se articulan con la información preexistente, adquieren un sentido y un significado para el sujeto que aprende"*

Del párrafo anterior se concluye que el aprendizaje se construye sobre la base de la interacción entre lo que se sabe y lo que se va a aprender, todos construimos interpretaciones del mundo basados en los constructos que tenemos. Es por ello que hoy se habla de aprendizaje significativo como contraposición al denominado aprendizaje memorístico. Este último se considera por Skemp (1993) como la forma propia de aprender de las especies no humanas en contraposición al aprendizaje significativo que se caracteriza porque implica la comprensión, en particular al hablar de las matemáticas se hablará de la formación de estructuras conceptuales y sus relaciones, que deben ser comunicadas por medio de símbolos.

Para comprender las nociones anteriores es necesario clarificar la idea de concepto y de estructura conceptual.

> *"Abstraer es una actividad por la cual nos hacemos conscientes de similitudes (en el sentido cotidiano, no matemático) entre nuestras experiencias. Clasificar significa reunir nuestras experiencias sobre la base de estas similitudes. Una abstracción es cierto tipo de cambio mental duradero, el resultado de abstraer, que nos capacita para clasificar nuestras experiencias como poseedoras de similitudes con una clase ya formada. Brevemente, es algo aprendido que nos capacita para clasificar ; es la propiedad que define una clase. Para distinguir entre abstraer como actividad, y una abstracción como producto final, denominaremos a la última, de ahora en adelante, como concepto"*[5]

Ello quiere decir que para la formación de un concepto es necesario tener una cierto número de experiencias que posean algo en común de tal manera que permitan la clasificación. Una vez el concepto se tenga es posible que se inicie el proceso de ejemplificación por parte del individuo que lo ha construido. Una interesante aclaración se refiere a la diferencia entre la definición y el concepto. Una definición es una manera verbal de explicitar las características ó funciones de un concepto pero de ninguna manera reemplaza a la actividad mental propia de la construcción conceptual, la definición se puede repetir, el concepto se construye.

Particularmente, Skemp al tratar sobre el aprendizaje de los conceptos matemáticos muestra cómo la gran dificultad en su aprendizaje puede estar en la diferenciación de aprender conceptos cotidianos a aprender conceptos en los que los grados de generalización y abstracción están muy presentes. Estas características de los conceptos matemáticos son la que a la vez le dan su carácter de potencial para el desarrollo de un pensamiento avanzado. Es por ello que para el autor "las matemáticas no pueden aprenderse directamente del entorno cotidiano, sino sólo de manera indirecta desde otros matemáticos"[6]

---

[5] SKEMP, R (1993) *Psicología del aprendizaje de las matemáticas*. Madrid :Morata p.26.
[6] Ibid. p.36.

El papel de otros matemáticos se lo adjudica al profesor, de quien dice debe saber proporcionar al estudiante una gran variedad de situaciones con las cuales le permita una construcción conceptual a la vez que se asegura que sólo si ya se posee un concepto se es capaz de aprender otros. Ejemplos de conceptos matemáticos básicos (no fáciles) lo constituyen el número natural, los conjuntos, el conteo, la variable, la función.

Es obvio que otra de las características del conocimiento matemático es que en él aparecen los conceptos relacionados -tal vez jerarquizados- y surge así la idea de estructura. Para articular conceptos usamos varios fuentes: la relación, la transformación, las equivalencias, etc. El aprendizaje de estructuras matemáticas es otro de los propósitos de la matemática escolar, en tanto ellas le permiten al estudiante integrar conceptos y propiciar la construcción de otros nuevos. La función integradora de una estructura nos hace conscientes de que cuando se tiene un concepto éste lo es en sí mismo y a la vez porque es miembro de una clase. En lo relativo al aspecto constructivo, tenemos ejemplos como los que conocemos cuando un niño aprende los números hasta 10 y puede más o menos rápidamente construir otros círculos numéricos. Es teniendo en cuenta estas dos funciones de las estructuras que se puede afirmar que "comprender un concepto" es lo que permite incluirlo en una estructura adecuada.

Ejemplos de estructuras conceptuales los tenemos al usar el sistema de numeración para dar sentido a la construcción de los números, a las operaciones entre los números. Cabe aclarar que cada nuevo conjunto numérico se genera por relaciones diferentes y por lo tanto su construcción conceptual debe ser diferente, es el caso de la diferencia entre números naturales y números fraccionarios, en estos últimos la idea de unidad cambia, así como las formas de explicar y comprender las operaciones básicas; aún así, la estructura del sistema de los números naturales le permite a un alumno la construcción de nuevos sistemas numéricos en la medida en que ha construido conceptos como el conteo, la clasificación, la ordenación, etc.

1.5.3 EL CONOCIMIENTO DE CONTENIDO PEDAGÓGICO DEL PROFESOR DE PRIMARIA

Como ya lo dijimos en apartados anteriores, la expresión "conocimiento de contenido pedagógico del profesor" fue introducida por Shulman y tal como lo afirma Llinares (1996)

> *"incluye la "comprensión del profesor" de lo que hace el aprendizaje de un tópico específico fácil o difícil. Este conocimiento está vinculado al uso que el profesor debe hacer de su conocimiento de*

las matemáticas en las situaciones de enseñanza. En esta componente del conocimiento del profesor se enfatiza la forma en que las matemáticas deben ser presentadas en la enseñanza " (Pág. 17).

Apoyados en esta afirmación consideramos que, una componente del conocimiento del profesor es el conocimiento de las diferentes clasificaciones de las estructuras aditivas y multiplicativas y sus modos de representación. Así mismo el profesor debe tener un conocimiento sobre los procedimientos computacionales involucrados en los algoritmos de las cuatro operaciones, que hacen relación a la estructura analítica, es decir a la comprensión de los conceptos y propiedades implícitas en cada uno.

En tiempos recientes ha habido por parte de los investigadores en educación un interés por realizar análisis teóricos sobre las estructuras aditiva y multiplicativa así como promover estudios para investigar la adquisición de los conceptos y las relaciones entre ellos implicadas en dichas estructuras. Los autores que han proporcionado más análisis sobre este tema y que han sido consultados por nosotros son: Vergnaud, Nescher, Castro y Castro, Greer.

1.5.3.1 ESTRUCTURA ADITIVA.

Se dice que un problema aritmético comporta una estructura aditiva si para su solución se requiere del uso de una adición. En este contexto la resta se clasifica como un tipo especial de suma. Se asume que una estructura aditiva es aquella estructura o relación que sólo está formada por adiciones o sustracciones.

1.5.3.1.1 CATEGORÍAS DE LAS RELACIONES ADITIVAS SEGÚN VERGNAUD:

Las aditivas son relaciones ternarias que pueden encadenarse de diversas maneras y ofrece gran variedad de estructuras aditivas.

Primera categoría: dos medidas se componen para dar lugar a una medida

Segunda categoría: una transformación opera sobre una medida para dar lugar a una medida

Tercera categoría: una relación une dos medidas

Cuarta categoría: dos transformaciones se componen para dar lugar a una transformación

Quinta categoría: Una transformación opera sobre un estado relativo (una relación) para dar lugar a un estado relativo.

Sexta categoría: dos estados relativos (relaciones) se componen para dar lugar a un estado relativo.

1.5.3.1.2 CATEGORÍAS SEGÚN LA ESTRUCTURA SEMÁNTICA DE NESHER:

Categoría de cambio: incremento o disminución de una cantidad inicial para crear una cantidad final (en estos problemas hay implícito una acción) lo desconocido puede ser cualquier cantidad o el incremento o la disminución.

Categoría de combinación: relación entre una colección y dos subcolecciones disyuntas (parte-todo) La combinación no implica cambio. Lo desconocido puede referir a cualquiera de las partes o al todo.

Categoría de comparación: comparación entre dos colecciones la relación se utiliza utilizando términos como "más que", "menos que" tiene tres cantidades: una el referente, otra el referido y otra la comparación.

Categoría de igualación: se produce alguna acción relacionada con la comparación entre dos colecciones disyuntas.

1.5.3.1.3 CATEGORÍAS SEGÚN LA ESTRUCTURA SINTÁCTICA:

Esta categorización se base en encontrar el lugar de la variable desconocida (incógnita) en el problema. Cambiando la incógnita se generan seis sentencias abiertas en suma y otras seis en la resta

PARA LA SUMA	PARA LA RESTA
a + b = ?	a - b = ?
a + ? = c	a - ? = c
? + b = c	? - b = c
? = a + b	? = a - b
c = ? + b	c =? - b
c = a + ?	c = a -?

1.5.3.2 ESTRUCTURA MULTIPLICATIVA.

Se consideran problemas con estructura multiplicativa aquellos que se pueden resolver a través de una multiplicación o una división.

1.5.3.2.1 CLASIFICACIÓN SEGÚN VERGNAUD:

Clasifica en dos grandes categorías los problemas simples de multiplicación:

1. La categoría de isomorfismo de medidas.
2. La categoría del producto de medidas.

- **ISOMORFISMO DE MEDIDA.**

En esta estructura se refiere a los problemas en los que subyace una proporcionalidad simple directa entre las dos magnitudes implicadas. Para representar esta estructura utiliza tablas de correspondencia

M_1	M_2
x	$f(x)$
x'	$f(x')$

La función $f: M_1 \longrightarrow M_2$ es una proporcionalidad simple directa entre dos magnitudes M_1 y M_2. Dentro de esta estructura (Isomorfismo de Medidas), identifica cuatro subclases de problemas, una subclase de multiplicación, dos subclases de división y una cuarta que llama problemas generales de regla de tres.

La subclase de multiplicación corresponde en el esquema anterior al caso particular de ser $x=1$; conocidos $f(x)$ y x' ; desconocido $f(x')$.

La subclase de división en este primer tipo de problemas considera los que en la estructura general presentan la característica de ser $x=1$; la incógnita $f(1)$ y son conocidos x' y $f(x')$.

La subclase de división en el segundo grupo considera los que de acuerdo al esquema general deben hallar x′ conociendo f(x′) y f(1) siendo x=1

Los problemas de regla de tres se pueden esquematizar por:

M_1	M_2
a	b
c	x

Intervienen tres datos a, b, c ; lo que indica que no son problemas simples de estructura multiplicativa.

- **PRODUCTO DE MEDIDAS**

En esta estructura se consideran tres magnitudes M_1, M_2, M_3 una de ellas (M_3) es el *producto cartesiano* de las otras dos $M_1 * M_2 = M_3$. Dentro de la estructura PRODUCTO DE MEDIDAS se pueden distinguir dos tipos de problemas:

⇒ Multiplicación (*encontrar la medida producto conociendo las medidas* que la componen).
⇒ División (*encontrar una de las medidas que se componen conociendo* la otra y la medida producto).

En cada una de estas clases de problemas se pueden subdividir de acuerdo al tipo de magnitud implicado: discreta, continua ; el tipo de números enteros decimales, números grandes, números inferiores a 1 y los conceptos implicados.

1.5.3.2.2 *ENFOQUE DE ESTRUCTURA DE CANTIDADES*

Schwartz (1988) considera dos tipos de cantidades intensivas **(I)** y extensivas **(E)**, la cantidad extensiva viene expresada como unidad simple (Ej. 8 metros), mientras la cantidad intensiva (I) tiene una unidad compuesta (Ej. 50 metros por hora), con base en esta distinción clasifica los problemas multiplicativos así:

⇒ Problemas asociados a la terna (I, E, E′) estos problemas corresponden a la categoría que Vergnaud llama isomorfismo de medidas, se dan tres tipos de problemas:

⇒**I*E=E', E'/E=I y E'/I=E.**

⇒Problemas asociados a la terna (E,E',E") estos problemas corresponden a la categoría que Vergnaud llama producto de medidas, se pueden dar: **E*E'=E" y las divisiones E"/E=E' o E"/E'=E**

⇒Problemas asociados a la terna (I,I',I") corresponde al problema **I*I'=I"** y las divisiones **I"/I'=I y I"/I=I'.**

1.5.3.2.3 EL ENFOQUE TEXTUAL.

Para Nesher(1988) los análisis de Vergnaud y de Schwartz se apoyan en el concepto físico de análisis dimensional, la diferencia está en que Schwartz considera en la estructura multiplicativa la relación entre los elementos y Vergnaud lo concibe como una relación cuaternaria. Nesher se sitúa en un análisis semántico al igual que lo hizo con los problemas aditivos. Identifica tres grandes categorías:

⇒Mapping rule. Considera dos tipos de problemas de multiplicación y de división, los problemas de división los subdivide en dos: división cuotitiva y partitiva (de acuerdo a la categorización de Vergnaud corresponde a isomofismos de medida y según Schwartz a los de tipo **I*E = E'.**

⇒Comparación multiplicativa. Hay implicadas tres cantidades, la cantidad que sirve de referente en la comparación, la que es comparada y el factor de comparación o escalar. De acuerdo a Vergnaud corresponden a la categoría de isomorfismo de medidas y según Schwartz a la terna I * E' = E".

⇒Multiplicación cartesiana. Están incluidos en la categoría producto de medidas de Vergnaud y en los del tipo E * E' = E" de Schwartz.

1.5.3.2.4 CLASIFICACIÓN SEGÚN GREER

Las categorías para los problemas multiplicativos establecidas por Greer son

⇒Grupos iguales. A esta clase corresponden los problemas multiplicativos en los cuales aparecen dos expresiones, una relativa a cada uno (referida a cada grupo) y la otra expresión que refiere el número de grupos. Esta clase da lugar a dos tipos de problemas de división : la partitiva (en la que se busca el tamaño del grupo) y la cuotitiva (en la que se busca el número de grupos).

⇒ Comparación multiplicativa. Corresponden a aquellos problemas en los que está presente la expresión : Tantas veces como", y en ella se involucran un factor multiplicativo y un multiplicador es decir, un número que indica cuántas veces se repite el factor multiplicativo.

⇒ Producto cartesiano. Involucra aquí todos los problemas en los que la combinatoria es el modelo de interpretación del problema. Debido a que en esta clase los números que aparecen en el problema son elementos de una pareja ordenada, se puede encontrar sólo un problema de división.

⇒ Area rectángulo. Se encuentran en esta categoría los problemas relacionados con hallar áreas, ó hallar las longitudes de los lados de un rectángulo.

1.5.3.3 LOS ALGORITMOS:

La expresión **algoritmo** es un término usado por nosotros para referirnos a un procedimiento matemático a ejecutar paso a paso, tal es el caso de los algoritmos clásicos enseñados para hacer operaciones como la suma, la resta, la multiplicación y la división.

Los algoritmos clásicos de las cuatro operaciones involucran el manejo de la estructura del sistema de numeración decimal de la cual forman parte los conceptos de número, valor posicional y teoría de agrupamiento. Tal como lo afirma Vergnaud (1997, pág. 135) "el número es un concepto para el cual existen varios sistemas posibles de escritura ; la numeración posicional en base diez es uno de ellos", estos conceptos: número, posición y agrupamiento dan sentido a los algoritmos de manera diferenciada, mientras el número es un concepto que estructuralmente puede diferenciarse de su escritura, "el sistema de numeración es un soporte de la conceptualización"(Vergnaud, 1997, pág. 135) ya que la escritura del número aparece asociada al número mismo; sin embargo los métodos de enseñanza utilizados hasta ahora y basados en lo que Plunkett denomina el enfoque "analítico" en lo computacional permite el aprendizaje de una serie de reglas:

> *"que aunque puedan ser recordadas, son en gran parte aprendidas sin justificación y no están relacionadas con otros conocimientos aritméticos. Distan mucho de contribuir a la comprensión de la noción de número ; más bien suscitan y alimentan la creencia de que las matemáticas son esencialmente arbitrarias" (citado por Brown, 1991 pág. 271).*

Este enfoque analítico hace relación no sólo al concepto de número sino que también puede verse en relación al valor posicional y al agrupamiento en la medida, en que estos conceptos son aprendidos como esquemas de colocación (poner en casillas) o como simples valores de equivalencias entre unidades, decenas, centenas y demás unidades de orden.

La idea de número involucrada en el sistema decimal de numeración se basa en el reconocimiento del valor relativo de cada cifra de acuerdo al lugar que ocupa en el número tomado como globalidad, es decir, comprender que un dígito cambia su valor en la medida en que asume diferentes posiciones dentro del número global, por ejemplo el número 444 está compuesto de 3 dígitos iguales (el 4) pero que cuando se involucran en el número cuatrocientos cuarenta y cuatro toman valores diferentes, que corresponden a los dígitos que acompañan a las potencias de 10 ($4 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 4 \times 10^0$).

Así mismo la idea de agrupamiento se refiere a los grupos de las potencias de 10 que se han construido para conformar lo que denominamos unidades 10^0, decenas 10^1, centenas 10^2, etc.

El sistema de numeración decimal incluye el manejo del aspecto posicional y del agrupamiento en la medida en que en la lectura de un número se encuentran a la vez el valor de la posición, entender el número como una síntesis de agrupamientos de 10 y las cifras como portadoras de un valor de acuerdo a la posición que ocupan es diferente de entender el número solo desde la secuencia de los números conformada por 1 más. Las seriaciones que se realizan cuando se "cuenta" no significan que se entienda el sistema de numeración y el valor de los agrupamientos que se han hecho para poder escribirlos.

Así mismo, el sistema de numeración incluye aspectos multiplicativos en cuanto todo número se descompone en un polinomio de potencias de la base 10. Ej : en el número 324 su descomposición polinomial será : $3 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 4 \times 10^0$. Pero así como en la escritura del número hay implícitos varios conceptos, también en el desarrollo de los algoritmos los hay en la escritura de las cantidades y las propiedades de las operaciones.

El sistema posicional emplea el numeral 0 para describir la carencia de unidades de un determinado orden y no en el sentido de que el cero es sinónimo de nada " por sobreentenderse que si es nada, nada hay que tener en cuenta". Citado por Dickson(1991, pág. 277) Oesterle señala que :

> *"La importancia del cero para denotar un lugar en la notación posicional y como parte vital de nuestro sistema de numeración, aparece, como tantos autores han señalado, cuando comenzamos con la adición y multiplicación de los números de dos dígitos. Hasta ese momento no parece existir auténtica razón para introducir tablas del cero en ninguna de las operaciones fundamentales"*

Entonces para entender los algoritmos de la suma, resta, multiplicación y división es necesario tener los conceptos involucrados en el sistema de numeración de tal manera que sean ellos los que permitan dotar de significado a las operaciones realizadas.

2. ASPECTOS METODOLÓGICOS DE LA INVESTIGACIÓN

En este capítulo se describirán los aspectos correspondientes al diseño y el desarrollo de la investigación, explicitando los referentes teóricos usados en el tratamiento de los datos obtenidos a través de los dos instrumentos utilizados: la encuesta y la entrevista.

2.1 LA METODOLOGÍA EMPLEADA.

En relación a la manera de aproximarnos al problema de investigación planteado, conscientes de estar abordando un tema complejo como es el conocimiento y caracterización de las concepciones de los profesores de primaria, se decidió emplear técnicas tanto cuantitativas como cualitativas, ello a fin de obtener información significativa que permitiera una mayor comprensión de los datos obtenidos a través de los instrumentos aplicados. Citados por Azcárate (1996) Carr y Kemmis resaltan que

> "...las técnicas cualitativas nos permiten una mayor profundización en los problemas, al acercarnos a ellos desde estrategias más directas y personales, como puede representar, por ejemplo, el nivel de introspección individual que supone la realización de una entrevista. El dato cualitativo nos permite caracterizar mejor una realidad, sus propiedades o el grado en que éstas se manifiestan (García, Gil y Rodríguez, 1993). Sin embargo, las técnicas de carácter más cuantitativo, nos aportan una visión más general y amplia del problema. Ambas pueden ser complementarias y su contraste nos permite una mayor comprensión de los datos obtenidos, lo cual centra el problema metodológico en la perspectiva desde la que se realiza la interpretación de los datos y no tanto en las estrategias metodológicas seleccionadas". (Azcárate, pág. 272)

Como lo afirma García (1997) al referirse a la problemática que los investigadores del campo de la Educación Matemática plantean en lo relativo a las diferentes metodologías utilizadas en el análisis de las cogniciones de los profesores:

> "... los instrumentos usados con mayor profusión por los investigadores son la entrevista y el cuestionario. Bajo estas etiquetas encontramos una gran diversidad de formas y estructuras. Nosotros las utilizamos entendiéndolas en el sentido más amplio. Así entre los cuestionarios podemos encontrar:
>
> - cuestionarios con preguntas cerradas de elección múltiple (Llinares et al., 1994)
> - cuestionarios con problemas de distinta índole, a resolver, redactar, comentar,... , (Carpenter et l.,1988 ; Even, 1990,1993 ;Markovits y Even,1991 ; Post et al.,1991 ; Even y Markovits, 1995 ; Castro y Castro, 1996, entre otros.
>
> Respecto a las entrevistas, en general, son semiestructuradas, con el objetivo de acceder con mayor facilidad a las cogniciones del profesor dejándole una cierta libertad para expresar sus ideas, (Ball, 1990a, 1990b ; Tirosh y Graeber, 1989, 1990a, 1990b, Graeber, Tirosh y Glover,

1989 ; Post et al. 1991 ; Llinares1991a, 1994b, Even, 1990, 1993 ; Llinares y Sánchez, 1991, 1996,...)" (García, pág. 102)

La primera fase de la estrategia metodológica partió de la estructuración de un cuestionario el cual consta de dos partes referidas a la forma cómo maneja un profesor de primaria, de una parte, la elaboración de problemas aritméticos elementales y de otra, la enseñanza de los algoritmos de las cuatro operaciones aritméticas: suma, resta, multiplicación y división. La segunda fase consistió en el diseño y aplicación de la Entrevista semiestructurada.

2.2 ELABORACIÓN DE CUESTIONARIOS.

En lo relativo a la primera parte, se seleccionaron los ítemes tomando como referentes los cuestionarios aplicados en estudios como los realizados por Carpenter, Fennema, Peterson, y Carey (Carpenter, et al, 1988) sobre la estructura aditiva y por Castro y Castro (Castro et al, 1996) sobre la estructura multiplicativa. La investigación de Carpenter utilizó para el análisis del conocimiento del contenido pedagógico de profesores de primaria dos cuestionarios, uno de los cuales se basaba en el conocimiento del profesor sobre los diferentes tipos de problemas aritméticos ; tal como lo muestra García (1997) el cuestionario se presenta en el siguiente cuadro:

Se les pedía a los profesores que escribiesen seis problemas con enunciado que pudieran estar mejor representados por seis sentencias numéricas dadas: 5+7= ? , 6+ ?=11, ?+4=12, 13-4= ?, 15- ?=9, ?-3=9

En la investigación de Castro se buscaba encontrar el conocimiento de los futuros profesores en relación al planteamiento de problemas de estructura multiplicativa, para lo cual utilizó el siguiente cuestionario:

El siguiente texto es un problema aritmético verbal tomado de un libro de enseñanza primaria: *"María tiene 12 bombones, regala 5 a sus amigos, ¿cuántos le quedan?"* *En este problema la relación numérica subyacente entre los datos y la pregunta es* 12-5=[?] *en el lugar de la interrogación hay que colocar el número de bombones que le quedan a María.*
El profesor de Primaria debe ser capaz de reproducir el proceso contrario, es decir, dada una igualdad numérica con una cantidad desconocida debe ser capaz de redactar el enunciado de un problema de tal manera que la relación existente entre los datos y la pregunta vengan expresados mediante esa igualdad.
La actividad que se propone es redactar un enunciado para cada una de las igualdades que aparecen a continuación. a) 15x5=[?] b) 72: 6 = [?]

Para el caso concreto de la presente investigación, se planteó un cuestionario en el que se solicitaba a los profesores la elaboración de tres problemas aritméticos diferentes, correspondientes a estructura aditiva y multiplicativa, a la vez, que se les solicitaba explicitaran las razones por las cuales consideraban las diferencias entre los problemas planteados.

La segunda parte de la estructuración del cuestionario se hizo tomando como referencia un caso. Este tipo de técnica investigativa está apoyada en la pretensión de hacer que el profesor de primaria reflexione sobre una situación de enseñanza conocida por él, a fin de que el tipo de respuestas dadas nos permitan acceder al conocimiento tanto conceptual como procedimental que el profesor usa a la hora de enseñar un contenido matemático escolar particular, cual es el de los algoritmos de las operaciones aritméticas. "El método de casos permite generar un cauce a través del cual el análisis de las situaciones prácticas puede llevar a conocimiento teórico y viceversa "(Llinares,1990, pág. 264).

Para la construcción de dicho caso se desarrolló un estudio piloto con los niños de la Escuela Tomás Jefferson (localidad 3a. de Bogotá), del cual se extrajeron los errores más frecuentes cometidos por ellos, los cuales sirvieron de base para desarrollar los casos presentados.

En este estudio piloto participaron 140 alumnos integrantes de los cuatro 4 cursos correspondientes a los niveles: segundo, tercero, cuarto y quinto. Se hicieron dos tipos de pruebas (anexo A) diseñadas para cada una de las cuatro operaciones, estas pruebas variaban la orientación del tipo de operación a realizar vertical u horizontal. Un ejemplo de los itemes planteados es el siguiente:

Para la suma de manera vertical

1. Realice la siguiente operación

$$\begin{array}{r} 699 \\ +\ 301 \\ \hline \end{array}$$

2. Escriba cómo le explicaría a un compañero la forma en que ha hecho la operación

Para la suma de manera horizontal

1. Realice la siguiente operación

699 + 301 =

2. Escriba cómo le explicaría a un compañero la forma en que ha hecho la operación

De los resultados obtenidos se desecharon las operaciones colocadas de manera horizontal por ser el tipo de operación a la cual los niños no le pueden hacer corresponder un algoritmo especial y en muchas ocasiones escribieron que no las podían realizar. Por ello la decisión tomada para elaborar el caso fue la de presentar operaciones en su forma vertical, y de manera secuenciada, tal como lo realizaron los niños. El error más frecuente presentado en cada una de las operaciones, se tomó como el ejemplo para que el profesor reflexionara sobre él.

Luego de realizar los ajustes y modificaciones necesarias, se construyó un cuestionario con un formato estructurado que fue diseñado exclusivamente para esta investigación, el cual consta de 2 partes: la primera, pretendía tomar información sobre la comprensión de los profesores para plantear problemas aritméticos y, la segunda, que constaba de 4 casos, se diseñó para adquirir información sobre la conceptualización que los profesores tienen acerca de los algoritmos relacionados con las cuatro operaciones aritméticas.

El siguiente problema abordado consistió en definir mediante un proceso inductivo, las ***categorías de análisis*** que permitieran definir las unidades de información para posibilitar la clasificación de los sujetos entrevistados en grupos, usando como criterios los diferentes tipos de argumentación utilizados por los profesores en las respuestas dadas al cuestionario. Esta categorización se hizo tomando todas las respuestas dadas por los profesores y definiendo luego unas características globales pero diferenciadoras, que nos permitieron clasificar a cada sujeto en una categoría específica.

A partir de allí, se inició el análisis descriptivo de tipo estadístico el cual permitió un primer conocimiento de los sujetos a la vez que una nueva clasificación usando como criterios las frecuencias presentadas por las categorías y la pertenencia de los sujetos a estas categorías. Con ello se seleccionaron los sujetos que iban a ser entrevistados.

2.3 ENTREVISTA. PROCESO DE ELABORACIÓN.

Las dos (2) entrevistas se elaboraron usando la técnica de **entrevista semiestructurada**. En la primera, el objetivo consistió en buscar más comprensión de lo expuesto por el profesor desde lo escrito (en las razones ó argumentos usados para diferenciar los problemas propuestos), así como indagar por el conocimiento del profesor en relación a los aspectos tratados,presentándole para ello otros tipos de problemas semejantes a los realizados por él, ó problemas que aunque no fueron elaborados por él, le sirvieran para tener más elementos de contrastación a la hora de dar diferencias.

La segunda entrevista tenía como objetivo buscar la **comprensión** que el sujeto tiene frente a los conceptos sobre las operaciones aritméticas y los algoritmos presentados.

Para determinar algunas de las concepciones que tienen los maestros acerca de la aritmética básica, el método de "entrevista clínica" como técnica de investigación, nos permitió establecer secuencias significativas de análisis a través de la misma planificación de las entrevistas, puesto que se establecieron desde el principio de la recolección de la información unos "elementos" *-contenido esperado-*, que posteriormente de manera consciente o inconsciente se tiende a confirmar, tal como se ha observado en investigaciones como la de Erickson, 1986. Esto significa, que parte de las estrategias utilizadas en las entrevistas buscan confirmar algún tipo de teoría inducida o un determinado enfoque o modelo sobre el cual se pretende indagar.

Un propósito fundamental del trabajo consistió en estudiar el uso que hacen los profesores de los conceptos en cuestión, para explicar tanto las diferencias entre los problemas como las reglas involucradas en los algoritmos, para ello se utilizó el "análisis de contenido", relacionando las respuestas con los datos obtenidos.

El procedimiento utilizado en las entrevistas se estableció así:

1. Para la planeación general, se determinaron:

- etapa inicial de planeación
- determinación de las categorías específicas de análisis
- análisis de contenido.

Para todo ello, se tuvo en cuenta:

- los escenarios,
- la naturaleza del conocimiento que se proporcionó (conocimiento teórico frente al conocimiento práctico profesional del profesor) y,
- las concepciones y experiencias previas que tienen los estudiantes para profesor.

Veamos en detalle estos procedimientos.

2.3.1 PLANEACIÓN DE LA ENTREVISTA.

Algunas consideraciones iniciales permitirán mayor comprensión del desarrollo y aplicación de esta técnica de análisis.

Las tareas que se realizan, hoy en día, en una entrevista clínica, están referidas a acontecimientos o a situaciones de aprendizaje que se construyen por lo general de dos formas:

1. Con los estudiantes en las sesiones de la entrevista
2. Se preparan con anterioridad y se pueden modificar en el transcurso de la entrevista.

La flexibilidad en el desarrollo de la entrevista, a la que se recurre en la actualidad, y sobre todo a aquellas referidas a estudios en donde participan profesores en ejercicio, deriva de la comprensión de que al tratar de explorar el tipo de creencias y concepciones que éstos poseen, y además explorar cómo están estructurados, cómo se activan para resolver problemas y por qué les da cierto uso, es un proceso de orden analítico que se muestra más eficiente, debido a que permite incorporar en el mismo desarrollo, aspectos no previstos con anterioridad, y que surgen del mismo ambiente en que se lleva a cabo la entrevista, o en determinado contexto o situación de aprendizaje.

Adicionalmente, cuando se tiene un número determinado de preguntas y/o tareas puede suceder, que no se llegue con ellas a poner de manifiesto conocimientos y capacidades que son sumamente relevantes cuando se valoran las capacidades cognitivas de un grupo de profesores en ejercicio, por lo que se requiere un manejo flexible de la planificación inicial, con miras a la obtención de mayores elementos de análisis en la etapa de evaluación de la información obtenida.

A este respecto, la forma de conceptualizar el conocimiento del profesor y cómo éste fundamenta la práctica influyen en diferentes maneras de entender el proceso de aprender a enseñar. Recientes estudios (Llinares, 1992; Castro, 1996 ; Blanco, 1994, entre otros) han aportado información sobre la forma de entender el conocimiento base para la enseñanza, tanto en relación a los diferentes dominios como a la estructura y organización que tiene. Como consecuencia se han planteado nuevas cuestiones sobre la conceptualización del proceso de aprender a enseñar matemáticas que indudablemente tiene repercusiones sobre el contenido y organización de los programas de formación de maestros.

El tener en cuenta todos estos aspectos antes de realizar las entrevistas, aporta información para una conceptualización del proceso de aprender a enseñar matemáticas. Entre ellos se pueden señalar:

1. El papel desempeñado por las "imágenes", "creencias", "concepciones" que poseen los profesores en ejercicio ante situaciones de enseñanza de las Matemáticas.
2. La naturaleza del "uso" que el profesor hace del conocimiento base para la enseñanza.
3. Las diferencias epistemológicas entre la naturaleza del conocimiento científico y el conocimiento práctico del profesor.

En particular, el uso del conocimiento matemático del profesor en situaciones de enseñanza depende de otros dominios de conocimiento junto con las características de las destrezas cognitivas (generadas a través de procesos de reflexión) para guiar la práctica (Wilson, Shulman y Richert, 1987)

2.3.2 ANÁLISIS DE CONTENIDO.

Para definir el proceso del análisis de contenido se tuvo en cuenta una estrategia de carácter inductivo (Ver Goetz, Lecompte, 1984) que consistió en que a partir de los datos obtenidos con el cuestionario preliminar acerca de los tópicos aritméticos sobre los que versa esta investigación, se identificaron las variables de análisis y sus relaciones que permitieron obtener una descripción global de las creencias y concepciones acerca de la aritmética que tenían los profesores en ejercicio.

Desde esta perspectiva se establece una diferencia con la investigación deductiva, tal como lo afirman Goetz y Lecompte (citados por Llinares (1992, pág. 77)

> "que comienza con un sistema teórico, desarrolla definiciones operacionales de las proposiciones y conceptos de la teoría y los aplica empíricamente a algún conjunto de datos que corroboren una teoría, mientras que los investigadores inductivos intentan descubrir una teoría que explique sus datos . (Goetz y Lecompte, 1984. Pág. 30)".-

Sin embargo, en el trabajo de campo, se encontraron las dos vías de análisis, puesto que las preguntas que se hicieron, a quiénes se aplicaron y el lugar donde se desarrollaron, estuvieron un poco en función de lo que se buscaba tal como se muestra en el capítulo relacionado con el análisis descriptivo.

"De otro lado, el análisis de contenido en esta investigación estuvo caracterizado por:

- Ser un proceso guiado por normas que clarificaron y definieron cada procedimiento y que permitió establecer los criterios de selección de los "trozos" de información manejados en el instrumento.
- Se establecieron igualmente, procesos sistemáticos de análisis, sobre cada una de las respuestas obtenidas, observando cómo se aplicaban las reglas definidas para cada parte de la información.
- Mediante el análisis de contenido se produjo una información descriptiva de base, sobre la cual se realizaron inferencias en relación a dichos contenidos, utilizando para ello la comparación, contrastación, ordenación y determinación de vínculos y relaciones.
- El análisis de contenido trata con el contenido manifiesto y posteriormente en la **fase interpretativa** se realizaron las inferencias sobre el contenido latente y se sacaron conclusiones sobre el significado del contenido manifiesto."

Todo este procedimiento se llevó a cabo mediante sucesivos análisis realizados por tres docentes especialistas en Educación Matemática vinculados al proyecto y un docente experto en Formación de Profesores de Matemática (Dr. Salvador Llinares) lo que nos permitió organizar la información obtenida, realizar inferencias objetivas e identificar sistemáticamente características específicas de la información.

2.3.3 CATEGORÍAS DE ANÁLISIS.

Una vez determinado el análisis de contenido, se establecieron las categorías de análisis, guiado este proceso por las teorías y las cuestiones planteadas en la investigación.

El proceso de categorización, tiene como primer objetivo suministrar una representación simplificada de los datos. Para efectos de la categorización, los problemas planteados se definieron por los "temas" de los que se pretendía obtener información, tal como se observa en el siguiente cuadro:

INTERROGANTE 1 ⇒	***CATEGORÍAS DESCRIPTIVAS***
¿CÓMO CARACTERIZAN LOS PROFESORES DE PRIMARIA LOS CONCEPTOS DE LAS OPERACIONES ARITMÉTICAS Y SUS CORRESPONDIENTES ALGORITMOS?	***EN ESTE PRIMER INTERROGANTE LAS CATEGORÍAS DE ANÁLISIS ESTÁN RELACIONADAS CON LA NATURALEZA DE LOS DATOS, EN FUNCIÓN DEL MISMO PROCESO DE ANÁLISIS.***

INTERROGANTE 2 ⇒ ¿CUÁLES SON LOS MODELOS DE PROBLEMAS DE TIPO ADITIVO, O DE RESTA, MULTIPLICACIÓN O DIVISIÓN QUE UTILIZAN LOS PROFESORES DE PRIMARIA, AL ANALIZAR SITUACIONES EN LA QUE UNA DE ESAS OPERACIONES SE USE COMO MODELO MATEMÁTICO?	*CATEGORÍAS INTERPRETATIVAS* *ESTE CUESTIONAMIENTO SE RELACIONA CON ESTA SITUACIÓN: "A LA HORA DE DOTAR DE SIGNIFICADO A SITUACIONES EN LAS QUE SE PRESENTEN PROBLEMAS DE TIPO ADITIVO, MULTIPLICATIVO Y SUS CORRESPONDIENTES OPERACIONES INVERSAS, LOS PROFESORES UTILIZAN DIVERSOS ARGUMENTOS DE TIPO MATEMÁTICO O DIDÁCTICO QUE JUSTIFICAN SUS RESPUESTAS. LO MISMO SUCEDE EN LOS MOMENTOS DE EXPLICAR LAS RAZONES POR LAS CUALES SE USA UN PROCEDIMIENTO MATEMÁTICO PARA RESOLVER UN PROBLEMA DETERMINADO".* *POR ELLO, EN ESTE "CONTEXTO" SE UTILIZAN CATEGORÍAS DE ANÁLISIS DE NATURALEZA INTERPRETATIVA, A PARTIR DE LAS CUALES SE PUEDEN ESTABLECER DIFERENTES NIVELES DE INTERPRETACIÓN.*
INTERROGANTE 3 ⇒ ¿QUÉ ARGUMENTOS UTILIZAN LOS PROFESORES A LA HORA DE EXPLICAR LAS RAZONES QUE LOS LLEVAN A ENSEÑAR UNOS CIERTOS ALGORITMOS DE UNA CIERTA MANERA?	*CATEGORÍAS EXPLICATIVAS* *EN ESTE INTERROGANTE SE ADVIERTE QUE LAS CATEGORÍAS EXPLICATIVAS DE ANÁLISIS SE DETERMINAN EN EL TRANSCURSO DE LA INVESTIGACIÓN, PERMITIENDO MOSTRAR UN MODELO QUE PROVIENE DE LA INFORMACIÓN OBTENIDA DEL PROCESO ANALÍTICO DE SIGNIFICACIÓN, IMPLÍCITO EN LAS AFIRMACIONES DE LOS PARTICIPANTES.*

Una vez realizada la categorización, se tiene en cada categoría las unidades de análisis correspondientes. Posteriormente esta primera categorización descriptiva generada mediante una aproximación inductiva a los datos, da paso a un segundo análisis de carácter conceptual.

El esquema analítico para esta segunda aproximación procede del trasfondo teórico del problema de investigación . Así por ejemplo, en la investigación que estamos considerando la "naturaleza" de cada segmento acotado, aunque en la misma categoría, podía tener un significado distinto en relación a la posible estructura de las concepciones de los profesores en ejercicio.

Esta situación exige una codificación transversal (dentro de cada categoría) con el objeto de poner al descubierto las relaciones y los diferentes "status" de las categorías de análisis utilizadas.

De otra parte, la técnica de entrevista clínica que se ha utilizado en esta investigación, es un ejemplo de análisis a través de procesos interpretativos, los cuales fueron los puntos de partida de las diferentes **categorías que se iban generando.** Dentro de cada una de las categorías, con las que se contó, al final se utilizaron **códigos** inferenciales, en relación, por una parte, a la descripción de los componentes de los sistemas de concepciones de los maestros, y por otra, al contenido de cada una de estas componentes.
Veamos en detalle este proceso.

Para clasificar el tipo de problemas elaborados en la primera parte del cuestionario se utilizaron los siguientes códigos:

Códigos	Aditivo	Multiplicativo
1	Combinación	11 I x E = E Veces 12 I x E = E Cada uno
2	21 Cambio Aumentar 22 Cambio Disminuir	21 E x I = E Veces 22 E x I = E Cada uno
3	Comparación	$M_1 \times M_2 = M_3$
4	Numérico	Numérico
5	Gráfico	Gráfico
6	No lo hizo	No lo hizo
7	Especial	Especial

Las categorías usadas corresponden al marco teórico, sólamente en la categoría especial (código 7) se clasificaron aquellos casos que son incoherentes, imprecisos ó que no corresponden a la expresión enunciada.

Para clasificar los problemas por el lugar que la incógnita ocupa en la sentencia canónica se usaron los siguientes códigos: **I1 : incógnita 1, I2 : incógnita 2, I3 : incógnita 3.**

Código	Lugar de la incógnita	
I1	a + b = ?	a x b = ?
I2	a + ? = c	a x ? = c
I3	? + b = c	? x b = c

Para clasificar las razones expuestas por los profesores en relación a por qué consideraban los tres problemas elaborados diferentes, luego de analizar las respuestas obtenidas se clasificaron en siete tipos de razones correspondientes a los códigos R1 a R7:

Códigos	Tipos de razones
R1	Da razones de cada uno explicando lo que se debe hacer para resolverlo. Por lo general las razones encontradas tienden a decir lo que el niño debe hacer para resolverlo.
R2	Por el enunciado.
R3	Por los objetos que aparecen en los problemas
R4	Por el lugar que ocupa la incógnita
R5	Por las operaciones y los enunciados involucrados
R6	No clasificable
R7	No da
SE UTILIZAN CATEGORÍAS INTERPRETATIVAS DE ANÁLISIS	

Para clasificar las explicaciones acerca de los argumentos y las formas de enseñanza usadas en los algoritmos se estableció:

Categoría	TIPOS DE RESPUESTAS
1	**No responden o no dan explicaciones ó dicen que no saben**
2	**Explicaciones confusas o que no corresponden a lo preguntado**
3	**Justificaciones de los algoritmos basadas en criterios sintácticos**
4	**Al dar explicaciones usan palabras que se refieren a unidades, decenas y centenas.**
5	**Al dar explicaciones se refieren al lugar de los dígitos en la cifra. (Valor posicional - Casillas)**
6	**Los que usan términos relacionados con el valor posicional y el agrupamiento.**
	SE UTILIZAN CATEGORÍAS EXPLICATIVAS DE ANÁLISIS

Es importante resaltar, que en ésta investigación el sistema de categorías inicial, se fué modificando de tal forma que pudiera abarcar todas las características de la información recogida.

En todo caso, tanto la encuesta como la entrevista se usaron para allegar información complementaria . Una explicación más detallada de cada uno de los instrumentos y los métodos de análisis usados lo presentamos en los apartados siguientes.

2.4 CARACTERIZACIÓN DE LA POBLACIÓN OBJETO DE ESTUDIO.

El estudio se desarrolló con un grupo de 62 profesores del Distrito Capital, en su mayoría ubicados en las escuelas de la Localidad 8a. El conocimiento de los profesores con relación a los temas planteados varía de acuerdo a la experiencia y a la formación personal de cada uno, pero las cuestiones abordadas son tareas que deben ser asumidas por los profesores de primaria, en cuanto en los programas definidos hasta ahora por el Ministerio de Educación, son contenidos matemáticos a abordar en los niveles de primero a cuarto de primaria.

En particular, el tema relativo a la elaboración de problemas es un aspecto que los profesores en ejercicio usan para "mecanizar" las operaciones aritméticas y no para introducir aspectos conceptuales. En lo relativo a la enseñanza de los algoritmos es uno de los temas a los que los profesores de primaria en ejercicio, y sobre todo los que llevan mayor tiempo de servicio, ponen mayor énfasis en la enseñanza que imparten: <mucho del tiempo dedicado al estudio de las matemáticas en las escuelas primarias se emplea en la mecanización de los procedimientos algoritmicos para las cuatro operaciones aritméticas>.

Desde una perspectiva descriptiva, se puede decir, que el conocimiento de los profesores sobre los aspectos tratados, se puede considerar como un conocimiento en uso que ha sido adquirido más por la práctica que por la participación en programas académicos que traten los temas de manera explícita y desde la perspectiva de elaboración de un conocimiento profesional adecuado desde las perspectivas tratadas en los referentes teóricos presentados en el capítulo inicial.

2.5 CARACTERIZACIÓN DEL CUESTIONARIO.

Como ya se mencionó, el cuestionario se diseñó en dos partes: una, con relación a los problemas aritméticos elementales, y la otra, en relación a los algoritmos de las cuatro operaciones, tal como se describe a continuación:

PARTE I: **I.1. Proponer problemas de suma para la operación**

9+7=16

I.2. Proponer problemas de multiplicación para la operación

6x3=18

Se desea obtener el conocimiento de los profesores de las diferentes estructuras semánticas de los problemas aritméticos escolares PAES que se pueden asociar a una operación dada.

Para obtener esa información se le indica a los profesores la importancia de elaborar problemas que sean resueltos con una determinada operación. Se les proporciona una operación para la suma (9 + 7 = 16) y una para la multiplicación (6 x 3 = 18). Usando esa relación se les solicita que elaboren tres (3) problemas diferentes y por último se les pide explicaciones acerca de por qué los problemas planteados son diferentes.

Se les presentó la operación aritmética completa para no direccionar hacia cierto tipo de problemas determinados por el lugar de la incógnita, a la vez que se mantuvieron los números menores que 20 para que fueran tipos de problemas trabajados por todos los profesores.

PARTE II: **Está compuesta por cuatro casos así:**

II.1. Caso suma
II.2. Caso resta
II.3. Caso multiplicación
II.4. Caso división

En cada caso se presenta una operación en la que se pone de manifiesto el error. Esta parte se estructuró de acuerdo a dos tipos de cuestiones: Análisis clínico e intervención en el aula ; a este respecto, se utiliza el error para situar al profesor en una situación de identificación del mismo y luego se le pide que haga una intervención en el aula, es decir que diseñe una secuencia de enseñanza para corregir el error encontrado.

Con los anteriores ítemes, se identificó la comprensión conceptual que tienen los profesores, de los diferentes algoritmos de las operaciones aritméticas con los números naturales a través del análisis de los errores que comenten los alumnos. Un objetivo común a los cuatro casos consistió en obtener información sobre el papel que desempeñan dos ideas conceptuales del sistema de numeración: valor posicional y agrupamiento, en dotar de significado a los algoritmos (información conceptual).

En el **caso de la suma,** se obtuvo información acerca de la comprensión del profesor frente a una situación en la que el alumno no maneja el agrupamiento. Para el **caso de la resta,** se buscó información sobre el manejo del valor posicional y la descomposición de unidades superiores a inferiores. En el **caso de la multiplicación,** se obtuvo información sobre el valor posicional y la conversión de unidades. Y para el **caso de la división,** se obtuvo información sobre el valor posicional.

A continuación se presenta el cuestionario definitivo aplicado a los profesores.

I PARTE.

Una de las actividades que realiza un profesor es la elaboración de problemas relacionados con las operaciones aritméticas que enseña, para ser colocados como tareas escolares. Tomando como referencia su práctica en ese aspecto elabore, para cada una de las relaciones numéricas que se presentan a continuación, tres problemas diferentes y explique las razones por las cuales cree que son diferentes.

9 + 7 = 16

1.a.
1.b.
1.c.

Explique las razones:

6 x 3 = 18

1.a.
1.b.
1.c.

Explique las razones:

II PARTE

CASO 1.

José tiene 8 años, está en segundo grado aprendiendo a sumar. Ha hecho el siguiente ejercicio:

$$\begin{array}{rrrr} & 6 & 9 & 9 \\ + & 3 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

escribiendo en su hoja, en pasos sucesivos lo siguiente:

a) $\begin{array}{rrrr} & 6 & 9 & 9 \\ + & 3 & 0 & 1 \\ \hline & & & 10 \end{array}$

b) $\begin{array}{rrrr} & 6 & 9 & 9 \\ + & 3 & 0 & 1 \\ \hline & & 9 & 10 \end{array}$

c) $\begin{array}{rrrr} & 6 & 9 & 9 \\ + & 3 & 0 & 1 \\ \hline & 9 & 9 & 10 \end{array}$

1. ¿Cuál fue la causa de que José hiciera la operación así?
2. ¿Cómo enseñaría esa suma a José?

CASO 2.

José tiene 8 años, está en segundo grado aprendiendo a restar. Ha hecho el siguiente ejercicio:

7	0	0	4
	-	6	8

escribiendo en su hoja, en pasos sucesivos lo siguiente:

a)

6			1
~~7~~	0	0	4
	-	6	8
			6

b)

5			
~~6~~		1	1
~~7~~	0	0	4
	-	6	8
		4	6

c)

5			
~~6~~		1	1
~~7~~	0	0	4
	-	6	8
5	0	4	6

1.¿Cual fue la causa de que José hiciera la operación así?
2. ¿Cómo enseñaría esa resta a José?

CASO 3.

Ana tiene 9 años, está en tercer grado aprendiendo a multiplicar. Ha hecho el siguiente ejercicio:

724
x53

escribiendo en su hoja, en pasos sucesivos lo siguiente:

a)

		1	1
	7	2	4
	x	5	3
2	1	7	2

b)

		1	1
	7	2	4
	x	5	3
2	1	7	2
3	6	2	0

c)

		1	1
	7	2	4
	x	5	3
2	1	7	2
3	6	2	0
5	7	9	2

1. ¿Cuál fue la causa de que Ana hiciera la operación así?
2. ¿Cómo enseñaría esa multiplicación a Ana?

CASO 4.

Inés tiene 9 años, está en cuarto grado aprendiendo a dividir. Ha hecho el siguiente ejercicio:

$$7028 \;\underline{|23\;\;}$$

escribiendo en su hoja, en pasos sucesivos lo siguiente:

a)	$\begin{array}{cccc\|cc} 7 & 0' & 2 & 8 & 2 & 3 \\ \hline & 1 & & & 3 & \end{array}$	b)	$\begin{array}{cccc\|cc} 7 & 0' & 2' & 8 & 2 & 3 \\ \hline & 1 & 2 & & 3 & \end{array}$
c)	$\begin{array}{cccc\|cc} 7 & 0' & 2' & 8' & 2 & 3 \\ \hline & 1 & 2 & 8 & 3 & \end{array}$	d)	$\begin{array}{cccc\|cc} 7 & 0' & 2' & 8' & 2 & 3 \\ \hline & 1 & 2 & 8 & 3 & 5 \\ & & 1 & 3 & & \end{array}$

1. ¿Cuál fue la causa de que Inés hiciera la operación así?
2. ¿Cómo enseñaría esa división a Inés?

2.6 ESQUEMA ANALÍTICO GENERAL

Para el diseño de las categorías de análisis se utilizaron los siguientes criterios:

PARTE I:

Para clasificar las respuestas de los profesores se usó la estructura semántica de los problemas propuestos y los modelos de las situaciones.

En el proceso de análisis se consideró relevante utilizar diferentes variables en la descripción de las categorías, como el lugar de la incógnita y los diferentes papeles en la situación que desempeñaban los números proporcionados en la expresión aritmética.

Para los problemas vinculados a la expresión aditiva se emplearon las categorías semánticas de los problemas aritméticos escolares PAES establecidos en la literatura, en particular se utilizó la clasificación propuesta por Nesher.

Para los problemas vinculados a la expresión multiplicativa se utilizaron las clasificaciones propuestas por Greer, incorporando las clasificaciones elaboradas por Vergnaud y por Schwartz.

Las categorías definitivas fueron las siguientes:

CATEGORÍAS ADITIVO	CATEGORÍAS MULTIPLICATIVO
S1 Combinación	M11 Isomorfismo de medida (Veces) I x E = E
S21 Cambio aumentar	M12 Isomorfismo de medida (Cada uno) I x E = E
S22 Cambio disminuir	M21 Isomorfismo de medida (Veces) E x I = E
S3 Comparación	M22 Isomorfismo de medida (Cada uno) E X I = E
S4 Numérico	M3 Producto de medidas $M_1 \times M_2 = M_3$
S5 Gráfico	M4 Numérico
S6 No lo hizo	M5 Gráfico
S7 Especial	M6 No lo hizo
	M7 Especial

Al tomar como eje de caracterización el lugar que ocupa la incógnita dentro del problema se construyeron las siguientes categorías:

I 1	a + b = ?
I 2	a + ? = c
I 3	? + b = c

Con relación a la caracterización de las razones, por las cuales los profesores consideran a los problemas como diferentes, se procedió de manera inductiva, generando la siguiente categorización:

Para la estructura aditiva	Para la estructura multiplicativa
A1 Mira de uno en uno e identifica lo que hay que hacer para resolverlo	R1 Mira de uno en uno e identifica lo que hay que hacer para resolverlo
A2 Por ser diferente el enunciado	R2 Por ser diferente el enunciado
A3 Por los objetos	R3 Por las sumas reiteradas
A4 Por el lugar de la incógnita	R4 Por el lugar de la incógnita
A5 No da	R5 No da
	R6 Mira el resultado.

PARTE II:

Las explicaciones dadas por los profesores para el análisis de los errores de los niños y de las propuestas de enseñanza realizadas, se analizaron de manera inductiva para crear un sistema de categorías que diera cuenta del uso que los profesores hacían de los conceptos vinculados al sistema de numeración decimal (agrupamiento, valor posicional, cantidad) y estableciendo relaciones entre el conocimiento procedimental y el conceptual.

La descripción inicial de las respuestas fueron categorizadas en grupos que muestran las características de la comprensión de los profesores de las nociones relativas al sistema de numeración decimal y las conexiones entre lo conceptual y lo procedimental.

Las categorías elaboradas fueron las siguientes:

DESCRIPCIÓN DE LAS CATEGORÍAS	
C1	No da explicaciones o no sabe.
C2	La explicación presentada es confusa y no están claros los criterios de análisis expuestos.
C3	Justificaciones apoyadas en criterios sintácticos (mecánicos)
C4	Se utilizan explicaciones basadas en el reconocimiento del agrupamiento (unidades, decenas, centenas) sin que expliquen el uso dentro del algoritmo.
C5	Se utilizan explicaciones basadas en el reconocimiento del valor posicional (las casillas) sin que expliquen el uso dentro del algoritmo.
C6	Se presenta una explicación que involucra valor posicional y teoría de agrupamiento, sin que ello demuestre comprensión lo conceptual.

2.6.1 PLANEACIÓN DE LAS ENTREVISTAS TIPO I :

Para llevar a cabo las entrevistas se tuvieron en cuenta varios aspectos, relacionados con la selección de las personas que serían entrevistadas, con la preparación logística, con los procedimientos a utilizar y por último con los métodos de análisis que serían empleados para comprender la información obtenida.

2.6.1.1 FASE LOGÍSTICA.

Para llevar a cabo las entrevistas se estableció una fase logística relacionada con:

1. La planeación previa mediante los siguientes pasos:
   - Determinación del tiempo de duración: una hora por cada entrevistado
   - Determinación del lugar de realización de las entrevistas a los profesores: sede de los postgrados de la Universidad Distrital

2. Selección de los participantes y elaboración de los protocolos de entrevista. Una información detallada se presenta en el item2.6.1.2. Para ello también se estableció un cronograma.

3. Disposición de los materiales para la entrevista (papelería, instrumentos de registro y objetos requeridos para posibles representaciones material auxiliar: fichas).

4. Obtención de registros de las entrevistas de cada participante y rotulado del material utilizado en cada caso.

2.6.1.2 PROCEDIMIENTO.

Luego de seleccionar los profesores para la entrevista se procedió a realizar cada una de las entrevistas en las que se siguió el siguiente procedimiento :

1. Se le solicitó a cada entrevistado una nueva lectura de los problemas del cuestionario que previamente había diligenciado.

2. Se le solicitó a cada uno de los entrevistados que explicara las razones dadas por él al contestar el cuestionario (para hacer el análisis de contenido y lograr mayor comprensión de los razonamientos utilizados por los profesores).

3. Se escogió un problema elaborado por esa persona (tanto en lo aditivo como en lo multiplicativo), proponiéndole un desplazamiento hacia otros esquemas de problema, pidiéndole que cambiara la estructura sintáctica o la semántica del problema en cuestión, para observar la comprensión actual del profesor de dichas estructuras o si logra algún aprendizaje, de las mismas.

4. Se les solicitó la representación gráfica de la forma usada por él en la solución de cada uno de los problemas escogidos, con el objeto de observar la comprensión desde la que generó tal solución.

5. En la última parte, se trató de hacerles explicitar verbalmente sus concepciones acerca de cada una de las operaciones (búsqueda de "palabras claves" como unir, juntar, agregar, quitar, veces, repetir, repartir, ...).

Las tareas propuestas durante la entrevista se estructuraron teniendo en cuenta algunos aspectos de la clasificación usada en el análisis de las encuestas:

- **El tipo de razonamiento mostrado a través de las razones para considerar los problemas como diferentes.** En un problema aritmético se pueden considerar las proposiciones que aparecen dentro de él de manera independiente o de manera global. Para el caso del análisis independiente se toman los datos del problema y la pregunta de forma aislada al contexto planteado y se resuelve una operación que se espera sea la que sirve para contestar la pregunta planteada. En el caso global se asume que tanto las proposiciones (informativas y la pregunta) son parte de una estructura semántica o sintáctica que hace que los problemas se puedan clasificar analizando el papel de los números y sus relaciones y la ubicación de la incógnita.

- **La comprensión de la estructura semántica** se busca, a través de presentar una situación en la que se varía el enunciado según las clasificaciones semánticas utilizadas (Ejemplo: un problema de combinación, donde se busca el total, se varía por un problema de comparación donde se busca la cantidad comparada: "En el salón hay 9 lápices azules y 7 lápices amarillos. ¿Cuántos lápices hay?" por " En un salón hay 9 lápices azules. Y hay 7 lápices amarillos más que azules. ¿Cuántos lápices amarillos hay?"

- **La comprensión de la estructura sintáctica** se busca, a través de presentar una situación en la que se varía el enunciado del problema según la clasificación sintáctica usada. (Ejemplo: un problema de combinación en el que se busca el total se cambia por un problema de combinación en el que se busca una de las partes: "Pablo gasta 9 pesos en transporte y 7 en las onces. ¿Cuánto gasta en total? por "Pablo gasta 16 pesos entre transporte y las onces. Si gasta 7 pesos en las onces ¿Cuánto gasta en transporte?")

- **La comprensión de la diferencia entre una cantidad de medida y una cantidad relativa**, en relación al rol que desempeñan dentro del problema. Una cantidad de medida se refiere al cardinal del número de elementos de un conjunto, esta cantidad incluye orden, se empieza en uno (es decir, corresponde a los números naturales); por otro lado se puede considerar las cantidades relativas que son números con signo (Vergnaud, 1985) que para este caso representan las acciones (transformaciones) que sobre una cantidad dada realiza otra cantidad dada para obtener una nueva cantidad modificada.

- **La comprensión de la diferencia entre la relación de inclusión entre conjuntos y la comparación de cantidades**. Es decir, en los problemas de comparación se presenta las dos cantidades que se pretende comparar para establecer la diferencia cuantitativa entre las dos, mientras que en los problemas de combinación se presenta las partes de un todo el cual se pretende hallar. "Juan llevó a la clase 7 cuadernos grandes y Paola llevó 9 cuadernos pequeños. ¿Cuántos cuadernos llevaron los dos niños a la escuela?. En este problema el interés es buscar un conjunto de referencia que permita incluir tanto a los cuadernos pequeños como a los cuadernos grandes, ese conjunto lo constituye los cuadernos. "Juan llevó a la clase 7 cuadernos . Paola llevó 9 cuadernos más que Juan. ¿Cuántos cuadernos llevó Paola a la clase? En este problema el interés es comparar el número de cuadernos de Juan con el número de cuadernos de Paola y establecer la cantidad comparada dadas las cantidades de referencia y de diferencia.

- **Determinar las posibles comprensiones erróneas o deficientes** que los profesores tienen acerca de las operaciones aritméticas a través del uso de la representaciones para dotar de significado tanto los enunciados construidos como las razones enunciadas. En este caso los profesores usan las palabras claves (Puig, 93) para determinar el tipo de operación a realizar: añadir, juntar, ganar, regalar, dar, comprar,... quitar, separar, perder, entregar, perder..... tantas veces como, tantas veces, las veces, cada uno, duplicar, triplicar... repartir, distribuir, ...de a, ...entre tantos, partir. "... tiene 9... y el otro tiene 7 más que...¿cuánto tiene tal? Se toman las de un sujeto y a eso se le agrega la diferencia y ese es el total.

2.6.2 ENTREVISTAS TIPO II

Para esta segunda parte se realizó la fase logística tal como se describió en el apartado anterior.

Las personas entrevistadas fueron diferentes a la entrevistadas para la parte I, tal hecho obedeció tanto a la dificultad de conseguir mayor tiempo de los posibles entrevistados, como a que metodológicamente no existía la necesidad de relacionar las actuaciones del profesor en los diferentes ámbitos prefigurados en el cuestionario, puesto que tal relación no es objeto de esta investigación (situaciones aditivas o multiplicativas, algoritmos clásicos de las operaciones). Por otra parte, la entrevista se estructuró en tres ítemes (valor relativo, agrupamiento, uso del valor relativo y del agrupamiento en la explicación de los algoritmos tradicionales de las operaciones) puesto que en las respuestas escritas al diligenciar el cuestionario aparecía sólo insinuaciones vagas a conceptualizaciones que subyacen en el sistema de valor posicional. Se quería indagar entonces al respecto tanto el conocimiento conceptual disponible actualmente para el profesor entrevistado, como la relación entre tal saber del que dispone y el uso que de él hace al explicarse los algoritmos, incluyendo también en esta indagación, y desde las mismas perspectivas, el conocimiento de las representaciones no ligadas a los símbolos numéricos.

La entrevista se estructuró con los siguientes tareas :

- **Valor posicional:**

22	XXII
20 + 2	10 10 1 1

¿Por cuántos símbolos está formado cada número?

¿Cuánto valen?

1991	MCMXCI
1000+900+90+1	1000 100 1000 10 100 1
1999	MCMXCIX
1000 900 90 9	1000 100 1000 10 100 1 10

¿Qué diferencias hay entre la forma de escribir en el sistema romano y el sistema decimal?

- **Agrupamiento:**

387 = 3C + 8D + 7U
Halle un número que represente la misma cantidad, escribiéndolo con más de un dígito en cada casilla.

1. 2C + ___D +____U
2. 2C + ___D + 7U
3. 2C + ___D + 17U
4. 2C + ___D + 57U
5. __C + 13D + 7 U.

¿Qué esta haciendo?

- **Uso de lo conceptual en la explicación**:

Luego lo referimos a la suma y la resta que analizó, para ver cómo usa lo conceptual respecto del sistema de valor posicional, para explicar los algoritmos.
Igualmente para multiplicación y división.

2.7 PROCEDIMIENTOS UTILIZADOS PARA EL ANÁLISIS DE LOS DATOS.

2.7.1 ANÁLISIS DESCRIPTIVO.

Con este estudio, de carácter descriptivo, se sistematizó las respuestas dadas por los profesores a los ítemes propuestos en el cuestionario. El propósito fundamental fue realizar un primer análisis de tipo inductivo que nos permitiera construir categorías que refirieran a los ámbitos teóricos del proyecto así como a los objetivos e hipótesis planteadas.

El objetivo no era detectar los sesgos de sus razonamientos para diseñar procesos de formación que los eliminaran, sino explorar cómo interpretan la información disponible sobre situaciones concretas, por ejemplo, las referidas a enunciados de problemas para establecer los tipos de razonamientos utilizados.

Toda esta información es necesaria para abordar con rigor procesos de formación que permitan la evolución de las concepciones actuales de un profesor, hacia formas más elaboradas sobre cuya base se estructuró el programa de formación de profesores de primaria en este estudio.

El detalle de todos los procesos realizados para este análisis constituye el capítulo 3 del presente estudio.

2.7.2 ANÁLISIS CUALITATIVO :

El objetivo de este análisis consistió en profundizar en la caracterización de los casos del estudio, confirmando, matizando o complementando la información obtenida desde el tratamiento de los datos recogidos en el análisis descriptivo.

Con ellos nos acercamos a una mejor caracterización de las categorías de análisis con base en las respuestas que ofrecieron los profesores entrevistados, que igualmente fueron de utilidad para afrontar el diseño del programa.

A través de los distintos procedimientos utilizados hemos ido aproximando una descripción de cada caso, pero aún quedan muchos interrogantes relacionados con la temática abordada en este estudio. Uno de ellos corresponde a la relación entre el conocimiento observado en relación a la conceptualización de las operaciones aritméticas y el uso de las representaciones no ligadas a los símbolos numéricos en la enseñanza de los algoritmos.

El detalle de los procedimientos relativos a este análisis se ofrece en el capítulo 4 de este informe.

3. ANÁLISIS DESCRIPTIVO

3.1 ANÁLISIS GENERAL DE LOS ENUNCIADOS:

Los problemas elaborados por los profesores fueron clasificados teniendo en cuenta las categorías elaboradas encontrándose los resultados que aparecen el anexo 1.

3.1.1 PARA LA ESTRUCTURA ADITIVA (9+7= 16)

Categorías	Código	Problema 1	Problema 2	Problema 3	Total
Combinación	1	29	23	23	75
Cambio Aumentar	21	19	15	7	41
Cambio Disminuir	22	0	6	3	9
Comparación	3	2	4	4	10
Subtotal	**Verbal**	**50**	**48**	**37**	**135 (76.27%)**
Numérico	4	6	4	8	18
Gráfico	5	3	2	4	9
No lo hizo	6	0	0	2	2
Especial	7	0	5	8	13
Subtotal		**9**	**11**	**22**	**42 (23.73%)**
Total		**59**	**59**	**59**	**177**

Tabla 1

En la tabla 1 se resumen los tipos de problemas planteado por los profesores. Como se puede observar, en total se produjeron 177 problemas, de los cuales 135 (76.27%) corresponden a problemas de enunciado verbal. así mismo se puede concluir que la mayoría de los problemas planteados son de tipo combinación seguido de los de cambio.

Es notoria la disminución de problemas entre el primero planteado y el tercero (de 50 pasa a 37), dicha disminución puede deberse a que los profesores no encuentran opciones para plantear problemas diferentes a los regularmente encontrados en los libros de texto ó, a que cuando intenten elaborar problemas diferentes los construyen en la categoría denominada por nosotros como incoherentes o incompletos. (Este hecho se muestra en la tabla 1 al pasar en la categoría 7 de 0 elaboraciones en el primero a 8 elaboraciones en el tercero).

Con relación al tipo de problemas verbales planteados, se puede inferir, que la mayoría de problemas (55%) corresponden a lo que Vergnaud denomina el pensamiento estático, pues se encuentran dentro de la estructura parte - parte - todo, y a la conceptualización de la suma como unión (juntar). Sin embargo, la presencia de problemas de tipo de cambio (37%) pueden mostrar que los profesores poseen un tipo de razonamiento dinámico, al involucrar acciones ó transformaciones de una cantidad inicial hasta una cantidad final. Este aspectos se analizó en las entrevistas.

Con relación a los problemas que representan relaciones entre cantidades (comparación) correspondientes también al tipo de razonamiento que hemos denominado estático es apreciable la ausencia de producción de este tipo de problemas.

3.1.2 PARA LA ESTRUCTURA MULTIPLICATIVA (6X3=18)

Categorías	Código	Problema 1	Problema 2	Problema 3	Total
I x E = E (veces)	11	1	2	1	4
I x E = E (cada uno)	12	15	19	10	44
E x I = E (veces)	21	2	2	4	8
E x I = E (cada uno)	22	18	15	17	50
$M_1 x M_2 = M_3$	3	2	1	3	6
Subtotal	**Verbal**	**38**	**39**	**35**	**112 (63.27%)**
Numérico	4	9	5	9	23
Gráfico	5	3	2	0	5
No lo hizo	6	0	1	4	5
Especial	7	9	12	11	32
Subtotal		**21**	**20**	**24**	**65 (36.72%)**
Total		**59**	**59**	**59**	**177**

Tabla 2

Tomando como referencia la estructura multiplicativa (tabla 2) se podría señalar que la mayoría de los problemas elaborados corresponde a problemas de enunciado verbal (63.27%) así como se observa que la mayor frecuencia está en las categorías en las que aparece la expresión cada uno, seguidos de los del tipo en los que aparece la expresión veces, tal como aparece en la tabla 3:

Categoría	Problema 1	Problema 2	Problema 3	Total
Veces	3	4	5	12 (10.72%)
Cada uno	33	34	27	94 (83.93%)
Producto de medida	2	1	3	6 (5.35%)

Tabla 3

Los resultados observados podrían insinuar que usando las explicaciones de Greer al describir el tipo de razonamiento adjunto a la expresión cada uno, como de razonamiento proporcional simple, la mayoría (83%) de los profesores tendrían este tipo de pensamiento multiplicativo. Esta es una de las afirmaciones que se revisó en las entrevistas.

Así mismo utilizando la clasificación de Vergnaud, la mayoría de los profesores elaboran problemas del tipo isomorfismo de medida en los que cambian el rol de las cantidades involucradas en la operación, es decir cambia de lugar la cantidad intensiva (cada uno), ello se muestra en la tabla 4:

Categoría	Problema 1	Problema 2	Problema 3	Total
I x E = E	16	21	11	48 (42.85%)
E x I = E	20	17	21	58 (51.78%)
Producto de medida	2	1	3	6 (5.35%)

Tabla 4

Del cuadro anterior se desprende que hay una preferencia por elaborar problemas en los que la primera cantidad (6) es la cantidad extensiva y la cantidad (3) es la intensiva. Esto puede deberse a la presentación hecha en la encuesta ó al uso de las tablas de multiplicar en las que la primera cantidad indica el sumando que se repite.

En relación al concepto de multiplicación se tratará de buscar en las entrevistas si corresponde a tipos de razonamiento proporcional o aditivo.

Como conclusión general de ésta parte se colige, que los profesores muestran una mayor habilidad para plantear problemas de tipo aditivo (76.27%) que problemas de tipo multiplicativo (63.27%), ello concuerda con los hallazgos de Brown (1991) al afirmar que los niños tienen más facilidad para elaborar problemas de estructura aditiva, ya que pueden seguir ligados a los concretos, mientras que para la estructura multiplicativa deben hacer una mayor abstracción, lo que permite conjeturar que el nivel cognitivo encontrado en los profesores promueve ese tipo de niveles cognitivos en los alumnos.

3.2 ANÁLISIS GLOBAL DE LOS ENUNCIADOS.

Para realizar un análisis global de los enunciados de los problemas elaborados por los profesores se usaron los siguientes criterios:

1. Identificación del tipo de problema enunciado aritmético elaborado,
2. Identificación de la estructura semántica del problema verbal formulado,
3. Identificación de la estructura sintáctica del problema enunciado,
4. Evaluación de la precisión y la coherencia del enunciado y
5. Análisis de la correspondencia entre el enunciado elaborado y la estructura de la relación planteada.

Para realizar el análisis de los enunciados se tuvieron en cuenta los enfoques teóricos sobre estructura aditiva planteados por Nesher (Castro, 1995) y sobre la estructura sintáctica (Castro, 1995). Para los problemas de estructura multiplicativa se tuvieron en cuenta las clasificaciones realizadas por Vergnaud y Greer (1992) y sobre la estructura sintáctica conservamos la clasificación realizada por Castro (1995).

Para la realización del análisis se procedió de la siguiente manera: en primer lugar, se clasificaron los problemas (tanto aditivos como multiplicativos) en las categorías verbales, numéricos y gráficos. Los problemas aritméticos verbales, describen con palabras situaciones que plantean relaciones entre las cantidades propuestas y son posibles de resolver mediante la expresión aritmética planteada. Los problemas numéricos piden al resolutor que realice cálculos entre las cantidades (sin medidas) planteadas en las expresiones dadas, sin que tenga que interpretar textos. Los problemas de tipo gráfico son aquellos que mediante una representación (conjuntos) se le pide al resolutor realizar un conteo para hallar el total.

Para la identificación del tipo de estructura semántica planteado en los enunciados se usó la siguiente clasificación:

Los de estructura aditiva: *combinación, cambio aumentar, cambio disminuir y comparación.*

Los de estructura multiplicativa: se utilizó la clasificación realizada por Vergnaud(1983) en la cual se consideran los *isomorfismos de medida* (también llamados de proporcionalidad simple) y los del tipo producto de medida. A esta clasificación se le introdujeron dos subcategorías seleccionadas de la categorización propuesta por Greer, para los problemas de tipo isomorfismo de medida, los que incluyen el término **"tantas veces"** y los que incluyen el término **"para cada uno"**. En la categoría de producto de medidas, se incluyeron los del tipo producto cartesiano y área rectangular sin distinción puesto que no se elaboró sino un problema de este tipo.

Para evaluar la estructura sintáctica del enunciado se tomó como criterio el lugar que toma la incógnita en el enunciado del problema, de la siguiente manera.

a + b = ?	**a x b = ?**
a + ? = c	**a x ? = c**
? + b = c	**? x b = c**

Para evaluar la precisión y la coherencia del problema se tuvo como referencias que en el enunciado estén todos los términos requeridos para que realmente corresponda a las expresiones aritméticas propuestas y la relación entre la estructura de los datos y la pregunta formulada.

Por ultimo se analizó la correspondencia entre el enunciado planteado y la relación que pretende modelar.

A continuación se presenta un análisis descriptivo de los resultados encontrados.

Los profesores produjeron un total de 175 problemas de tipo aditivo (sólo 2 no produjeron problemas) y 172 de tipo multiplicativo (sólo 5 no produjeron). Se tomaron las frecuencias y los porcentajes por cada una de las categorías , lo cual se hizo de manera independiente una de otra, a la vez que en algunas de ellas, y dadas las repuestas obtenidas, no se consideró el 100% de los datos obtenidos debido a que hubo profesores que no produjeron enunciados para alguna de las expresiones aritméticas planteadas.

Criterio 1:

La tabla 5 muestra los totales de los problemas tanto de estructura aditiva como multiplicativa elaborados por los profesores.

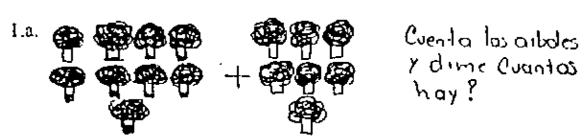
Categorías	**Aditivo**	**Multiplicativo**	**Total**
Verbal	135	112	247
Numérico	18	23	41
Gráfico	9	5	14
No lo hizo	2	5	7
Especial	13	32	45
Total	177	177	354

Tabla 5

Características de los problemas aritméticos enunciados. Como ya se dijo para este apartado se tuvo en cuenta que los profesores produjeran problemas de tipo verbal en el cual se expresa una situación más o menos cercana a la descripción de un suceso de la vida real, o un problema de tipo numérico en el cual se solicita al resolutor que realice un cálculo numérico entre las cantidades propuestas ; por otro lado la categoría gráfico corresponde al tipo de problemas que presenta una representación y solicita que mediante ella se encuentre la respuesta a la pregunta planteada.

Como puede verse en la tabla5 para los problemas de tipo aditivo, se encontró que un 77 % redactó problemas aritméticos verbales, un 10% redactó ejercicios numéricos y un 5 % gráfico. De estos resultados también se podría inferir que los profesores tienen más posibilidades de plantear problemas gráficos para la adición que para la multiplicación. Aunque este no es un propósito a observar en la presente investigación, puede servir como un indicador para plantearse nuevas preguntas, relacionadas con el conocimiento de contenido pedagógico de los profesores de primaria, cuando enseñan matemáticas.

Enseguida se presentan, a manera de ejemplo, dos enunciados por cada una de las expresiones propuestas, tal como fueron redactados por los profesores:

Tipo de problema (9+ 7 = 16)	**Problema**
Enunciado verbal	Sandra tiene 16 billetes de caramelos y se le perdieron 7 ¿cuántos billetes le quedan? Una hormiguita avanza 3 centímetros en un minuto. ¿Cuántos minutos se gasta para avanzar 18 cm?
Numérico	Escriba en el espacio un número que sumado con 9 de como resultado 16 9 + ☐ = 16 Piense y escriba 2 números menores que 10, que sean impares y cuya suma sea 16.
Gráfico	PI2 

Para los problemas de tipo multiplicativo se encontró que un 63% elaboró problema de enunciado verbal, un 13% de enunciado numérico y un 2% gráfico. A continuación se presentan dos ejemplos de cada uno de los problemas elaborados:

Tipo de problema (6 x 3 = 18)	**Problema**
Enunciado verbal	Un carrito de cuerda recorre una distancia de 3 centímetros por segundo. Cuántos segundos necesita el carrito para recorrer una distancia de 18 centímetros?
Numérico	En cada cuadrito calcula un número para que te dé como resultado 18 $\square + \square + \square = 18$
Gráfico	Dibuje 6 conjuntos que cada uno contenga 3 elementos. Cuántos elementos reúno en total?

Criterio 2:

La tabla 6 muestra el número total de los problemas elaborados de acuerdo a cada estructura analizada y a la clasificación realizada.

Categorías Aditivas	**Total**	**Categorías Multiplicativas**	**Total**
Combinación	75 (55.55%)	Veces	12 (10.72%)
Cambio Aumentar	41 (30.37%)	Cada uno	94 (83.93%)
Cambio Disminuir	9 (6.66%)	Producto de medidas	6 (5.35%)
Comparación	10 (7.4%)		
Total	**135**		**112**

Tabla 6

En lo relativo a la estructura semántica, encontrada en los problemas aditivos planteados por los profesores, se puede afirmar, como lo muestra la tabla 6, que el 55% de los problemas verbales planteados son de combinación, un 30.3% de cambio aumentar y 6% cambio disminuir y un 7.4% de comparación. Para realizar este análisis se tomaron solo los problemas que se ajustan a los enunciados propuestos en la prueba. A continuación se presentan ejemplos de este tipo de categorías:

Tipo de problema	Problema
Combinación	En la escuela Patio Bonito 2 hay 7 niñas jugadoras de basketbool y 9 niñas jugadoras de fútbol. ¿Cuántas deportistas hay en total?
Cambio aumentar	Julio tiene 9 colombinas. Le regalan 7 colombinas más. ¿Cuántas reúne en total?
Cambio disminuir	La profesora tiene que ponerle tareas a 16 cuadernos, de los cuales 9 ya están listos. ¿A cuántos les falta la tarea?
Comparación	Pilar tiene 9 colores y Julia 7 más que Pilar. Cuántos colores tiene Julia ?

En lo relativo a la frecuencia de elaboración de problemas multiplicativos planteados por los profesores, se puede afirmar, como lo muestra la tabla 6, que el 10.72% de los problemas verbales planteados son de isomorfismo de medida veces, un 83.93% de isomorfismo de medida cada uno y 5.35 % de producto de medidas. Se tomaron solo los problemas que se ajustan a los enunciados propuestos en la prueba.

Tipo de problema	Problema
Isomorfismo de medida (Veces)	Si Jaime tiene 6 años y Carlos tiene 3 veces la edad de Jaime. Cuántos años tiene Carlos ?
Isomorfismo de medida (cada uno)	En la plaza de mercado hay 6 vendedores. A cada vendedor le dieron 3 boletas de una rifa. Cuántas boletas repartieron?
Producto de medida	Blanca compró 6 blusas y 3 faldas. Cuántas combinaciones puede hacer? Hallar el área de un terreno que mide 3 metros de frente y 6 metros de fondo.

Debemos resaltar que el anterior problema del área es el único que se redactó por parte de los profesores encuestados. En cambio el de combinación de blusas y faldas se encontró el mismo enunciado en unas cinco personas.

Criterio 3: Análisis de la sintaxis.

Para este apartado se tomaron no sólo problemas de enunciado verbal sino también gráfico y numérico ; en el caso en que los profesores elaboraron problemas.

Lugar de la incógnita	Aditivo		Multiplicativo	
a+b =?	P1	49	P1	40
	P2	35	P2	33
	P3	34	P3	33
	Subtotal	118	Subtotal	106
a+? = c	P1	9	P1	10
	P2	10	P2	12
	P3	7	P3	6
	Subtotal	26	Subtotal	28
? + b = c	P1	1	P1	5
	P2	9	P2	3
	P3	7	P3	8
	Subtotal	17	Subtotal	16

Tabla 7

Tal como se muestra en la tabla 7, la mayoría de los profesores elaboran problemas en los que se pregunta por la incógnita I1, correspondiente al total de la operación. Esta situación ser debida a que la forma de presentar la sentencia canónica los haya inclinado a elaborar ese tipo de problemas ó a que no incluyen en los tipos de problemas los correspondientes a la sustracción (en el caso aditivo) y a la división (en el caso multiplicativo). Ello es importante en cuento nos permite conjeturar acerca de la conceptualización que poseen los profesores sobre estructura aditiva ó estructura multiplicativa, y es por ello que este aspecto será objeto de un análisis en las entrevistas.

Presentamos a continuación ejemplos de los problemas elaborados por los profesores usando lo que denominamos I1, I2 e I3.

Para la estructura aditiva

Lugar de la incógnita (9+7=16)	Problema
9+7 = ?	Carlos presta a su compañero de puesto 9 colores y a su profesora 7, para terminar la cartelera que empezaron el día anterior. ¿Cuántos colores presta Carlitos?
9 + ? = 16	Orlando trajo 9 carritos para regalar pero son 16 niños. ¿A cuántos le tiene que traer la próxima vez que nos visite?
? + 7 = 16	En una bolsa habían 16 dulces, si mi amigo se come 7. ¿Cuántos dulces le quedan?

Para la estructura multiplicativa

Lugar de la incógnita (6 x 3 =18)	Problema
6 x 3 = ?	Durante este mes solo laboramos 3 semanas de a 6 días cada una. ¿Cuántos días laboramos en este mes?
6 x ? = 18	Carlos tiene 18 hojas que debe distribuir entre sus 6 compañeros de manera equitativa. ¿Cuántas hojas le corresponden a cada niño?
? x 3 = 18	Pedro reparte 18 naranjas a 3 compañeros. ¿De a cuántas le corresponde si a cada uno le corresponde lo mismo?

Criterio 4: Análisis de la precisión y coherencia.

Como enunciados imprecisos podemos presentar los siguientes ejemplos:

- En el enunciado hace falta la relación multiplicativa:
  "Si doy 6 frutas a 3 niñas. ¿Cuántas frutas son?"

- En el enunciado hace falta la congruencia de las partes:
  "Reparto en 6 cajas 18 huevos. ¿Cuántos huevos corresponden a cada caja?
  "En el parque hay un vendedor de helados, hay 18 helados para vendercelos a 3 niños, ¿de a cuántos helados le toca a cada uno, de los niños?

- En el enunciado hace falta una de las partes del todo:
  "Luis Leonardo en un valde tiene 16 bolsas de leche, debe repartirlas entre la fila de José y la fila de Paola. ¿Cuántas bolsas reparte en cada fila?"

- Un enunciado incoherente propuesto por un profesor fue :
  "Por medio de varias canicas buscar una operación que no sea la multiplicación ni la suma y le dé el mismo resultado".

Este tipo de problemas fue muy poco encontrado pero se incluyó en la medida en que en la estructura multiplicativa la expresión de relación multiplicativa o la congruencia de las partes, son muy importantes para obtener la estructura deseada.

Criterio 5:

De los problemas en los cuales no hay correspondencia entre el enunciado planteado y la relación que se pretende modelar, encontramos ejemplos como los siguientes:

Para modelar 6 x 3 = 18 :

- 18 niños entran a estudiar y se retiran 6 a la mitad de año. ¿Cuántos niños quedan?
- ¿Cuánto le hace falta a 6 + 3 para llegar a 18?

Para modelar 9 + 7 = 16

- Tengo 16 bombones para repartirlos entre 9 niñas y 7 niños. ¿Cuántos bombones le corresponde a cada uno?
- Tengo 16 colombinas para repartir entre 9 niñas ¿Cuántas le corresponden?

Como conclusiones parciales de este apartado podemos observar lo siguiente : La mayoría de los profesores redactó un problema verbal con lo que se infiere que los profesores reconocen la tarea de producir problemas como elaborar "historias" o "tratar de proponer problemas relacionados de alguna manera con la vida cotidiana de los alumnos" que es lo que nosotros denominamos problemas con enunciado de tipo verbal. Como un hecho atípico se encontraron profesores que puede producir hasta dos enunciados verbales y luego producen enunciados numéricos o gráficos. Por ello la primera conclusión que se puede extraer de este tipo de análisis es la necesidad de incorporar en el programa de formación de maestros esta categoría de clasificación debido a que pueden existir profesores que no poseen en su marco referencial este tipo de clasificación : diferencia entre enunciados verbales, gráficos y numéricos, porque el hecho de que puedan producirlos no es un reflejo de que sena conscientes de este tipo de clasificación.

Dado que la preferencia encontrada para los problemas de estructura aditiva fue la correspondiente a los problemas de combinación y para los de estructura multiplicativa fue la de isomorfismo de medida en su subcategoria de cada uno, y las demás categorías se presentan con menor frecuencia, una segunda conclusión parcial de este trabajo sería la de incluir este tipo de temática en los programas de formación, colocando especial énfasis en clarificar las categorías, a fin de hacer consciente a los profesores de la existencia de estas a la vez que las incorporen como "conocimiento en uso", esto como consecuencia de un hallazgo en las respuestas obtenidas, cual es el que encontramos que muchos profesores usan las clasificaciones, pero no las reconocen a la hora de explicar las diferencias entre los tres problemas planteados.

Una de las cuestiones que se también se desprende de este análisis es la relativa a las categorías que aparecen con menor frecuencia. Ellas corresponden para la estructura aditiva las de cambio disminuir y comparación, para la estructura multiplicativa las de veces, de producto de medidas y de expresión cuotitiva. Estas ausencias nos permiten concluir la necesidad de incluir en el programa de formación el análisis de las categorías olvidadas o no tenidas en cuenta a la hora de elaborar problemas.

Al tener en cuenta la estructura sintáctica, se encontró que la mayoría de los profesores enuncian problemas preguntando por el total; pensamos que ello se puede deber a que las sentencias aritméticas planteadas poseen un orden intrínseco que ellos respetan a la hora de enunciar los problemas. Realizando un análisis desde los conceptos seleccionados para esta investigación (estructura aditiva y estructura multiplicativa) podremos asegurar que la mayoría de los profesores no comprenden la resta como una parte de la estructura aditiva, ni la división como parte de la estructura multiplicativa. Ello nos lleva a proponer que el cambio de la posición de la incógnita es uno de los aspectos que se debe tener en cuenta para la estructuración de las temáticas del programa de formación.

También se debe incluir, a fin de posibilitar la comprensión de la construcción de la estructura aditiva y / o multiplicativa, la relación existente de la suma con la resta y de la multiplicación con la división en la medida en que son partes de dos campos conceptuales "considerados como conjuntos de problemas que comportan operaciones aritméticas y nociones de tipo aditivo (tales como adición, sustracción, diferencia, intervalo, traslación) o de tipo multiplicativo (tales como multiplicación, división, fracción, razón, semejanza) "(Vergnaud, 1983, pág. 482) .

3.3 ANÁLISIS DE LAS RAZONES EXPUESTAS:

En el cuadro se presenta el análisis descriptivo en relación a las razones expuestas por los profesores al caracterizar los problemas planteados como diferentes.

Razones	Aditivo	Multiplicativo
R1	14 (23.7%)	12 (20.34%)
R2	13 (22.03)	12 (20.34%)
R3	6 (10.17%)	7 (11.86%)
R4	10 (16.95%)	7 (11.86%)
R5	2 (3.39%)	4 (6.78%)
R6	7 (11.86%)	12 (20.34%)
R7	7 (11.86%)	5 (8.47%)

Tabla 8

En lo relativo a la caracterización de las razones expuestas por los profesores podemos observar que las razones de tipo 1 se presentan con mayor frecuencia (23.7% y 20.34%) tanto en la estructura aditiva como en la multiplicativa. Para la estructura aditiva, le sigue en frecuencia las razones expuestas desde la diferencia "radica en los enunciados" seguido de las razones "por el lugar de la incógnita". Para lo multiplicativo aparece la mayor frecuencia en las de "el enunciado" seguida de "no clasificable".

A continuación se ejemplifican con casos en los que el profesor da como razones las categorías citadas anteriormente.

Para R1: en esta categoría se clasificaron el 23.7% de las razones expuestas para la estructura aditiva y el 20.34% para las de estructura multiplicativa. Después de realizar un análisis del contenido de cada una de las respuestas obtenidas se definieron cinco subcategorías, que se describen a continuación:

a. Explicaciones basadas en lo que se espera del aprendizaje del niño. Un ejemplo de ello para el caso aditivo, aparece en la siguiente tabla:

1.a Martín cuenta con 9 láminas para pegar en su álbum y Juana María le obsequia 7 láminas, ¿Con cuántas láminas cuenta Martín? 1.b Claudia tiene 16 manzanas para elaborar un postre. Si Amparo compró 9 manzanas para colaborar en la preparación ¿Cuántas manzanas compró Claudia? 1.c Para una competencia deportiva a dos de los participantes se les exige conseguir a lo largo del campo deportivo 16 balones en un tiempo determinado. Al terminar el tiempo establecido un jugador tiene 9 balones y el otro 7 balones. ¿Cuántos balones les hace falta a cada uno para completar los 16 balones?	En los tres enunciados se pretende hacer que el niño desarrolle destrezas en: el cálculo matemático, afiance el concepto de suma y resta y, vea diferentes modos de enunciar problemas y que el desarrollo también sea diferente.

El maestro se fija en el desarrolle de "destrezas cognitivas" que espera que un niño desarrolle, esto puede corresponder a que el profesor analiza los problemas teniendo en cuenta su labor profesional, es decir, colocándose en la postura de "planificador de secuencias de aprendizaje"

b. Otro tipo de explicaciones sobre las diferencias de los problemas se da explicando el tipo de operaciones relacionadas con la estructura aditiva ó la multiplicativa. Tal es el caso que se muestra enseguida:

1.a. José quiere reunir $18. Tiene 3 tíos y a cada uno le pide que le regale $6. ¿Cuánto le debe pedir a cada uno? 1.b. Quiero 6 naranjas y cada una vale $3, cuánto tengo que pagar en total? 1.c. Dibuje 6 conjuntos que cada uno contenga 3 elementos. ¿Cuántos elementos reúno en total?	Se puede colocar los enunciados utilizando suma, división, multiplicación.

Este tipo de argumentación se puede basar en una mirada sobre la "operación" que sirve para resolver el problema. La diferencia realizada entre la multiplicación conectada a las sumas repetidas y la multiplicación conectada al uso de las tablas (ó la memorización) es muy frecuente en los libros de texto y por tal razón puede ser la argumentación que el profesor selecciona.

c. Otro tipo de razones se basan en diferenciar por el tipo de "estrategias cognitivas" que entran en juego para resolver el problema, tal como se muestra en el ejemplo siguiente:

1.a. Oscar Andrés compró 9 carros y sus padres le regalaron 7. ¿Cuántos carros reunió?	Adiciono cantidades diferentes
1.b. Tengo 16 cuadernos entrego 9. ¿Cuántos me quedan?	Realizo una resta con complemento
1.c. Tengo 16 bombonbunes para repartirlos entre 9 niñas y 7 niños. ¿Cuántos bonbonbunes le corresponde a cada niño?	Construyo una suma y una división.

En esta explicación el profesor usa la descripción del tipo de acción cognitiva que el niño debe hacer para resolver el problema. Para el primer caso la estrategia de resolución sería agregar cantidades, para el segundo el conteo a partir de un número dado y para el tercero se hace necesario primero saber cuántos niños hay (agregar cantidades) y luego establecer una relación (repartir) entre el número de niños y el número de bombonbunes.

d. Explicaciones de las diferencias por las distintas estrategias de enseñanza de cada una de las estructuras.

1.a Organiza en filas iguales las siguientes fichas que te doy - - - - - - - - - - - - - - - - - - ¿Cuántas fichas tiene cada fila? ¿Cuántas filas hay? ¿Cuántas filas hay en total?	La organización así ayuda a que el chico logre comprender el sentido de la multiplicación como suma repetitiva.
1.b Completa la siguiente tabla x | 6 1 | – 2 | – 3 | –	Se pide directamente el resultado de manera no tan esquemática.
1.c. Vamos a realizar unas onces compartidas, de los 24 chicos, 6 van a traer cada uno 3 abanos y los otros chicos traen las siguientes frutas... Diego traerá manzanas, Miguel papaya, etc.(luego se pregunta) entonces cuántos abanos en total traeremos?	El problema exige la utilización de dicha operación.

El profesor usa la secuencia de enseñanza mostrando primero una gráfica, luego por las tablas y finalmente resolviendo un problema en el que la operación aparece como la indicada para resolverlo.

e. La siguiente explicación parece indicar que entiende que uno de los tres problemas planteados no corresponde a los modelos de unión o de sumas repetidas que usa en los otros dos.

Problemas de tipo aditivo	
1.a. Pepito tiene 9 canicas y José 7. Cuántas canicas hay en total?	Se emplea la adición 9+7=16
1.b. En una cesta hay 16 manzanas y Martha saca 9. Cuántas manzanas quedan?	Se realiza gráficamente utilizando resta 16-9 = 7
1.c. Si compro 7 dulces cuantos me hacen falta para completar 16 dulces?	Se debe buscar el otro número 7 + ? = 16. Hay que analizar para luego reponder.

En la primera razón hace relación al modelo de juntar, en la segunda hace relación al modelo de separar y en la tercera al de "buscar un complemento" que puede hacerse desde el conteo a partir de 7.

Problemas de tipo multiplicativo	
1.a. En el parque hay un vendedor de helados, hay 18 helados para vendérselos a 3 niños, de a cuántos helados le toca a cada uno de los niños, si a cada uno le corresponde lo mismo?	Se plantea el problema, el niño suma y tiene el resultado.
1.b. Repite, colorea y suma ▲▲▲▲▲▲ ▲▲▲▲▲▲ = ▲▲▲▲▲▲	Se pide directamente el resultado de manera no tan esquemática.
1.c. Gloria tiene 6 faldas y 3 blusas cuántas mudas puede formar Gloria?	Hace la combinatoria y obtiene la respuesta.

En este caso el profesor explica las diferencias desde las sumas repetidas, el conteo para los dos primeros problemas y explica el tercero utilizando la conformación de parejas de vestidos.

Este tipo de razones no se tuvieron en cuenta para realizar las entrevistas, en la medida en que no expresaban la construcción de un criterio común para explicar las diferencias entre los problemas propuestos. Pero por la importancia de este tipo de explicaciones, consideramos que el estudio de estos estilos de razonamientos pueden ser abordados en futuros trabajos de investigación

Para R2: por los enunciados. Este tipo de razón fue expuesta por el 22% para los problemas de tipo aditivo y por el 20.34% para los de tipo multiplicativo.

A continuación presentamos los problemas y las razones expuestas para esta categoría.

Problemas para 9+7 = 16	Razones
1a. Salgo de compras y del almacén traigo 9 camisas y 7 pantalones, para mi sobrino. ¿Cuántas prendas compro en total? 1b. Andrés tiene 9 compañeras en su salón y sólo 7 compañeros. ¿con cuántos compañeros en total estudia Andrés? 1c. Si tengo 7 canicas de color verde y en total tengo 16 canicas. ¿Cuántas no son de color verde?	Yo no diría que estos problemas son diferentes, ya que todos me llevan a resolver un mismo algoritmo, la suma; sino que con planteamientos distintos.

Problemas para 6 x 3 = 18	Razones
2a. En una caja caben 6 manzanas. ¿Cuántas manzanas cabrán en 3 cajas? 2b. En un salón de clase hay 3 filas de a 6 pupitres bipersonales. ¿Cuántos pupitres bipersonales, habrán en el salón? 2c. Mauricio tiene 6 lápices de colores, Carlos tiene el triple de Mauricio. ¿Cuántos lápices de colores tendrá Carlos?	Son diferentes por el enunciado.

En lo relativo al término enunciados hace relación a lo que podríamos llamar el relato del problema, es decir a lo que se conoce como la situación problemática o la situación de la vida real que se pretende modelar. Para el caso de la suma es importante observar que se plantean solo problemas de la categoría combinación, es decir Parte - Parte - Todo, y los dos primeros son de encontrar el todo solamente el último corresponde a encontrar una parte sabiendo un todo, lo que indica que los problemas estructuralmente hablando no comportan gran variación. De igual manera se observa en el segundo ejemplo en el cual no existe variabilidad en el problema pues todos son isomorfismos de medida (en sus subcategorías veces y cada uno) al igual que todos preguntan sobre el total. Para estos casos efectivamente lo que los hace diferentes son las situaciones problemáticas planteadas.

Existen casos en los que el profesor plantea problemas de diferentes tipos y aún así lo único que puede clasificar como diferente es la situación problemática planteada, tal es el caso de:

Problemas 9+7=16	Razones
1a. En una caja hay 9 colores y en la otra 7 colores ¿Cuántos hay en las dos cajas? 1b. Pablo gastó 9 pesos en transporte y 7 pesos en las onces ¿Cuánto gasto Pablo en el transporte y en las onces? 1c. Alicia recorre 9 metros del colegio a su casa y Beatriz recorre 7 metros. ¿Cuántos metros recorren Alicia y Beatriz del colegio a sus casas?	son diferentes en el lenguaje que se maneja y en la forma como se enuncian

Para R3: para el caso de la adición esta categoría corresponde a un análisis basado en el observar la diferencia desde el tipo de objetos involucrado en el enunciado y para la multiplicación en el tipo de respuestas que aluden a las sumas repetidas así:

Problemas 9 + 7 = 16	Razones
1.a.Anita compra en la tienda escolar 9 colombinas y 7 dulces. Cuántas golosinas compró en total? 1.b.El lunes gasté $9 pesos en las onces y el martes $7. Cuánto dinero he gastado en total en los dos días? 1.c.Mi hermanito Luis caminó en su triciclo el primer día 7 minutos, el segundo día 9 minutos. Diga cuántos minutos a caminado Luis en los dos días?	Son diferentes por que el 9 y el 7 primero son golosinas, luego se convierten en dinero y por último en minutos o fracción de hora.

Problemas de tipo multiplicativo	
1.a. María, Luis y Carlos tienen 6 colores cada uno. Cuántos colores tienen los tres ? 1.b. Tengo 6 tréboles de tres hojitas cada uno. Cuántas hojitas de tréboles tengo en total ? 1.c. Un parqueadero tiene tres niveles, en cada nivel hay 6 carros, ¿Cuántos carros hay en el parqueadero ?	Porque la multiplicación es una suma de sumandos iguales, se agrupan y se repiten tantas veces como lo indica el enunciado.

Para este tipo de razones usa la comprensión que tiene de cada una de las operaciones en la medida en que en la suma la ve como agregar objetos y en la otra como sumar conjuntos del mismo tamaño.

Para R4: que corresponden a aquellas razones que se dan desde el lugar donde se encuentra la incógnita.

Problemas de tipo aditivo	
1.a. Carlos presta a su compañero de puesto 9 colores y a su profesora 7 para terminar la cartelera que ya empezaron, el día anterior. Cuántos colores presta Carlitos? 1.b. Sandra tiene 16 billetes de caramelos y se le perdieron 7. ¿Cuántos billetes le quedaron? 1.c. María reparte a sus compañeros boliches, 9 a Ana y 7 a Pedro. ¿Cuántos boliches repartió en total?	Se tomaron los dos sumandos para hallar el segundo. Se tomó el resultado y un sumando para hallar el otro sumado.

Problemas de tipo multiplicativo	
1.a. Pedro tiene 3 cajas; en cada caja hay 6 dulces. ¿Cuántos dulces tiene Pedro? 1.b. La altura de un dibujo es 6 centímetros. ¿Cuánto mide la altura de ese dibujo ampliado tres veces su tamaño? 1.c. Carlos tiene 18 carros, desea empacarlos echando de a 6 en cada caja. ¿Cuántas cajas necesita?	Son diferentes porque unos requieren de la operación en sí y el otro porque requiere es de la búsqueda de uno de los factores.

Aunque no es explícita la respuesta al indicar que la diferencia en los problemas es debida al lugar en el que se encuentra la incógnita, estos profesores usan el hecho de reconocer que la resta y la división pueden ser problemas que se resuelvan con la operación planteada. Además son conscientes de que el cambio en la pregunta hace que los problemas sean de un tipo diferente.

Para R5: Esta categoría hace relación a aquellas respuestas en las que aparecen razones que se estructuran desde las operaciones y los enunciados.

Problemas de tipo aditivo	
1.a. María tiene 16 dulces y Pedro tiene 9 dulces. ¿Quién tiene más dulces María ó Pedro? ¿Cuántos dulces más? 1.b. Julia tenía 9 balones y su tía le regaló 7 balones más. ¿Cuántos balones tiene ahora Julia?	La diferencia es el enunciado aunque en el ejercicio uno lo diferente de los demás es la operación.

1.c. Luis tiene 9 años y Felipe 7 años ¿Cuántos años tiene Camilo, si él tiene la edad de Luis y Felipe juntos?	

Problemas de tipo multiplicativo	
1.a. En el día de los niños la maestra debe repartir en partes iguales 18 dulces para 6 alumnos. De a cuántos dulces le corresponde a cada niño? 1.b. El padre da a sus 3 hijos 18 colombinas para que las repartan en partes iguales. De a cuántas colombinas le corresponden a cada uno 1.c. Carlos tiene 3 cajas, en cada caja hay 6 canicas ¿Cuántas canicas tiene Carlos? 1.d. María tiene 18 tizas. En cada caja hay 6 tizas. Cuántas cajas tiene María?	Cada problema con argumento tiene una solución diferente. En unas se busca un factor desconocido y en otros el producto.

En esta categoría se observa que muy pocos profesores (3.39% y 6.38%) pueden explicar las diferencias entre los problemas planteados, por el tipo de operación a realizar, que puede entenderse como por el lugar de la incógnita, y por el tipo de situación que en cada uno se plantea.

Para R6: son enunciados encontrados desde perspectivas que en este estudio no pudieron ser clasificadas en las categorías estudiadas.

Problemas de tipo aditivo	
1.a. Andrés Felipe compró una manzana en $9 y una naranja en 7 ¿Cuánto le costaron las frutas? 1.b. Las edades de Juan y Felipe suman 16, Felipe es mayor que Juan 3 años. ¿Qué edad tiene Juan y qué edad tiene Felipe? 1.c. María Antonia tiene 4 hermanas hay dos pares de gemelas en total ellas suman 16 años y una de ellas tiene 9 años ¿cuántos tienen las otras gemelas?	Porque en este se practica la suma como base en las tablas de multiplicar. Porque no parte de las tablas involucradas.

Problemas de tipo multiplicativo	
1.a. Mery compró 6 muñecas, y su prima Olga tiene 3 veces esa cantidad. ¿Cuántas muñecas tiene Olga? 1.b. A un partido de fútbol asisten 18 personas, si solo 6 de ellas llevan boletas. ¿Cuántos entraron demás? 1.c. Pedro quiere saber cuántos años tiene su hermana mayor sin preguntarle, pero lo único que conoce es que ella tiene 6 veces su edad. Si actualmente él tiene 3 años. Cuántos años tiene ella?	Es posible que para hacer una operación se utilicen otras por ejemplo: una suma se puede resolver con una resta o viceversa, de igual forma la multiplicación con una suma.

En términos generales se puede concluir que muy pocos profesores explican las diferencias desde un ámbito global, lo que nos justifica la necesidad de incluir este tipo de reflexiones para dotar de sentido la actuación del profesor cuando enseña la representación simbólica presente en las cuatro operaciones aritméticas y el uso de los problemas como mediadores de significado entre lo concreto y lo abstracto.

3.4 ANÁLISIS PARA LAS EXPLICACIONES DADAS PARA LOS ALGORITMOS.

La tabla 9 que se presenta a continuación resume las explicaciones (categorizadas) dadas por los profesores en el aspecto relativo a la relación entre el conocimiento conceptual y el procedimental vinculados en los algoritmos de las cuatro operaciones.

Categoría	suma	resta	multiplicación	división	total	porcentaje
1	3 (5%)	8 (13.55%)	6 (10.16%)	9 (15.25%)	26	11%
2	1 (1.6%)	8 (13.55%)	11 (18.64%)	25 ((42.37%)	45	19%
3	12 (20.3%)	18 (30.5%)	19 (32,2%)	23 (38.98%)	72	30.5%
4	29 (49.1%)	18 (30.5%)	12 (20.33%)	0	59	25%
5	10 (16.9%)	6 (10.16%)	11 (18.64%)	2 (3.38%)	29	12.3%
6	4 (6.77%)	1 (1.6%)	0	0	5	2.2%
					236	

Tabla 9

En la categoría 1 se ubican aquellos que no responden, o no dan explicaciones o dicen que no saben. Ellos corresponden a un 11% del total de las respuestas obtenidas en los diferentes algoritmos.

En la categoría 2 se ubican aquellas explicaciones que son confusas o que de alguna manera no corresponden a lo preguntado y son un 19% del total. Ejemplos de ellas son

Operaciones	
suma	"Conocer primero si el alumno maneja la suma donde no tiene que llevar y una vez conocido el dato plantear el tema con diferentes ejercicios"
Resta	"A partir de problemas sumando o restando unidades. Tenía 7004 se me perdieron 68. //////// 704 68"
Multiplicación	"Es difícil dar una opinión porque no se sabe en qué grados se encuentra ni cuantos años tiene, tampoco se sabe cuál haya sido su proceso de aprendizaje" "Al multiplicar por el segundo dígito debemos correr un espacio hacia la izquierda. Por qué , no se por que razón se debe dejar ese espacio, pero siempre lo hago".
División	*"Optaría por las formas que hay" "Restando y luego la hace mentalmente" "Empezaría por hacer sencillos ejercicios de repartición y también sería en forma tradicional primero haciendo la sustracción escrita y luego mentalmente"*

En la categoría 3 se ubican todos aquellos cuyas justificaciones de los algoritmos son basadas en criterios sintácticos que corresponde a un 30.5%.

Operaciones	
suma	"Primero que todo haría que trajera palitos a 9 palitos le agrego 1 = 10 entonces digo colocamos el cero y llevamos el uno para encima del 9 y luego sumamos con los palitos 9+1=10volvemos a colocar el cero y llevamos el uno para encima del 6 y sumamos con palitos 1+6+3=10"
Resta	*"Que cuando el número al cual le vamos a quitar es más pequeño que el que quita tenemos que acudir al siguiente número para que nos preste una unidad quedando más grande y así poder realizar la operación ; pero que le vamos quitando al número la unidad prestada así: 7004 -68* 8 no le podemos quitar 4 le decimos al número siguiente que nos preste 1 queda convertido en 14. Al siguiente número también presto una unidad queda convertido en 9 y el número 7 quien prestó 1 queda convertido en 6"
Multiplicación	"Multiplicaría las unidades por cada uno de los números del multiplicado no le permitiría escribir lo que lleva en la parte de arriba sino que lo retenga en su memoria, por que eso lo confundiría ;para luego que multiplicara las decenas y que si multiplico decenas el primer resultado se colocaría debajo de las decenas."
División	"Explicaré las partes de la división dando a conocer las funciones de cada una de ellas. Luego diré como hay dos cifras en el divisor separo dos en el dividendo mediante una coma, luego buscamos un número que multiplicado por el divisor me dé exacto o me acerca al número que tengo en el dividendo, debo tener en cuenta que el número que me da en el residuo me de menor al número que tengo en el divisor y así sucesivamente hasta finalizar la división"

En cuadro anterior se observa que los profesores no tienen en cuenta la teoría de agrupamiento ni de valor posicional , pues la descripción que hacen se basa en repetir una reglas que conformarían el algoritmo pero para las cuales no tienen explicación conceptual alguna.

En la categoría 4 se ubican aquellos sujetos que al dar la explicación sobre la enseñanza usan palabras que se refieren a las unidades, decenas, centenas, pero que se puede deducir que solo en algunos casos existen profesores que parecen usar esos conceptos en la explicación del algoritmo. A esta categoría corresponden el 25%.

Categoría 4 **Suma**	"Al sumar las unidades completa una decena, por medio de fichas que simbolicen una decena y otras la unidad formaría los montones Ej: ● = unidad □ = decenas ◣= centena **6 9 9** ◣ ◣ ◣ ◣ ◣ ◣ □ □ □ ● ● ● ● ● □ □ □ ● ● ● ● □ □ □ **3 0 1** ◣ ◣ ◣ ● **9** **9** **10**● = □
Resta	"Diciéndole que la decena tiene 10 unidades, la centena 10 decenas por lo tanto en el numeral b) al cero le habían prestado una centena y se convirtió en 100 pero prestó una decena a las unidades por eso ahora es 90 y así sucesivamente"
Multiplicación	"Primero le diría que el primer paso está bien. Segundo que debe multiplicar las decenas y empezar a colocar el resultado debajo de las decenas del primer producto, luego sumar los dos productos para obtener el producto total"

La categoría 5 agrupa a los sujetos que respondieron usando el lugar de los dígitos en la cifra. En nuestro caso particular el valor posicional lo encontramos con la palabra casilla que hace relación a la tabla de las posiciones que son enseñadas en las escuelas y que tratan de hacer comprender al niño que en cada una de ellas debe ir un sólo número, a la vez que según el título de cada casilla el número que se coloca corresponde bien a las unidades, bien a las decenas ó bien a las centenas. En esta categoría encontramos un 12.3 % del total

Categoría 5	
Suma	"1. Empezaría por una suma sencilla 9 + 1 = 10—— 10 unidades= 1 decena. 2. *Colocaría el número dentro de una casilla* Decenas Unidades 3. Para esta explicación utilizaría el ábaco para cambiar las 10 unidades por una decena y así sucesivamente. 9 + 1 10
Resta	Daría a José el concepto previo de valor posicional de cada casilla. Como a una cifra menor no le puedo restar una mayor tomaría una decena prestada para convertirla en una cifra mayor, 14 del cual le resto 8 el cero de las decenas quedó convertido en 9 pues prestó una decena a este 9 le resto el 6 quedaría 3, a la siguiente casilla que es 0 prestó 1 y me queda 9 y el número 7 prestó una unidad el cual quedó convertido en 6"
Multiplicación	" harán multiplicaciones, teniendo en cuenta que la multiplicación es posicional es decir correr un espacio hacia la izquierda"
División	"Valor posicional de los números. Método correcto. Corregir errores"

En la categoría 6 se ubicaron aquellos que en las explicaciones usaron términos relacionados con el valor posicional y el agrupamiento. En muchos de ellos no se encuentra una comprensión de lo conceptual sino, una vez más el uso de unas reglas sintácticas que se entrelazan para desarrollar el algoritmo.

Suma	*Si ya maneja las unidades, decenas y centenas podría enseñarle:* *Descomponiendo cada número en unidades así:* 699 *600 unidades de 699* 9 *300 unidades de 301* 90 *90 decenas de 699* 600 *9 unidades de 699* 301 1 unidad de 301 00 0 decenas de 301 300 1000 ó manejando las casillas u orden posicional sin olvidar lo que se lleva c d u 6 9 9 3 0 1 1 0 0 0
Resta	1.Explicar el valor posicional y el préstamo en cada una de las columnas 2.Calcular a través de la suma 3.El valor del cero (si tiene valor o por lo menos completa una cifra)

Podemos concluir para este apartado que la gran mayoría de los profesores poseen un tipo de razonamiento sintáctico a la hora de enseñar los algoritmos de las cuatro operaciones, y manifiestan un desconocimiento de lo conceptual, ello puede ser debido a que expresiones como casillas y los nombres de ellas (unidades, decenas y centenas) que fueron usados para "facilitar" la comprensión de los niños sobre los conceptos de valor posicional y agrupamiento, fueron tomados por los profesores como únicos referentes conceptuales a la hora de enseñar dichos contenidos curriculares. Por ello este también debe ser un tópico a tratar en el programa de formación.

4 : ANÁLISIS CUALITATIVO : LAS CONCEPCIONES DE LOS PROFESORES

Como ya se describió en el capítulo 2 las respuestas obtenidas en las encuestas sirvieron de base para seleccionar los sujetos a entrevistar. El objetivo de las entrevistas consistía en profundizar, corroborar ó completar sobre las explicaciones dadas por los profesores con respecto a las categorías estudiadas, ello a fin de precisar la caracterización de las diferentes conceptualizaciones que tienen maestros en ejercicio de la básica primaria, lo cual nos permitió diseñar un programa de formación que contribuirá a mejorar el conocimiento de contenido pedagógico de los profesores cuando enseñan matemáticas.

Para la selección de los profesores a entrevistar en relación a los problemas aritméticos, se procedió a partir de los resultados obtenidos en el análisis descriptivo. Con mayor especificidad, de todos los agrupamientos realizados en la descripción de las concepciones que los profesores manifestaron en la solución de la primera parte del cuestionario, se optó por privilegiar el construido a través de las razones aducidas en la diferenciación de los problemas enunciados (ver parte I del *cuestionario*). Dado que la clasificación resultante fue:

R1	Razones acerca de cada enunciado como separado de los otros, explicando lo que se debe hacer para resolverlo.
R2	Por el enunciado.
R3	Por los objetos que aparecen en los problemas
R4	Por el lugar que ocupa la incógnita
R5	Por las operaciones y los enunciados involucrados
R6	No clasificable
R7	No da

de ella se escogieron las clases **R2**, **R3**, **R4** puesto que, posiblemente, en éstas se encontraban las razones que involucrarían, así fuera de manera implícita, conceptos que generan una comprensión no simplificada de las situaciones aditivas y de las situaciones multiplicativas. Una vez tomadas las clases, se seleccionó al azar a tres personas, una por cada clase y para ellas se construyó un formato de entrevista denominado de TIPO I.

Se debe agregar que en este formato de entrevista se preguntó explícitamente acerca de las concepciones respecto de las cuatro operaciones.

4.1. LAS CUATRO OPERACIONES:

Las hipótesis 1 y 3 de la investigación pretenden caracterizar las concepciones sobre las cuatro operaciones y los modos de representación usados por los profesores para dotar de significado a dichas operaciones. Con relación a estos supuestos se realizaron las indagaciones correspondientes y encontramos que tal como lo afirma Fischbein los profesores usan los modos "primitivos" de conceptualización que se describen en las siguientes unidades de información:

La naturaleza de las operaciones aritméticas se identifica a través de la siguiente idea primitiva:

LAS OPERACIONES ARITMÉTICAS SON RELACIONES ESTÁTICAS QUE RELACIONAN ELEMENTOS SIMULTÁNEOS DE LA REALIDAD, esta idea primitiva se expresa en cada una de las operaciones aritméticas de la siguiente manera :

- ANÁLISIS DE CASOS

4.1.1 LA SUMA : CASO DE YUDY

Sumar es unir y el modo de representación asociado es un conjunto, con dos subconjuntos disyuntos, para hallar el total la estrategia se basa en el conteo de elementos que componen un conjunto.

Al solicitarle a Yudy el planteamiento y resolución de problemas aditivos y para cada una de las categorías estudiados se obtuvo lo siguiente

- **Problema de combinación :**

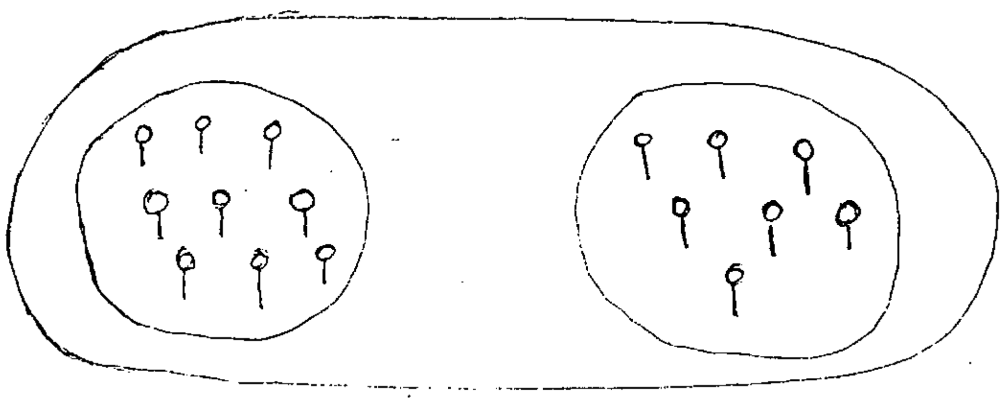
Para explicar la solución al problema

"Sofía fue al supermercado y compró 9 colombinas de leche y 7 colombinas corrientes, cuántas colombinas compró en total ? "

Yudy da la siguiente explicación verbal acompañada del diagrama :

" tengo 9 colombinas y le agrego 7 colombinas"

Dibuja dos círculos entre los cuales representa las diferentes colombinas y luego procede a hacer un circulo más grande que encierre los anteriores y para sacar el total cuenta el número de colombinas



9 colombinas 7 colombinas

Para un total de 16 colombinas.

- **Problema de cambio** :

para explicar la solución del problema :

"Sofía fue al supermercado y compró 9 colombinas de leche y su mamá le regaló 7 colombinas más. Cuántas tiene en total ?"

Yudy dice :

"Para solucionarlo es lo mismo que el anterior, tiene que juntar o reunir"

y usa el mismo diagrama anterior para representarlo.

- **Problema de comparación**:

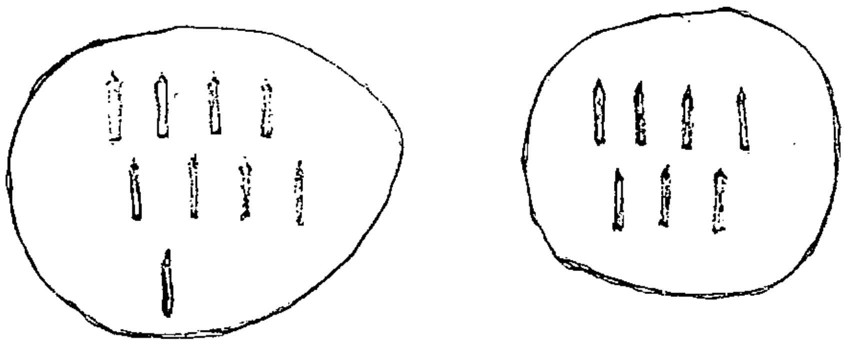
Ante el problema

" Hay 9 lápices rojos si hay 7 lápices amarillos más que rojos, cuántos lápices amarillos hay en total ? "

Explica :

"se suman los 9 colores rojos y los 7 amarillos"

para representarlo dibuja un conjunto con los 9 colores rojos y le añade los otros 7



y al final cuenta el total de colores.

Yudy usa el modelo de unir conjuntos sin interesarle que en los problemas de cambio hay una cantidad inicial que se transforma y que además la acción se hace sobre las colombinas que tiene Sofía, y en los problemas de comparación igualmente al considerarlo como relativo a una unión de conjuntos disyuntos, pierde una clase, la de los lápices rojos quedándose así sin una de las cantidades a comparar.

4.1.2 LA RESTA : CASO LUISA.

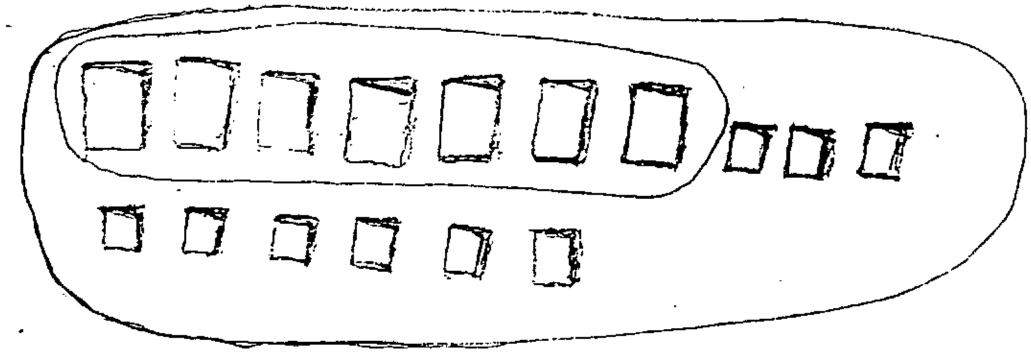
Restar es quitar, el modo de representación es un conjunto y una de sus partes, para hallar la parte que falta usan la estrategia del conteo a partir del número de elementos del subconjunto que se tenía.

- **Problema de combinación**:

Para resolver el problema

"Juan tiene 16 cuadernos si tiene 7 cuadernos grandes cuántos cuadernos pequeños tiene ?"

Luisa dibuja todos los cuadernos los encierra en un círculo , separa los 7 grandes y cuenta los pequeños



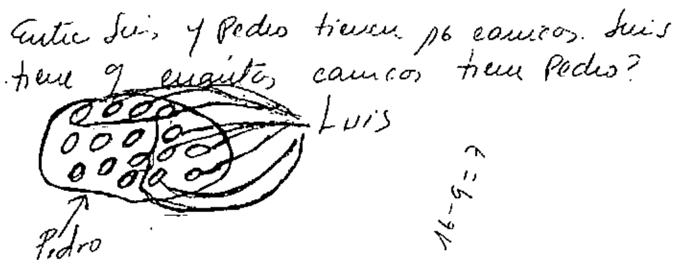
- **Problema de cambio**:

"Entre Luis y Pedro tienen 16 canicas y Luis tiene 9. Cuántas canicas tiene Pedro?"

Luisa dice :

"aquí hay 16, entonces sucede que Luis tiene 9 y saca de acá 9 bolitas entonces tengo..."

ella hace un gráfico en el que representa las 16 canicas encerradas en un círculo, luego cuenta las de Luis y simula la acción de sacarlas, al final cuenta las que quedan, éstas son las de Pedro.



- **Problema de comparación**:

Ante el problema :

"Si en una caja roja hay 16 colores y en una caja amarilla hay 7 colores menos, cuántos colores hay en la caja amarilla ?"

Para resolver este problema, Luisa usa una estrategia numérica toma 16 -7 y da el resultado 9, diciendo que:

"a 16 le quito 7 y me quedan 9".

Esta forma de razonamiento utilizada por la profesora muestra cómo para los problemas de resta, el uso de las representaciones sobre los conjuntos los hace que no tengan en cuenta situaciones en las que el contexto de la operación se encuentra en el disminuir una cantidad o comparar cantidades, usan el modelo de parte - parte - todo, aislando la cantidad del contexto y se quedan trabajando con los numerales, sin ningún significado.

4.1.3 LA MULTIPLICACIÓN : CASO JUANA

La multiplicación corresponde a la idea de sumas repetidas, usando un modo de representación en el cual se toman grupos de igual tamaño que se repiten varias veces, la estrategia de solución se basa en el conteo de a tantos.

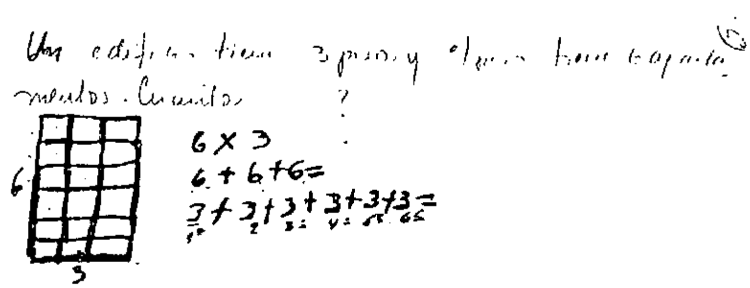
Para la multiplicación:

Ante el problema

"Un edificio tiene 6 pisos y cada piso tiene 3 apartamentos, cuántos apartamentos hay en total ?

Para resolverlo Juana pinta los 6 pisos en una representación rectangular, luego a cada "piso" lo divide en tres (que representarían los apartamentos). Para resolverlo suma 6 veces 3 y dice:

"dan 18"



Al preguntarle por el problema

Un edificio tiene 3 pisos y cada piso tiene 6 apartamentos, ¿cuántos apartamentos hay en total ?

Juana realiza la misma acción anteriormente expuesta y dice

"6 + 6 + 6 o sea 6 x 3"

4.1.4 CASO DIVISIÓN : CASO MANUELA

El modelo explícito de división es el de reparto, usando para su representación un grupo que representa el todo y por repartición se dan los elementos del conjunto a cada uno de los subconjuntos a formar. Para este caso usa estrategias basadas en el conteo (entregando de a uno) y en pocas ocasiones quitando grupos de mayor cantidad (de a 2 ó de a 3 , etc)

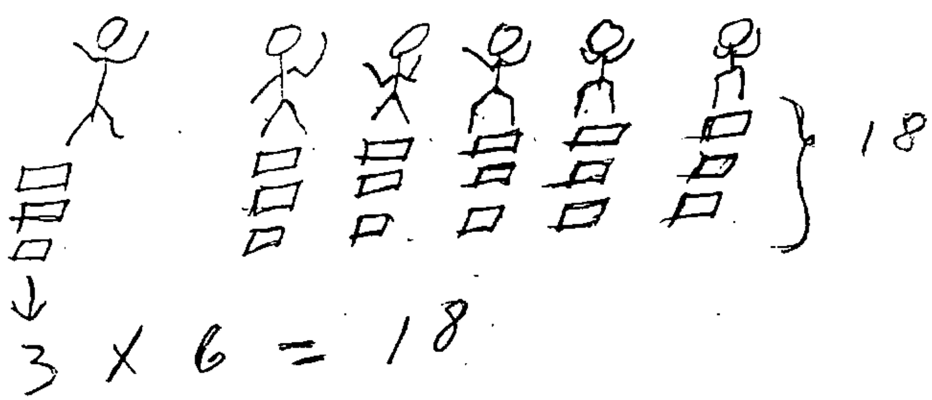
Ante el problema:

"Hay un grupo de 6 niños y entre todos juntan 18 pesos, ¿cuánto ahorra cada niño, si se supone que cada niño aporta lo mismo ?"

Para resolverlo Manuela dice:

"hay que aplicar la división, si se supone que dan lo mismo tomo los 18 y le doy uno a cada niño y me quedan 12, vuelvo y le reparto uno a cada niño y quedan 6 para darle uno a cada niño, o sea que a cada niño le doy tres"

Para representarlo dibuja los 6 niños y va dibujando un billete debajo de cada niño, hasta que "se le acaban los billetes".



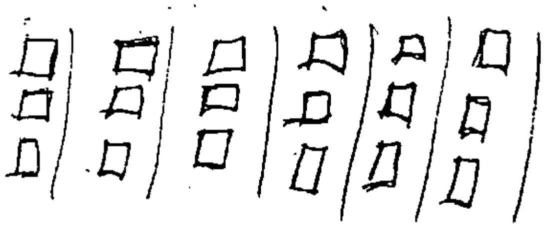
Este modelo de reparto está tan interiorizado que por ejemplo, y respecto al pedírsele que resolviera mediante una representación el problema ? x 3 = 18 , enseguida de haber resuelto el arriba propuesto, no encontró como hacerlo hasta que al pedirle que lo comparara con el anterior, lo representó como si fuera reparto.

Diciendo :

"este es un problema de división, se haría por la ecuación.. no sé como hacerlo por el gráfico...."

$$? \times 3 = 18$$

$$? = \frac{18}{3} = 6$$



Tanto para los problemas de tipo multiplicativo como los de división, el modo de razonar (sumas repetidas o reparto repetitivo) permite que los profesores desconozcan la función de las cantidades (intensivas ó extensivas) dentro de los problemas. Por ello la cantidad intensiva la consideran como el número de veces que se suma un grupo y hacen las sumas correspondientes sobre la cantidad extensiva. Para la división el asumir estrategias de tipo de resta les permite olvidar las medidas involucradas en las cantidades y hacer repartos en grupos de a tantos.

Como una conclusión inicial podríamos decir que en este estudio se corroboran, en profesores en ejercicio, los hallazgos de

"los autores encuentran que los estudiantes para magisterio están influenciados por los mismos modelos primitivos de conducta para la multiplicación y división que los estudiantes de 11 a 15 años. En el trabajo de Fischbein y otros (1985) los resultados muestran que un modelo primitivo de la multiplicación es el de adición repetida, y un modelo primitivo de la división es de la división partitiva" (Castro 1996 pág. 125).

En lo relacionado con los modelos de elaboración de problemas para las cuatro operaciones y tal como lo afirma Puig (1995) se corroboran los resultados encontrados en el estudio de Brown

> "los niños que fueron capaces de inventar historias proporcionaron más de unos modelos que de otros. Así para la suma, un tercio hizo problemas del modelo unión, otro tercio del modelo añadir y el tercio restante una variante entre añadir y comparación. Para la resta la inmensa mayoría hizo problemas correspondientes al modelo quitar con algunos casos de adición complementaria. Para la multiplicación la mayoría se reparte entre adiciones repetidas, razón y un modelo entre ambos. Muy pocos de producto cartesiano y algunos de factor multiplicativo. Para la división, finalmente, casi todos los niños construyeron un modelo de reparto" (Puig 1995, pag.86)

En nuestro caso tenemos que la inmensa mayoría de profesores proporcionan problemas de unión usando ese modelo para explicar los problemas que no corresponden a esa estructura semántica, así mismo para los problemas de restar el contexto usado es del quitar , para los de multiplicación es el de suma abreviada y para división el de reparto.

4.2. LOS PROBLEMAS ARITMÉTICOS.

En relación a las razones expuestas por los profesores acerca de la diferenciación de los problemas encontramos que una idea primitiva corresponde a:

LOS PROBLEMAS ARITMÉTICOS SON PROBLEMAS DE ENCONTRAR UNA CANTIDAD A PARTIR DE UNOS DATOS DADOS. EN TODO PROBLEMA HAY DOS PARTES: LA INFORMATIVA (LOS DATOS) Y LA PREGUNTA.

Caso Francisca:

Se le presentan los siguientes problemas:

"Luis tiene 9 canicas y Pedro 7 canicas, se ponen a jugar y Pedro le gana las 9 canicas a Luis. Con cuántas canicas quedó Pedro?" y

"Luis tiene 9 canicas y Pedro tiene 7 canicas, cuántas canicas tienen entre los dos?"

A la pregunta

¿cual es la diferencia que hay entre los dos problemas?

Francisca responde:

La pregunta es la diferencia. La pregunta prácticamente la... en la primera la pregunta es cuántas canicas tiene Pedro y en la segunda cuántas tienen entre los dos?

Francisca encuentra la diferencia en la pregunta que se hace en cada problema y sabe que ambos se resuelven con una suma entre las dos cantidades involucradas. Esta idea es probablemente la que usa cuando trata de explicar la diferencia entre los problemas, al tiempo que es una idea que probablemente provenga de su experiencia como alumna así como de su experiencia profesional, ya que el esquema de enseñanza usado en algunos textos es el que corresponde a analizar los problemas tomando como ejes las respuestas a las preguntas : ***¿qué tenemos ?, ¿qué nos preguntan ? y ¿cuál es la operación para resolver la pregunta ?***.

Esta forma de análisis del problema potencia el olvido del contexto tanto situacional como sintáctico de los mismos, a la vez que nos permite conjeturar que esta idea primitiva se constituye en un obstáculo para comprender cómo las matemáticas escolares pueden servir de una herramienta potente de modelización (construcción) de la realidad.

En este tipo de comprensión los problemas parecen pretextos para "hacer" operaciones y no como posibilidades para que los niños generen sentido y construyan conceptos más ricos y sutiles complejizando así tales operaciones.

4.3 LOS ALGORITMOS.

Para la entrevistas de tipo II se tomaron como base las repuestas dadas en cuanto referían a los conceptos involucrados en el sistema de numeración decimal, los cuales se encuentran implícitos en los algoritmos de la suma, la resta, la multiplicación y la división.

Luego de realizar el análisis descriptivo de las repuestas obtenidas, para cada uno de los casos presentados (suma, resta, multiplicación, división), se determinaron de acuerdo al tipo de respuestas obtenidas varios niveles para reagrupar a los profesores, dichos niveles fueron :

N1	Todas las explicaciones se basan en razonamientos de tipo sintáctico
N2	En alguna de las explicaciones usa en concepto de agrupamiento
N3	En alguna de las explicaciones usa en concepto de valor posicional

N4 En alguna de las explicaciones usa en conceptos de agrupamiento y valor posicional

Luego de ello se procedió a seleccionar al azar un profesor de los participantes en este estudio para que fuera entrevistado. Sólo se entrevistaron a tres profesores que estaban clasificados en N2, N2 y N3.

Del análisis de contenido usando las respuestas dadas a la parte II del cuestionario se puede deducir que existen dos formas predominantes de razonamiento entre los profesores del estudio. Estos son los razonamientos centrados en lo sintáctico y aquellos que muestran una vinculación no muy elaborada - pero sí presente - entre lo conceptual y lo procedimental.

4.3.1 *EXPLICACIONES BASADAS EN RAZONAMIENTOS SINTÁCTICOS :*

Caso Ana:

Con relación al valor posicional o relativo de las cifras se hace mención a lo que denominamos casillas, que en nuestro medio corresponden a gráficos como el siguiente

centenas	decenas	unidades
2	5	4

para señalar que hay 2 centenas, 5 decenas y cuatro unidades. Este tipo de razonamiento se encuentra en explicaciones como las siguientes :

"en cuanto a la posición es el sitio que ocupa cada número, la ubicación en forma vertical uno debajo del otro, de acuerdo a la cantidad de dígitos. En las casillas se pone un número, cuando se tiene 10 se pone un 0 y se pasa el 1 a la casilla de las decenas... y lo mismo si se pasa de 99, se pasa un 1 a la casilla de las centenas... cuando uno va a ubicar un número en las casillas se les dice que solamente un número puede ir en cada casilla"

En lo concerniente al agrupamiento usa la conformación de grupos para darle los nombres a las casillas y para encontrar las unidades, decenas y centenas en cada número :

"generalmente uno trabaja con el niño que las unidades son hasta 9, cuando se completa un 10 se coloca 1 en las decenas.. cuando ya tenemos por ejemplo el número 99, cuántos grupos de 10 podemos hacer? 9, pero cuando

por ejemplo tenemos 100 entonces qué pasa ? no podemos colocar el 100 o sea hay dos casillas pero ahí hay 3 números, entonces qué hacemos ? explicamos que las centenas son grupos de 100 elementos entonces qué pasa ? cuántos grupos de 100 hay ? Hay un sólo grupo de 100 y lo completamos entonces con los dos ceros... esos ceros serían que hay 10 decenas o sea una centena son 100 unidades, ahora sí vamos a hacer con los 100 elementos grupos de a 10 cuántos grupos podemos hacer ? salen 10 grupos de a 10, y sí vamos a contar uno por uno, cuántos unidades hay ? pues hay 100"

A pesar que parece entender la teoría de agrupamiento en lo relativo a la composición y descomposición de unidades de orden superior en unidades de orden inferior o viceversa, este conocimiento no se pone de manifiesto. Cuando explica por qué en cada casilla sólo va un número dice:

"bueno así... o sea.. por lo menos es lo que a mi me enseñaron"

Un hecho importante de resaltar es **el valor asignado al cero**, en cuanto el cero es un dígito importante en todo sistema de valor posicional y por lo tanto en la escritura decimal de los números. Así, puede verse que el valor que Ana asigna al cero cuando se refiere a los ceros en el , número 7004, dice:

"el cero no tiene nada, pero como está en la casilla de las centenas el cero es un grupo de 100, el cero ocupa el grupo de 100... el cero le prestó al otro...."

Este tipo de explicación muestra la confusión al asignarle al cero valor dentro de las casillas, según la posición que ocupe, pero al mismo tiempo reconoce que el cero no tiene valor. Ana manifiesta su desconocimiento sobre el valor del cero como numeral que ocupa un lugar en una cifra (representada en el sistema decimal) que significa la ausencia de unidades de ese orden.

Analizado las explicaciones del algoritmo de la suma en lo relativo al uso que hace de estos conceptos (valor posicional y agrupamiento) es consistente con el tipo de conceptos expresados, cuando al explicar el error del niño dice :

"primero la ubicación pues el niño sí la hizo o sea tiene en cuenta la posición del número o sea uno debajo del otro, unidades, decenas y centenas, ...el niño suma bien 9+1 da 10 pero al colocar el número el niño no sabe que ahí no se pueden colocar dos números en la misma casilla entonces es cuando yo... le digo cuántos decenas hay ? hay una decena y se coloca el cero y la decena en la casilla de decenas.... "

Al dar explicaciones para el algoritmo de la multiplicación en lo que respecta a la explicación del desarrollo de la multiplicación, muestra conocer las reglas sin que para ello use el valor posicional y el producto de las diferentes unidades de orden involucradas en los números

"empezamos a multiplicar por las unidades, o sea porque primero se van a trabajar con las unidades y se ubica en la parte de las unidades, luego con las decenas y se ubica en la parte de las decenas o sea en el segundo lugar de las casillas, o sea por qué se empieza por las unidades ? la razón no se la puedo dar..."

en relación a la teoría del agrupamiento implícita en el algoritmo de la multiplicación, en lo que se refiere a la multiplicación de un número de dos cifras por otro de tres (como es el ejemplo que se colocó), es manifiesto el poco uso de dicha teoría. Por ejemplo, al justificar porqué se "corre" un lugar a la izquierda al realizar la segunda fila del algoritmo se tienen las siguientes respuestas :

la multiplicación es :

```
  724
  x53
 2172
3620
```

E : el número 2172 es de unidades, ¿el número 3620 es decenas ? o es 3620 unidades ?
A : es 3620 unidades.
E : pasémolo a las casillas (se dibujan las casillas y se colocan los números como aparece a continuación)
A : umcdu

```
 2 1 7 2
 3 6 2 0
```

E : se deberían colocar como número de unidades, entonces como se explica que se sume

```
 umcdu
  2 1 7 2
3 6 2 0
```

A : sinceramente no sé..

Al explicar el algoritmo de la división, pierde el valor posicional y todo lo convierte a unidades

E : este 70 son centenas y el 23 son unidades, luego cuando tienes que 23 entre 70 da 1 y queda 1, ese uno que queda qué son unidades, decenas, centenas?

.....

A : como 23 x 3 son 69 y 70 - 69 son 6 decenas y me sobraba 1, entonces ese 1 son unidades.

.....

E : estos 12 qué son?
A : unidades
E : siempre se convierten en unidades?
A : Sí

En términos generales podemos concluir que en este caso se presenta un razonamiento de tipo sintáctico en la medida en que sus razonamientos se basan en criterios desvinculados de los conceptos involucrados, con lo cual se presenta un conocimiento de tipo memorístico y repetitivo de unas reglas que "funcionan". Sus explicaciones son de tipo "intuitivo" o provienen de la experiencia no reflexiva en el sentido de que tanto su enseñanza como su aprendizaje han sido "así".

"es que así es, porque así me lo enseñaron".

4.3.2 EXPLICACIONES BASADAS EN RAZONAMIENTOS EN LOS CUALES SE VINCULA EL CONOCIMIENTO CONCEPTUAL CON EL PROCEDIMENTAL DE TAL MANERA QUE LOS CONCEPTOS MATEMÁTICOS DE VALOR POSICIONAL Y AGRUPAMIENTO ENTRAN A EXPLICAR LOS ALGORITMOS.

CASO LUCY

En lo que se refiere al valor posicional Lucy manifiesta su conocimiento y uso de este concepto cuando reconoce que existen unidades de diferente orden

"el sistema de numeración siempre se ha formado de derecha a izquierda, siempre de menor a mayor... los niños saben que es imposible que 18 sea al contrario (81).. ellos dicen por ahí no empieza y que eso no es así"...

para la teoría del agrupamiento refleja un conocimiento de lo que significan las relaciones entre las unidades de diferente orden, aunque no manifiesta conocer los procedimientos multiplicativos que existe en la construcción de los números, no hace referencia a la base 10 ni a las potencias de dicha base.

"cuando se habla de unidades, decenas y centenas generalmente los niños empiezan por 10 unidades son iguales a una decena ... cuando pasa a unir 10 decenas pasa a formar una centena y ellos van ubicando en la tabla de las casillas unidades, decenas y centenas"

también hace referencia al desagrupamiento hablando para ello de la "reversa"

"... se cambia una decena en 10 unidades ..."

Para la explicación del uso del cero como parte integrante de un número manifiesta su conocimiento acerca del valor del cero cuando inicia una cifra como diferente al valor del cero cuando es el valor de unidades intermedias de un número dado

" E : en 004 cuánto vale el 0 ?
L : el cero a la izquierda no vale nada
E : y en 7004 ?
L : a no ahí sí vale el cero, porque aquí no está a la izquierda de ninguna cantidad, está en medio, entonces aquí tiene un valor el cero"

En relación a las explicaciones sobre el algoritmo de la suma; Lucy conociendo la teoría del agrupamiento en lo relativo a los valores que toman las unidades de orden superior, la utiliza para saber como se conforma una decena, pero su razonamiento conceptual incluye cuestiones de tipo mecánico como es el uso de las "casillas" para indicar la posición de los numerales que conforman el número que resulta de realizar la suma :

".. le diría que 9+1=10, y que 10 unidades = 1 decena y lo colocaría dentro de la casilla... Para esta explicación utilizaría el ábaco para cambiar las 10 unidades por una decena y así sucesivamente..."

En las explicaciones sobre la resta :Lucy manifiesta un claro conocimiento de los desagrupamientos entre las unidades (sucesivas) de orden superior a orden inferior (en grupos de 10) y lo pone en juego cuando habla de prestar :

"conseguimos prestado de alguien, las decenas no tienen, cero, las centenas tampoco entonces el 7 mil presta una unidad, nos presta 10 centenas esta presta una a las decenas y quedan 9 centenas y las 10 decenas prestan una decena a las unidades y quedan 9 decenas entonces la decena que son 10 unidades más 4 son 14"

En la explicación sobre la multiplicación y la razón por la cual se "corre" una cifra a la izquierda, Lucy manifiesta claramente una posición ambigua frente al uso de lo conceptual en relación a el producto entre unidades de diferente orden, porque aunque sabe por qué se corre una cifra a la izquierda sin embargo lo justifica desde su aprendizaje

" ... generalmente al niño se le dice que debe correr un lugar hacia la izquierda... es lo que uno aprendió y todavía se maneja... por que este es el resultado de las decenas se coloca iniciando debajo de las decenas ..es como multiplicar por 50 unidades y no es necesario colocar el 0 "

(Este comentario hace relación a los números 3620**0** en la multiplicación, colocamos el cero de negrillas para indicar el cero al cual ella se refiere como que no es necesario)

```
  724
  x53
 2172
36200
```

En cuanto a la división, Lucy muestra el escaso uso de los conceptos y se traslada a un razonamiento de tipo procedimental, en donde se le pierde el valor de las unidades de orden superior y las conversiones entre ellas

L :".. si se toman 23 como unidades, también se toman 70 como unidades"
E : " o sea que 70 centenas dejan de ser centenas para convertirse en 70 unidades ?
L : pues si .... en esto no había pensado, no me había hecho esa pregunta, no sabría decir ....en este momento si se convierten en unidades simples para realizar la división porque es una división más grande..."

con relación al cero del cociente muestra su conocimiento de que ese debe ser una decena

"tiene que ser otro valor, o sea pienso que depende del resultado, debe ser como una decena.."

Al terminar la división dice :

"el cero aquí es de decenas !"

Como una conclusión parcial de este apartado podríamos decir que los profesores del estudio manifiestan un tipo de razonamiento muy proclive a la ausencia del conocimiento de los conceptos de valor posicional, teoría de agrupamiento y sistema de numeración, a la vez que las explicaciones sobre los algoritmos demuestran el desconocimiento de "por qué funcionan". Parece ser que usan, algunos con mayor éxito que otros, los conceptos mencionados sin que parezca explícito su reconocimiento de la existencia de ellos como conceptos matemáticos importantes.

Al respecto, parecen asumir la posición que Williams, citado por Dickson (1991), señala para los niños estaudinenses:

> *" Williams (1963) afirma que es probable que el niño "medio" pierda la pista de lo que está ocurriendo en éstos mecanismos calculatorios tan depurados. Sosteniendo, así mismo, que estos métodos promueven lo que él denomina "pasividad cognitiva" ; es decir, es improbable que el niño se detenga a reflexionar en el cómo y el porqué del funcionamiento de un determinado procedimiento si es esa la única opción que tiene disponible. Y aunque tenga una limitada comprensión de los procedimientos, éstos pueden llegar a hacerse tan mecánicos que pierda de vista su comprensión inicial y no alcance a desarrollar ninguna comprensión ulterior. A su vez, esta tendencia a no interpretar los pasos que comportan los procedimientos típicos del cálculo puede ocasionar usos inadecuados, ineficientes y chapuceros de tales técnicas. También es probable que provoquen fracaso, aburrimiento, ansiedad y una actitud contraria hacia las matemáticas" (pág. 272, 273).*

5. CONCLUSIONES

A lo largo de los capítulos 3 y 4 hemos venido desarrollando un conjunto de conclusiones referidas a los objetivos de esta investigación, por tal razón en estas páginas solo haremos mención de las caracterizaciones más relevantes que nos permitieron construír la propuesta de programa de formación.

Un propósito fundamental de nuestra investigación fue allegar información significativa sobre las concepciones que los profesores de primaria poseen acerca de los modelos de problemas de estructura aditiva y multiplicativa, así como el establecimiento de relaciones entre el conocimiento conceptual y el conocimiento procedimental, involucrados en los algoritmos de las operaciones aritméticas elementales. Adicional a este propósito se intentaba describir los modelos primitivos de los conceptos de las cuatro operaciones: sumar, restar, multiplicar y dividir, que los profesores poseen y ponen en juego a la hora de interpretar tanto los problemas como los algoritmos.

Este trabajo, sin pretender generalizaciones a la población de profesores de la básica primaria, si permite conocer algunas tendencias y características del conocimiento de contenido pedagógico que poseen los profesores, conocimiento que puede ser usado para preveer elementos básicos a tener en cuenta a la hora de diseñar los programas de formación permanente. De cualquier forma, ampliar nuestro conocimiento sobre las características de las concepciones que el grupo de profesores posee sobre los temas abordados constituye para nosotros, como formadores de profesores, un objetivo importante que motiva el desarrollo de este tipo de investigaciones.

Con relación al primer objetivo "caracterizar las concepciones del grupo de profesores que intervienen en este estudio, acerca de las operaciones aritméticas: suma, resta, multiplicación y división", hemos encontrado que las ideas subyacentes a las explicaciones dadas corresponden a lo que denominamos razonamiento de tipo estático (relaciones entre elementos simultáneos de la realidad) en la medida en que utilizan el modelo de conjuntos disyuntos para su conceptualización. A continuacion se describen, brevemente, estos conceptos para cada una de las operaciones:

La suma es **unir y** la resta **quitar** correspondiente con un modelo de representación que utiliza un conjunto total compuesto de dos subconjuntos disyuntos. Las estrategias de solución están basadas en el conteo que puede corresponder a las operaciones de unión (diferencia) de conjuntos.

La multiplicación se corresponde con la idea **de suma repetida** de sumandos iguales y la división con la idea de **reparto** de una cantidad que representa un todo a ser dividido en partes iguales. Las estrategias de solución se sustentan en esquemas de conteo actuando sobre colecciones totales o sobre algunas de sus partes. Por ejemplo, se toma cada conjunto como un todo a contar o un todo previamente contado, información que sin embargo al reunirlos puede o no tenerse en cuenta dado que, muchas veces, proceden por conteo a partir de uno, para desde allí realizar las uniones de conjuntos y hacer la suma total. De la misma manera sucede con la división, se usa la estrategia de resta, de grupos de un mismo número de elementos, y luego por conteo (quitar) se soluciona el problema.

Unido a estas concepciones encontramos que las estrategias de enseñanza usadas corresponden a las secuencias en las que las operaciones se conciben, para aprender a restar es necesario saber sumar; para presentar el producto como sumas reiteradas es indispensable tener un buen manejo de la suma; para aprender a dividir es necesario saber restar. En procesos más avanzados se presenta la multiplicación usando las tablas y los algoritmos de división que incluyen las operaciones suma, resta y multiplicación. Esta forma de actuación didáctica es uno de los aspectos que se espera cuestionar en un programa de formación que pretenda que los maestos construyan referentes teóricos (matemáticos y didácticos) explícitos, que orienten su labor profesional.

En cuanto al objetivo 2 "Describir los tipos de argumentos que utilizan para justificar los procedimientos algorítmicos involucrados en las cuatro operaciones aritméticas", podemos decir que los profesores presentan en su mayoría un desconocimiento de los conceptos de valor posicional y agrupamiento, lo que hace que sus explicaciones se basen en razonamientos de tipo sintáctico. Este tipo de razonamiento se convierte en un buen mecanismo para "enseñar" los algoritmos de las cuatro operaciones pero a su vez, desde nuestro punto de vista, es un obstáculo para que ellos asuman nuevas perspectivas de enseñanza en la cual la construcción de lo conceptual y lo significativo, se conviertan en los propósitos de la enseñanza de las matemáticas escolares, a nivel de la primaria.

El objetivo 3 "analizar las relaciones entre la compresión de diferentes aspectos relativos a las nociones aritméticas en cuestión y el uso de los modos de representación que pueden usar", como ya lo dijimos en el apartado correspondiente al objetivo 1, las representaciones utilizadas son muy escasas y esto, es desde lo que concebimos como el conocimiento de contenido pedagógico, uno de los conocimientos que los profesores deben poseer, puesto que para elaborar secuencias de enseñanza que pretendan un aprendizaje significativo, los diferentes modos de representar conceptos se constituyen en herramientas útiles y necesarias para dotar de significado a los conceptos estudiados. En particular, para los conceptos abordados en este trabajo se requiere que el profesor comprenda las diferentes clasificaciones de los problemas aritméticos elementales, en la medida en que le permite abordar diferentes situaciones que al ser analizadas desde el contexto, dan sentido a los números que aparecen en ellas. En cuanto a los algoritmos podemos decir que el uso de otros modos de conceptualización le permitirá usar por ejemplo, instrumentos didácticos como el ábaco ó las regletas que posibilitan la construcción de los diferentes sistemas de numeración, en particular, el sistema de numeración decimal.

Un producto de esta investigación es el diseño de un programa de formación permanente para profesores de primaria, que involucre los temas tratados en la investigación, ello con el convencimiento de que estos temas forman parte del conocimiento de contenido pedagógico que todo profesor debe conocer con el fin de que convvierta su labor en una profesión de carácter reflexiva e investigativo. Así mismo un resultado de esta investigación lo constituye el contribuir a validar instrumentos que posibiliten el estudio y comprensión de los conocimientos previos de los participantes de los programas de formación a la vez que posibilitan a los formadores de profesores la construcción de hipótesis de progresión del conocimiento profesional.

BIBLIOGRAFIA BASICA

Azcárate, P. (1994). Presupuestos iniciales para un trabajo de investigación sobre formación del profesorado. En Revista Investigación en la Escuela No. 22. págs. 84-89.

Azcárate, P. (1994). La naturaleza de la matemática escolar: problema fundamental de la didáctica de la matemática. En Revista Investigación en la Escuela No. 24. págs. 78-88.

Blanco, L. (1996) : Aprender a enseñar matemáticas : Tipos de Conocimiento. En J. Giménez, S. Llinares y V. Sánchez (Eds.) *El Proceso de llegar a ser un profesor de Primaria. Cuestiones desde la educación matemática.* Colección Mathema. Comares. Granada.

Carpenter T, Fennema E. , Peterson P y Carey D. (1988) Theachers pedagogical content knowlodge of estudents¨problem solving in elementary arithmetic. Journal for Research in mathematics education, 19 (5).

Castro E. , Rico, L. y Castro, E. (1988) Números y Operaciones. Editorial Síntesis. Madrid.

Castro E. , Rico, L. y Castro, E. (1995) Estructuras aritméticas elementales y su modelización. Una empresa docente - Grupo Editorial Iberoamérica. Bogotá.

Dickson, L. Brown, M y Gibson, O.(1991) El aprendizaje de las matemáticas. Labor. M.E.C. Madrid.

Garcia, M (1997) Conocimiento profesional del profesor de matemáticas. El concepto de función como objeto de enseñanza aprendizaje. GIEM. Universidad de Sevilla.

Greer,B. Mulltiplication and division as models of situations. En Grouws,D. (1992) (Eds) Handbook of research on mathematics teaching and learning. Macmillan.

Guershon H y Confrey J (1994) (Edts) The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics. State University of New York Press.

Hierbert, J. Behr, M. (1988) (Edts) Number concepts and operatioooooooons in the Middle grades. Vol2. National Council of teachers of mathematics. Lawrence Erlbaum Associates.

Labinowicz (1985) Learning from children. Capítulo 2 : Linstening to children : the interview method. Addison Wesley Pb.Co

Leung, S y Silver E. (1997) The role of task format, mathematics knowledge, and creative thinking on the aritmetic problem posing of prospective elementary schoool teachers. Mathematic education research journal.

Llinares, S. y Sánchez, V. (Eds.) Teoría y Práctica en Educación matemática. Alfar. Madrid.

Llinares, S. (1991). La naturaleza de la comprensión de las nociones matemáticas. Variable en la formación de Profesores de Matemáticas. En C.Marcelo y otros (Eds). *El estudio de casos en la formación del profesorado y la investigación didáctica*. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Sevilla.

Llinares, S. (1992).Los mapas cognitivos como instrumento para investigar las creencias epistemológicas de los profesores. En C. Marcelo. La investigación sobre formación del profesorado : métodos de investigación y análisis de datos. Editorial Cincel. Universidad de Sevilla.

Llinares,S. (1993) Aprender a enseñar matemáticas. Conocimiento de contenido pedagógico y entornos de aprendizaje. En L. Montero y J.M.Vez (eds) *Las didácticas específicas en la formación del profesorado*. Tórculo Ediciones. Santiago.

Llinares, S. , Sánchez, V. y Garcia, M. (1994): Conocimiento de contenido pedagógico del profesor. Tareas y modos de representación para las fracciones. Revista de Educación No. 304. Centro de Publicaciones del Ministerio de Educación y Ciencia. Madrid.

Llinares, S. Conocimiento profesional del profesor de Matemáticas: conocimiento, creencias y contexto en relación a la noción de función. Mimeo. Conferencia presentada en el IV Encontro de Investigaçao em Educaçao Matemática. Luso, Portugal, 27-29 de Abril de 1995.

Llinares, S. (1996) : Contextos y aprender a enseñar matemáticas : El caso de los estudiantes para profesores de primaria. En J. Giménez, S. Llinares y V. Sánchez (Eds.) *El Proceso de llegar a ser un profesor de*

*Primaria. Cuestiones desde la educación matemática.*Colección Mathema. Comares. Granada.

Llinares, S y Sánchez, V. (1996) : Comprensión de las nociones matemáticas y modos de representación. El caso de los números racionales en estudiantes para profesores de Primaria. En J. Giménez, S. Llinares y V. Sánchez (Eds.) *El Proceso de llegar a ser un profesor de Primaria. Cuestiones desde la educación matemática.*Colección Mathema. Comares. Granada.

Maza, C. (1989) Números y Operaciones. Editorial Síntesis. Madrid.

Maza, C. (1991) Enseñanza de la Suma y la Resta.. Editorial Síntesis. Madrid

Maza, C. (1992) Enseñanza de la Multiplicación y la División. Editorial Síntesis. Madrid

National Council of Teachers of Mathematics (1989). Curriculum and evaluation standards. NCTM. Reston.

National Council of Teachers of Mathematics (1989). Profesionals standards for teaching mathematics. NCTM. Reston.

Porlan, R. (1990). Constructivismo y escuela. Diada. Sevilla.

Porlan, R. y Martin, J. (1991). El diario del profesor. Diada. Sevilla.

Puig. L. y Cerdán, F. (1988) Números y Operaciones. Editorial Síntesis. Madrid.

Revista Educación y Cultura. Fecode. Bogotá.

Revista Educación y Ciudad. Instituto para la Investigación educativa y el desarrollo pedagógico, IDEP. No. 1. 1997.

Vasco, C. (1990) Didáctica de las Matemáticas. Area de Currículo. MEN.Bogotá.

Vasco, C. Villaveces, J, y otros. (1995) Informe Misión Ciencia, Educación y Desarrollo. Colciencias. Bogotá.

ANEXO 1

SUJETOS	PROB1 S	I	PROB 2 S	I	PROB 3 S	I	RAZONES R	PROB 1 M	I	PROB 2 M	I	PROB 3 M	I	RAZONES R
E1	21	1	22	3	1	1	**4**	7	2	7	3	7	3	**1**
E2	1	1	3	2	6		**6**	22	1	21	2	6		**6**
E3	1	1	21	1	21	1	**5**	22	1	12	1	22	1	**5**
E4	1	2	1	1	22	3	**4**	12	1	12	2	22	3	**1**
E5	1	1	7		21	1	**7**	7	2	7	2	22	1	**6**
E6	21	1	1	1	7		**1**	22	1	12	1	12	3	**1**
E7	1	1	1	1	21	1	**3**	22	1	7	2	7	3	**4**
E8	1	1	21	3	7		**4**	41	3	7		12	1	**6**
E9	21	1	21	1	4	2	**1**	22	1	7		4	1	**1**
E10	5	1	21	1	7		**1**	12	1	4	1	4	3	**3**
E11	4	2	1	1	21	1	**1**	5		4	2	22	1	**1**
E12	1	1	22	2	21	3	**1**	12	1	22	2	4	2	**4**
E13	1	1	21	2	22	3	**4**	22	2	22	2	22	1	**4**
E14	21	1	22	1	7		**1**	7	1	7		22	1	**1**
E15	1	1	1	1	7		**1**	7	2	7		7		**6**
E16	21	1	4	2	1	1	**2**	12	1	3	1	7	1	**3**
E17	5	1	1	1	4	2	**7**	7		7		7		**7**
E18	21	1	3	3	22	2	**5**	3	1	12	1	7	1	**5**
E19	1	1	7		1	3	**2**	21	1	7		11	1	**6**
E20	5	1	7		4	3	**6**	4	2	5	2	7		**6**
E21	1	1	1	1	6		**6**	5	1	4	1	6		**7**
E22	21	1	5	1	5	1	**6**	4	1	12	1	21	1	**7**

ANEXO 1

E23	1	1	1	1	1	1	**3**	22	1	12	1	21	2	**1**
E24	3	2	21	1	3	2	**4**	21	1	7		6		**7**
E25	21	1	1	1	1	1	**4**	12	1	12	1	22	1	**2**
E26	4	1	7	1	4	1	**6**	4	1	7		7		**6**
E27	4	2	7		7		**5**	4	2	22	3	7		**6**
E28	3	2	21	1	1	1	**5**	12	3	22	2	22	3	**5**
E29	1	1	22	2	3	3	**5**	22	2	12	3	12	2	**5**
E30	4	2	1	3	1	1	**1**	5	3	7		22	1	**1**
E31	21	1	1	2	3	3	**1**	22	2	22	1	3	1	**2**
E32	1	1	22	3	1	1	**5**	12	1	12	1	21	1	**2**
E33	1	2	1	1	1	1	**4**	12	1	21	1	12	2	**4**
E34	1	1	1	1	1	1	**3**	22	1	11	1	12	2	**5**
E35	21	1	21	1	5	1	**1**	7	3	5	1	3	1	**1**
E36	1	1	1	1	1	1	**2**	11	1	12	1	22	1	**2**
E37	1	1	21	1	1	1	**2**	7		12	1	22	1	**2**
E38	21	1	1	1	1	1	**3**	22	1	22	1	22	1	**4**
E39	1	1	1	3	1	1	**2**	7		6		6		**6**
E40	21	1	21	1	21	1	**3**	12	1	22	1	22	1	**3**
E41	1	1	1	1	1	1	**2**	22	1	12	1	22	1	**2**
E42	21	1	21	2	1	1	**2**	12	1	11	1	12	1	**2**
E43	1	1	1	2	4	2	**2**	12	1	12	1	21	1	**2**
E44	21	1	1	1	21	1	**1**	22	1	12	1	22	1	**1**
E45	1	1	1	3	7		**4**	22	1	12	1	7	3	**4**
E46	1	1	21	1	1	1	**2**	22	1	12	1	3	1	**2**
E47	21	1	22	2	1	1	**5**	12	1	22	1	12	1	**3**

ANEXO 1

E48	1	2	1	1	1	1	**1**	22	1	12	1	4	1	**6**
E49	1	1	3	1	3	2	**4**	12	1	22	2	12	1	**1**
E50	1	1	1	1	4	2	**6**	12	1	12	2	7		**6**
E51	4	3	4	2	4	1	**4**	4	3	4	2	4	3	**4**
E52	4	2	4	3	7		**1**	4	1	4		4		**3**
E53	21	1	5	1	5	1	**6**	4	1	22	1	4	2	**6**
E54	1	1	21	1	1	1	**2**	22	1	22	1	22	1	**2**
E55	21	1	1	1	5	1	**1**	7	2	22	1	12	1	**1**
E56	21	1	3	3	1	1	**2**	22	1	22	1	12	1	**3**
E57	1	1	21	1	1	1	**3**	4	2	12	1	4		**2**
E58	1	1	4		4		**2**	3	1	22	1	4	1	**3**
E59	21	1	21	1	1	1	**2**	12	1	22	1	22	1	**2**

ANEXO 2

SUJETOS	SUMA	RESTA	MULTIPLIC.	DIVISION	NIVEL
E1	4	4	3	2	**2**
E2	3	2	2	2	**0**
E3	3	3	5	3	**3**
E4	6	4	5	3	**4**
E5	4	3	3	3	**2**
E6	3	2	3	2	**1**
E7	3	3	3	3	**1**
E8	4	4	3	3	**2**
E9	1	1	1	1	**0**
E10	5	4	5	2	**3**
E11	4	2	5	2	**4**
E12	4	2	4	2	**2**
E13	1	1	1	1	**0**
E14	5	5	5	2	**4**
E15	1	1	1	1	**0**
E16	4	4	4	1	**2**
E17	4	3	1	1	**2**
E18	4	4	4	1	**2**
E19	3	3	2	2	**1**
E20	3	1	1	1	**0**
E21	4	2	2	2	**2**
E22	3	1	3	1	**1**
E23	3	3	2	2	**1**
E24	4	3	3	1	**2**
E25	4	2	4	2	**2**
E26	4	2	4	2	**2**
E27	4	1	3	2	**2**

ANEXO 2

E28	4	4	4	2	**2**
E29	4	3	3	3	**2**
E30	4	3	3	3	**2**
E31	6	6	2	3	**4**
E32	4	3	3	3	**2**
E33	4	5	5	3	**4**
E34	3	2	2	3	**1**
E35	3	3	2	2	**1**
E36	6	4	5	3	**4**
E37	4	4	3	3	**2**
E38	5	3	3	2	**3**
E39	5	1	3	2	**3**
E40	5	5	5	2	**3**
E41	3	3	2	2	**1**
E42	5	5	5	3	**3**
E43	5	4	4	3	**2**
E44	4	4	5	5	**4**
E45	4	4	5	2	**4**
E46	6	3	3	3	**4**
E47	5	5	4	2	**4**
E48	4	4	3	3	**2**
E49	4	4	4	3	**2**
E50	4	1	1	2	**2**
E51	5	4	2	5	**4**
E52	4	3	3	3	**2**
E53	4	3	4	3	**2**
E54	2	4	2	2	**2**
E55	4	4	3	3	**2**
E56	3	3	3	2	**1**
E57	4	4	4	3	**2**
E58	5	5	2	2	**3**
E59	4	3	4	3	**2**