



511.5071
6651a.
of

una empresa docente®

Instituto para la Investigación Educativa
y el Desarrollo Pedagógico - IDEP



•000312•

EL ANÁLISIS DE CONTENIDO MATEMÁTICO COMO
HERRAMIENTA PARA LA CONSTRUCCIÓN DE
MODELOS PEDAGÓGICOS. EL CASO DE LA FUNCIÓN
CUADRÁTICA. FASE ANÁLISIS DE CONTENIDO

Auncho → autorizar a Alel

Pedro Gómez
Cristina Carulla

8002-70-710

Octubre de 1999

853000



UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
APARTADO AÉREO 4976
BOGOTÁ - COLOMBIA
TELÉFONOS: 2 84 99 11 - 2 82 40 66 EXT. 2717

Inu. Idep
#268

Contenido

Introducción	1
Concepciones de los profesores	5
Mapas conceptuales	7
Sistemas de representación	10
Función cuadrática	14
Problema	26
Estímulo y población	28
Recolección, codificación y análisis de la información. Primeros instrumentos	33
Sistemas de representación, mapas conceptuales y función cuadrática	40
Caracterización de los mapas	44
Análisis inter-grupal	47
Análisis intra-grupal y triangulación	49
Conclusiones	61
Referencias bibliográficas	65
Anexos	66

Indice de tablas

1. Ejemplo de codificación con análisis de eventos _____	37
2. Conteo de sistemas de representación (grupo 1) _____	38
3. Categorías e indicadores del análisis por categorías _____	38
4. Ejemplo de codificación _____	39
5. Atributos, indicadores y códigos _____	44
6. Evolución de producciones de los profesores _____	47
7. Mapas del grupo 1 _____	49
8. Sistemas de representación y conexiones. Grupo 1 _____	50
9. Mapas del grupo 2 _____	51
10. Sistemas de representación y conexiones. Grupo 2 _____	52
11. Mapas del grupo 3 _____	54
12. Sistemas de representación y conexiones. Grupo 3 _____	54
13. Mapas del grupo 4 _____	56
14. Sistemas de representación y conexiones. Grupo 4 _____	56
15. Mapas del grupo 5 _____	58
16. Sistemas de representación y conexiones. Grupo 5 _____	59

Índice de figuras

1. Estructuras de sub-mapas _____	9
2. Representaciones _____	38
3. Conexiones _____	38
4. Estructura de mapas posibles _____	45
5. Sistemas de representación y conexiones. Grupo 1 _____	50
6. Sistemas de representación y conexiones. Grupo 2 _____	53
7. Sistemas de representación y conexiones. Grupo 3 _____	55
8. Sistemas de representación y conexiones. Grupo 4 _____	57
9. Sistemas de representación y conexiones. Grupo 5 _____	59

Introducción

El estudio que se reporta aquí surgió de varias experiencias que los autores tuvieron en programas de formación permanente de profesores de matemáticas. En estos programas hemos venido utilizando los mapas conceptuales, los sistemas de representación y el análisis didáctico como herramientas didácticas cuya utilización por parte de los profesores tiene como propósito hacerlos más conscientes de la complejidad del contenido matemático a enseñar, de la complejidad del proceso de aprendizaje de ese contenido matemático y de la complejidad del proceso de enseñanza. No obstante, aunque al finalizar los programas de formación teníamos la sensación de que éstos tenían éxito con respecto a los objetivos expuestos arriba, no podíamos asegurar la validez de esos resultados. Por esa razón, decidimos diseñar un proyecto de investigación en el que se explorara de manera sistemática el papel que pueden jugar estas herramientas didácticas en las concepciones de los profesores, en particular en su consciencia de la complejidad del contenido matemático a enseñar, de su aprendizaje y de su enseñanza.

Reunimos a un grupo de 30 profesores de matemáticas de secundaria de colegios oficiales del Distrito. Algunos de estos profesores habían ya participado en uno o más de nuestros programas de formación permanente de profesores. Otros habían participado en otros programas de formación permanente ofrecidos por "una empresa docente" con esquemas diferentes de los mencionados arriba y otros trabajaban con nosotros por primera vez. Organizamos los 30 profesores en grupos de por lo menos dos y máximo seis profesores y desarrollamos un esquema de interacción estructurado en tres módulos: análisis de contenido, análisis de instrucción y análisis cognitivo. Cada módulo, que duró un mes, estaba compuesto de un seminario inicial, una interacción intermedia y un seminario final. En el seminario inicial nosotros presentábamos las ideas básicas del propósito del módulo y las tareas que esperábamos que ellos realizaran durante el mismo. En la segunda mitad de ese seminario los grupos de profesores realizaban un primer borrador de esa tarea. Dos semanas más tarde, cada uno de los grupos nos visitaba en nuestras oficinas y realizábamos una entrevista individual por grupo en la que el grupo nos presentaba el avance de su trabajo y nosotros reaccionábamos al mismo. Dos semanas más tarde nos reuníamos en el seminario final en el que cada grupo presentaba el resultado final de su trabajo a los compañeros. De esta forma, recogimos, para cada grupo tres producciones (seminario inicial, entrevista, seminario final) por módulo. En total, nueve producciones.

Estas producciones tuvieron a la función cuadrática como tema matemático. Las tareas de los profesores consistieron en producir el análisis de contenido (la descripción de la función cuadrática como contenido matemático a enseñar), el análisis de instrucción (la manera como este tema se ha enseñado) y el análisis cognitivo (la descripción de la manera como este tema se aprende). Estas descripciones debían hacerse utilizando una herramienta de análisis y organización, por un lado, y una herramienta de representación por el otro. La herramienta de análisis y organización eran los sistemas de representación: los grupos de profesores debían hacer sus descripciones teniendo a los sistemas de representación como elemento organizador. La herramienta de representación eran los mapas conceptuales: los grupos de profesores debían hacer sus descripciones utilizando mapas conceptuales. Los grupos de profesores podían además presentar ensayos que profundizaran en las ideas que proponían en sus mapas conceptuales y nosotros registramos la información que surgió de la interacción que tuvo lugar en las entrevistas y en los seminarios. Nuestra principal fuente de información fueron, en todo caso, los nueve mapas conceptuales (tres por cada módulo) que presentaron cada uno de los cinco grupos.

Inicialmente nosotros pensamos analizar cada uno de estos mapas conceptuales con base en un mapa de referencia producido por nosotros en el que esperábamos tener regis-

trada toda aquella información que pudiera surgir en cualquiera de los mapas producidos por los profesores. Sin embargo, cuando comenzamos a revisar las producciones de los profesores, nos dimos cuenta que era importante analizar los mapas de tal forma que pudiéramos identificar sus principales características. Era importante tener en cuenta su forma y estructura. Pero también nos dimos cuenta de que era importante tener en cuenta el contenido matemático y la manera como se trataba ese contenido matemático. Por esa razón, aplazamos el análisis con base en los mapas de referencia y nos centramos en analizar cada uno de los mapas a partir de un proceso que pasó por varias etapas. En la primera, produjimos, para cada grupo, una tabla en la que en las columnas ubicamos cada uno de los nueve mapas y en las filas identificamos cuatro categorías: estructura, sistemas de representación, operacional-estructural y conexiones. Para cada una de estas categorías identificamos unos "eventos" que caracterizaban el mapa en cuestión o su evolución con respecto al mapa anterior. Registramos los eventos en las casillas correspondientes de la tabla. Cuando terminamos de codificar la información en estas tablas, nos dimos cuenta de que en ellas no era posible registrar varios aspectos de la complejidad de los mapas. En particular, no era posible codificar algunos aspectos del manejo de los sistemas de representación y de las conexiones.

Decidimos entonces hacer un nuevo análisis y codificación de los mapas con base en el número de cajas de cada mapa pertenecientes a cada uno de los sistemas de representación y en el número de conexiones que aparecían en cada mapa. Este proceso de análisis y codificación produjo dos tablas para cada grupo en el que es posible apreciar estos números y sus correspondientes porcentajes. Al hacer las gráficas de estas tablas apreciamos con mayor claridad la manera como cada grupo utilizó los sistemas de representación para hacer sus descripciones y la manera como estas descripciones evolucionaron en el tiempo. De allí comenzaron a surgir algunas conjeturas acerca de "tipos" de mapas conceptuales que parecían ser más repetitivos que otros a lo largo de los cinco grupos. Cuando regresamos a las tablas originales, nos dimos cuenta que esta manera de codificar la información requería de demasiada interpretación y no permitía necesariamente identificar estos "tipos" de mapas que nosotros percibíamos intuitivamente. Decidimos entonces producir un nuevo esquema de codificación.

Este nuevo esquema de codificación era, de nuevo, una tabla en la que en las columnas ubicamos los nueve mapas conceptuales de un grupo dado y en las filas ubicamos una serie de categorías, con sus correspondientes indicadores. En la primera versión de esta nueva tabla identificamos trece categorías, relacionadas con los sistemas de representación, con el crecimiento y reestructuración del mapa, con la aproximación operacional-estructural y con el tipo de conexiones. No obstante, una vez codificamos y analizamos de nuevo los mapas de los cinco grupos, observamos que algunas de las categorías escogidas y el tipo de indicadores utilizados no permitían una codificación adecuada: se requería aún algo de interpretación y se perdía información importante, mientras que se recogía información que no parecía relevante.

Cuando revisamos esta nueva codificación observamos que debíamos hacer una reflexión más profunda sobre la caracterización general de los mapas conceptuales cuando representan temas matemáticos y sobre las características particulares de estos mapas, teniendo en cuenta el contenido matemático en cuestión (la función cuadrática). Además, buscamos que fuera posible justificar *a priori* la selección de las categorías con las que se haría la codificación.

Encontramos entonces que debíamos tomar los sistemas de representación como eje inicial de análisis. Desde esta perspectiva, las producciones de los profesores podían o no estar organizadas con base en esta herramienta y, cuando, lo están, es posible analizar la estructura interna de los mapas dentro de cada sistema de representación. Esta estructura interna puede ser muy simple (sin cajas o una sola caja), medianamente compleja (algunas cajas, pero poca estructura) o estructurada (la descripción incluye estructuras con tres o más niveles).

El segundo atributo que consideramos fueron las conexiones. Clasificamos las conexiones en *básicas* (aquellas que definen la estructura interna básica de un sub-mapa que describe un aspecto particular), *internas* (cuando son conexiones entre cajas pertenecientes a un mismo sistema de representación), *implícitas* y *explícitas* (dependiendo de que la conexión se haga con una flecha o con una descripción dentro de la caja correspondiente), y *externas* (cuando representan conexiones entre dos o más sistemas de representación). Resaltamos en este atributo aquellas conexiones que involucran sistemas de representación diferentes del simbólico o el gráfico.

El tercer atributo tiene que ver con características propias del tema matemático en cuestión. En este caso observamos el número de formas simbólicas tratadas y la existencia de conexiones entre estas formas simbólicas. Por otra parte, codificamos también aquellos casos en los que el mapa se construía a partir de la ecuación cuadrática, y aquellos casos en los que los procedimientos de manipulación simbólica (e.g., completación de cuadrados, factorización, etcétera) se trataban ya sea como objetos o como relaciones entre cajas.

Esta última organización con base en los atributos estructurales nos permitió realizar una codificación final. Sin embargo, es evidente que el número de atributos y el número de valores de los atributos implica una gran cantidad de posibles combinaciones y, por consiguiente, de posibles mapas. No obstante, el análisis de las características de los atributos y del esquema de interacción que se realizó con los profesores, nos permitió identificar un número reducido de mapas posibles con una estructura de evolución que es coherente *a priori* con las características del tema matemático tratado.

La aplicación del instrumento de codificación que se acaba de describir nos permitió finalmente producir una clasificación de los mapas conceptuales producidos por los profesores. El análisis de esta clasificación nos permite proponer algunas conclusiones. En primera instancia, resulta evidente que hay diferencias en las producciones de los grupos. Hay grupos que comienzan con producciones relativamente avanzadas y otros que comienzan en el primer nivel de la estructura. Es muy posible que estas diferencias sean producto de la capacitación previa que hayan recibido estos profesores antes de comenzar a trabajar en este proyecto. En segundo lugar, es evidente que en todos los grupos hubo evolución y, por lo tanto, se corrobora la hipótesis inicial del estudio, en el sentido que el tipo de interacción realizada con los profesores puede generar una mayor consciencia sobre la complejidad del contenido matemático a enseñar. Esta evolución también se puede justificar a partir del conocimiento que cada grupo tuvo de las producciones de los otros grupos, pero este efecto no fue uniforme. Tercero, en algunos grupos se evidencia que hay "concepciones arraigadas" que no cambiaron fácilmente en el tiempo, aun cuando recibían información adicional que les sugería posibles caminos de acción. Cuarto, se observan diferencias en la estabilidad de las estructuras. Mientras que algunos grupos mantienen su aproximación más o menos constante y su trabajo se centra en la mejora de las producciones anteriores, hay otros grupos en los que se observan re-organizaciones estructurales en sus producción (como el caso de los grupos 2, 3 y 4). Quinto, el esquema de codificación resultado de este estudio parece ser una caracterización apropiada (al menos para el caso de las producciones consideradas) de las concepciones de los profesores sobre la función cuadrática. Esto se evidencia en el hecho de que de la gran cantidad de mapas posibles, las producciones de los profesores se restringen a unas pocas. La evolución de estas producciones parecen seguir el camino sugerido por la estructura de atributos propuesta anteriormente. Esta evolución se puede caracterizar por unos caminos de evolución representativos con respecto al manejo de los sistemas de representación, al manejo de la dualidad operacional-estructural y al manejo de las conexiones entre sistemas de representación.

Este documento se inicia con algunas reflexiones sobre el tema de las concepciones de los profesores. Aunque pensamos que este estudio tiene que ver con las concepciones de los profesores sobre la función cuadrática, preferimos presentarlo como un análisis de las producciones de los profesores como respuesta a un estímulo particular, dentro de un esquema de interacción. Por esa razón, nuestra aproximación a la cuestión de las concepciones

nes es primordialmente operacional y se encuentra firmemente ligada a su relación con los mapas conceptuales y los sistemas de representación. En el siguiente apartado, se presentan algunas ideas sobre el tema de los sistemas de representación como elemento organizador de las producciones y de los mapas conceptuales como herramienta de representación, para llegar a hacer una propuesta de caracterización de los mapas conceptuales de los profesores sobre la función cuadrática. En seguida, se presenta una descripción de la función cuadrática, como objeto matemático propósito de este estudio. Una vez presentados estos temas, re-definimos el problema de investigación que introducimos al comienzo de este apartado. Después describimos la población de profesores con los que trabajamos y el tipo de trabajo que hicimos con ellos. En el apartado siguiente, presentamos la historia de los diversos instrumentos de codificación que desarrollamos a lo largo del proyecto, sin incluir el último. Este último instrumento, llamado de "atributos estructurales" se presenta en el siguiente apartado. Con base en este instrumento se presentan en seguida una propuesta de caracterización de las producciones de los profesores y, a partir de esta caracterización, se presentan después de los resultados del estudio. Estos resultados se describen en dos partes. Primero, desde la perspectiva de un análisis inter-grupal basado exclusivamente en el instrumento de atributos estructurales. Y segundo, desde la perspectiva de un análisis intra-grupal en el que, para cada grupo de profesores, triangulamos los resultados del instrumento de atributos estructurales con los otros instrumentos de codificación desarrollados y con el análisis de los textos producidos por los profesores y los registros de nuestras interacciones con ellos. Finalmente, hacemos algunas reflexiones finales y sugerimos algunas inquietudes.

Concepciones de los profesores

La noción general de *concepción* tiene diversos significados en educación matemática. Sin embargo, es posible afirmar que, en general, busca referirse a los conocimientos y visiones de un sujeto sobre uno o más objetos. Existen diferentes tipologías para las concepciones de un sujeto sobre un objeto (espontáneas, inducidas, accidentales, estables, etcétera) y también existen aspectos parciales de las concepciones, cuando algunos autores proponen términos como "imagen concepto", por ejemplo (Vinner, 1983).

El problema metodológico de trabajar con las concepciones se centra entonces en identificar las características de las actuaciones de los sujetos que nos permitan referirnos a esas concepciones. Para estos efectos, podemos seguir por ejemplo, la propuesta de Ruiz (1993, pp. 73-74) quien considera que la concepción del sujeto se puede caracterizar por:

- los invariantes que el sujeto reconoce como notas esenciales que determinan el objeto;
- el conjunto de [sistemas de] representaciones [...] que le asocia y utiliza para resolver las situaciones y problemas ligados al concepto; y
- el conjunto de situaciones, problemas, etc. que el sujeto asocia al objeto, es decir para las cuales encuentra apropiado su uso como herramienta.

Esta aproximación operacional a la noción de concepción no está alejada de la aproximación de Balacheff (1996) que caracteriza la concepción por una cuádrupla (problemas, operadores, sistemas de representación y estructura de control) que representa un estado cognitivo. Este estado cognitivo se identifica por un conjunto de problemas específicos, un sistema de representaciones asociadas al concepto y a las propiedades y situaciones a las que se refiere, un conjunto de reglas de acción y una estructura de control que asegura la ausencia de contradicción.

De la misma forma que el tema de las concepciones de los estudiantes, el campo de las concepciones de los profesores es amplio y complejo. Se trata de discutir sobre las estructuras cognitivas de unos sujetos sobre un tema particular. Como no es posible observar directamente estas estructuras cognitivas, se busca establecer estímulos (tareas) que permitan analizar las actuaciones de estos sujetos. Para propósitos metodológicos, estas tareas deben ser tales que sea posible codificar y analizar la información recogida de acuerdo con intereses particulares. Por ejemplo, la tarea puede ser una serie de problemas de matemáticas y el análisis produce una clasificación del tipo de respuestas y soluciones que producen los profesores. La interpretación de los resultados permite hacer afirmaciones sobre el conocimiento matemático de los sujetos. En otros casos, por ejemplo, la tarea consiste en la producción de un diseño curricular para un tema particular y el análisis de estas producciones y la interpretación de los resultados permite hacer afirmaciones sobre la visión que los profesores tienen sobre la manera como se aprende y se debe enseñar el tema en cuestión.

El campo de las concepciones de los profesores es complejo porque tiene que ver con las estructuras cognitivas de unos sujetos. Pero también es complejo porque, a diferencia de lo que sucede con los estudiantes, nos interesa conocer y comprender diversos aspectos de esas estructuras cognitivas. No es cuestión únicamente de sacar conclusiones sobre el conocimiento y la comprensión de los profesores sobre un concepto matemático. También es interesante comprender la visión que los profesores tienen de ese tema, el papel que pueden jugar ciertos elementos en esa visión, o la visión que esos sujetos tienen sobre la forma como se aprende o se debe enseñar el tema.

En el caso de este estudio, nos interesa explorar las visiones de un grupo de profesores sobre un tema particular (la función cuadrática), desde la perspectiva de la utilización de los sistemas de representación como eje organizador de sus producciones y con base en la utilización de una herramienta particular de representación (los mapas conceptuales).

Con base en las aproximaciones operacionales presentadas arriba, podemos afirmar que, para este estudio, cuando exploramos las concepciones de un profesor sobre un objeto, debemos identificar, con base en sus actuaciones, aquello que el profesor reconoce como esencial del objeto, el tipo de representaciones que utiliza para aproximarse al objeto y el conjunto de situaciones, problemas, etc. que el sujeto asocia al objeto, es decir para las cuales encuentra apropiado su uso como herramienta. En el caso de este estudio, los profesores abordan el objeto (función cuadrática) a través de resolver una tarea particular: describir, con base en los sistemas de representación y los mapas conceptuales, la función cuadrática.

Creemos que la utilización de los sistemas de representación como eje organizador de las producciones de los profesores y los mapas conceptuales como herramienta de representación de estas producciones nos pueden permitir aproximarnos (al menos desde una perspectiva particular) a las concepciones de los profesores sobre la función cuadrática. Esta intuición se encuentra sustentada por diversos argumentos. En primera instancia, la aproximación cognitiva a la cuestión de las concepciones que las describe como una red de representaciones internas conectadas entre sí en una estructura con diversos niveles de complejidad (Hiebert y Carpenter, 1992), invita naturalmente a mirar las concepciones con base en los sistemas de representación externos como medio para aproximarse a las representaciones internas y en los mapas conceptuales como medio para representar gráficamente y de manera no lineal la complejidad de esas estructuras cognitivas. En segundo lugar, los estudios que han utilizado a los mapas conceptuales como herramienta de investigación para explorar las concepciones (e.g., Williams, 1998; McGowen, 1998) muestran que esta es una herramienta eficiente para este tipo de exploración.

A continuación presentamos el tema de los mapas conceptuales como herramienta de representación y describimos nuestra aproximación a los sistemas de representación. Con base en estas dos herramientas hacemos una descripción de la función cuadrática, tema matemático objeto de este estudio.

Mapas conceptuales

INTRODUCCIÓN

Los mapas conceptuales son una técnica para representar visualmente la estructura de la información. Es decir, los mapas conceptuales son un sistema de representación cuyas normas son relativamente sencillas (Lanzing, 1998): "los conceptos se representan por nodos a los que se les da una etiqueta por medio de una palabra o una frase corta que indica el concepto. Las relaciones se representan por líneas (enlaces) que conectan los nodos" (p. 2).

Aunque esta técnica de representación ha sido utilizada desde la Edad Media, se considera que Joseph D. Novak de la Universidad de Cornell fue el pionero en la utilización de los mapas conceptuales en la educación. Él desarrolló esta técnica para determinar como ocurren los cambios en la comprensión conceptual de los estudiantes (Novak, 1990, p.937, citado en McGowen, 1998, p. 38).

Los mapas conceptuales se han utilizado de manera sistemática en la educación, particularmente como herramienta para describir el currículo y como herramienta de la instrucción.

Existe una técnica, relacionada a los mapas conceptuales, llamada "mapas mentales". Esta técnica registrada por Buzan, requiere que los mapas conceptuales tengan una jerarquía: "un mapa mental consiste en una palabra o concepto central, alrededor del cual se dibujan de 5 a 10 ideas principales que se relacionan con esa palabra. Este proceso se puede después repetir para cada una de las palabras hijas, tantas veces como se quiera" (Buzan, 1995, citado por Lanzing, p. 4). Williams (1998) llama a estos mapas los "mapas araña".

Como sistema de representación, los mapas conceptuales tienen dos ventajas importantes:

- Permite descripciones no lineales del objeto.
- Al tener un carácter gráfico, permite observar la estructura de la descripción.

Estas dos cualidades son muy importantes para la descripción de objetos matemáticos y su correspondiente discurso matemático. La estructura matemática no es lineal. Un mismo concepto (u objeto) está relacionado con muchos otros conceptos (u objetos). Y hay obviamente una noción de estructura que describe la manera como los conceptos se conectan unos con otros. Aunque estas son características bien conocidas de los objetos matemáticos y su correspondiente discurso, este último se hace, en general, dentro de un texto. Esto implica, por un lado, que la descripción tiene que ser lineal, y, por el otro, que no es posible ver "gráficamente" la estructura del discurso. Hay que deducirla de la lectura del texto. En consecuencia, en contraposición con la descripción textual, los mapas conceptuales resultan muy potentes para la descripción del discurso matemático y, como veremos más adelante, cuando se conjugan con la noción de sistema de representación, esta potencia se multiplica.

MAPAS CONCEPTUALES COMO HERRAMIENTA DE INVESTIGACIÓN

En este estudio nos interesan los mapas conceptuales como herramienta de investigación. Esta no es una utilización innovadora de esta herramienta. De hecho los mapas conceptuales se han utilizado frecuentemente de esta manera como medio para representar externamente las estructuras cognitivas de los individuos. Los reportes de McGowen

(1998) y Williams (1998) enumeran una gran cantidad de estudios en matemáticas en los que se ha utilizado esta herramienta. Además, estas dos investigadoras arguyen, con base en los resultados de estos estudios, que ésta es una herramienta eficiente para estos propósitos.

Se pueden construir diversos argumentos conceptuales para soportar esta posición sobre los mapas conceptuales como herramienta de investigación de las concepciones de los sujetos. En particular, la visión de Hiebert y Carpenter (1992) sobre la comprensión se basa en una visión de las estructuras cognitivas como una red de representaciones internas interconectadas. Esta aproximación abre naturalmente el espacio para la exploración de esas estructuras cognitivas por medio de mapas conceptuales y resalta la importancia de esta herramienta como consecuencia de su carácter gráfico, no-lineal.

Una vez que los sujetos han producido uno o más mapas conceptuales, el investigador se enfrenta al problema de analizar esta información para llegar a conclusiones. Se han utilizado diversos esquemas de análisis. Uno de los esquemas de codificación y análisis más comunes es el análisis cuantitativo. En este caso, el investigador define una manera de contar elementos o características del mapa conceptual y produce uno o más valores que lo caracterizan. Por ejemplo, Laturno (1994, citado en McGowen, 1998, p. 88) asigna los siguientes valores para diversos elementos de un mapa: número de conceptos (1 cada uno); niveles (máximo 4, 5 puntos cada uno); relaciones (1 cada uno); y enlaces cruzados (5 cada uno).

No obstante, el análisis cuantitativo de los mapas conceptuales, aunque proporciona una manera sistemática de analizarlos y ofrece una cierta caracterización de los mismos, adolece de varios defectos. En primera instancia, no es posible hacer una conexión entre los valores asignados y las características de la estructura de los mapas. Por el otro lado, este tipo de análisis no tiene en cuenta el contenido presentado en el mapa y, por consiguiente, la manera como ese contenido está siendo descrito.

McGowen (1998) utiliza una aproximación que enfatiza las características estructurales. Con el propósito de explorar la complejidad en la comprensión de los estudiantes estudiados, ella analiza la complejidad de las estructuras de los mapas conceptuales producidos por estos estudiantes. Este es un análisis de la "forma" de los mapas y el análisis del contenido mismo se hace por fuera del instrumento de codificación.

Nosotros consideramos que sería útil tener un instrumento de codificación y análisis que tuviera en cuenta las características del contenido matemático que se está describiendo. Por esas razones, y teniendo en cuenta el contenido particular (función cuadrática), hemos identificado algunas características de los mapas conceptuales que presentamos a continuación.

CARACTERÍSTICAS DE MAPAS CONCEPTUALES QUE DESCRIBEN CONTENIDO MATEMÁTICO

Cuando se utilizan para describir contenido matemático, los mapas conceptuales pueden tener unas características que dependen, al menos parcialmente, de ese contenido. El análisis del contenido de un mapa conceptual permite identificar *submapas*. Estos son porciones del mapa global en las que se desarrolla una parcela particular y fácilmente identificable del contenido en cuestión (por ejemplo, aquella parte del mapa en la que se describe una de las formas simbólicas de la función cuadrática). Estos submapas pueden tener una *estructura interna* lineal o no lineal (esta caracterización de linealidad también se puede aplicar al mapa global, especialmente cuando éste es pequeño). Decimos que la

estructura de un mapa o sub-mapa es lineal cuando ésta tiene máximo dos niveles (hay nietos, pero no bisnietos. Ver figura 1).

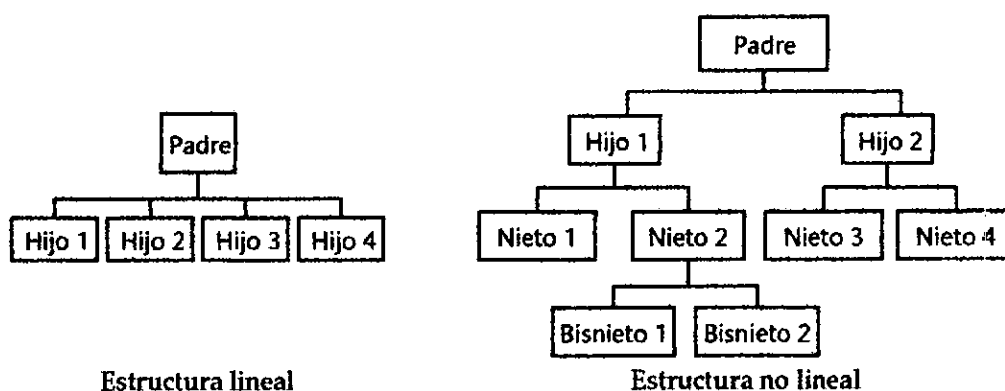


Figura N° 1. Estructuras de sub-mapas

Por otro lado, los mapas conceptuales también se pueden caracterizar de acuerdo al tipo de conexiones que presentan.

Las conexiones *básicas* son aquellas que definen las ramas de un mapa conceptual dentro de un sistema de representación. Estas conexiones básicas caracterizan la estructura lineal de las ramas.

Las conexiones *internas* son aquellas que establecen relaciones entre dos elementos diferentes pertenecientes a un mismo sub-mapa. Las *externas* son aquellas que establecen relaciones entre representaciones de un mismo elemento en diferentes sub-mapas¹.

Las conexiones (tanto internas, como externas) pueden ser *implícitas* o *explícitas*. Las conexiones explícitas se expresan en flechas que explícitamente establecen la conexión entre dos elementos. Las conexiones implícitas se expresan dentro de la caja de un mismo elemento al referirse a otro elemento (este el caso, por ejemplo, en el que se menciona el término vértice en la caja correspondiente a (h,k) en la forma canónica de la representación simbólica, o en el que se expresa un parámetro de un forma en función de parámetros de otra forma simbólica, dentro de la caja correspondiente al parámetro original).

Las conexiones pueden ser *puntuales* o *generales*. Las conexiones generales van de un elemento o grupo a otro grupo de elementos. Las conexiones puntuales van de un elemento a otro elemento.

Esta descripción del tipo de conexiones que pueden darse dentro de un mapa conceptual permite construir instrumentos de codificación y análisis detallados desde esta perspectiva.

¹ En nuestro caso, y como se verá más adelante, nos interesa considerar los sistemas de representación como sub-mapas. La diferenciación entre conexiones internas y externas hará referencia específicamente a esta clasificación de sub-mapas.

Sistemas de representación

INTRODUCCIÓN

En este apartado presentamos algunas reflexiones sobre la noción de sistema de representación. Consideramos, en primera instancia, las diversas definiciones que existen sobre ella y asumimos nuestra posición para efectos de concretar el significado que le damos al término dentro del estudio. En seguida, analizamos la manera como pueden interactuar los sistemas de representación y los mapas conceptuales en la presentación del discurso matemático y de las actividades de las matemáticas escolares cuando se utilizan para describir un objeto matemático particular. Finalmente, hacemos una reflexión sobre la representación de la dualidad operacional-estructural en un mapa conceptual y sobre el papel que los sistemas de representación pueden jugar en esa descripción.

SIGNIFICADOS DE “SISTEMA DE REPRESENTACIÓN”

El término “sistema de representación” tiene diferentes significados en la educación matemática. El grupo de trabajo sobre este tema en el PME ha producido cuatro posibles definiciones del término (Goldin y Janvier, 1998, pp. 1-2):

- una situación física externa estructurada, o un conjunto de situaciones estructuradas en un ambiente físico que pueden ser descritas matemáticamente o pueden interpretarse en el sentido de involucrar ideas matemáticas;
- un entorno lingüístico o un sistema de lenguaje, donde se formula un problema o se discute matemáticas, enfatizando las características sintácticas o semánticas;
- un constructo matemático formal, o un sistema de constructos, que pueden representar situaciones a través de símbolos o sistemas de símbolos y que generalmente satisfacen ciertos axiomas o se adaptan a definiciones precisas, incluyendo constructos matemáticos que pueden representar aspectos de otros constructos matemáticos;
- una configuración cognitiva interna individual, o un sistema de tales configuraciones, que se deduce a partir de actuaciones o introspección, y que describen aspectos de los procesos de pensamiento matemático y de resolución de problemas.

La utilización que le daremos al término “sistema de representación” se acerca a las primeras tres definiciones². Buscamos utilizar los sistemas de representación para *representar* diferentes facetas de un objeto matemático y trabajamos con los sistemas de representación bajo el supuesto de que se ciñen a un conjunto de reglas que se encuentran condicionadas por las matemáticas en general y por el objeto matemático específico, en particular. Por estas razones, consideramos que la definición de Kaput (1992) sobre sistema de nota-

² Es evidente que estas tres primeras definiciones no son necesariamente coherentes entre sí. Es por esta razón que utilizamos, como eje central, la definición de Kaput (1992). No obstante, estas tres definiciones complementan la propuesta de Kaput. En particular, la primera definición permite introducir como sistema de representación al conjunto de fenómenos reales cuyo análisis puede requerir de un objeto matemático particular. Este no sería, en el sentido de Kaput, un sistema de representación, pero se acoge a la primera definición. Se podría llamar el sistema de representación de las aplicaciones. Nosotros lo hemos llamado (tal vez erróneamente) sistema de representación verbal. No nos referimos a la descripción verbal del objeto matemático, sino a la descripción de los fenómenos que involucran al objeto matemático en cuestión.

ción se adapta a nuestras necesidades. De acuerdo a esta definición, “un sistema de notación es un sistema de reglas para (i) identificar o crear caracteres, (ii) operar en ellos y (iii) determinar relaciones entre ellos (especialmente relaciones de equivalencia)” (p. 523). Esta definición, que se acerca al segundo significado de Goldin y Janvier, le permite a Kaput describir las actividades matemáticas que tienen lugar en las matemáticas escolares, con base en la noción de sistemas de representación:

- transformaciones sintácticamente restringidas dentro de un sistema particular, con o sin referencia a otros significados externos;
- traducciones entre sistemas de notación, incluyendo la coordinación de acciones a través de sistemas de notación;
- construcción y verificación de modelos matemáticos, lo que es equivalente a la traducción entre aspectos de una situación y conjuntos de notaciones; y
- la consolidación o cristalización de relaciones y procesos en objetos conceptuales o “entidades cognitivas” que pueden ser usadas en relaciones y procesos de un orden más alto de organización.

DISCURSO MATEMÁTICO, MAPAS CONCEPTUALES Y SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN

Las matemáticas son un discurso acerca de las características de los objetos matemáticos y de sus relaciones. Este discurso se debe expresar en un lenguaje. Este lenguaje se basa en general en uno o más sistemas de representación. Esta es la razón por la cual la noción de sistema de representación es trascendental en la descripción de los objetos matemáticos y sus relaciones y por la cual esta noción puede constituirse en el eje organizador de los esfuerzos de descripción de estos objetos. El hecho de que la mayoría de las actividades matemáticas de la escuela pueda ser descrita en términos de sistemas de representación corrobora la potencia de esta noción.

En general, no es posible representar toda la complejidad de un objeto matemático en un único sistema de representación. La utilización de una variedad de sistemas de representación simultáneamente permite apreciar esta complejidad.

Introducimos entonces la noción de *elemento* dentro de un sistema de representación cuando se está describiendo un objeto matemático. Un *elemento* es

- una forma de representar un objeto matemático (e.g., una forma simbólica de la función cuadrática, un representante gráfico de la parábola, una descripción de una forma de construir geoméricamente la parábola, una categoría de fenómenos que involucran la cuestión cuadrática) o
- una parte de esa forma de representar al objeto (el parámetro h en la forma canónica, el vértice en la representación gráfica).

Cuando el objeto matemático se representa en un mapa conceptual, un elemento puede estar identificado por una caja o un conjunto de cajas. En otras palabras, un elemento es un submapa que tiene significado matemático propio. En ese tipo de representación, los elementos están relacionados:

- con otros elementos dentro de la forma particular o dentro del sistema de representación en el que se encuentran;
- con otra representación de ese mismo elemento en otro sistema de representación;
- con un fenómeno que lo involucra; o
- tienen papás e hijos dentro de la estructura de relaciones.

La relación o conexión de elementos dentro de un mismo sistema de representación representa la transformación sintáctica de la primera actividad de Kaput. Estas transformaciones sintácticas permiten hacer la conexión entre dos o más elementos pertenecientes a un mismo sistema de representación. La relación entre un mismo elemento en dos sistemas de representación se refiere a las traducciones entre sistemas de representación a las que se refiere Kaput en su segunda actividad matemática. La relación de un elemento con un fenómeno tiene que ver con la tercera actividad matemática propuesta por Kaput. Finalmente, las actividades matemáticas a las que se refiere Kaput tienen que ver con estas relaciones o conexiones entre elementos. La relación de familia, insinúa la materialización que él menciona en su última actividad. Es la estructura la que muestra cómo un procedimiento (que transforma elementos) hace parte de una estructura más compleja. Desde la perspectiva de esta estructura más amplia, ese procedimiento se puede mirar como perteneciente a un concepto y ese concepto puede ser el objeto de otro procedimiento. En otras palabras, es posible considerar la problemática de la dualidad entre conceptos y procedimientos con base en los sistemas de representación y los mapas conceptuales. Consideramos esta cuestión a continuación.

MAPAS CONCEPTUALES, SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN Y DUALIDAD OPERACIONAL-ESTRUCTURAL

La noción de elemento y de relaciones entre elementos resulta importante cuando, con base en los sistemas de representación, se busca representar un objeto matemático utilizando la herramienta de los mapas conceptuales. El párrafo anterior muestra que las actividades matemáticas de las matemáticas escolares se pueden identificar con base en estas nociones. Adicionalmente, las nociones de elemento y relación entre ellos se adaptan idealmente al esquema de los mapas conceptuales. Un elemento es una caja o un conjunto de cajas conectadas dentro de un mapa conceptual y una relación es una conexión entre cajas. Esto nos permite asegurarnos de que los mapas conceptuales son eficaces en representar los objetos matemáticos y que podemos identificar las actividades matemáticas cuando representamos los objetos matemáticos por medio de mapas conceptuales. Pero los objetos matemáticos pueden estar representados en forma de conceptos o de procedimientos. Resulta válido preguntarse en qué "forma" se pueden representar conceptos y procedimientos dentro de un mapa y cómo un mapa puede representar una visión procedimental o conceptual del objeto por parte de quien produce el mapa.

¿Cuál es la relación entre los sistemas de representación, la dualidad operacional-estructural y las transformaciones sintácticas dentro de un sistema de representación? El problema no es que no sepamos cuál es la relación, sino que no tenemos un significado claro para cada uno de esos términos.

La noción de dualidad operacional-estructural (Sfard, 1991) es una noción que se aplica a un concepto (por ejemplo, el de función). Pero vimos en un apartado anterior que la mayoría de los conceptos matemáticos son muy complejos y que su descripción depende de la manera como utilizemos los sistemas de representación. Adicionalmente, la dualidad operacional-estructural depende de las nociones de procedimiento y concepto. No es fácil relacionarlos. La dualidad operacional-estructural es una noción cognitiva y no podemos observarla directamente. Sólo la podemos observar a través de las actuaciones de los sujetos. Si suponemos que la tarea que genera estas actuaciones es la descripción de un objeto matemático, ¿cómo podemos observar esta noción?

Los procedimientos (en el sentido clásico que se utiliza este término) tienen que ver con la actividad de transformaciones sintácticas en un sistema de representación. En el caso de la función cuadrática, un ejemplo de procedimiento es la completación de cuadrados o la resolución, con base en la fórmula cuadrática, de la ecuación cuadrática. No es común (aunque sería posible) pensar que las actividades de traducción entre sistemas de representación o de modelaje contengan procedimientos³. Por esa razón, una concepción oper-

acional tiende a estar agarrada a una visión esencialmente simbólica del objeto, visión ésta que se encuentra desconectada de otros sistemas de representación y *en la que los procedimientos son los "objetos" de la descripción*. En un mapa conceptual esta visión se expresa cuando los procedimientos se encuentran dentro de cajas como elementos de la descripción. En la medida en que la descripción de un objeto tiende a tener más en cuenta los otros sistemas de representación, en que esta descripción establece mayor cantidad de conexiones entre los sistemas de representación y en que la estructura de descripción ubica los procedimientos como técnicas para la resolución de situaciones sintácticas (y, por consiguiente como conexiones —implícitas o explícitas— entre elementos), y no como centro de la descripción, esta descripción sugiere una visión más estructural y menos operacional del objeto. En este caso, los procedimientos dejan de ser elementos de la descripción y se convierten en relaciones entre elementos (la completación de cuadrados es una conexión entre la forma estándar y la forma canónica, en el caso de la función cuadrática). Estamos insinuando, entonces, que en la medida en que el objeto se describa con un mayor número de sistemas de representación, en que esta descripción esté más conectada y en que los procedimientos se miren como técnicas internas de conexión de elementos dentro de un sistema de representación, podemos calificar a la descripción como más estructural.

Podemos entonces afirmar que la materialización se da cuando:

- se puede mirar el objeto desde diferentes sistemas de representación;
- se establecen conexiones externas (un mismo elemento en diferentes sistemas de representación);
- se establecen las conexiones internas; y
- se ubican los procedimientos en su lugar dentro de la estructura como técnicas de conexión entre elementos.

³ Aquí estamos hablando desde la perspectiva cognitiva. Para que las actividades de traducción entre sistemas de representación se consideren procedimientos, es necesario que estas operaciones se hayan "operacionalizado" desde el punto de vista cognitivo y que quien las ejecute no "sea consciente" de que está trabajando sobre un mismo objeto en diferentes sistemas de representación. Nuestra propuesta de que los procedimientos, en este sentido, aparecen casi con exclusividad en el sistema de representación simbólico es una posición ideológica que no podemos justificar y que es producto de nuestra visión de la manera como en general se enseña y aprende matemáticas (en el sistema de representación simbólico y con base en procedimientos). El contra-ejemplo más claro para esta posición es el procedimiento de tomar la expresión simbólica de una función, hacer su tabla de valores para después hacer su gráfica.

Función cuadrática

JUSTIFICACIÓN

Como se sugirió en un apartado anterior, la exploración de las concepciones de los profesores requiere trabajar con un objeto matemático específico. Nosotros hemos seleccionado la función cuadrática como objeto de trabajo. Esta selección tiene diversas justificaciones que presentamos a continuación.

En primera instancia, debemos diferenciar el término "función cuadrática" del término "cuestión cuadrática". El primero impone la visión funcional del objeto en cuestión, mientras que el segundo permite ampliar el objeto de estudio a aquello en lo se involucra el proceso de "elevar al cuadrado". Desde esta perspectiva, la cuestión cuadrática aparece en múltiples ocasiones en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas escolares. No obstante, este objeto matemático asume una presencia clara cuando se trata la ecuación cuadrática y la problemática de su resolución. Allí aparece uno de los temas clásicos de las matemáticas de la secundaria: la fórmula cuadrática. Otro lugar "clásico" en el que se trata la cuestión cuadrática es el teorema de Pitágoras, donde se hace necesario elevar al cuadrado y sacar raíz cuadrada. Hay otros momentos importantes en los que la cuestión cuadrática aparece en las matemáticas escolares. Por ejemplo, cuando se consideran las cónicas y sus gráficas. Finalmente, la función cuadrática tiene también un lugar preponderante, en segundo lugar únicamente con respecto a la función lineal. En resumen, la cuestión cuadrática es un tema que permea por una buena parte de las matemáticas de la educación media. ¿Cómo describir, en términos de Ruiz (1993), las invariantes esenciales de este objeto matemático desde la perspectiva de las matemáticas escolares?

Para describir un objeto matemático es necesario asumir una posición con respecto a la "ventana" que se quiere utilizar para hacerlo. En nuestro caso, hemos escogido dos dimensiones que determinan nuestra posición: los sistemas de representación y la aproximación funcional. En un apartado anterior ya justificamos la utilización de los sistemas de representación como eje organizador de la descripción de los objetos en las matemáticas escolares. Aquí podemos mencionar únicamente que esta dimensión permite introducir "orden" en la multiplicidad de elementos y relaciones que caracterizan un objeto matemático. Por el otro lado, utilizamos la visión funcional porque se ha reconocido a la noción de función como eje conductor de las matemáticas del último ciclo de secundaria (Leindhardt et al., 1990). La aproximación funcional no restringe el tipo de presentación que se puede hacer del objeto en cuestión. Sencillamente obliga a "ubicar" los elementos en una posición diferente de la que podrían tener si se utilizara otra aproximación (por ejemplo, las diversas manipulaciones simbólicas involucradas en la resolución de la ecuación cuadrática aparecen en diversos lugares de la descripción de la cuestión cuadrática, dependiendo de la visión que se asuma para hacer esta descripción).

Comenzamos entonces por identificar cinco sistemas de representación relevantes para la descripción de la función cuadrática: simbólico, gráfico, geométrico, numérico y verbal. En el sistema de representación simbólico encontramos cuatro formas simbólicas (estándar, canónica, multiplicativa y de foco). Cada una de estas formas involucra una serie de parámetros que determinan características particulares de la función. Los parámetros se encuentran relacionados entre sí. La cuestión cuadrática, y en particular los conceptos y procedimientos relacionados con la ecuación cuadrática, aparecen en una de las formas simbólicas. Todas las características gráficas de la función cuadrática encuentran obviamente su expresión en el sistema de representación simbólico.

En el sistema de representación gráfico se hacen patentes otras características de la función cuadrática. Allí aparecen diversos elementos (puntos de corte con los ejes, eje de si-

metría, directriz, vértice, crecimiento, concavidad, etcétera) que permiten apreciar el papel de los parámetros mencionados en el párrafo anterior. Algunos de estos elementos de la representación gráfica adquieren aún más significado cuando se considera el sistema de representación geométrico. En este sistema de representación, es posible apreciar características de la función cuadrática desde la perspectiva de la construcción geométrica de la parábola. Esta construcción se puede hacer en el plano o en el espacio, siendo ésta última la construcción que da origen a todas las cónicas. En este sistema de representación se identifican otros elementos que aportan a la descripción del objeto.

Aunque la representación numérica es muy utilizada en las matemáticas escolares, su carácter discreto restringe la descripción de un objeto visto desde la dimensión funcional. En todo caso, en esta representación es posible apreciar algunas de las características y elementos identificados en las representaciones simbólicas, gráficas y geométricas. Por el otro lado, el sistema de representación verbal nos permite introducir el análisis fenomenológico de la función cuadrática⁴. Esto es, la diversidad de fenómenos en los que este concepto está involucrado. Allí se encuentran fenómenos propios de la física (como la caída de cuerpos y la optimización de áreas), de la ingeniería (como las antenas parabólicas, las lámparas y los lentes) y propias de lo numérico.

La descripción anterior muestra el alto nivel de complejidad de la función cuadrática como objeto de enseñanza en las matemáticas escolares. Su tratamiento simbólico involucra diversas formas; su tratamiento gráfico es rico en elementos y relaciones; su tratamiento geométrico presenta diversas aproximaciones a su construcción; y es un objeto que se encuentra involucrado en gran número de fenómenos de diversos tipos. Toda esta riqueza se multiplica cuando se tiene en cuenta que cada elemento de un sistema de representación se encuentra relacionado con otros elementos en otros sistemas de representación, y que existen múltiples conexiones dentro de cada uno de estos sistemas.

MAPA CONCEPTUAL DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

En este apartado presentamos el mapa conceptual que nosotros, como investigadores, realizamos de la función cuadrática. Iniciaremos con la descripción de la manera como los sistemas de representación ayudaron a caracterizar las categorías organizadoras del mapa conceptual y terminaremos con la presentación del mapa.

Sistemas de representación

Dada la función cuadrática tomamos en cuenta para su descripción aquellos conceptos que aparecen en el saber escolar colombiano. Por lo tanto, no tuvimos en cuenta conceptos como transformaciones geométricas en el plano, ni teoremas y resultados generales comunes a todas las funciones polinómicas (aunque muchas de las características de la función cuadrática están ligadas a ellas), ni tuvimos en cuenta el concepto de comparación entre funciones, por considerarlo de carácter general y no específico a la función cuadrática. Tampoco incluimos descripciones relacionadas con el cálculo diferencial e integral. Una vez identificados los conceptos que íbamos a tener en cuenta para el mapa, definimos cinco categorías para su descripción. Cada categoría posee un lenguaje propio con una sintaxis propia que provienen de unos campos matemáticos específicos. Estas categorías son los sistemas de representación y cada una de ellas será un submapa. A continuación presentaremos las características principales de la función cuadrática y definiremos cada uno de los cinco sistemas de representación.

⁴ En una nota de pie de página anterior ya hicimos algunas aclaraciones sobre este sistema de representación. Lo presentamos como un sistema de representación de carácter diferente a los demás (dado que no es posible identificar las normas que lo rigen en el sentido de Kaput (1992)). Por otro lado, el nombre que le hemos dado a este sistema de representación es un poco desafortunado. Debimos llamarlo "aplicaciones" o algo similar. No hemos cambiado el nombre porque éste fue el que utilizamos en la interacción con los profesores y sus producciones lo denominan de esta manera.

Simbólico (S)

El lenguaje utilizado, en este sistema de representación, es el propio del campo algebraico y las reglas que lo sustentan son las de la estructura algebraica de los números reales. Este sistema de representación se organizó de acuerdo con las 4 formas simbólicas que representan la función cuadrática (estándar, canónica, multiplicativa y foco). Para cada una de ellas se analizó el significado de cada uno de los parámetros con el fin de describir las características de la función. Los parámetros nos permiten describir aspectos como crecimiento, decrecimiento, concavidad, puntos críticos, máximos, mínimos y raíces. Por otro lado se describió la relación de equivalencia entre las diferentes formas simbólicas explicitando los procesos algebraicos (traducciones sintácticas) que permiten transformar unas expresiones en otras. Por ejemplo, para pasar de la forma estándar a la canónica se utiliza la completación de cuadrados.

Gráfico (GR)

Cuando hablamos del sistema de representación gráfico, hacemos referencia a la representación en el plano cartesiano. Por consiguiente, el lenguaje y las reglas sintácticas son las del plano cartesiano. En el mapa se encontrarán gráficas y frases que hacen referencia a lo gráfico. Aquí no se incluyen representaciones como la recta numérica o balanzas o muñecos que para otros temas matemáticos pueden jugar un rol importante y habría que especificarlos. Este sistema cuenta con dos submapas, uno que describe los elementos gráficos de la función cuadrática y sus características como foco, directriz, segmento focal, parábola y gráfica. El otro que, a partir de la noción de familia, describe el rol de los parámetros con respecto a la gráfica de la función en donde se hace una conexión implícita entre los parámetros de las formas simbólicas y sus efectos en las gráficas.

Geométrico (G)

El lenguaje que se utiliza en este sistema de representación es el de la geometría. Los conceptos aquí descritos son geométricos. Aunque en este sistema de representación también se pueden hacer gráficos, se diferencia con el anterior porque no estamos dotando al plano del sistema de referencia cartesiano. Como se puede ver en el mapa, tanto en el sistema gráfico como en el geométrico se encuentran descritas características geométricas pero en lenguajes diferentes. Esta representación tiene dos submapas, uno que describe la construcción de la parábola en el plano de tal manera que se puede ver el rol del vértice y la directriz en la construcción de la parábola y el otro que describe la construcción en el espacio presentando la parábola como una cónica.

Numérico (N)

En este sistema de representación hablamos de los valores numéricos de la función. Se pueden representar los valores de diferentes formas. Por un lado, valores específicos para un x determinado; y, por el otro, agrupaciones en tablas para diferentes valores de la función. Al dar valores a la función estamos en una representación discreta. Nuestro mapa se divide en dos submapas. Uno en el que se describe, en términos generales, lo que es una tabla de valores para la función cuadrática, y otro en que se destacan los valores especiales de la función cuadrática. Estos valores especiales son, por ejemplo, aquellos donde se anula la función, la imagen de cero o la imagen de h .

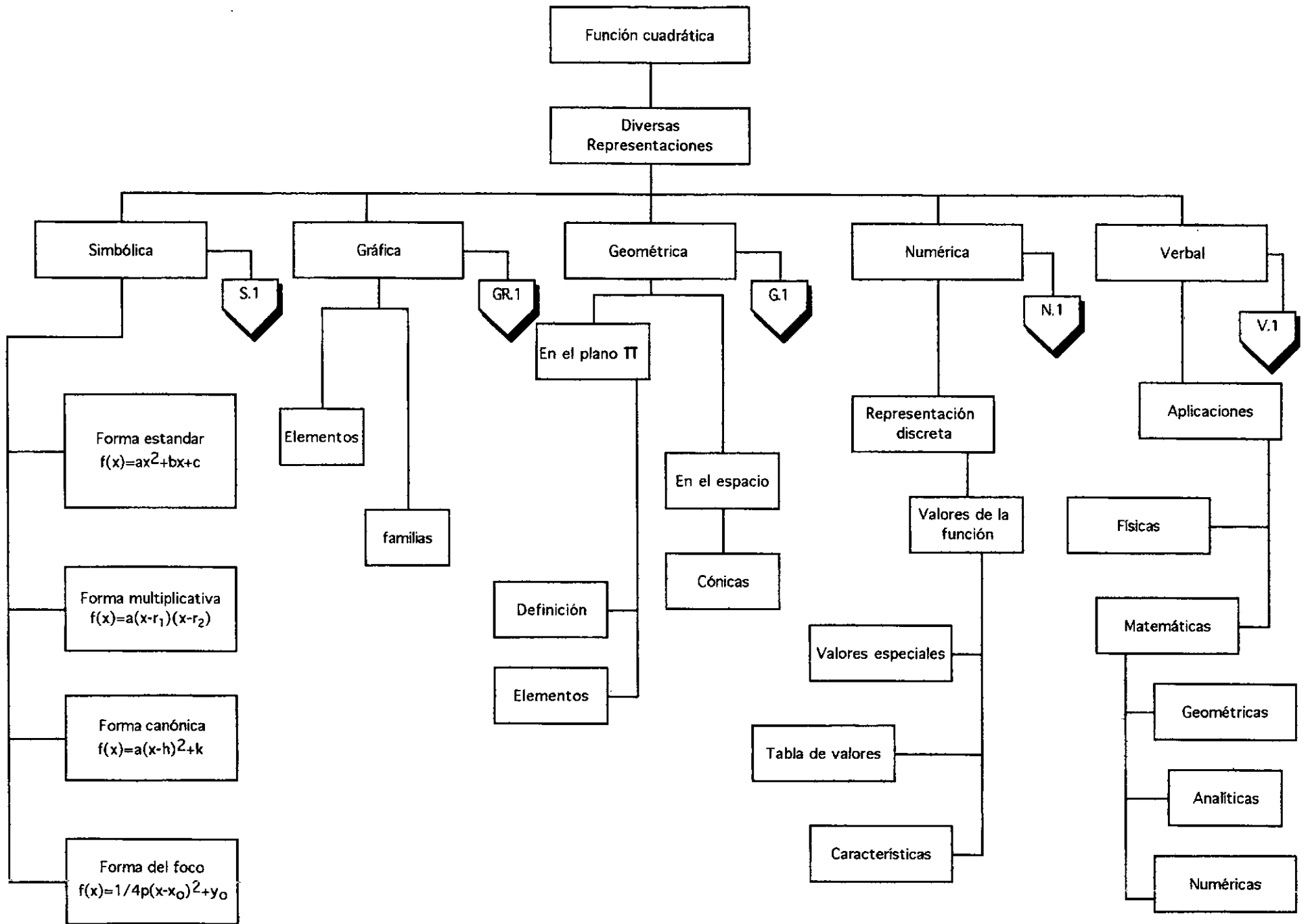
Verbal (V)

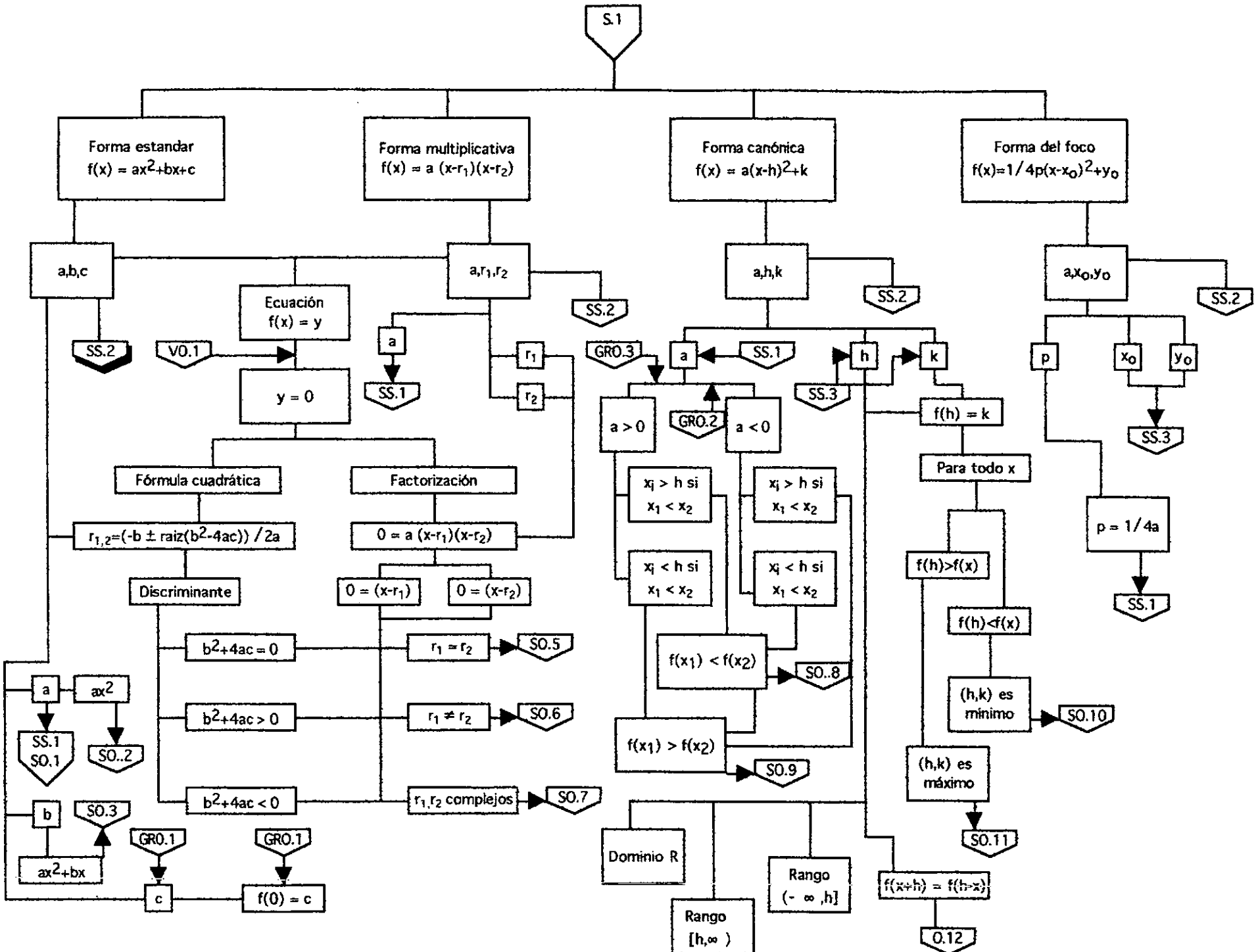
El significado que dimos a este sistema tiene que ver con la manera como, a partir del lenguaje común, podemos representar situaciones tanto del mundo real como del mundo de las matemáticas, para las cuales el modelo que las describe es la función cuadrática o conceptos ligados a ella. Estas situaciones pueden ser modeladas en cualquiera de los otros sistemas de representación.

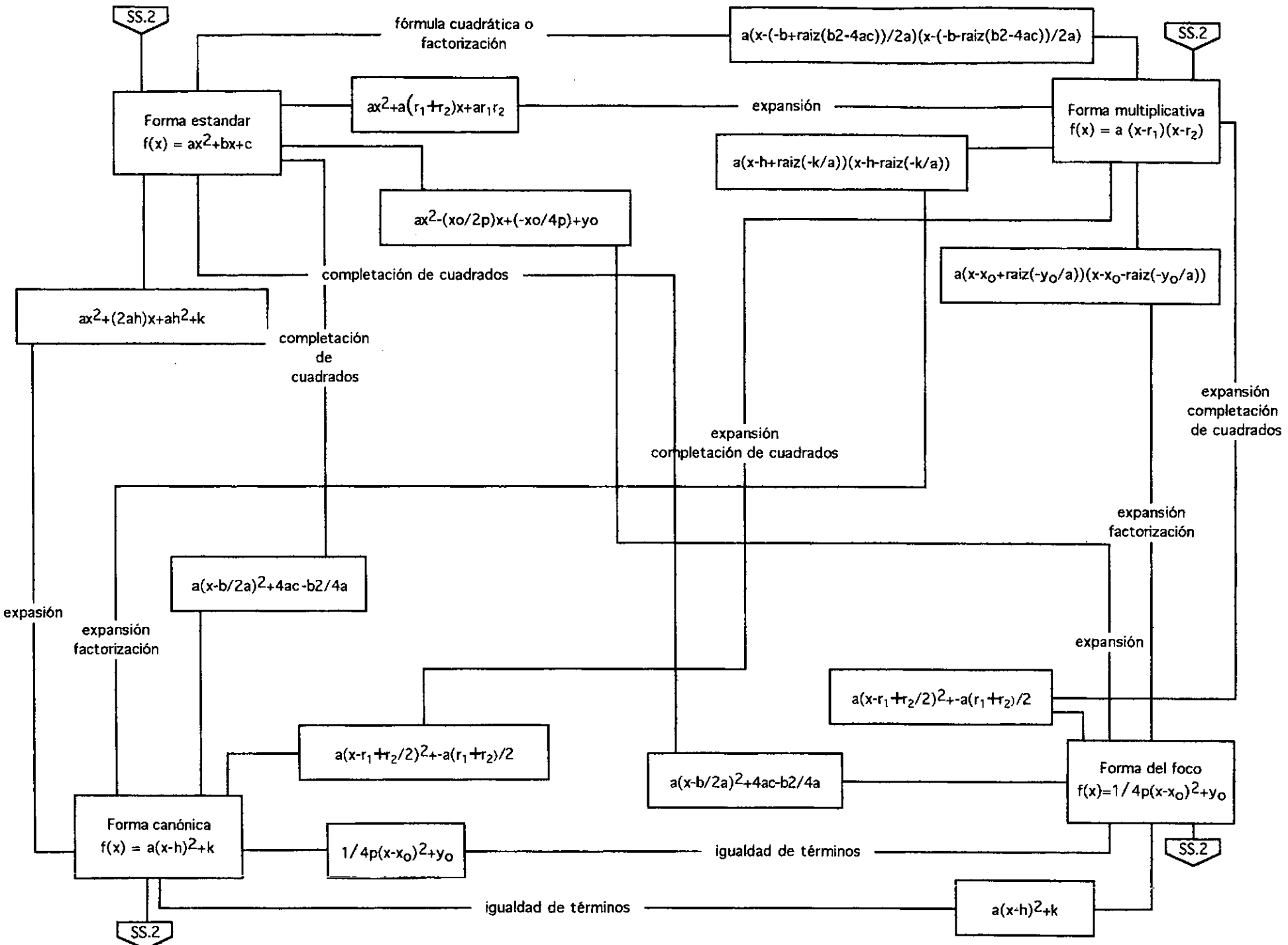
El mapa

La construcción del mapa tuvo diferentes etapas. En la primera se identificaron los sistemas de representación y se determinó lo que los caracterizaba junto con los elementos que deberían ir en ellos. En la segunda etapa se fue describiendo la función cuadrática y discutiendo sobre la mejor manera de organizar la información. El trabajo con los maestros y sus mapas fueron de gran ayuda para este proceso. Aunque en algunas versiones intermedias figuran elementos de los mapas de los maestros, que en su momento nos parecieron importantes, la versión final presenta esa información pero organizada de manera diferente. Es el caso por ejemplo de una tabla de relación entre parámetros que hizo uno de los grupos y que en un principio incluimos en nuestro mapa pero que después terminó siendo el submapa de las relaciones entre las diferentes formas simbólicas.

El mapa quedó organizado por los cinco sistemas de representación anteriormente descritos. Por otro lado, nuestro mapa presenta diferentes tipos de conexiones. Dado que el mapa completo no lo podemos poner en una sola hoja, se codificaron las uniones del mapa mediante una caja marcada con la inicial del sistema de representación y el número de la unión. Las conexiones implícitas se ven cuando, por ejemplo, en el sistema de representación numérico o en el gráfico utilizamos los parámetros de las formas simbólicas. Las conexiones entre diferentes sistemas de representación se presentan en cajas de forma no rectangular con flechas. La caja lleva el nombre de la inicial del sistema de representación de donde sale la conexión y la inicial de Otros para indicar la conexión con otros sistemas de representación (SO, GO, GRO, VO o NO). Cuando la conexión es interna, ésta se codifica con la doble inicial del sistema de representación de donde ella sale y entra (SS, GG, GRGR, VV o NN).







GR.1

Elementos

Familias

GO.2

vertice

foco

directriz

segmento focal

parábola

Gráfica

GRGR 1

GO.1

GO.3

Directriz (D)
 $y=k-p$

cóncava hacia abajo

SO.12

eje de simetría

$y=h$

punto de corte con el eje Y

$A(0,c)$

GRO.1

$D(h,k)$

SO.10

$[(-2p-h,p+k), (2p-h,p+k)]$

creciente en el intervalo $[-\infty, h)$

sin puntos de corte con X

SO.7

SO.11

$E(h,p+k)$

La distancia de cualquier punto de la parábola al foco es la misma que la distancia de ese punto a la directriz.

$d((-2p-h,p+k), (2p-h,p+k)) = 4p$

decreciente en el intervalo $[h, \infty)$

puntos de corte con el eje X

$B(r_1,0)$

$C(r_2,0)$

cóncava hacia arriba

paralelo a la directriz y pasa por el foco

creciente en el intervalo $[h, \infty)$

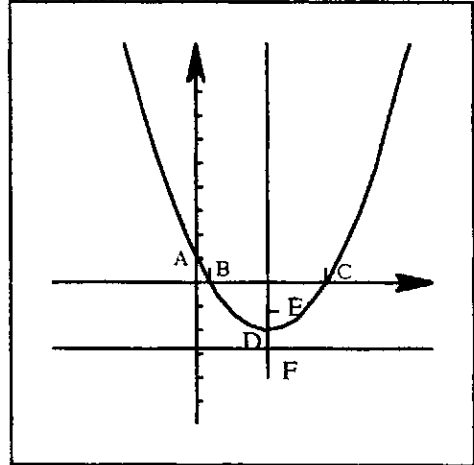
SO.6

$r_1 \neq r_2$

corta el eje X en dos puntos

$r_1 = r_2$

corta el eje X en un punto



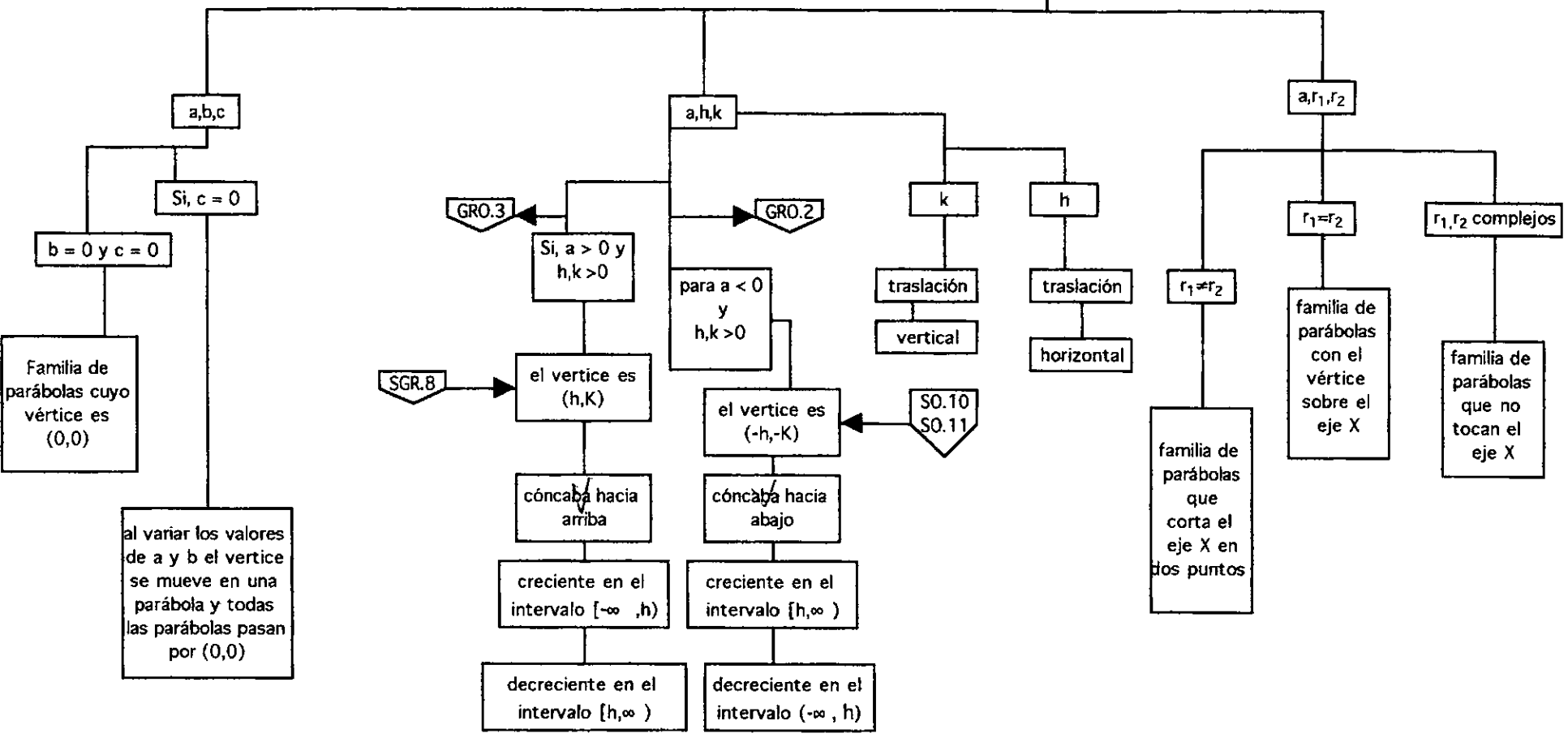
p es la distancia del vertice al foco y del vertice a la directriz

SO.8

decreciente en el intervalo $(-\infty, h)$

SO.9

GRGR 1



Cóncava

G.1

en el plano

en el espacio

parábola

cónicas

lugar geométrico de los puntos A

elementos

hipérbolas

elipse

GO.1

vertice V

segmento focal [A₁, A₂]

parábola

circunferencia

foco (F)

directriz D

punto

recta

recta P perpendicular a D

A₁, A₂ intersección parábola con recta paralela a M_V tangente en V

[F, I]

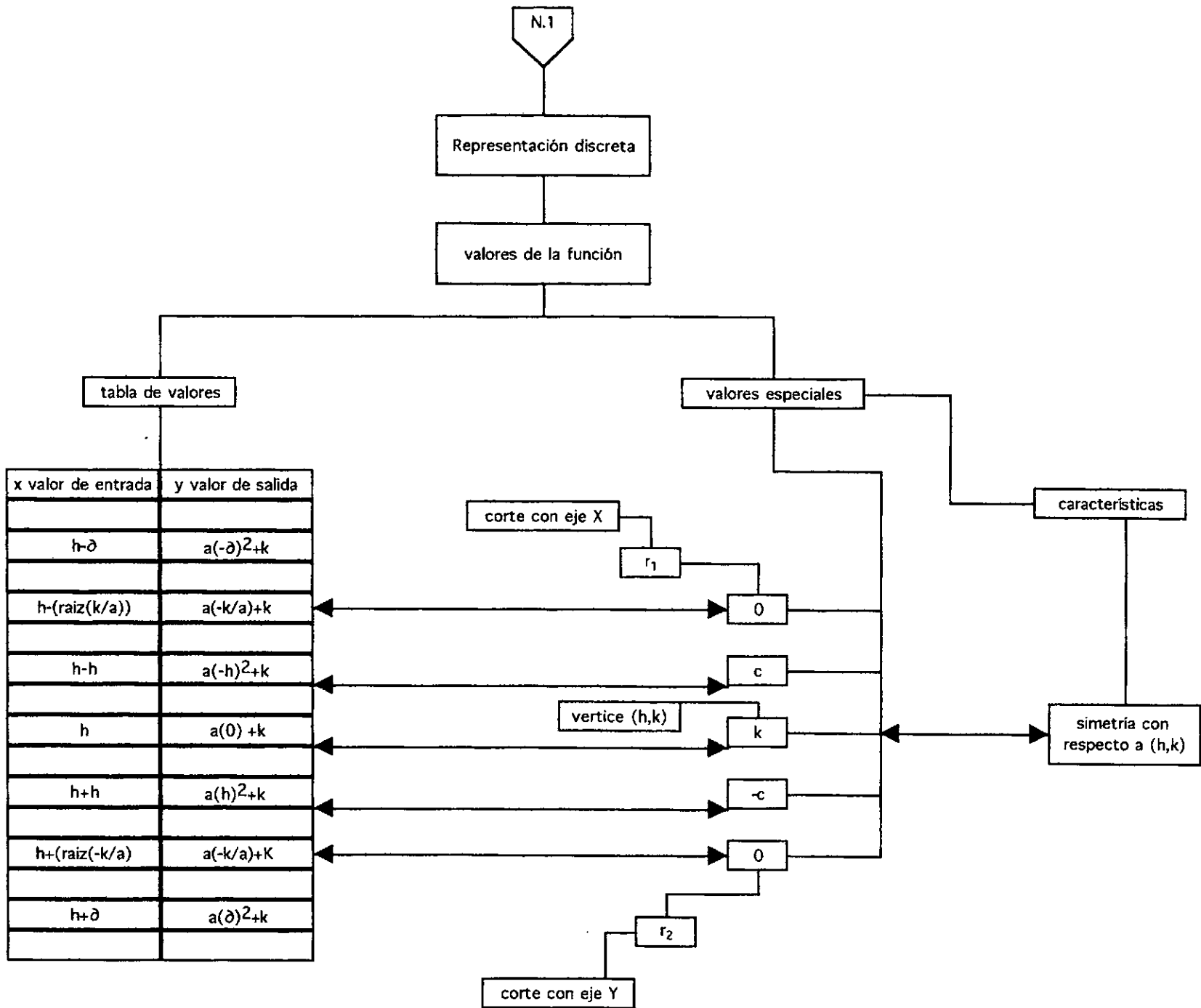
I intersección P con D

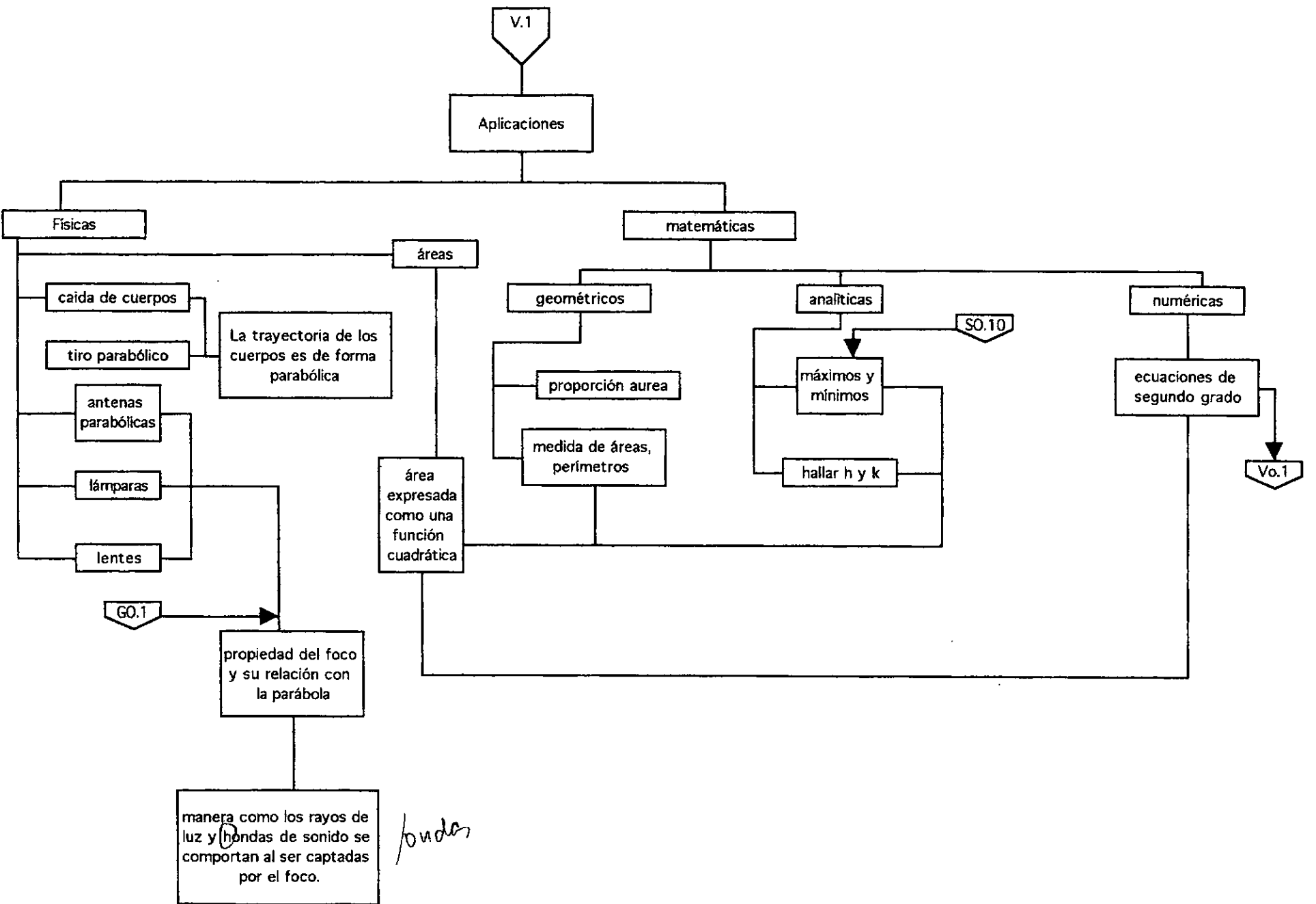
A punto de intersección entre M y P

M mediana del segmento [F, I]

punto perteneciente a la parábola tal que $d(F, V) < d(F, A)$ para todo punto A de la parábola

tangente a la parábola





Problema

Las ideas conceptuales presentadas hasta ahora nos permiten regresar al problema general que dio lugar a este estudio para efectos de re-formularlo. Hacemos entonces un recuento de lo que se ha presentado hasta ahora.

El problema general que dio lugar a este estudio tenía que ver con la contrastación de una hipótesis que surgió, a nivel intuitivo, a lo largo de la realización de varios programas de formación permanente de profesores. Nosotros percibimos que, cuando los profesores se enfrentan al problema de analizar un concepto matemático desde la perspectiva del análisis didáctico (análisis de contenido, análisis de instrucción y análisis cognitivo) con la ayuda de los sistemas de representación y los mapas conceptuales como eje organizador, los primeros, y como herramienta de representación, los segundos, entonces los profesores se hacen paulatinamente más conscientes de la complejidad del contenido matemático en cuestión y de la problemática de su enseñanza y aprendizaje.

Resultaba evidente que, para aproximarse a esta hipótesis, era necesario darle un significado al término "consciencia de la complejidad", significado éste que permitiera una aproximación sistemática y objetiva a las actuaciones de los profesores, único medio de exploración disponible. Por esa razón, hicimos algunas reflexiones sobre el tema de las concepciones de los profesores y asumimos una posición operativa de exploración de estas concepciones que se basaba en tres aspectos:

- identificar aquello que el profesor reconoce como esencial del objeto matemático;
- identificar el tipo de representaciones que utiliza para hacer la descripción del objeto; e
- identificar el conjunto de situaciones, problemas, etc. que el sujeto asocia al objeto, es decir para las cuales encuentra apropiado su uso como herramienta.

Con base en los aspectos anteriores y teniendo en cuenta el problema general que dio origen al estudio, decidimos explorar las concepciones de los profesores a través de una "ventana" que tenía las siguientes características:

- La situación que el profesor debía resolver consistía en la descripción del objeto matemático en cuestión.
- Se le pedía al profesor que utilizara los sistemas de representación como eje organizador de esa descripción.
- Se le pedía al profesor que utilizara los mapas conceptuales como herramienta de presentación de esa descripción.

Estas tres condiciones eran producto directo del problema original. Es decir, nos interesaba explorar el "efecto" en las concepciones del profesor de la utilización de los sistemas de representación y los mapas conceptuales en el ejercicio del análisis didáctico. Decidimos entonces analizar las características de los tres elementos involucrados: la función cuadrática como objeto matemático a describir; los sistemas de representación como eje organizador de la descripción; y los mapas conceptuales como sistema de representación de esa descripción.

El análisis conceptual nos permite ahora identificar un conjunto de atributos estructurales que pueden tener los mapas conceptuales que se realicen bajo las condiciones en cuestión. Estos atributos estructurales se pueden clasificar en cuatro grupos:

- los que se refieren a la estructura externa de los mapas;

- los que se refieren a la estructura interna dentro de cada sistema de representación;
- los que se refieren a las conexiones; y
- los que son específicos a la función cuadrática.

Para cada uno de los atributos se pueden definir un conjunto de indicadores de tal forma que cada mapa pueda tener un "valor" en cada atributo. Como se verá más adelante, es posible proponer una clasificación de las posibles combinaciones de valores de los indicadores de los atributos. Esta categorización pretende proponer una manera de resumir y organizar la diversidad de mapas producidos por los profesores y sugerir una serie de estados con base en los cuales el lector pueda tener una idea de la "consciencia de la complejidad" por parte del profesor.

Podemos entonces ahora re-formular el problema de investigación desde una perspectiva esencialmente operacional. El problema consiste en:

- codificar cada uno de los mapas de acuerdo a los atributos estructurales, y
- clasificar esta codificación de acuerdo con algún tipo de categorización.

Adicionalmente a los resultados que surjan de este proceso de codificación y análisis tendremos en cuenta otras fuentes de información que nos permitirán realizar un ejercicio de triangulación:

- El análisis cuantitativo del número (y porcentaje) de cajas de cada sistema de representación en cada mapa conceptual.
- El análisis cuantitativo (y porcentaje) de las conexiones en cada mapa conceptual.
- El análisis de los textos propuestos por los profesores adicionalmente a los mapas conceptuales.
- Nuestros registros de las intervenciones los profesores en las entrevistas y los seminarios.

Vamos ahora a describir en detalle el grupo de profesores con los que trabajamos, el tipo de interacción que tuvimos con ellos, las producciones consecuencia de esa interacción y los instrumentos de codificación y análisis de esa información, para después presentar los resultados obtenidos.

Estímulo y población

En este apartado hacemos una descripción de los profesores que participaron en el estudio y del esquema de trabajo que se realizó con ellos.

PROFESORES

Dado que este no era un programa formal de desarrollo profesional, la inscripción de los profesores en el proyecto no siguió el esquema tradicional que utilizamos para estos efectos. Contactamos a los profesores que han participado recientemente en nuestros programas de formación permanente de profesores de matemáticas y los invitamos a una reunión. En esta reunión les describimos los propósitos y el esquema de trabajo que pensábamos desarrollar. En esta descripción se insistió en que el proyecto no era de desarrollo profesional, sino de investigación y que ellos serían la principal fuente de información para el estudio. Por lo tanto, los profesores no recibirían beneficios formales (como créditos en el escalafón docente). El principal beneficio de su participación era la vivencia de la experiencia misma y lo que ésto les podría aportar. Motivamos a los profesores indicándoles que éste sería un proyecto de investigación *conjunto* en el que, además de ser fuente de información, ellos también asumirían el papel de investigadores en una de las fases del estudio.

El compromiso que los profesores debían asumir era importante. Por un lado, se comprometían a asistir a los seis seminarios que duraban cuatro horas cada uno y a las tres entrevistas por grupo, de una hora cada una. Por el otro, se comprometían a trabajar durante los tres meses, reuniéndose en grupos y produciendo los documentos que se les pediría en cada ocasión. Se necesitaba además que los directivos de su institución escolar estuvieran de acuerdo con su participación en el proyecto. Logramos conformar un grupo de 30 profesores que estaban interesados en ser parte del proyecto.

ESQUEMA DE TRABAJO

Dados los propósitos del estudio, nosotros buscamos que el esquema de trabajo con los profesores "simulara" los principales aspectos de nuestros programas de formación permanente de profesores. Estos aspectos se refieren a dos dimensiones: el contenido y la interacción. La dimensión de contenido se debía caracterizar por centrarse en un tema matemático específico (en este caso, la función cuadrática); por tratar ese contenido matemático con la aproximación del análisis didáctico (análisis de contenido, análisis de instrucción y análisis cognitivo); por tomar los sistemas de representación como eje organizador del tratamiento del contenido matemático; y por utilizar los mapas conceptuales como herramienta descriptiva. La dimensión de interacción se debía caracterizar por buscar que los profesores produjeran su trabajo en grupo; por crear espacios de socialización de las producciones de los profesores; y por crear espacios de interacción individual entre los grupos de profesores y nosotros, como investigadores. Con base en estos principios, el esquema de trabajo se realizó como se tenía previsto en el diseño original. Lo describimos brevemente a continuación.

Los profesores se organizaron en grupos de acuerdo a sus afinidades y a la facilidad con que ellos podrían reunirse periódicamente para realizar el trabajo. Algunos grupos tenían varios profesores de una misma institución. Cada uno de los grupos tuvo que realizar las actividades que se enumeran a continuación. Estas actividades buscaban crear un espacio de trabajo en el que se produjera una serie de documentos y se realizara una serie

de reuniones y de entrevistas. Las actividades estuvieron compuestas por "módulos". Cada módulo tuvo la misma estructura y correspondió a un tema diferente. Los temas fueron: análisis de contenido, análisis de instrucción y análisis cognitivo.

La estructura de cada módulo estuvo compuesta de un seminario inicial, una entrevista de cada grupo con los investigadores y un seminario final. En el seminario inicial de cada módulo se hizo una presentación del propósito del módulo y se le pidió a los grupos de profesores que hicieran una primera aproximación al trabajo correspondiente. Por ejemplo, en el caso del módulo sobre análisis de contenido, al inicio de la reunión se introdujo el propósito del mismo, se presentó la función cuadrática como tema matemático, y se recordaron las principales características de los mapas conceptuales y de los sistemas de representación. En seguida, se pidió a cada grupo de profesores que produjeran un primer mapa conceptual del análisis de contenido para la función cuadrática. Esto produjo un documento (mapa conceptual) que fue utilizado como fuente inicial de información para este aspecto del proyecto. En seguida, se pidió a los grupos de profesores que, durante las siguientes dos semanas, se reunieran por su cuenta, y que trabajaran en la producción de una mejora de ese mapa conceptual. Esto produjo un segundo documento que ellos trajeron a una entrevista en la que el grupo presentó a los investigadores el fruto de su trabajo y justificaron su contenido. Este segundo documento y el registro de los comentarios de los profesores durante esta segunda entrevista fueron dos fuentes de información intermedias. Los investigadores reaccionamos a este trabajo y le pedimos a cada grupo de profesores que mejoraran su trabajo para ser presentado en el seminario final del módulo. Allí cada grupo entregó una versión final de su trabajo y se hizo una puesta en común del trabajo de todos los grupos. Este documento final y la discusión producto de la puesta en común fueron las fuentes finales de información para el módulo correspondiente.

El proceso anterior se realizó para cada uno de los tres módulos: análisis de contenido, análisis de instrucción y análisis cognitivo. El módulo de análisis de instrucción se trabajó de una manera particular, pues en él, los profesores asumieron el papel de investigadores, explorando, con base en el trabajo previo del módulo de análisis de contenido, la forma como se enseña el tema en cuestión. Se hizo una reunión final con los profesores después de la finalización del tercer módulo.

EJECUCIÓN DEL ESQUEMA DE INTERACCIÓN

El esquema de trabajo se realizó tal y como estaba previsto en el diseño del proyecto original. Además de percibir, a través de las producciones y los comentarios de los profesores, la evolución en sus concepciones del contenido matemático (objeto de este reporte), constatamos otros aspectos del comportamiento y de los comentarios de los profesores que queremos comentar informalmente aquí.

Hubo deserción a lo largo del proyecto. Terminamos trabajando con alrededor de veinte de los treinta profesores que se comprometieron inicialmente. Esta deserción tuvo lugar principalmente durante el primer módulo, cuando algunos profesores se percataron de que no les era posible dedicar el tiempo que era necesario para realizar el proyecto. A partir del segundo módulo, el grupo de profesores permaneció estable.

Los profesores trabajaron con mucho entusiasmo y le dedicaron más tiempo y esfuerzo del que nosotros esperábamos. Fue evidente que el trabajo que ellos realizaron por fuera de los seminarios y entrevistas era muy interesante y atractivo para ellos. En la mayoría de los casos, la producción de los profesores demostraba un interés y una dedicación muy intensos hacia el proyecto.

Los comentarios de los profesores nos muestran, de manera intuitiva, que no solamente ellos se estaban haciendo más conscientes de la complejidad del contenido matemático y de la problemática de su enseñanza y aprendizaje, sino que estaban "descubriendo" otros aspectos de la educación matemática. Aunque no podemos justificar esto de manera sistemática aquí, consideramos que los profesores fueron cambiando su visión de las prio-

Cómo es la reacción?



ridades y de los papeles de los elementos en el triángulo aprendizaje–enseñanza–contenido matemático. Estas apreciaciones intuitivas se harán más claras cuando presentemos los resultados del estudio.

Los profesores hicieron investigación. Esta era una de las motivaciones para que los profesores se interesaran inicialmente en participar en el proyecto. El trabajo que se realizó en este aspecto fue interesante, principalmente porque estuvo basado en la práctica, más que en la teoría. Cuando ellos tuvieron que realizar el módulo de instrucción, el problema de investigación era bastante claro y existía un sustento conceptual (el análisis de contenido de la función cuadrática). Por consiguiente, la problemática de realización de la exploración se centró en el diseño y justificación de instrumentos de recolección, codificación y análisis de la información. Algunos grupos de profesores llegaron a diseñar instrumentos y a producir resultados muy interesantes.

Desde el punto de vista de los profesores fue evidente que el diseño del proyecto omitió un cuarto módulo. Se trata del módulo de diseño curricular. Este módulo (o algo similar) existe en nuestros programas de formación permanente de profesores. Sin embargo, no lo incluimos en el estudio para efectos de reducir el tamaño del mismo y esto fue un error. Fue evidente que el proceso que los profesores realizaron los preparó y motivó para diseñar actividades de clase sobre la función cuadrática. A diferencia de otras ocasiones en las que le hemos pedido a los profesores que realicen un diseño curricular y hemos percibido que ellos se sienten incómodos con la tarea, en esta ocasión percibimos que los profesores tenían deseos de realizar esta actividad y que se sentían confiados y preparados para hacerla.

A continuación presentamos la descripción que una profesora participante hizo de la manera como se realizaron las primeras dos terceras partes del proyecto. Consideramos que esta descripción es interesante, pues se describe el proyecto desde la perspectiva de uno de los profesores participantes.

RELATO DE UNA PROFESORA PARTICIPANTE

Para el desarrollo de este proyecto investigativo, sus proponentes convocan a algunos profesores de matemáticas en secundaria vinculados a centros educativos distritales oficiales que han realizado cursos de capacitación en una Empresa Docente de la Universidad de los Andes en el marco de los PFPD financiados por la Secretaría de Educación del Distrito Capital. A esta invitación concurren 35 docentes aproximadamente quienes confirmaron su disposición y compromiso para participar en el proyecto.

El trabajo se inicia con una jornada para *contextualizar el proyecto investigativo* por parte de los investigadores principales dando a conocer la entidad patrocinante de la investigación y la entidad que tiene la responsabilidad académica del mismo; *presentar el propósito*, el cual se refiere a explorar la manera como las concepciones de los profesores que enseñan matemáticas evolucionan en la medida que se acercan al uso de las tecnologías (con herramientas como los mapas conceptuales) en el tema de la función cuadrática; *describir la participación de los docentes invitados*, referida a la interacción con los investigadores principales en calidad de pares y la realización de actividades como tratamiento y análisis de información, elaboración del análisis de contenido, de instrucción y cognitivo sobre la función cuadrática; *concertar la estrategia de trabajo del equipo* llegando a un acuerdo de trabajar en 6 jornadas de abril a mayo combinando sesiones de desarrollo conceptual y asesorías por grupos; *explicar las razones* por las cuales se toma el tema de función cuadrática, basadas en que el grupo de investigación de una Empresa Docente ha realizado trabajos alrededor de esta temática y por ello tiene un alto conocimiento sobre el mismo, los antecedentes investigativos del equipo sobre el tema han sido significativos y que además ha trabajado este mismo enfoque de mapas conceptuales con función lineal e *indicar los módulos* que conforman el trabajo de los investigadores invitados, que tienen que ver con el análisis didáctico y comprende el análisis de contenido, el análisis de instrucción, el aná-

lisis cognitivo, el análisis fenomenológico y el análisis epistemológico; también se definió que para efectos de ese trabajo, los dos últimos componentes no se desarrollarían.

En estas perspectivas, se precisa la significación de cada elemento que constituye el análisis didáctico así:

- *Análisis de contenido*: se refiere al tema específico y los conceptos involucrados en el mundo de las matemáticas.
- *Análisis de instrucción*: relacionado con la manera de cómo tratan el tema específico los libros de textos y de cómo lo enseñan los maestros.
- *Análisis cognitivo*: tiene que ver con la manera de cómo los estudiantes aprenden esas nociones.
- *Análisis fenomenológico*: es la identificación de los problemas o eventos de la vida real donde se cumple o se aplica el tema que se analiza.
- *Análisis epistemológico*: es la historia del tema, de dónde surgió y cómo se desarrolló.

En este contexto, se define la organización de grupos de 4 o 5 personas para la realización de las diferentes actividades y se asigna la primera tarea del *primer módulo* que consiste en construir un mapa conceptual sobre el contenido matemático que involucra la función cuadrática; fue nuestra primera experiencia en el proyecto para elaborar un análisis contenido. Esta experiencia personal resultó desequilibrante para cada uno de los miembros de nuestro grupo porque dudamos mucho en las conexiones que debía presentar el mapa en sus componentes; dicho mapa se caracterizó por enfatizar y relacionar solamente los procedimientos de solución a ecuaciones cuadráticas y algunos aspectos de la representación gráfica. No menos preocupante fue lo que ocurrió en los otros grupos, los resultados fueron similares. Sin embargo, se crearon expectativas acerca de cómo lo pudieran representar nuestros compañeros de matemáticas de la institución, nos fuimos con esa inquietud que al mismo tiempo la consideramos como una tarea específica para realizar.

En la primera sesión de asesoría hicimos los comentarios pertinentes (fueron muchos) a nuestra mapa conceptual; hubo una orientación por parte de los investigadores principales, se dieron algunas pautas para la reconstrucción del mapa que representaba el análisis de contenido como fue, los aspectos fundamentales que debía llevar respecto a la función cuadrática: los diferentes sistemas de representación simbólica, gráfica, verbal, tabular o numérica y geométrica.

En las siguientes sesiones de trabajo empezamos a socializar con todo el equipo los respectivos mapas conceptuales que de alguna manera, para todos nosotros, empezaba a representar el análisis de contenido de la función cuadrática que constituía el producto final de este módulo. El resultado fue exitoso, porque cada uno de los grupos trabajó de manera significativa en los mapas los sistema de representación de la función cuadrática pero sí se evidenció en cada uno de ellos un desarrollo más completo en uno de los sistemas de representación en particular; este suceso dio la oportunidad para que cada grupo tuviera una copia de los mapas conceptuales del análisis de contenido de todos los otros.

Como estrategia de retroalimentación en los grupos, la revisión de todos los mapas conceptuales sobre el análisis de contenido elaborados, aportó elementos importantes para que cada uno de los grupos ampliara el propio.

Los resultados de esta experiencia fueron fantásticos como dinámica de grupo, *hubo comentarios más argumentados* para los otros grupos sobre la misma construcción de los mapas y las conexiones entre sus elementos, se evidenció en cada uno de los participantes la realización de un proceso metacognitivo acerca de lo que cada uno viene enseñando sobre función cuadrática, manifestándose el reconocimiento a que se hace de manera incompleta, no se trabaja en clase las transformaciones que permitan pasar de uno a otro sistema de representación, se enfatiza sobre procedimientos para la solución de ejercicios y en general

no se tiene una visión completa y relacionada de los elementos que se integran en el análisis de contenido, cada sistema de representación se trabaja de manera aislada.

En este mismo marco se reflejaron sentimientos personales de los docentes en cuanto a que a pesar de la descontextualización del maestro mismo en la globalización del tema de función cuadrática, los alumnos alcanzaban a entender algunos conceptos y nociones de este objeto matemático; así mismo, se hicieron conclusiones sobre el aporte que este tipo de instrumentos, mapas conceptuales en el análisis de contenido de un objeto matemático, sí contribuye a precisar y dar mayor comprensión al maestro acerca de los contenidos que involucra un tema específico de matemáticas.

Después de estos ejercicios, cada grupo, lo mismo que en nuestro grupo, aseguró tener un mayor conocimiento y comprensión del contenido y relaciones, entre las nociones y conceptos sobre la función cuadrática: este evento quedó materializado en una mejora bastante significativa en cada uno de los mapas conceptuales sobre el análisis de contenido; en ellos se ilustraba la solución al problema de cómo representar ese objeto matemático en diferentes sistemas, simbólico, verbal, gráfico, geométrico y tabular. Aquí se dio por terminado ese primer módulo: análisis de contenido.

Al empezar el *segundo módulo*, el análisis de instrucción, se fijaron las metas, éstas debían referirse a las respuestas de cómo se enseña el tema de la función cuadrática? con la posibilidad de ir mejorando o haciendo ajustes al análisis de contenido; así mismo se determinaron algunos parámetros que ayudaban a este propósito, ellos fueron:

- Su propia experiencia en la enseñanza del tema.
- Indagar con los colegas de cómo lo hacen.
- Revisar la tradición para la enseñanza del tema.
- Tomar otras fuentes como el currículo actual y el institucional.
- Identificar en los textos escolares como tratan el tema.
- Realizar pruebas con los estudiantes.

La metodología recomendada para la realización de esta tarea, fue la de tener un mapa conceptual sobre el análisis de contenido lo más completo posible y con esta referencia marcar en él los resultados del tratamiento que dan cada una de las fuentes de información.

En el desarrollo de este segundo módulo se crearon muchas preocupaciones e inquietudes sobre la manera de cómo se viene enseñando el tema porque se anotaron las siguientes conclusiones:

Los colegas en general trabajan algunas formas de la representación simbólica pero la que sí es de trabajo generalizado es la de forma $F(x)=ax^2 + bx + c$ y algunos elementos de la representación gráfica, fue muy notorio que en casi todos los grupos identificaron que la forma de representación geométrica muy poco o casi nada se toca en clase.

De la misma manera pasa en los textos escolares, en varios grupos coincidió que sólo un libro de los 8 diferentes analizados se aproximaba más al tratamiento de las nociones que estaban contenidos en el mapa conceptual del análisis de contenido. Involucra cuatro de los cinco sistemas de representación de la función cuadrática. En el análisis de cómo indicaban objetivos, contenidos, metodología y evaluación, se vislumbró que el objetivo que se deduce en algunos de ellos no se corresponde con lo que evalúan en el mismo texto.

En cuanto a los currículos el actual y el institucional, parece no notarse una diferencia significativa en sus concepciones, prevalecen los enfoques que el MEN presenta en los documentos de sus lineamientos curriculares. Sin embargo se hace ver que los lineamientos curriculares del MEN no hacen explícitos los logros o indicadores de logros referidos a todos los 5 sistemas de representación de la función cuadrática.

Recolección, codificación y análisis de la información. Primeros instrumentos

En este apartado describimos las primeras versiones de los instrumentos de recolección, codificación y análisis de información que han sido utilizados en este estudio. La versión final de estos instrumentos (que se presenta en el apartado siguiente) dependió del diseño de estas primeras versiones.

RECOLECCIÓN DE LA INFORMACIÓN

El proceso de recolección de la información ya fue descrito en apartados anteriores: la información se recogió en la forma de mapas conceptuales en diferentes momentos como consecuencia de las tareas que les pedimos a los profesores en el desarrollo del esquema de trabajo e interacción presentado en el apartado anterior. Se recogieron, por consiguiente, nueve mapas conceptuales para cada uno de los cinco grupos de profesores. Además se recogieron textos que los grupos de profesores produjeron, cuando consideraron necesario, y que ellos adjuntaron a los mapas conceptuales que estaban entregando. Adicionalmente, nosotros hicimos registros escritos de los comentarios de los profesores, tanto durante los seminarios de socialización, como en las entrevistas individuales.

Aquí queremos, en todo caso, hacer algunas aclaraciones sobre las condiciones que se impusieron en las tareas que se pidieron a los profesores. Las tareas no eran "libres". Es decir, las tareas no consistían en pedirle a los profesores "hagan una descripción de la cuestión cuadrática"⁵, o "hagan una descripción de la manera como se enseña la cuestión cuadrática en su institución". Estas descripciones estaban condicionadas por los siguientes factores.

Mapas conceptuales. Las descripciones de los profesores debían utilizar los mapas conceptuales como herramienta de presentación. Aunque es posible argumentar (como ya lo hemos hecho) que los mapas conceptuales son una herramienta muy potente para este tipo de tarea, esta condición pudo haber restringido la producción de los profesores. En otras palabras, es posible que hubiese elementos de las concepciones de los profesores —relevantes para los objetivos del estudio— que no se hayan hecho explícitas en sus producciones. Esto puede tener diversas causas. Por un lado, para varios profesores, la herramienta de los mapas conceptuales era nueva y ellos no tenían desarrollada su capacidad de expresar sus ideas dentro de este tipo sistema de representación. Por el otro lado, el manejo de los mapas conceptuales requiere que la información se presente de manera estructurada, pero ésta no es necesariamente una característica del conocimiento de los profesores.

Sistemas de representación. Los sistemas de representación son una noción muy potente de la educación matemática. Sin embargo, no todos los profesores la conocen y quienes la conocen no necesariamente la manejan adecuadamente. Como lo mencionamos en un apar-

⁵ Durante un tiempo hablamos de "cuestión cuadrática", en cambio de hablar de la función cuadrática porque no queríamos imponer necesariamente una visión funcional del objeto matemático.

→ *cuals
como*

tado anterior, el manejo formal de esta noción dentro de un mapa conceptual requiere que se conozcan las reglas que condicionan la identificación, creación y manipulación de los caracteres pertenecientes al sistema de representación en cuestión. Este no es un proceso fácil de realizar y los profesores tuvieron dificultades para hacerlo. Adicionalmente, el conocimiento de los profesores no se encuentra necesariamente estructurado teniendo a los sistemas de representación como eje organizador. Por consiguiente, la tarea estaba restringiendo el tipo de información que los profesores podían presentar en sus producciones. Adicionalmente, al pedir que los mapas conceptuales se organizaran alrededor de los sistemas de representación, nosotros éramos conscientes de que los profesores estaban presentando la información de una manera que no era necesariamente la que ellos hubiesen utilizado si no hubiésemos impuesto esta condición.

Visión funcional. Podemos hacer comentarios similares a los que ya se han hecho con respecto a este punto. Aunque nosotros hablamos durante el proyecto de la “cuestión cuadrática”, motivamos a los profesores a que miraran el contenido matemático desde una perspectiva funcional. Fue evidente que, para muchos profesores, ésta no habría sido la perspectiva que ellos habrían utilizado si la condición no hubiese existido.

Los comentarios anteriores buscan hacer explícito el hecho de que nosotros fuimos conscientes de que la manera como recogimos la información condicionó esa misma información. De hecho, este condicionamiento hacía parte de los objetivos originales del proyecto: nos interesaba explorar el efecto de estas condiciones (y del trabajo que surgía de ellas) sobre las concepciones de los profesores.

Los mapas producidos por los profesores se encuentran en el anexo 1. El anexo 2 incluye los textos que algunos profesores adjuntaron a estos mapas en algunas ocasiones.

CODIFICACIÓN DE LA INFORMACIÓN

La información recogida en los mapas conceptuales entregados por los profesores fue codificada varias veces. Este proceso iterativo nos permitió, por un lado, conocer en detalle estos mapas, y, por el otro, re-diseñar los instrumentos de codificación. En esta sección describimos la historia de estos instrumentos de codificación que hemos rotulado como:

- mapas de referencia,
- análisis de eventos,
- análisis cuantitativo y
- análisis por categorías.

El último instrumento (análisis de atributos estructurales) y la consiguiente categorización de los mapas se presenta en el apartado que le sigue a éste.

Condiciones sobre el instrumento

El proceso iterativo de diseño, utilización y evaluación de los instrumentos de codificación que se describen en este apartado estuvo guiado por un grupo de condiciones que nos impusimos desde un comienzo. Nosotros deseábamos que el instrumento:

- describiera, en la medida de lo posible, las impresiones intuitivas que habíamos generado cuando revisamos informalmente las producciones de los profesores;
- permitiera una codificación sistemática y objetiva que no dependiera de interpretación por parte de quien codifica;

el estudio de Williams (1998). Como se verá más adelante, estos mapas conceptuales de referencia serán nuestro instrumento de codificación.

Más adelante se describía el proceso de codificación (p. 28):

Para el análisis de contenido [...], desarrollaremos un proceso de codificación y análisis de información, consistente en identificar en los documentos entregados por los grupos de profesores y en [los registros] de las reuniones y de las entrevistas, aquellos elementos de los mapas de referencia que ellos mencionan explícitamente, aquellos elementos que nos son mencionados y aquellos aspectos que son mencionados por los profesores y que no deben pertenecer a los mapas conceptuales.

X

De hecho, estos mapas conceptuales de referencia se produjeron durante el proyecto y su producción aprovechó la experiencia de interactuar con los profesores y de constatar el tipo de información que ellos presentaban. La reflexión conceptual que se hizo de la función cuadrática en un apartado anterior está basada en el trabajo que se hizo sobre estos mapas conceptuales. Además, este trabajo nos permitió construir una base sólida sobre la que pudimos realizar el proceso iterativo de diseño de instrumentos de codificación que estamos describiendo en este apartado. Sin embargo, nunca diseñamos el sistema de producción de marcas en los mapas conceptuales de referencia como medio para codificar la información de los mapas conceptuales de los profesores. Cuando nos preparábamos a hacer este proceso, decidimos hacer una primera revisión de los mapas conceptuales de los profesores y, con motivo de esta primera revisión, se produjo el primer instrumento de codificación (el análisis de eventos) que describimos a continuación.

Análisis de eventos

Esta primera revisión de los mapas nos mostró que el esquema de “marcas” que pensábamos desarrollar con los mapas de referencia no nos habría permitido caracterizar las producciones de los profesores en términos de estructura, manejo de sistemas de representación y contenido matemático. De hecho, comenzamos a hacer apuntes de nuestra revisión de los mapas teniendo en cuenta cuatro dimensiones:

- estructura,
- sistemas de representación,
- dualidad operacional–estructural y
- conexiones.

Para estas dimensiones identificamos una serie de “eventos” que se encontraban principalmente centrados en la comparación de un mapa conceptual con su versión inmediatamente anterior. Estos eventos eran:

- reestructuraciones,
- aparición y desaparición de cajas,
- “explosión” de una parte de un mapa,
- aparición y desaparición de conexiones y
- tratamiento de la ecuación cuadrática y de las fórmulas.

Con base en estas dimensiones y en estos eventos produjimos un conjunto de tablas, una por cada grupo, en las que registramos, para cada mapa y para cada dimensión, los eventos que era posible identificar. Recordemos que había cinco grupos de profesores y que cada grupo produjo nueve mapas, tres por módulo, uno al comienzo del módulo, uno para la reunión de asesoría y uno al final del módulo. La tabla 1 muestra un ejemplo de

una porción de estas tablas. La totalidad de las tablas producidas se encuentran en el anexo 3.

Grupo 1	Mapa 4	Mapa 5
Estructura	Se mejora sustancialmente el manejo formal del lenguaje de los sistemas de representación. Explota por todas partes.	Explosión con motivo de la observación de los otros mapas. Hay reestructuración al interior de los sistemas de representación. Los nombres de las flechas se vuelven cajas.
Sistemas de representación	Aparece representación geométrica. Aparecen nuevos elementos en cada sistema de representación y en cada forma simbólica. Aparece "parábola" en representación geométrica. Se organizan mejor las cuatro formas simbólicas. Desaparecen los casos particulares.	Aparecen "otras representaciones". La tabular está muy bien organizada. aparecen las descripciones de parámetros de una forma a otra. Aparecen los casos particulares de la forma estándar. En verbal, categorizan los problemas o fenómenos.
Conexiones	Desaparecen muchas conexiones implícitas porque las describen dentro del mismo sistema de representación. Aparecen las conexiones entre las formas simbólicas.	Hay muchas más conexiones implícitas. Aparecen explícitamente las conexiones implícitas en ambos sentidos.

Tabla N° 1. Ejemplo de codificación con análisis de eventos

Es evidente que este instrumento de codificación tiene muchos defectos. En particular, las categorías y los indicadores (en su mayoría implícitos) que se utilizan en él no permiten un proceso de codificación sistemático y objetivo. Además, la información codificada allí no representaba necesariamente nuestras intuiciones sobre lo que se percibía en los mapas. No obstante, este primer proceso de codificación nos permitió construir estas intuiciones y, en ese sentido, fue muy importante. El paso siguiente consistió en tratar de identificar una categorías más claras para las cuales pudiéramos definir unos indicadores que permitieran una codificación mas sistemática y objetiva. De allí surgió el análisis por categorías. En el intermedio, nos dimos cuenta que el "tamaño" de los mapas y, en particular, el tamaño relativo de los submapas que se referían a los sistemas de representación y a las conexiones era una información importante en el análisis de los mismos. Por esa razón, diseñamos y aplicamos un instrumento cuantitativo de codificación que describimos a continuación, para después presentar el análisis por categorías.

Análisis cuantitativo

El análisis cuantitativo consistió en contar, para cada mapa de cada grupo, el número de cajas pertenecientes a cada uno de los sistemas de representación y el número de conexiones implícitas y explícitas (en este momento del proceso no habíamos definido las otras categorías de conexiones). Este análisis produjo una serie de tablas y gráficas para las

cuales presentamos un ejemplo a continuación. La Tabla 2 muestra el conteo y los porcentajes para sistemas de representación y las conexiones del grupo 1.

	1		2		3		4	
	#	%	#	%	#	%	#	%
Sistemas de representación								
Simbólica	16	64%	24	53%	48	47%	111	51%
Gráfica	7	28%	17	38%	34	33%	44	20%
Numérica	1	4%	2	4%	6	6%	28	13%
Verbal	1	4%	2	4%	7	7%	21	10%
Geométrica	0	0%	0	0%	7	7%	15	7%
Total	25		45		102		219	
Conexiones								
Implícitas	6	100%	23	77%	12	67%	17	57%
Explícitas	0	0%	7	23%	6	33%	13	43%
Total	6		30		18		30	

Tabla N° 2. Conteo de sistemas de representación (grupo 1)

En las figuras 2 y 3 se presenta gráficamente la información de la tabla 2.

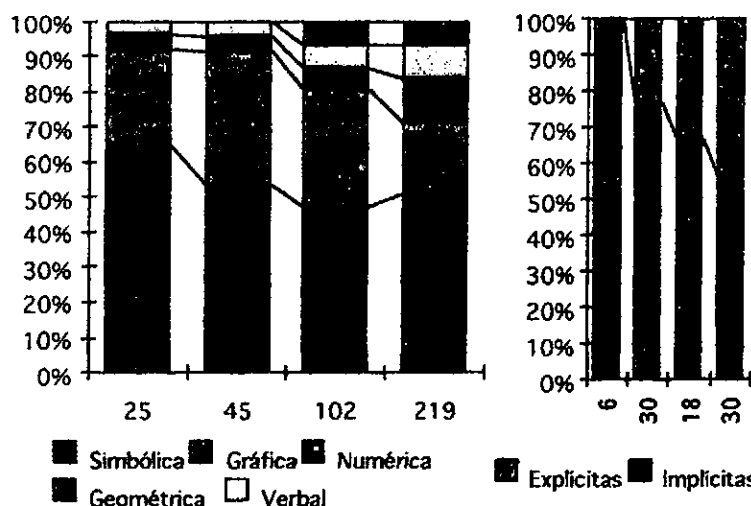


Figura N° 2. Representaciones

Figura N° 3. Conexiones

Análisis por categorías

Describimos ahora el tercer instrumento de codificación que hemos titulado “análisis por categorías”. Partiendo de la experiencia que tuvimos con el análisis de eventos, con este instrumento buscábamos identificar unas categorías más claras para las cuales pudiéramos definir unos indicadores que permitieran una codificación más sistemática y objetiva. La tabla 3 muestra las categorías que definimos junto con sus indicadores.

Categoría	Indicador		
Simbólica - gráfico	Cargado simbólico (SSG)	Cargado gráfico (SGG)	Equilibrio (SG)
Formas simbólicas	Número de formas presentadas		

Tabla N° 3. Categorías e indicadores del análisis por categorías

Categoría	Indicador	
Conexiones formas simbólicas	Número de conexiones entre formas	
Aparecen cajas	Sistemas de representación en que aparecen (S GR GE V N)	
Desaparecen cajas	Sistemas de representación en que desaparecen (S GR GE V N)	
Reestructuración	Con las misma información (MI)	Con nueva información (NI)
Tamaño mapa	Número de cajas en el mapa	
Visión	Algebraica (A)	Funcional (F)
Ecuación cuadrática	Centrado (C)	No centrado (NC)
Procedimientos	Centrado (C)	No centrado (NC)
Conexiones implícitas	Número	
Conexiones explícitas	Número	

Tabla N° 3. Categorías e indicadores del análisis por categorías

En este caso se hizo un esfuerzo parcial para definir cuidadosamente el significado de algunos de los indicadores. Por ejemplo, "estar cargado hacia lo simbólico" significa que el porcentaje de cajas en el sistema de representación simbólico es por lo menos el doble del porcentaje de cajas del sistema de representación gráfica. La tabla 4 muestra la codificación de la información de acuerdo a este instrumento para el grupo 1. La tabla completa para todos los grupos se encuentra en el anexo 4.

	Grupo 1			
	1	2	3	5
Sistema de representación				
Simbólico-gráfico	S SG	SG	SG	S SG
Otros sistemas	CAJ	AP	EQ	EQ
Formas simbólicas	2	4	4	4
Conexión FS	S	S	S	S
Aparecen cajas		SGRVN	TOD	TOD
Desaparecen cajas				
Reestructuración			MI	
Tamaño mapa	25	45	102	219
Operacional-estructural				
Visión	F	F	F	F
Ecuación cuadrática		NC	NC	NC
Procedimientos				
Conexiones				
Implícitas	6	23	12	17
Explícitas	0	7	6	13

Tabla N° 4. Ejemplo de codificación

Una vez se realizó esta codificación, volvimos a darnos cuenta de que las categorías y los indicadores no eran suficientemente operacionales, requerían de interpretación y que la información codificada no representaba apropiadamente la información que aparecía en los mapas. Es el caso, por ejemplo, de la categoría *visión* que percibíamos en los mapas a nivel intuitivo, pero para la que no teníamos unos indicadores objetivos. Por esta razón, regresamos a la reflexión conceptual para aclarar las características del contenido matemático (la función cuadrática), del eje organizador (los sistemas de representación), y del esquema de representación (los mapas conceptuales). De allí surgió el instrumento de codificación basado en los atributos estructurales que describimos en el apartado a continuación.

Sistemas de representación, mapas conceptuales y función cuadrática

Las reflexiones de los apartados sobre sistemas de representación, mapas conceptuales y función cuadrática (junto con la experiencia vivida con la aplicación de las primeras versiones de los instrumentos de codificación que se presentaron en el apartado anterior) nos permiten ahora discutir el problema de caracterizar las descripciones que un sujeto o un grupo de sujetos pueden hacer de la función cuadrática, cuando esta descripción se hace teniendo a los sistemas de representación como eje organizador y utilizando los mapas conceptuales como medio de representación. La pregunta que nos interesa responder en este apartado es la siguiente:

- ¿Cuáles son los atributos estructurales que pueden caracterizar un mapa conceptual de la función cuadrática producido por un grupo de profesores a partir del esquema de interacción descrito anteriormente?

Cuando utilizamos el término "atributo estructural" nos referimos a propiedades o características de un mapa que se pueden expresar de formas diferentes por diferentes sujetos, pero que permiten clasificar estos mapas diferentes en categorías uniformes. Queremos mostrar que es posible identificar algunos de estos atributos estructurales de tal forma que ellos sean específicos al problema de representar un objeto matemático. Hemos clasificado estos atributos en cuatro grandes grupos:

- los que se refieren a la estructura externa de los mapas;
- los que se refieren a la estructura interna dentro de cada sistema de representación;
- los que se refieren a las conexiones; y
- los que son específicos a la función cuadrática.

ESTRUCTURA EXTERNA

Este es un atributo sencillo, pero que diferencia de manera clara el tipo de representación utilizado en el mapa conceptual. Utilizamos únicamente dos indicadores:

- el mapa conceptual no está organizado alrededor de los sistemas de representación; o
- el mapa conceptual sí está organizado alrededor de los sistemas de representación.

Aunque el esquema de interacción requiera utilizar los sistemas de representación como eje organizador, es posible encontrar mapas conceptuales que no los utilizan para este efecto, aun si los sistemas de representación se mencionan dentro del mapa.

ESTRUCTURA INTERNA

Una vez que un mapa está organizado por sistemas de representación, es posible analizar las características de la descripción que se hace dentro de cada uno de estos sistemas. En muchos casos es posible encontrar mapas en los que se menciona un sistema de represen-

tación (por ejemplo, el numérico), pero en el que la descripción que se hace dentro de este sistema de representación es muy reducida. Por esta razón, decimos que la descripción dentro de un sistema de representación es *estructurada* si el sub-mapa correspondiente tiene tres o más niveles. De esta forma, una descripción puramente lineal (que presenta una serie de elementos al mismo nivel, pero que no presenta ninguna descripción de estos elementos) no es una representación estructurada (Ver figura 1).

Definimos entonces un indicador para este atributo: el número de sistemas de representación con descripciones estructuradas.

CUANTIFICACIÓN DE PRESENCIA DE LOS SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN

Este es un atributo que busca evidenciar otro aspecto de la complejidad de los mapas. Se cuenta el número de cajas pertenecientes a cada sistema de representación y se halla la suma total de cajas. Con base en estos datos se puede hallar el porcentaje de cajas correspondientes a cada sistema de representación. Este instrumento se describió en el apartado anterior.

CONEXIONES

En los apartados anteriores se vio que el atributo de las conexiones es trascendental en la caracterización de un mapa que describe un objeto matemático con base en los sistemas de representación. Identificamos conexiones de diferentes tipos.

Las conexiones *básicas* son aquellas que definen las ramas de un mapa conceptual dentro de un sistema de representación. Estas conexiones básicas caracterizan la estructura lineal de las ramas. No consideramos este tipo de conexiones como atributos estructurales de un mapa conceptual para efectos de su caracterización.

Las conexiones *internas* son aquellas que establecen relaciones entre dos elementos diferentes pertenecientes a un mismo sistema de representación. Las *externas* son aquellas que establecen relaciones entre representaciones de un mismo elemento en diferentes sistemas de representación.

Las conexiones (tanto internas, como externas) pueden ser *implícitas* o *explícitas*. Las conexiones explícitas se expresan en flechas que explícitamente establecen la conexión entre dos elementos. Las conexiones implícitas se expresan dentro de la caja de un mismo elemento al referirse a otro elemento (este el caso, por ejemplo, en el que se menciona el término vértice en la caja correspondiente a (h,k) en la forma canónica de la representación simbólica, o en el que se expresa un parámetro de una forma en función de parámetros de otra forma simbólica, dentro de la caja correspondiente al parámetro original).

Las conexiones pueden ser *puntuales* o *generales*. Las conexiones generales van de un elemento o grupo a otro grupo de elementos. Las conexiones puntuales van de un elemento a otro elemento.

Esta descripción del tipo de conexiones que pueden darse dentro de un mapa conceptual permite construir instrumentos de codificación y análisis detallados desde esta perspectiva. Por ejemplo, se pueden considerar cuatro tipos de indicadores para todos los tipos de conexiones:

- no existe ese tipo de conexión;
- ese tipo de conexión existe, pero únicamente entre el sistema de representación simbólico y el sistema de representación gráfico o dentro de uno de estos dos sistemas;
- ese tipo de conexión existe entre o dentro sistemas de representación diferentes del simbólico o gráfico; y
- se hace el conteo de cada tipo de conexión y se obtienen los porcentajes correspondientes (interna-externa, implícita-explicita, puntual-general).

Consideramos que el análisis de las conexiones es un conjunto de atributos importante para la caracterización de los mapas conceptuales. De hecho, codificamos cada uno de los mapas de acuerdo a los indicadores que acabamos describir (ver anexo 6). No obstante, nuestro propósito consistía en identificar un número reducido de atributos estructurales que nos permitieran caracterizar las producciones de los profesores. Por esta razón, utilizamos un atributo sencillo (sin utilizar la codificación completa) que se describe a continuación.

La importancia que tradicionalmente se le da en las matemáticas escolares al sistema de representación simbólico y, parcialmente al sistema de representación gráfico, nos permite identificar un atributo estructural que puede caracterizar las producciones de los profesores. Se trata de las conexiones externas (ya sean implícitas o explícitas, puntuales o globales) que involucran sistemas de representación diferentes del simbólico y el gráfico. Definimos tres indicadores para este atributo:

- no hay conexiones con otros sistemas de representación;
- hay tres o menos conexiones de este tipo;
- hay más de tres conexiones de este tipo.

ATRIBUTOS ESPECÍFICOS DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

En esta sección identificamos los atributos que son propios de propiedades particulares de la función cuadrática.

Diversidad de formas simbólicas

Ya vimos que la función cuadrática tiene una variedad de formas simbólicas. Podemos definir un indicador para este atributo como el número de formas simbólicas presentes en el mapa conceptual.

Existencia de conexiones entre las formas simbólicas

Las conexiones entre las formas simbólicas tiene que ver esencialmente con la expresión de los parámetros de un forma en función de los parámetros de otra forma. El indicador para este atributo identifica si existen o no este tipo de conexiones.

Papel de la ecuación cuadrática

La ecuación cuadrática juega un papel importante como atributo de un mapa conceptual que representa a la función cuadrática. Decimos que el sistema de representación simbólico de uno de tales mapas *está centrado* en la ecuación cuadrática si la caja que identifica a la ecuación cuadrática es una hija de un grupo de cajas o de una caja que determina la estructura del mapa en ese sistema de representación. El mapa está centrado en la ecuación cuadrática si la información que se presenta en el sistema de representación simbólico depende directamente de la información que surge de la descripción de la ecuación cuadrática. En caso contrario, decimos que el mapa *no está centrado* en la ecuación cuadrática.

Papel de las técnicas de manipulación simbólica

Aunque éste puede ser un atributo general de los mapas conceptuales que representan objetos matemáticos, lo ubicamos dentro de los atributos propios de la función cuadrática, dada la importancia que ellos tienen. El término "técnicas de manipulación simbólica" se refiere a procedimientos de transformaciones sintácticas dentro del sistema de representación simbólico (e.g., completación de cuadrados, factorización, etcétera). En un apartado anterior anotamos los papeles que pueden jugar estos procedimientos dentro de la representación simbólica de la función cuadrática. Identificamos tres tipos de indicadores:

- estas técnicas no aparecen en el mapa conceptual;
- las técnicas aparecen en el mapa conceptual como “objetos” (elementos) de la representación; y
- las técnicas aparecen como relaciones entre elementos.

Caracterización de los mapas

La identificación de unos atributos estructurales tiene como propósito la construcción de un instrumento de codificación y análisis de los mapas conceptuales producidos por los profesores. La selección de estos atributos está motivada por la intención de construir un instrumento suficientemente sencillo (e.g., número de atributos y de indicadores para cada atributo) que sea coherente tanto con los elementos conceptuales que sustentan el estudio, como con la experiencia que se tuvo a lo largo del estudio con otros instrumentos de codificación. Es decir, que cumpla con las condiciones que nos impusimos en un apartado anterior. La tabla 5 muestra un resumen de los atributos estructurales seleccionados y sus correspondientes indicadores.

Atributo	Indicadores y códigos			
Estructura externa	No está basado en sistemas de representación (NSR)		Basado en sistemas de representación (SSR)	
Estructura interna	No hay sistemas de representación estructurados (No E)	Hay uno (1 E)	Hay 2, 3 o 4 (2E)	Hay cinco (5E)
Conexiones con otros sistemas de representación	No hay (N-o)	Hay máximo tres (H-o)	Hay más de tres (V-o)	
Formas simbólicas	Hay máximo una (<2)		Hay más de una (>1)	
Conexiones entre formas simbólicas	No hay (NCFS)		Sí hay (CFS)	
Ecuación cuadrática	Centrado (C)			
Técnicas de manipulación simbólica	Como objetos (O)		Como relaciones (R)	

Tabla N° 5. Atributos, indicadores y códigos

Si se tienen en cuenta todas las posibles combinaciones de los indicadores presentados en la tabla 5, resultan 96 tipos de mapas posibles. Sin embargo, el análisis de estos indicadores nos permite eliminar la mayoría de estos mapas posibles. Esto se debe, por ejemplo, a que no tiene sentido hablar de conexiones entre formas simbólicas si hay menos de dos de estas formas o a que no tiene sentido hablar de conexiones con otros sistemas de representación si el mapa no está organizado con base en ellos o si hay menos de dos sistemas de representación.

El conjunto de mapas posibles que resulta después de realizar el proceso de eliminación descrito en el párrafo anterior ha sido organizado con base en el número de sistemas

de representación estructurados que se presentan. La figura 4 muestra estos mapas posibles con la respectiva jerarquía producto del análisis de los atributos.

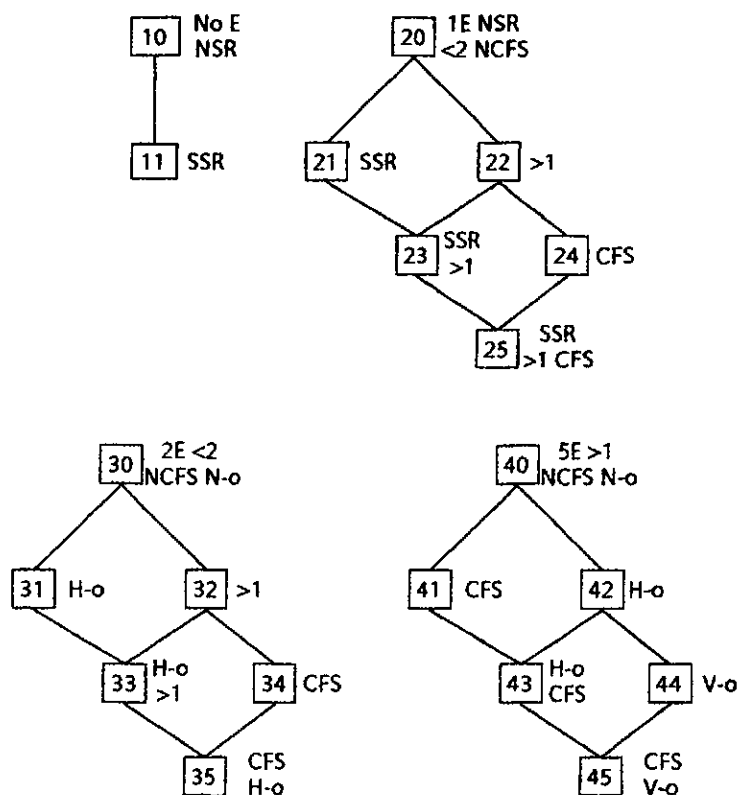


Figura N° 4. Estructura de mapas posibles

Consideremos, por ejemplo, la estructura propuesta con las cajas marcadas con el número tres como primer dígito. Estas cajas representan mapas en los que hay más de uno y menos de cinco sistemas de representación estructurados. La caja "30" identifica un mapa con menos de dos formas simbólicas, sin conexiones entre las formas simbólicas y sin conexiones con otros sistemas de representación. Debajo de ella hay dos cajas ("31" y "32"). La primera identifica el mapa en el que hay algunas conexiones con otros sistemas de representación (máximo tres), mientras que la segunda identifica el mapa en el que hay más de una forma simbólica. Estas cajas se unen en la caja "33" que tiene las características de las dos cajas anteriores. Por otro lado, la caja "34" identifica el mapa en el que sí hay conexiones entre las formas simbólicas. La estructura termina en una caja que identifica el mapa que tiene todas las características anteriores.

Esta categorización de los mapas posibles es evidentemente una simplificación de la producción de los profesores. Nosotros estábamos buscando esta simplificación, porque ella nos permite categorizar los mapas y sugerir unos "camino" de evolución de esas producciones. De hecho, los números pretenden, parcialmente, caracterizar esa evolución. Estos números son un indicativo de la "complejidad" de las producciones de los profesores, dado que a mayor número, mayor el número de características (excepto aquellos números que se encuentran al mismo nivel como, por ejemplo, 33 y 34).

La producción de un grupo de profesores en un mapa conceptual se puede entonces identificar con un número de dos dígitos. A este número podremos agregar una o dos letras para identificar el papel de la ecuación cuadrática (C, si el mapa está centrado en ella) y de la técnicas de manipulación simbólica (O, si se tratan como objetos y R, si se tratan como relaciones). Finalmente, agregaremos un asterisco (*) al número correspondiente si

el mapa no cumple estrictamente con las condiciones descritas por los indicadores de los atributos estructurales. Por ejemplo, un mapa marcado codificado con 33-CR es un mapa en el que hay más de un sistema de representación y menos de cinco, más de una forma simbólica, sin conexiones entre ellas, con menos de cuatro conexiones con otros sistemas de representación, centrado en la ecuación cuadrática y en el que las técnicas de manipulación simbólica se presentan como relaciones (Ver tabla 5 y figura 4).

Análisis inter-grupal

CODIFICACIÓN

El instrumento presentado en el apartado anterior nos permitió finalmente realizar una codificación que consideramos sistemática y coherente con las bases conceptuales presentadas al comienzo de este documento. Además, esta codificación no requiere de interpretación por parte de quien la realiza y satisface en buena medida nuestras apreciaciones intuitivas sobre las producciones de los profesores. Una vez tuvimos diseñado este instrumento, el proceso de codificación fue sencillo y rápido. En el anexo 5 se presenta el formato que se utilizó para la codificación y el anexo 6 presenta el resultado de esa codificación.

RESULTADOS GLOBALES

La tabla 6 presenta los resultados obtenidos como producto de este proceso de codificación.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	S1A	A1	S1B	S2A	A2	S2B	S3A	A3	S3B
G1	34	35-R	43-R		45-R				
G2	10-C				11	44*		44-R	
G3	20-O		22		23		32*		
G4	20-CO	20-CR	45-R						
G5	32-CO	32*-R			43				45

Tabla N° 6. Evolución de producciones de los profesores

La tabla presenta en las filas la codificación de cada uno de los mapas de cada uno de los cinco grupos de profesores. En las columnas se identifican los nueve mapas producidos por cada grupo. Las casillas vacías significan que el mapa correspondiente es equivalente (con respecto al instrumento) al mapa de la casilla anterior. La segunda fila identifica los momentos de la interacción (SiA: para el primer seminario del módulo i y SiB: para el segundo seminario; Aj para la reunión de asesoría del módulo j). Los números en las casillas identifican la caja correspondiente a la estructura de mapas posibles presentada en la figura 4. Las letras que aparecen al lado del número significan lo siguiente: O y R, cuando las técnicas de manipulación simbólica se presentan como objetos o como relaciones; C, cuando la descripción se construye con base en la ecuación cuadrática.

ANÁLISIS GLOBAL DE RESULTADOS

Con base en los resultados presentados en la tabla 6, podemos producir algunas reflexiones de carácter global en las que comparamos las producciones de los diferentes grupos.

En primera instancia, resulta evidente que hay diferencias en las producciones de los grupos. Hay grupos que comienzan con producciones relativamente avanzadas (como el

5) y otros que comienzan en el primer nivel de la estructura (como el 2). Es muy posible que estas diferencias sean producto de la capacitación previa que hayan recibido estos profesores antes de comenzar a trabajar en este proyecto.

En segundo lugar, es evidente que en todos los grupos hubo evolución y, por lo tanto, se corrobora la hipótesis inicial del estudio, en el sentido que el tipo de interacción realizada con los profesores puede generar una mayor consciencia sobre la complejidad del contenido matemático a enseñar. Esta evolución también se puede justificar a partir del conocimiento que cada grupo tuvo de las producciones de los otros grupos, pero este efecto no fue uniforme. Por otro lado, dos grupos (el uno y el cuatro) presentaron cambios importantes en sus producciones con motivo de la primera reunión de asesoría.

(Tercero) en algunos grupos se evidencia la existencia de "concepciones arraigadas" que no cambiaron fácilmente en el tiempo, aun cuando recibían información adicional que les sugería posibles caminos de acción. Este tipo de concepciones se observan por ejemplo en los grupos dos y tres. El primero porque permanece durante mucho tiempo en producciones que no tienen sistemas de representación estructurados. Y el segundo porque permanece en producciones que tienen un solo sistema de representación estructurado, sin conexiones entre las formas simbólicas.

Cuarto, se observan diferencias en la estabilidad de las estructuras. Mientras que algunos grupos mantienen su aproximación más o menos constante y su trabajo se centra en la mejora de las producciones anteriores (como el caso de los grupos 1 y 5), hay otros grupos en los que se observan re-organizaciones estructurales en sus producciones (como el caso de los grupos 2, 3 y 4).

Quinto, el esquema de codificación resultado de este estudio parece ser una caracterización apropiada (al menos para el caso de las producciones consideradas) de las concepciones de los profesores sobre la función cuadrática. Esto se evidencia en el hecho de que de la gran cantidad de mapas posibles, las producciones de los profesores se restringen a unas pocas. La evolución de estas producciones parecen seguir el camino sugerido por la estructura de atributos propuesta anteriormente. Esta evolución se puede caracterizar por unos caminos de evolución representativos con respecto al manejo de los sistemas de representación, al manejo de la dualidad operacional-estructural y al manejo de las conexiones entre sistemas de representación.

Análisis intra-grupal y triangulación

INTRODUCCIÓN

En este apartado queremos analizar las producciones de cada uno de los grupos por separado y estudiar sus características y su evolución. Para ello, hacemos una triangulación entre el instrumento de codificación central utilizado en los apartados anteriores, el análisis cuantitativo de los sistemas de representación y las conexiones, el análisis de los textos producidos con ocasión de algunos de los mapas y los registros que realizamos de nuestras discusiones con ellos en cada una de las tres reuniones de asesoría.

GRUPO 1

Atributos estructurales

La tabla presenta la evolución de las producciones de este grupo de acuerdo al instrumento de codificación por atributos estructurales.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	S1A	A1	S1B	S2A	A2	S2B	S3A	A3	S3B
G1	34	35-R	43-R		45-R				

Tabla N° 7. Mapas del grupo 1.

El instrumento de codificación nos muestra que este grupo comenzó el proceso con un mapa bastante sofisticado en el que ya existía más de un sistema de representación estructurado, más de una forma simbólica y había conexiones entre estas formas simbólicas. Es posible que esto se deba a que algunos miembros del grupo habían participado en programas de formación permanente en los que los temas de mapas conceptuales y sistemas de representación habían sido trabajados, hecho que aporta a nuestra hipótesis inicial. El grupo avanzó muy rápidamente, mejorando sus producciones, pero manteniendo la estructura inicial, hasta llegar, en la asesoría del segundo módulo, a producir un mapa que contiene todas las características que era posible apreciar con el instrumento. La información que proporciona el instrumento se confirma con las otras fuentes de información, como mostramos a continuación.

Análisis cuantitativos

La tabla presenta el número y porcentaje de cajas pertenecientes a cada sistema de representación v el número v porcentaje de conexiones implícitas v explícitas.

Mapa	1		2		3		5	
	#	%	#	%	#	%	#	%
Sistemas de representación								
Simbólica	16	64%	24	53%	48	47%	111	51%
Gráfica	7	28%	17	38%	34	33%	44	20%
Numérica	1	4%	2	4%	6	6%	28	13%
Verbal	1	4%	2	4%	7	7%	21	10%
Geométrica	0	0%	0	0%	7	7%	15	7%
Total	25		45		102		219	
Conexiones								
Implícitas	6	100%	23	77%	18	86%	29	41%
Explícitas	0	0%	7	23%	3	14%	41	59%
Total	6		30		21		70	

Tabla N° 8. Sistemas de representación y conexiones. Grupo 1

La figura muestra gráficamente la evolución de las proporciones para los sistemas de representación y para las conexiones.

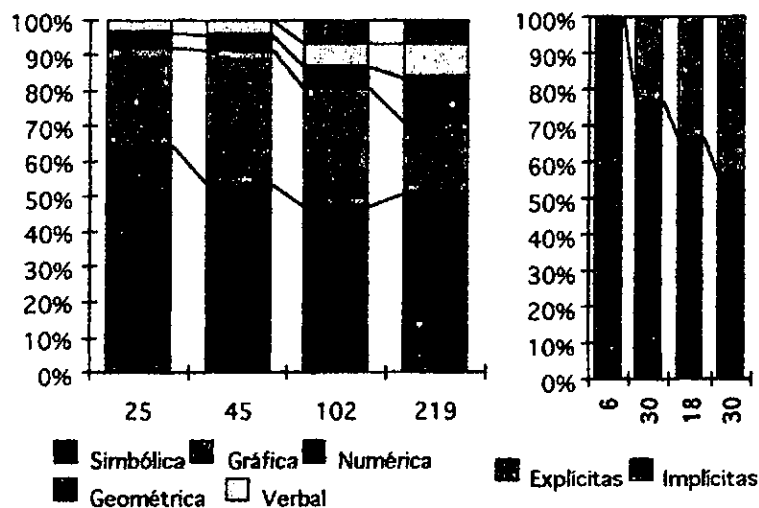


Figura N° 5. Sistemas de representación y conexiones. Grupo 1

En esta tabla y en estas gráficas se aprecia de nuevo la evolución del grupo. Por un lado, desde el primer mapa, aparecen los otros sistemas de representación. La evolución en la complejidad de las producciones se hace evidente en varios aspectos: el aumento en el tamaño de los mapas cuando se mira el número de cajas y el número de conexiones; el aumento en la importancia relativa de los otros sistemas de representación; y el aumento en la proporción de conexiones implícitas.

Análisis de textos y registros de entrevistas

En el análisis instruccional, este grupo reconoce el énfasis en la representación simbólica y la carencia de conexiones entre los sistemas de representación existentes en los libros de texto analizados. También reconocen que no se tratan con profundidad las representaciones gráfica y verbal. Reconocen que los textos tienden a centrarse en la forma general de

la representación simbólica. Logran diferenciar la visión procedimental de la visión "argumentativa". Su visión "avanzada" del tema, en el momento de hacer el análisis de instrucción, se aprecia en los comentarios y críticas que hacen a los textos. Ellos dicen que:

Lo propuesto en los textos, no es suficiente para garantizar la obtención de los logros que se plantean. Del tema se trabajó muy poco, tanto en los textos, como en las clases, por parte del profesor. Se dictan los conceptos desligados. Se hace mayor énfasis en una de las representaciones simbólicas (general) y otras se ignoran. De las expresiones simbólicas que se estudian, no se profundiza en ellas, ni se relaciona con las otras expresiones y representaciones.

Al realizar el análisis cognitivo, este grupo enfatiza la importancia de los sistemas de representación y las conexiones entre ellos. Dan una visión clara de la comprensión con base en estos conceptos, También reconocen el papel del modelaje y los sistemas de representación en la resolución de problemas. Reconocen el papel de lo procedimental como técnicas para la solución de problemas y no el centro del proceso de enseñanza-aprendizaje. Llegan a dar una definición propia de sistema de representación y a describir el papel que ellos pueden jugar, junto con la importancia de las conexiones. Definen los sistemas de representación como:

formas distintas de analizar un mismo objeto matemático y por tanto permiten que el estudiante comprenda un concepto en toda su complejidad. El establecer conexiones entre las representaciones el estudiante adquiere un dominio conceptual amplio, que le permite estar en capacidad de identificar las características propias de la función cuadrática en cada representación y su significado en los otros sistemas; así como también identificar de acuerdo a un ejercicio o problema específico cuál es el sistema de representación que más se ajusta a las condiciones establecidas.

Por otra parte, ellos insisten en que las diversas maneras de mirar la función cuadrática deben ser utilizadas en las ocasiones o situaciones que generen la resolución eficiente de un problema específico y en la importancia de la aplicación de procedimientos en cambio de aplicar fórmulas pre-establecidas para pasar de una forma simbólica a otra. Ellos describen su experiencia en el esquema de interacción de la siguiente manera:

El trabajo nos permitió ver y explorar conexiones dentro del mapa, para comprender la complejidad del tema. Permitted crear una herramienta donde se puede observar la profundidad con que se aborda el tema. Y aún hay fallas en el mapa.

GRUPO 2

Atributos estructurales

La tabla presenta la evolución de las producciones de este grupo de acuerdo al instrumento de codificación por atributos estructurales.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	S1A	A1	S1B	S2A	A2	S2B	S3A	A3	S3B
G2	10-C				11	44*		44-R	

Tabla N° 9. Mapas del grupo 2

La tabla nos muestra un grupo de profesores cuyas producciones iniciales no tenían sistemas de representación estructurados, no estaban organizadas por sistemas de representación y en las que la descripción estaba centrada en la ecuación cuadrática. Creemos que

este es el tipo de descripción típica de aquellos profesores que se enfrentan por primera vez a la tarea de describir un objeto matemático con la herramienta de los mapas conceptuales (dado que este grupo no tuvo esa formación previa). La tabla también nos muestra que esta visión permaneció durante bastante tiempo, pero que cambió abruptamente después de la asesoría del análisis de instrucción. Aquí se dio una re-estructuración global, pues éste mapa tenía cuatro sistemas de representación estructurados⁶, más de una forma simbólica, conexiones entre estas formas y varias conexiones con otros sistemas de representación. En la última producción, las técnicas de manipulación simbólica aparecen como relaciones entre elementos. Surgen entonces varias preguntas para ser respondidas por las otras fuentes de información:

- ¿Confirman las otras fuentes de información la evolución de las producciones de este grupo?
- ¿Por qué este grupo comenzó con producciones poco avanzadas y permaneció por tanto tiempo en ellas?
- ¿Qué motivó el cambio abrupto en el mapa que produjeron después de la segunda asesoría?
- ¿Hay algún indicio de que este cambio de visión permaneció en el tiempo y no fue un evento coyuntural?

A continuación vamos a analizar la información de las otras fuentes con el propósito de aproximarnos a estas preguntas.

Análisis cuantitativos

La tabla presenta el número y porcentaje de cajas pertenecientes a cada sistema de representación y el número y porcentaje de conexiones implícitas y explícitas.

	1		2		5		6		8		9	
	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%
Sistemas de representación												
Simbólica	4	33%	5	63%	5	20%	60	54%	54	52%	56	52%
Gráfica	5	42%	1	13%	4	16%	23	21%	23	22%	25	23%
Númérica	2	17%	1	13%	4	16%	6	5%	10	10%	9	8%
Verbal	1	8%	1	13%	5	20%	6	5%	7	7%	7	7%
Geométrica	0	0%	0	0%	7	28%	17	15%	10	10%	10	9%
Total	12		8		25		112		104		107	
Conexiones												
Implícitas	0		0		1	100%	56	100%	16	55%	16	55%
Explícitas	0		0		0	0%	0	0%	13	45%	13	45%
Total	0		0		1		56		29		29	

Tabla N° 10. Sistemas de representación y conexiones. Grupo 2

⁶ Este es el origen del asterisco. Al tener cuatro sistemas de representación estructurados debería ubicarse en la familia de mapas cuyo primer dígito es 3. No obstante, tiene varias conexiones con otros sistemas de representación (opción que no existe en esta familia). Consideramos esta segunda característica "más fuerte" que la primera y, por esa razón, lo ubicamos en la familia de mapas cuyo primer dígito es 4.

La figura muestra gráficamente la evolución de las proporciones para los sistemas de representación y para las conexiones.

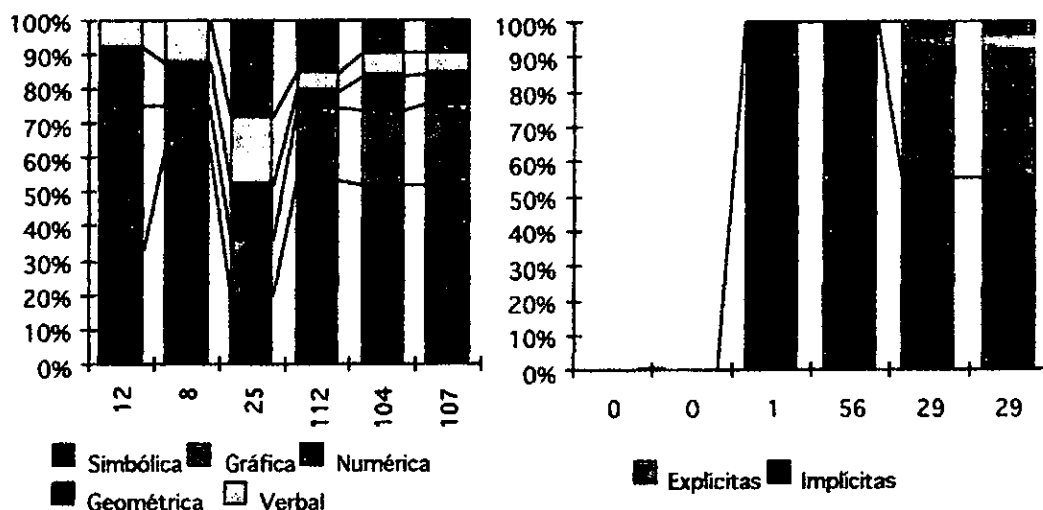


Figura N° 6. Sistemas de representación y conexiones. Grupo 2

La tabla y las figuras nos muestran que las producciones iniciales de este grupo eran poco complejas. El tamaño de los mapas era reducido y, aunque contienen cajas para casi todos los sistemas de representación, esto parece ser consecuencia de la imposición de utilizarlos, pues cada sistema de representación contiene muy pocas cajas. En estas producciones iniciales hay muy pocas conexiones (cero o una). Cuando el mapa "explota" (mapa 6), vemos que los sistemas de representación contienen un número mayor de cajas y aparecen conexiones, tanto implícitas, como explícitas.

Análisis de textos y registros de entrevistas

Este grupo estaba conformado por profesores que no habían tenido ningún contacto previo con las herramientas utilizadas en el estudio. Creemos que ésta es la principal razón por la cual sus producciones iniciales son poco complejas, este nivel de complejidad se mantiene durante cierto tiempo, y ellos satisfacen de manera solamente formal la condición de mencionar los sistemas de representación. Dado que los mapas conceptuales que ellos estaban produciendo tenían poca sofisticación, no les fue posible hacer el análisis instruccional con base en esos mapas y, por consiguiente, no pudieron satisfacer una de las condiciones de esta tarea. Decidieron, entonces, producir un mapa conceptual para cada una de las fuentes que consideraron en ese análisis. Es decir, produjeron un mapa conceptual para cada uno de los libros de texto analizados y para cada uno de los profesores entrevistados. El punto de quiebre tuvo lugar en la reunión de asesoría en la que presentaron estos mapas. Nosotros les pedimos que hicieran un solo mapa conceptual en el que se pudiera describir cada una de las fuentes de información. Con motivo de esta sugerencia y de la participación más activa dentro del grupo de una profesora que tenía algún conocimiento previa de las herramientas, este grupo produjo el mapa 6 en el que se da la re-estructuración identificada con el instrumento de codificación.

Parece ser que esta re-estructuración no fue coyuntural. Su cambio de visión se aprecia inicialmente en los textos que escribieron para el análisis de instrucción, pues afirman, por ejemplo, que los maestros "no establecen conexiones ni hacen variaciones en h y k entre otras. No establecen relaciones entre lo simbólico y lo gráfico y se hallan los ceros pero no se llevan a la gráfica". Adicionalmente, afirman que "los textos [...] no presentan la cuestión cuadrática en sus representaciones sino que lo [muestran] de una manera fragmenta-

da y no se amplía en diferentes formas de ver el mismo objeto matemático". Esta visión permanece, cuando más tarde, realizan el análisis cognitivo y llegan a afirmar que:

Es importante que el estudiante relacione las constantes a , b y c de la expresión ax^2+bx+c con el vértice, foco, directriz y eje de simetría para que encuentre conexiones lógicas entre cada uno de estos elementos con las representaciones simbólica y tabular. Se espera que dada la representación gráfica de la parábola el estudiante pueda identificar cada uno de los elementos mencionados anteriormente y relacionarlos con la expresión $f(x) = ax^2+bx+c$.

GRUPO 3

Atributos estructurales

La tabla presenta la evolución de las producciones de este grupo de acuerdo al instrumento de codificación por atributos estructurales.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	S1A	A1	S1B	S2A	A2	S2B	S3A	A3	S3B
G3	20-O		22		23		32*		

Tabla N° 11. Mapas del grupo 3

La tabla nos muestra un grupo que no llegó nunca a describir el objeto matemático con la perspectiva de los sistemas de representación (el asterisco después del 32 en el mapa 7 representa precisamente eso: un mapa que tiene tres sistemas de representación estructurados, pero cuya organización no se rige por los sistemas de representación). Este grupo nunca hizo conexiones entre las formas simbólicas y tampoco presenta conexiones con otros sistemas de representación.

Análisis cuantitativos

La tabla presenta el número y porcentaje de cajas pertenecientes a cada sistema de representación y el número y porcentaje de conexiones implícitas y explícitas.

	1		3		5		6		5	
	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%
Sistemas de representación										
Simbólica	22	92%	23	85%	5	10%	5	10%	5	8%
Gráfica	1	4%	1	4%	32	63%	32	62%	32	48%
Númérica	1	4%	1	4%	2	4%	2	4%	10	15%
Verbal	0	0%	1	4%	5	10%	6	12%	8	12%
Geométrica	0	0%	1	4%	7	14%	7	13%	11	17%
Total	24		27		51		52		66	
Conexiones										
Implícitas	10	100%	8	100%	12	100%	12	100%	14	100%
Explícitas	0	0%	0	0%	0	0%	0	0%	0	0%
Total	10		8		12		12		14	

Tabla N° 12. Sistemas de representación y conexiones. Grupo 3

La figura muestra gráficamente la evolución de las proporciones para los sistemas de representación y para las conexiones.

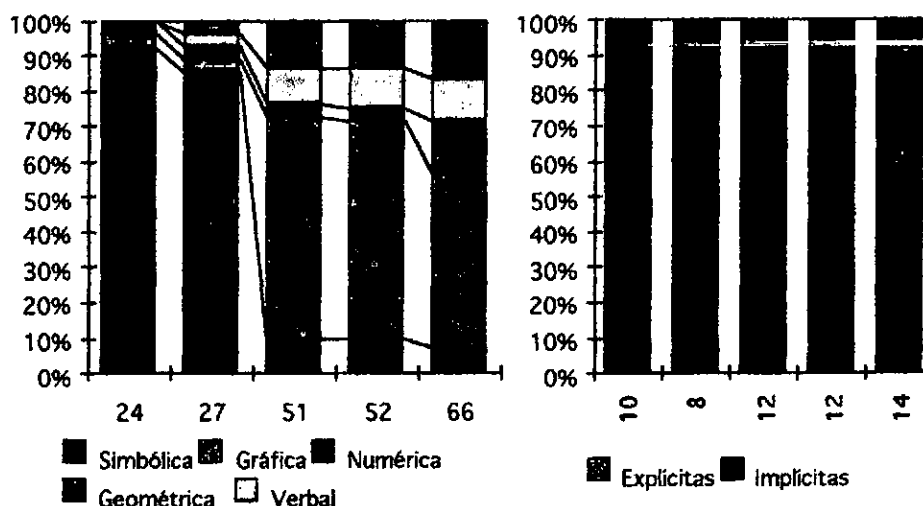


Figura N° 7. Sistemas de representación y conexiones. Grupo 3

La tabla y las gráficas ratifican las características identificadas por el instrumento de codificación. Se aprecian producciones en las que los otros sistemas de representación tienen poca importancia al comienzo y en los que, sorpresivamente, el sistema de representación simbólico pierde importancia al final. Esto es debido parcialmente a que, al no estar organizados por sistemas de representación, en algunos casos resulta difícil clasificar una caja como perteneciente a un sistema, particularmente porque, como se aprecia en la gráfica de conexiones, hay gran cantidad (proporcionalmente) de conexiones implícitas que pretenden identificar un mismo elemento en dos sistemas de representación (gráfico y simbólico). El hecho de que no hayan conexiones explícitas evidencia, de nuevo, la sofisticación restringida de las producciones de este grupo.

Análisis de textos y registros de entrevistas

El análisis de instrucción de este grupo presenta una situación sui-generis. La descripción del contenido de dos libros de texto resalta la existencia de representaciones simbólicas y gráficas y de relaciones entre ellas. Sin embargo, el mapa en el que se identifican los elementos que caracterizan estos libros de texto no está organizado por sistemas de representación y presenta una confusión en la manera de representar las conexiones que aparecen en los textos. Parece evidente que este grupo, aún en el momento en el que estaba realizando el análisis de instrucción (habiendo conocido los mapas de otros grupos y habiendo analizado los libros de texto), no comprendía la noción de sistema de representación como elemento organizador de las descripciones. Pensamos que una de las razones para esta situación tiene que ver con la inexistencia de interacción en este grupo por el hecho de haber quedado conformado por una sola persona.

Su confusión sobre los sistemas de representación se hace evidente en el análisis cognitivo cuando incluye la representación numérica dentro de la representación gráfica al describir lo que un profesor piensa acerca de lo que debe saber un alumno:

Construcción de la representación gráfica incluyendo tabulación, dominio y rango.

Este grupo nos presenta evidencias de que el esquema de interacción no es infalible en el propósito de promover la consciencia, tanto de la complejidad, como de la potencia de los sistemas de representación como elemento organizador de las descripciones de un objeto

matemático. Hay que resaltar, en todo caso, que, dado que el grupo estuvo compuesto por una sola persona (sus compañeros se retiraron al comienzo del esquema de interacción), el esquema no pudo operar como se esperaba. Se podría argumentar (aunque no tenemos información suficiente para sustentar la tesis) que la razón por la cual el grupo no pudo avanzar fue precisamente que no pudo tener interacción. La profesora que compuso el grupo nos mencionó repetidamente ésta, como una circunstancia que restringía su trabajo.

GRUPO 4

Atributos estructurales

La tabla presenta la evolución de las producciones de este grupo de acuerdo al instrumento de codificación por atributos estructurales.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	S1A	A1	S1B	S2A	A2	S2B	S3A	A3	S3B
G4	20-CO		45-R						

Tabla N° 13. Mapas del grupo 4

La tabla nos muestra un grupo que tuvo un cambio cualitativo importante, muy temprano en el proceso. Pasó de un mapa inicial con un sistema de representación estructurado, que no estaba organizado por sistemas de representación, con menos de dos formas simbólicas y sin conexiones entre ellas, a un mapa, producido después de la primera asesoría, que contiene todas las características que podía identificar el instrumento de codificación.

Análisis cuantitativos

La tabla presenta el número y porcentaje de cajas pertenecientes a cada sistema de representación y el número y porcentaje de conexiones implícitas y explícitas.

	1		2		3		6		9	
	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%
Sistemas de representación										
Simbólica	7	44%	15	60%	84	67%	80	64%	37	34%
Gráfica	1	6%	5	20%	16	13%	20	16%	29	27%
Númérica	1	6%	1	4%	7	6%	9	7%	12	11%
Verbal	1	6%	3	12%	7	6%	9	7%	13	12%
Geométrica	6	38%	1	4%	12	10%	7	6%	17	16%
Total	16		25		126		125		108	
Conexiones										
Implícitas	0	0%	5	83%	48	91%	48	81%	5	33%
Explícitas	1	100%	1	17%	5	9%	11	19%	10	67%
Total	1		6		53		59		15	

Tabla N° 14. Sistemas de representación y conexiones. Grupo 4

La figura muestra gráficamente la evolución de las proporciones para los sistemas de representación y para las conexiones.

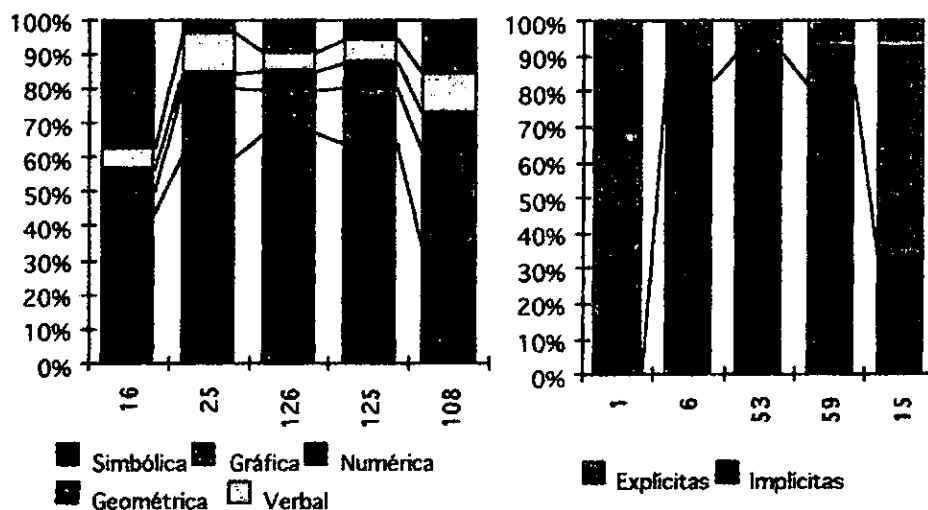


Figura N° 8. Sistemas de representación y conexiones. Grupo 4

La tabla y las gráficas complementan los resultados del instrumento de codificación. Apreciamos que el sistema de representación tuvo importancia desde el comienzo. Por otra parte el último mapa (que es equivalente al tercero desde la perspectiva del instrumento de codificación) presenta unas proporciones muy equilibradas entre los diferentes sistemas de representación. En particular, este es uno de los mapas en el que el sistema de representación simbólico tiene una proporción menor. Además, la gráfica de conexiones nos muestra que, para este mapa, habiéndose reducido en tamaño, contiene información similar y muchas conexiones implícitas desaparecieron, permitiendo que las conexiones explícitas asumieran mayor importancia.

Análisis de textos y registros de entrevistas

En su análisis de instrucción se aprecia claramente la visión que este grupo desarrolló de los sistemas de representación y del juego de las formas simbólicas. Esto se evidencia en la descripción que ellas hacen de las experiencias de los colegas:

La mayoría de los docentes empiezan con la función cuadrática con la representación simbólica $y=ax^2$; pasan a la tabular y gráfica. En la representación gráfica se hace un análisis donde se observan las características y elementos de la parábola y se repite el ciclo para $y=ax^2+bx+c$. Para $y=ax^2$ el vértice se da y observa claramente y en $y=ax^2+bx+c$, se resalta el vértice gráficamente, pero no se completa el cuadrado, o si se completa no se adquiere destreza en esa parte algebraica.

[...] Las familias de parábolas con sus efectos visibles, tales como dilatación, traslación y reflexión se realiza en forma aislada, no se profundiza, no se resalta, ni se hace énfasis en cada una de las transformaciones. [...] En geometría analítica enseñan la parábola con sus características: foco, vértice, directriz, lado recto, pero no demuestra de dónde se origina cada uno de estos ítems. En la parte simbólica solamente se tiene en cuenta $y=ax^2+bx+c$ y no se tiene en cuenta las otras formas simbólicas ni sus relaciones posibles".

Una de las profesoras reseña la forma tradicional como ella presentaba el tema al describir lo que llama "objetivos":

Identificar una función cuadrática; representar en el plano funciones cuadráticas; resolver ecuaciones cuadráticas; identificar las raíces de una ecuación cuadrática; analizar y plantear problemas que originan ecuaciones cuadráticas con una variable.

Lo anterior contrasta con la descripción que este grupo hizo, en el análisis cognitivo, de lo que serían los objetivos de una actividad que estaban proponiendo:

Identificar los temas y subtemas de la función cuadrática que los alumnos de grado undécimo y los docentes de matemáticas creen manejar con alguna propiedad; identificar la función cuadrática por medio de la representación gráfica, numérica y simbólica; conocer las características geométricas de las parábolas; identificar las funciones cuadráticas a partir de las expresiones simbólicas.

La importancia que le dan a las conexiones se aprecia cuando resaltan la conexión entre lo gráfico y lo numérico en un sentido no tradicional. Ellas se preguntan:

¿Será cierto que los alumnos comprenden la representación gráfica de la función cuadrática, tienen clara las diferentes formas simbólicas de representación, son capaces de hacer una representación tabular a partir de una representación gráfica?

GRUPO 5

Atributos estructurales

La tabla presenta la evolución de las producciones de este grupo de acuerdo al instrumento de codificación por atributos estructurales.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	S1A	A1	S1B	S2A	A2	S2B	S3A	A3	S3B
G4	32-CO	32*-R			43				45

Tabla N° 15. Mapas del grupo 5

Este grupo presenta una serie de producciones que parten de un mapa con más de un sistema de representación estructurado y más de una forma simbólica, pero teniendo como centro a la ecuación cuadrática y enfatizando en los procedimientos de manipulación simbólica. En el segundo mapa ellos intentan utilizar una representación en forma de "mapa araña" (*spider map*) que implica que no se puede afirmar que esté organizado por sistemas de representación (ésta es la razón del asterisco). Sus producciones se mantienen constantes (de acuerdo al instrumento de codificación) hasta la segunda asesoría. Este cambio (en el que se tienen los cinco sistemas de representación estructurados, aparecen conexiones con otros sistemas de representación y hay conexiones con otras formas simbólicas) muy posiblemente es producto de haber conocido los mapas de los otros grupos. Al final del proceso presentan un mapa con varias conexiones con otros sistemas de representación.

Análisis cuantitativos

La tabla presenta el número y porcentaje de cajas pertenecientes a cada sistema de representación y el número y porcentaje de conexiones implícitas y explícitas.

	1		2		5		6		9	
	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%
Sistemas de representación										
Simbólica	6	33%	18	62%	21	26%	26	18%	35	23%
Gráfica	12	67%	9	31%	16	20%	41	29%	36	24%
Numérica	0	0%	1	3%	7	9%	24	17%	22	14%
Verbal	0	0%	1	3%	14	17%	31	22%	32	21%
Geométrica	0	0%	0	0%	24	29%	19	13%	28	18%
Total	18		29		82		141		153	
Conexiones										
Implícitas	1	100%	1	50%	10	100%	18	100%	16	100%
Explícitas	0	0%	1	50%	0	0%	0	0%	0	0%
Total	1		2		10		18		16	

Tabla N° 16. Sistemas de representación y conexiones. Grupo 5

La figura muestra gráficamente la evolución de las proporciones para los sistemas de representación y para las conexiones.

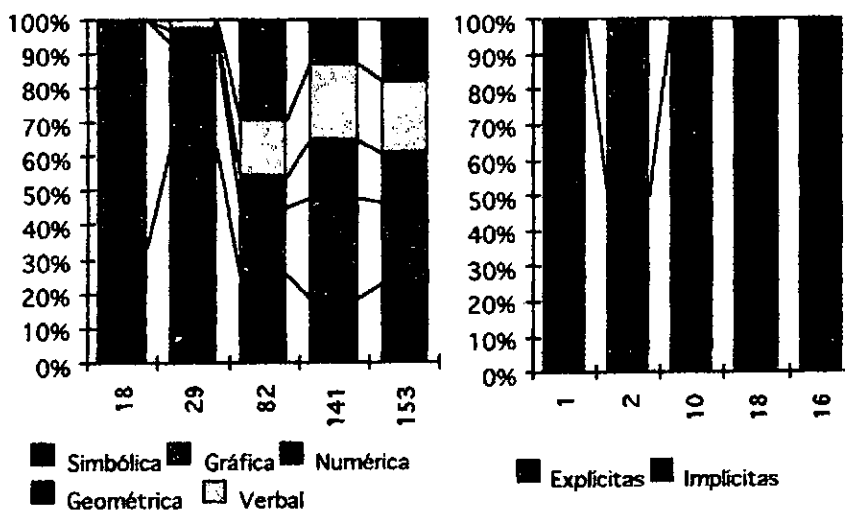


Figura N° 9. Sistemas de representación y conexiones. Grupo 5

La tabla y las gráficas muestran producciones en las que el sistema de representación simbólico juega un papel menos preponderante que en los otros grupos. De hecho, los últimos mapas presentan un equilibrio remarcable entre todos los sistemas de representación. Sin embargo, también hay que resaltar que el grupo únicamente presenta un mapa en el que aparece una sola conexión explícita.

Análisis de textos y registros de entrevistas

La evolución de los mapas muestra claramente que el grupo inició con concepciones poco desarrolladas y claramente fueron evolucionando. Hay momentos de la evolución donde se aprecia el conflicto entre sus concepciones previas y la experiencia que viven en el trabajo.

Su visión inicial relativamente sofisticada se evidencia en sus comentarios para el análisis de texto:

Vemos que aunque toca cada representación no lo hace de forma explícita, sino que todas están involucradas a la vez.

En este texto sólo se aborda la parte algorítmica de la ecuación cuadrática, sin hacer mucho énfasis en la definición y gráfica de ésta. No se trabaja en la diferenciación de las representaciones de la función cuadrática, ni en su concepto.

En ninguno estudian las cinco representaciones. Hay mayor énfasis en la parte simbólica. Trabajan máximo dos clases de parametrización. Hay bastante énfasis en la deducción y la aplicación de la fórmula general para hallar las raíces de la ecuación de segundo grado.

Desafortunadamente el grupo no presentó comentarios escritos al análisis cognitivo (no era obligatorio) y por consiguiente no es posible verificar el avance que se percibe la final del proceso.

Conclusiones

El problema general que dio lugar a este estudio tenía que ver con la contrastación de una hipótesis que surgió, a nivel intuitivo, a lo largo de la realización de varios programas de formación permanente de profesores. Nosotros percibimos que, cuando los profesores se enfrentan al problema de analizar un concepto matemático desde la perspectiva del análisis didáctico (análisis de contenido, análisis de instrucción y análisis cognitivo) con la ayuda de los sistemas de representación y los mapas conceptuales como eje organizador, los primeros, y como herramienta de representación, los segundos, entonces los profesores se hacen paulatinamente más conscientes de la complejidad del contenido matemático en cuestión y de la problemática de su enseñanza y aprendizaje. Resultaba evidente que, para aproximarse a esta hipótesis, era necesario darle un significado al término "consciencia de la complejidad", significado éste que permitiera una aproximación sistemática y objetiva a las actuaciones de los profesores, único medio de exploración disponible. Para explorar sistemáticamente esta hipótesis, se diseñó un esquema de interacción basado en dichas herramientas didácticas y se recolectó información por parte de los grupos de profesores. Esta información estaba presentada en forma de mapas conceptuales. Para analizarla, se diseñó un instrumento de codificación que, basado en un análisis conceptual de los mapas conceptuales, los sistemas de representación, la función cuadrática y las concepciones de los profesores, permitió caracterizar las producciones de los diferentes grupos. Esta caracterización, junto con el análisis de la evolución de cada uno de los grupos (basada en los textos producidos por ellos y en el registro de su interacción con los investigadores), corroboró la hipótesis inicial. Las producciones de los diferentes grupos muestran una evolución a lo largo de los tres meses de trabajo. Mientras que hay grupos avanzan rápidamente, hay otros que logran producciones sofisticadas, pero después de bastante esfuerzo. Por otro lado, hay grupos que lograron una evolución menos desarrollada, a pesar de haber trabajado juiciosamente en el proyecto. El análisis intra-grupal muestra que la formación previa de los profesores, los aportes de los investigadores en las asesorías, el conocimiento de las producciones de los otros grupos y la posibilidad de trabajar e interactuar en grupo son factores que afectan la evolución de las producciones de los profesores. Por lo tanto, no es posible afirmar, como era de esperarse, que las herramientas didácticas propuestas puedan, por sí mismas, afectar las concepciones de los profesores. La evolución en las producciones de los profesores es producto de una experiencia de trabajo e interacción en la que ellos pudieron poner en juego sus concepciones previas y en la que ellos enfrentaron retos que los llevaron a re-estructurarlas y desarrollarlas. Aunque tenemos información parcial (de profesores que participaron en programas anteriores) sobre la permanencia de estas re-estructuraciones, no podemos afirmar con seguridad que los efectos observados en este estudio permanezcan en el tiempo. No obstante, la alta correlación entre el hecho de haber participado en programas que utilizaban las herramientas por parte de algunos grupos y la complejidad de las producciones iniciales en este estudio de estos grupos, tiende a corroborar esta hipótesis.

APORTES

Concepciones de los profesores

Consideramos que hemos hecho una serie de aportes en este estudio. En primera instancia, pensamos que el estudio muestra una manera sistemática de aproximarse a la problemática de la evaluación del impacto de programas de formación permanente de

profesores. Esto se debe a que partimos de lo que podrían ser unos objetivos de un programa de este tipo y diseñamos, implantamos y evaluamos una serie de instrumentos que permiten explorar la medida en que estos objetivos se pueden lograr. Consideramos que éste debe ser un aspecto central de la evaluación de impacto de programas de formación permanente de profesores. Una característica adicional de esta manera de evaluar el impacto consiste en que la evaluación proporciona información relevante para la mejora de los programas que se evalúan. En este caso particular, comprobamos, por ejemplo, la importancia del trabajo en grupo y de la socialización permanente de las producciones de los profesores. Adicionalmente, comprendimos con mayor claridad la dificultad de introducir los sistemas de representación como elemento organizador del trabajo de los profesores.

La exploración de las concepciones de los profesores involucra una problemática compleja. En muchas ocasiones esta exploración tiende a estar descrita en términos puramente cognitivos que involucran modelos que no permiten hacer observaciones y análisis sistemáticos. Consideramos que la manera como nos hemos aproximado a esta problemática resuelve al menos parcialmente esta situación. Al definir las concepciones de los profesores con base en sus producciones y al escoger un cierto tipo de producciones (los mapas conceptuales), hemos podido diseñar una estrategia *operacional* para indagar de manera sistemática y objetiva las concepciones de los profesores sobre la función cuadrática. Somos conscientes de que esta aproximación operacional ofrece una “ventana parcial” a las concepciones de los profesores que no permite observar muchas características y facetas de estas concepciones. No obstante, el hecho mismo de haber construido esta aproximación con estas características, nos permite presentar unos resultados cuya validez nos satisface.

Aunque este estudio se centró en una “exploración dinámica” de las concepciones de los profesores y, por lo tanto, se interesó primordialmente en la evolución de sus producciones, también nos aporta información importante sobre las concepciones “iniciales” de los profesores. En particular, se observa que aquellos profesores que no han tenido contacto previo con los mapas conceptuales, los sistemas de representación y el análisis didáctico, tienden a tener una visión esencialmente procedimental y simbólica del objeto matemático en cuestión. Ellos ven la ecuación cuadrática y los esquemas de manipulación simbólica (fórmula cuadrática, completación de cuadrados, factorización, etcétera) como el centro de la descripción de la “cuestión cuadrática”. Como se observará en otro estudio (análisis de instrucción) ésto es, al menos parcialmente, consecuencia de la manera como los libros de texto presentan el tema, y ésto a su vez es consecuencia de las directivas nacionales que existieron durante un buen tiempo sobre el tema. Por consiguiente, no debe sorprender en absoluto que los estudiantes tengan también esta visión parcial del tema matemático en cuestión.

Aportes metodológicos

El esfuerzo que realizamos para llegar a tener un instrumento de codificación de las producciones de los profesores, nos permitió producir una caracterización de estas producciones que consideramos muy importante. Por lo menos para el caso particular que se estudió y dentro de las restricciones del mismo, resultó que las producciones de los profesores se agrupan en un grupo bastante reducido de mapas conceptuales, dentro de un espectro bastante amplio de posibilidades (ver figura 4). De cierta manera, los resultados muestran unos “caminos típicos” de evolución de las producciones de los profesores. Por supuesto, no podemos afirmar que éste sea el caso para otros profesores y otros esquemas de interacción, pero consideramos que la caracterización de las producciones propuesta en este estudio puede ser una guía para exploraciones futuras de las concepciones de los profesores.

El instrumento de codificación es otro de los aportes de este estudio. Somos conscientes de que este instrumento es específico para un tema matemático y un cierto tipo de producciones (función cuadrática y mapas conceptuales) y para un cierto esquema de interacción

(que tiene a los sistemas de representación como elemento organizador). No obstante, creemos que una exploración parcial de las concepciones de los profesores de matemáticas de secundaria y educación media puede hacerse con base en este instrumento, una vez se haya trabajado brevemente con ellos en la problemática de los sistemas de representación. Por otro lado, el instrumento de codificación propuesto aquí puede servir de base para el diseño de otros instrumentos de codificación y análisis de producciones de los profesores, cuando éstas se hacen en forma de mapas conceptuales. Como se describirá en seguida, el instrumento de codificación en cuestión basa su potencia en el hecho de que analiza los mapas conceptuales teniendo en cuenta tanto su estructura, como su contenido. El análisis de producciones de profesores (o estudiantes) sobre otro tema matemático podría, con base en un análisis de contenido detallado, identificar nuevos atributos estructurales para ese tema que permitan diseñar un nuevo instrumento con las características similares a las del que utilizamos en este estudio.

Aportes conceptuales

El estudio también hace algunos aportes conceptuales. En primera instancia, presentamos una descripción detallada de la función cuadrática desde la perspectiva del análisis de contenido. No conocemos por ahora ninguna publicación que presente este tema matemático con este nivel de detalle. Pensamos que este mapa conceptual y su correspondiente descripción pueden servir de referencia (como nos sirvieron a nosotros) para otros proyectos de investigación y, particularmente, para proyectos de innovación curricular por parte de profesores interesados. Con base en este mapa conceptual es posible aproximarse sistemáticamente a la problemática cognitiva del estudiante con respecto al tema y, con base en ella, a la problemática de diseñar actividades que permitan afrontarla.

Hemos hecho también un aporte en el análisis de la estructura de los mapas conceptuales. Este análisis, que tiene carácter general para mapas conceptuales en matemáticas, se basa en la caracterización de los diferentes tipos de conexiones que puedan darse en un mapa conceptual que describe un objeto matemático. Hemos identificado conexiones básicas, implícitas y explícitas, puntuales y globales, internas y externas, y con otros sistemas de representación. La codificación de los mapas conceptuales que realizamos durante el estudio nos permite afirmar que la clasificación de las conexiones que aparecen en un mapa es un factor descriptor importante de las características del mismo.

También hemos aportado ideas que consideramos importantes en el área de la relación entre los mapas conceptuales, los sistemas de representación y la dualidad operacional-estructural. Por un lado, hemos mostrado cómo un mapa conceptual, como instrumento de descripción de un objeto matemático desde la perspectiva didáctica, permite observar todas las actividades matemáticas descritas por Kaput (1992) con base en los sistemas de representación. En particular, es posible observar (en forma de conexiones) las transformaciones sintácticas, las traducciones entre sistemas de representación, el proceso de modelaje y la materialización. Con respecto a este último punto, sugerimos que existe una relación estrecha entre la dualidad operacional-estructural y los sistemas de representación y mostramos cómo es posible observar en un mapa conceptual si una producción se basa en una visión operacional o en una visión estructural.

Perspectivas

Los resultados de este estudio nos aportan de manera importante para la mejora de nuestros programas de desarrollo profesional de profesores de matemáticas. Esperamos que también puedan aportar para el diseño de otros programas por parte de otros grupos de investigación.

Consideramos que ésta es, en todo caso, una aproximación parcial a la problemática de las concepciones de los profesores sobre la función cuadrática. Si se desea profundizar sobre el tema, es necesario diseñar instrumentos de recolección, codificación y análisis que

permitan explorar otros aspectos de estas concepciones e inducir nuevas formas de triangular los resultados de los análisis.

Los resultados del estudio sugieren que las herramientas didácticas y el esquema de interacción propuesto afectan las concepciones de los profesores. Sin embargo, no es posible concluir, a partir de estos resultados, que la práctica docente del profesores haya sido afectada⁷. Para ello, es necesario estudiar esta práctica e intentar explorar las posibles conexiones entre ella y las concepciones de los profesores. Adicionalmente, tampoco es posible hacer afirmaciones sobre la formación matemática de los estudiantes. Esto requeriría, de nuevo, otro proyecto de investigación.

⁷. Aunque comprobamos claramente que el esquema de interacción preparó y motivó a los profesores para diseñar actividades de clase sobre el tema.

Referencias bibliográficas

- Balacheff, N. (1996). Conception, connaissance et concept. *Documento no publicado*. Grenoble: Laboratoire Leibniz.
- Goldin, G. A., Janvier, C. (1998). Representations and the psychology of mathematics education. *Journal of Mathematical Behavior*. 17 (1), pp. 1-4.
- Gómez, P., Carulla, C. (1998). El análisis de contenido matemático como herramienta para la construcción de modelos pedagógicos. El caso de la función cuadrática. *Documento no publicado*. Bogotá: Una Empresa Docente.
- Hiebert, J., Carpenter, T.P. (1992). Learning and teaching with understanding. En Grouws, D.A. (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan, pp. 65-97.
- Lanzing, J. W. A. (1998). Everything you always wanted to know about... Concept Mapping. <http://utto212.to.utwente.nl/lanzing/EVERYT~1.HTM>. Holanda, pp. 1-29.
- Leindhardt, G., Zaslavsky, O., Stein, M. (1990). Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching. *Review of educational research*. 60 (1), pp. 1-64.
- McGowen, M. (1998). Cognitive units, concept images, and cognitive collages: An examination of the processes of knowledge construction. *Documento no publicado*. Warwick: University of Warwick.
- Novak, J.D. (1990). Concept mapping: A useful tool for science education. *Journal of Research in Science Teaching*. 27 (10), pp. 937-949.
- Ruiz, L. (1993). Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función: análisis epistemológico y didáctico. *Documento no publicado*. Granada: Universidad de Granada.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*. 22, pp. 1-36.
- Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education*. 14(3), pp. 293-305.
- Williams, C. G. (1998). Using concept maps to assess conceptual knowledge of function. *Journal for Research in Mathematics Education*. 29 (4), pp. 414-421.

EL ANÁLISIS DE CONTENIDO
MATEMÁTICO COMO HERRAMIENTA
PARA LA CONSTRUCCIÓN DE MODELOS
PEDAGÓGICOS. EL CASO DE LA
FUNCIÓN CUADRÁTICA. FASE ANÁLISIS
DE CONTENIDO
(ADICIONES CON MOTIVO DE LA
EVALUACIÓN)

Pedro Gómez
Cristina Carulla

Noviembre de 1999

Contenido

Introducción	3
Principios generales	4
Aspectos específicos	7
Módulos	9
Referencias	12

Introducción

En este documento reaccionamos a la evaluación del reporte de este proyecto. Esta evaluación pedía (IDEP, 1999):

describir el tipo de interacciones que se provocaron, el tipo de argumentación que se potenció, los momentos en los cuales aparece una nueva información, etc. de tal manera que se pueda deducir que fue el tipo de proceso seguido el que permitió a algunos grupos complejizar sus mapas ó como lo dicen los investigadores "explotar" los mapas. Creo que esta parte debe quedar clara, porque gran parte de los elementos, relaciones y conexiones que los profesores introducen en sus mapas conceptuales pueden ser informadas (por ejemplo, mostrándoles el mapa de referencia) a cada uno de ellos y entonces, podría ser que, aunque aparezcan esos elementos en los mapas conceptuales, las concepciones de los profesores no hayan cambiado, sólo cambia la cantidad de información que "introducen" en los mapas conceptuales.

En particular se podría detallar mucho más cual fue el enfoque y los procedimientos usados en las entrevistas, las asesorías y las intervenciones de los investigadores hacia el trabajo de los profesores, con lo que esta parte del trabajo quedaría lo suficientemente explícita. Aunque el análisis instructivo y cognitivo no son parte específica del trabajo de investigación, cuando la consideran como elementos de contrastación hacen uso de las comprensiones que los profesores han elaborado sobre el contenido matemático (la función cuadrática), para contrastar la información obtenida, por tal razón me parece pertinente que también estos instrumentos se especifiquen, es decir se expliciten cómo es que ellos fueron construidos y cuáles fueron los procedimientos de análisis usados.

Pretendemos aquí presentar la información que se requiere. Lo haremos en varias partes. Por un lado, describiremos los principios generales que guían el comportamiento de los investigadores en la interacción con los profesores. Por el otro, haremos algunas aclaraciones sobre la manera como estos principios generales se expresaron en el caso específico de este proyecto. Para ello, tenemos en cuenta los objetivos del mismo, junto con su contenido matemático y las características de los profesores participantes. Finalmente, presentamos con un poco más detalle las características de los módulos de instrucción y cognitivo. También describimos la manera como manejamos la interacción para estos módulos.

Principios generales

Resulta muy difícil presentar, a manera de algoritmo, la forma como se prevé la interacción entre investigadores y profesores dentro de nuestros programas de desarrollo profesional. Es evidente que no existe un procedimiento predeterminado que pueda caracterizar esta interacción. La manera como se da esta interacción depende de muchos factores. En particular, esta interacción depende del conocimiento y las visiones de quienes guían y controlan la interacción. Por consiguiente, su comportamiento estará guiado por este conocimiento y estas visiones. Este comportamiento tendrá como telón de fondo los objetivos de la sesión de interacción y la relación de estos objetivos con los objetivos generales del programa de desarrollo profesional. Teniendo como base los conocimientos y las visiones de los investigadores, por un lado, y los objetivos de la sesión de interacción, por el otro, el comportamiento de los investigadores será también una consecuencia de los intereses, las dificultades y las producciones de los profesores en ese momento. En resumen, el comportamiento de los investigadores en una interacción tiene un carácter parcialmente aleatorio, pero surge de la relación entre sus conocimientos y visiones, los objetivos que se buscan y los "datos iniciales" que proveen los profesores. Estas son las razones por las cuales no es posible definir un procedimiento algorítmico que describa este comportamiento. No obstante, nuestros programas de desarrollo profesional siguen unos principios generales que enmarcan la interacción entre los tres factores que acabamos de mencionar. A continuación describimos estos principios.

PROPÓSITO GENERAL

El trabajo con los profesores sigue un propósito general. Se trata de

crear espacios de trabajo e interacción en los que los profesores puedan poner en juego sus concepciones previas y en los que ellos enfrenten retos y vivan conflictos que los lleven a reestructurar y desarrollar estas concepciones

Este propósito general nos permite introducir la mayoría de los principios generales.

PRINCIPIOS GENERALES

La siguiente es una lista de principios que guían el comportamiento de los investigadores en las instancias de interacción y que crean un marco de referencia para el trabajo de los profesores.

Partir del conocimiento y las visiones de los profesores. Nuestros programas de desarrollo profesional parten del conocimiento, las visiones y la experiencia de los profesores participantes. Es decir, tienen en cuenta todo este bagaje. Por lo tanto, las tareas que se le piden a los profesores y la manera como los investigadores reaccionan a sus producciones dependen directamente de este marco de referencia. Este es el marco de referencia principal, aun si éste pueda estar en contradicción parcial con el conocimiento de la comunidad. Este tema tiene que ver con el segundo principio.

No se "impone" una verdad. Nuestros programas de desarrollo profesional no pretenden "transmitir" un conocimiento pre-establecido con el propósito de que los profesores lo repliquen en su práctica docente. Por esta razón, los esquemas de interacción tienen una

porción muy baja de presentaciones magistrales por parte de los investigadores. La discusión sobre la "teoría" tiene lugar dentro del contexto de los trabajos de los profesores. Ellos son quienes deciden si algún texto o teoría puede serles útil para su trabajo. La teoría juega entonces el papel de elemento organizador del trabajo de los profesores. Los investigadores buscan insinuar algunas ideas que pueden permitirle a los profesores ver sus problemas de manera alternativa. Pero son los profesores quienes deciden si esto les es de utilidad.

Esquema de trabajo. El esquema de trabajo se encuentra completamente basado en la producción y discusión de documentos. El proceso parte de una tarea (producto de un problema que se ha discutido con los profesores). Los grupos de profesores deben buscar una solución a este problema y producir un documento de borrador con su propuesta. Este documento es presentado a los investigadores en una entrevista a la que asisten únicamente los miembros del grupo en cuestión. Ellos presentan y defienden su trabajo. Los investigadores reaccionan a este trabajo. A partir de la presentación y la reacción surge un nuevo problema y una nueva tarea, relacionados con el problema y la tarea originales, y los profesores deben buscar una solución y producir un nuevo documento. Este documento es entregado en la sesión de socialización. En esta sesión, los profesores deben presentar su trabajo a todos sus colegas. Tanto colegas, como investigadores reaccionan de nuevo al trabajo de los profesores. Esta reacción puede ser utilizada por el grupo de profesores para mejorar su trabajo. Este trabajo mejorado será utilizado como punto de partida para el nuevo problema y la nueva tarea que inicia un nuevo ciclo de interacción.

Trabajo en grupo. El trabajo de los profesores se hace siempre en grupo. Los resultados del estudio muestran que éste es un factor central en la calidad y profundidad de las producciones de los profesores. Por razones logísticas los grupos se tienden a formar con profesores que trabajan en la misma institución o en instituciones que se encuentran cercanas unas a otras. Preferimos los grupos de tres o cuatro profesores. Este esquema de trabajo obliga a los profesores a discutir entre ellos y a construir socialmente sus producciones. Genera también situaciones de conflicto, cuando diversos profesores tienen posiciones diferentes sobre una cuestión particular. Ellos debe buscar un acuerdo, pues tienden a pensar, aunque no es un requisito, que es importante llegar con una posición unificada a las sesiones de asesoría y socialización.

Importancia de la socialización. La socialización es un factor catalizador muy importante. El hecho de tener que hacer una presentación (ya sea para la entrevista o para la sesión plenaria) tiene efectos importantes que no se lograrían si los profesores tuvieran únicamente que entregar un documento. Al tener que presentar su trabajo, los profesores se ven obligados a construir argumentos que sustenten sus tesis. Adicionalmente, al tener que presentar su trabajo ante colegas de otras instituciones y al ser estos trabajos producto de problemas y tareas similares, los grupos de profesores sienten la obligación de "no quedarse atrás". Se genera un ambiente de "competencia positiva". Este ambiente empuja a los profesores a trabajar con mayor intensidad de la que normalmente nosotros esperamos.

Importancia de las entrevistas individuales. Los grupos de profesores consideran que las entrevistas individuales son importantes. Esto es natural dado que, en ellas, ellos reciben comentarios específicos a sus trabajos. Esta es una situación diferente de aquella en la que los profesores reciben comentarios escritos sobre sus documentos o de aquella en la que los comentarios son generales para todos los grupos. Por otro lado, en estas entrevistas es posible construir un "conflicto específico". Es decir, al finalizar la sesión, los profesores sienten una incomodidad, específica al esfuerzo realizado y al documento producido, que los motiva a mejorar este trabajo. Esta incomodidad es, en muchas ocasiones, producto de una dualidad. Se trata de la dualidad entre la sensación que ellos traen al inicio de la sesión de que su trabajo es de gran calidad y no tiene defectos, y la sensación que tienen al

final de la sesión, cuando reconocen que el trabajo sí tenía defectos y de que es susceptible de ser mejorado. El deseo de producir un trabajo de tanta calidad como sea posible los induce a trabajar intensamente en la nueva versión del documento.

Importancia de manejar el conflicto. Los investigadores deben ser muy cuidadosos en el manejo del conflicto que se mencionó en el punto anterior. Este conflicto debe ser lo suficientemente intenso para motivar a los profesores a continuar trabajando. Pero no debe ser tan fuerte como para desanimarlos. Por consiguiente, los investigadores, al criticar el trabajo de los profesores, deben siempre apreciar el trabajo hecho. Ellos deben hacer estos comentarios positivos de manera explícita y repetitiva. Se debe buscar que los profesores sientan que su trabajo es tan bueno que vale la pena mejorarlo.

Interés por progresar. El conflicto que se ha mencionado en los dos principios anteriores debe ser el punto de partida del interés del profesor por progresar. Este interés debe ser también guiado hacia la investigación. Esta investigación debe basarse tanto, en la investigación bibliográfica, como en la reflexión sobre la práctica. La investigación bibliográfica está guiada por las sugerencias de los investigadores. Estas sugerencias buscan indicarle a cada grupo el tipo de lecturas que pueden aportar de manera eficiente a sus problemas, dificultades e intereses. De esta manera, la lectura de la teoría está siempre motivada por un problema práctico. Por el otro lado, las sugerencias y las críticas de los investigadores deben buscar que el profesor reflexione sobre su práctica. Los conflictos que hemos venido mencionando son, en general, conflictos entre unas visiones de la realidad y la constatación por parte de los profesores de que esa realidad es diferente de la que ellos esperaban. Por lo tanto, es necesario inducirlos a que analicen y reflexionen sobre esa realidad. También es importante motivarlos para que hagan explícitas sus visiones y busquen cuestionarlas.

Aspectos específicos

Los principios generales que describimos en el apartado anterior son comunes a la mayoría de nuestros programas de desarrollo profesional. En el caso de este estudio particular, hay aspectos específicos que lo caracterizan. Describimos a continuación estos aspectos específicos.

Visión por sistemas de representación

El reporte hace suficiente énfasis sobre este tema y consideramos que está descrito con suficiente detalle en ese documento. Por consiguiente, aquí solamente los mencionamos. Hacemos la aclaración que el tema de los sistemas de representación es potente en la mayor parte de las matemáticas escolares, pero esta potencia no es necesariamente generalizada (e.g., geometría).

Visión funcional

Este fue otro aspecto que guió nuestro trabajo con los profesores. Queríamos promover la visión funcional de las matemáticas escolares de la educación media, en contraposición con una visión puramente algebraica y procedimental. Somos conscientes de que ésta puede convertirse una visión restrictiva. Aunque la visión funcional permite organizar el contenido matemático de una manera sistemática, hay parcelas de las matemáticas de la educación media que no pueden apreciarse apropiadamente a partir de una visión funcional. No obstante, esta posición permite introducir una problemática didáctica que se considera central en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas a este nivel.

Potencia de los mapas conceptuales

Este tema también fue tratado en detalle en el reporte. Resaltamos aquí su potencia, que fue corroborada por los resultados del estudio.

Descripción de un objeto matemático

Nuestra preocupación es la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la escuela. Se puede pensar que éste es un problema esencialmente "didáctico", si se mira este término desde la perspectiva de los problemas puramente metodológicos. Nuestra posición en este proyecto es que los problemas didácticos deben surgir, en su mayoría, del análisis profundo y detallado del contenido matemático a enseñar. Por esta razón, aunque el proyecto contiene módulos de instrucción y de cognición, el trabajo se basa esencialmente en el análisis de contenido. Buscábamos que los profesores reconocieran que los problemas de aprendizaje y enseñanza se aprecian y se comprenden mejor cuando se conoce y se comprende apropiadamente la estructura del contenido matemático en cuestión.

Aplicaciones

El proyecto hizo énfasis en el tema de las aplicaciones del contenido matemático. Esta es la razón de la existencia del mal llamado sistema de representación "verbal". Esta parte del mapa conceptual buscaba inducir a los profesores a reflexionar sobre las aplicaciones de la función cuadrática en ámbitos diferentes del matemático. Aunque el proyecto no tenía un módulo de diseño curricular, muchos profesores reconocieron la conexión entre las representaciones matemáticas y las aplicaciones, por un lado, y las problemáticas del modelaje y de la resolución de problemas, por el otro.

Función cuadrática

Este es el contenido matemático que fue seleccionado para el estudio. En el reporte se justifica esta selección. Aquí podemos reiterar que este tema es rico en diversos aspectos. Por lo tanto, permite apreciar y estudiar las diferentes facetas de un objeto matemático. En este sentido, introduce características que son comunes a muchos otros contenidos de la educación media.

Conexiones

Dejamos de último este aspecto para efectos de resaltarlo. El proyecto buscaba mostrar la complejidad del contenido matemático, de su enseñanza y su aprendizaje al enfatizar la manera como ese contenido matemático se encuentra interconectado. Los profesores reconocieron que la comprensión depende del grado de conexión entre las diferentes representaciones internas de un concepto. También reconocieron la importancia de promover estas conexiones en la enseñanza.

Módulos

Consideramos que los aspectos más importantes de la interacción entre los investigadores y los profesores han sido descritos en los apartados anteriores. No obstante, en este apartado describimos el contenido y algunos aspectos adicionales de cada una de las tres entrevistas que tuvieron lugar a lo largo del proyecto. Adicionalmente, aportamos alguna información sobre los problemas y las tareas que los profesores tuvieron que abordar.

ANÁLISIS DE CONTENIDO

Seminario inicial

El módulo introdujo las nociones de sistema de representación y de mapa conceptual. En el seminario inicial, los profesores hicieron un primer intento de construir un mapa conceptual para la función cuadrática. Estas producciones fueron discutidas al final de la sesión. Esta discusión dio lugar para la definición de la tarea: un mapa conceptual sobre la función cuadrática teniendo a los sistemas de representación como eje organizador y a los mapas conceptuales como medio de presentación.

Asesoría

Esta fue la primera sesión de asesoría. Los grupos de profesores llegaron con mapas conceptuales que presentaban diferentes niveles de detalle y calidad. En todo caso, en la mayoría de los grupos percibimos dificultades para comprender y manejar la noción de sistema de representación como elemento organizador de la descripción del objeto matemático en cuestión. Por esa razón, las reacciones de los investigadores se centraron en profundizar en esta noción. Para ello, partimos, en cada caso, del trabajo hecho por cada grupo. Esto nos permitió mostrarle a los profesores la potencia de esta herramienta didáctica. Nos centramos en dos aspectos. El hecho de que la información que ellos habían producido podía organizarse de acuerdo a los sistemas de representación. Y la estrategia de identificar los elementos de cada uno de los sistemas de representación (e.g., los parámetros, en el caso del sistema de representación simbólico). Esta identificación debería buscar establecer las conexiones entre esos elementos.

ANÁLISIS DE INSTRUCCIÓN

Este módulo se encuentra descrito en detalle en (Gómez y Carulla, 1999). Retomamos aquí parte de esta información.

El problema al que enfrentamos a los profesores en este módulo consistía en describir la manera como se enseña el tema de la función cuadrática en las matemáticas escolares. Ellos debían hacer este trabajo basándose en una serie de herramientas didácticas que venían utilizando dentro del proyecto. En particular, se esperaba que ellos utilizaran sus mapas conceptuales como herramienta de codificación de la información. Recordemos, por otro lado, que estos mapas conceptuales del contenido matemático estaban organizados con base en los sistemas de representación. Los profesores tenían la posibilidad de complementar esta codificación con textos adicionales.

Acordamos con los profesores reducir a un mínimo la complejidad de esta codificación y descripción. Por esa razón, les sugerimos que se centrarán en la identificación de la secuencia con la que los elementos de su mapa (o del mapa complementado) eran vistos por cada una de las fuentes de información y en la manera como esa fuente manejaba los sistemas de representación.

Por nuestra parte, nuestro problema, como asesores de este proceso, consistía en recoger la información producida por los profesores, codificarla y analizarla, con el propósito de caracterizar la enseñanza de la función cuadrática en las matemáticas escolares.

Recolección y codificación de la información

Se sugirió que había diferentes fuentes posibles de información. Entre ellas:

- libros de texto,
- documentos oficiales,
- experiencia de colegas y
- la propia experiencia.

Los profesores quedaron en la libertad de escoger sus fuentes de información, aunque se esperaba que cada grupo produjera información de por lo menos tres fuentes diferentes. Dado que la mayoría de las fuentes de información no tendrían la "forma" de un diseño curricular, se decidió escoger, de los diferentes aspectos del currículo, aquellos que pudieran representarlo de mejor manera, teniendo en cuenta la información disponible. Por esa razón, se decidió tener en cuenta los objetivos y la secuencia de temas con la que la fuente presenta el tema (ya sea en el libro de texto, o, por ejemplo, en la descripción de un colega acerca de la manera como trata el tema). Puesto que este grupo de profesores venía trabajando con los sistemas de representación, se sugirió que ellos sirvieran como eje organizador de la codificación de la información.

Para la codificación misma, los grupos de profesores utilizaron los mapas conceptuales de contenido que habían producido en el módulo anterior. Esto les permitió tener un esquema común para recoger y codificar la información. Este instrumento permitió tener un mapa conceptual para cada fuente de información. En este mapa, el grupo de profesores marcaba cada uno de los elementos abordados por la fuente de información y lo identificaba dentro de la secuencia.

En algunos casos, los profesores utilizaron un mismo mapa para varias fuentes de información (por ejemplo, los libros de texto) e hicieron sus marcas con diferentes colores. Esto permitió identificar los elementos comunes a las diversas fuentes y aquellos elementos que eran propios de una sola fuente. Adicionalmente, cada grupo de profesores produjo un texto en el que registró información adicional que no podía ser codificada en los mapas y presentó opiniones sobre cada una de las fuentes.

Asesoría

Las producciones que los profesores trajeron a la sesión se pueden clasificar en dos grupos. Primero, aquellas para las que el análisis de las fuentes aportó a la mejora de los mapas de análisis de contenido. En este caso, nuestras reacciones se centraron en este proceso de mejora de los mapas de análisis de contenido. Con base en esta posible mejora y en el trabajo de análisis de las fuentes, dimos sugerencias para la codificación y análisis de la información recogida. En el caso del segundo grupo, nuestras intervenciones enfatizaron la problemática de codificación y análisis de la información. Esto fue posible porque los mapas conceptuales de estos grupos ya se encontraban desarrollados. Propusimos, por ejemplo, que se codificaran en un único mapa conceptual la información de todos los libros de texto analizados. La mayoría de los grupos utilizaron colores para cada una de las fuentes de información. De esta manera, fue posible identificar y analizar los elementos del mapa conceptual que eran comunes a las fuentes. Este esquema permitía identificar aquellos elementos del mapa conceptual que eran particulares a una fuente dada. En otras palabras, se sugirieron esquemas de recolección y análisis de la información que eran específicos a las producciones y las dificultades de cada grupo de profesores.

Trabajo de los asesores

Los asesores nos encontramos entonces con un grupo de diez mapas conceptuales (dos por grupo) codificados de acuerdo al procedimiento descrito en la sección anterior. Adicionalmente teníamos un grupo de documentos que complementaban la información codificada en los mapas.

Dado que nuestro propósito central era el de analizar el trabajo producido por los profesores, para efectos de caracterizar la instrucción de la función cuadrática en las matemáticas escolares, y dado que teníamos una gran cantidad de información, nuestro trabajo consistió en diseñar un instrumento que nos permitiera describir de manera resumida y organizada la información que teníamos disponible.

Para ello, decidimos hacer un primer análisis de la información con el propósito de tener una idea general de su contenido. Muy rápidamente vimos que las descripciones provenientes de las diferentes fuentes eran muy similares e involucraban un número bastante reducido de los elementos descritos en los mapas conceptuales. Esto nos permitió identificar estos elementos para efectos de organizar la información.

ANÁLISIS COGNITIVO

Seminario inicial

En este seminario, los investigadores introdujeron la problemática de la exploración de la comprensión de los estudiantes. Se buscó presentar este tema de manera sencilla. La discusión se centró en la relación entre el tema de la comprensión y las características y estructuras del contenido matemático correspondiente. De esta manera, se buscó relacionar el tema del módulo con los análisis y las producciones previas de los profesores. La tarea consistió en explorar algún aspecto de la comprensión de los estudiantes sobre la función cuadrática, partiendo de los mapas conceptuales producidos por cada uno de los grupos. Se esperaba que los profesores utilizaran los mapas como medio de codificación de la información que recogieran.

Asesoría

Los grupos llegaron a esta asesoría con trabajos diferentes. Algunos grupos habían realizado pruebas de evaluación, mientras que otros habían realizado entrevistas con estudiantes y profesores. En todo caso, nuestras sugerencias se centraron en motivar a los profesores a utilizar sus mapas conceptuales como medio para diseñar estos instrumentos de recolección de información y para analizar la información recogida. En algunos grupos, la exploración realizada los llevó a hacerse conscientes de la necesidad de detallar aún más una parcela de su mapa conceptual. Ellos vieron que, para poder explorar un aspecto específico de la comprensión de los estudiantes, y sobretodo, para poder diseñar los instrumentos de recolección y análisis era necesario describir con todo detalle el contenido matemático en cuestión. Este punto resultó muy interesante para estos grupos quienes vieron el aporte práctico, directamente relacionado con sus estudiantes, del trabajo hecho a lo largo del proyecto.

Referencias

IDEP (1999). *Informe de evaluación*. Documento no publicado. Bogotá.

Gómez, P., Carulla, C. (1999). *La enseñanza de la función cuadrática en las matemáticas escolares del Distrito Capital* [On-line]. <http://ued.uniandes.edu.co/servidor/ued/proyectos/CuadraticasIDEP/html/RepCuadAnInst.html>.