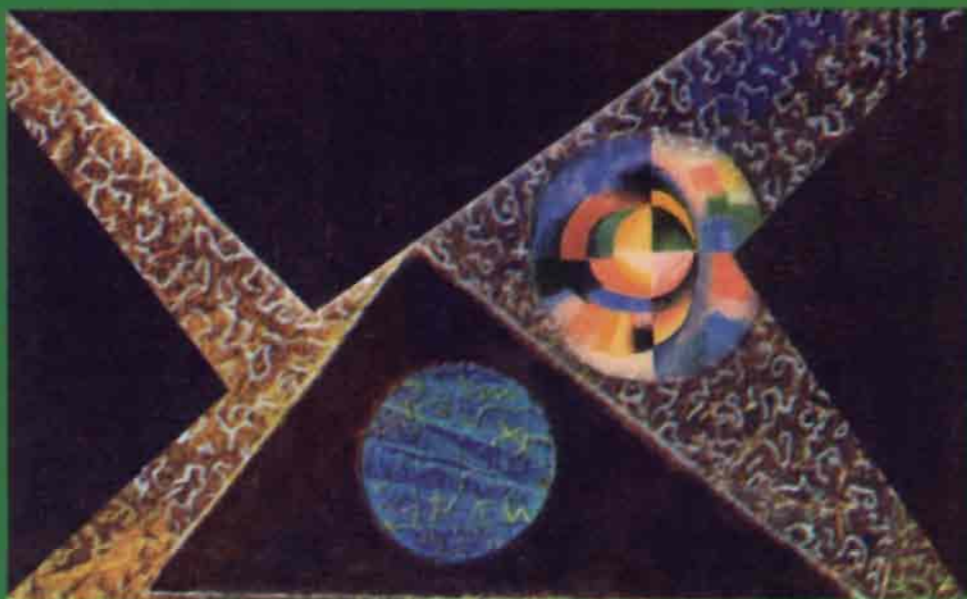


EDUCACIÓN EN MATEMÁTICAS



INVESTIGACIONES E INNOVACIONES DEL IDEP

IDEP

Instituto
INVESTIGACIÓN EDUCATIVA
Y DESARROLLO PEDAGÓGICO

cooperativa editorial
MAGISTERIO

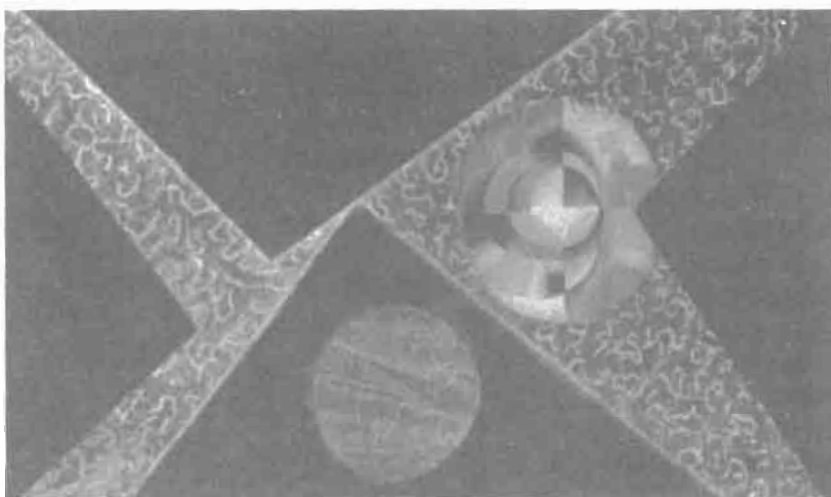
S10.7
E244e
ej.3.

INVESTIGACIONES E INNOVACIONES DEL IDEP
EDUCACIÓN EN MATEMÁTICAS
ANÁLISIS Y SÍNTESIS DE INVESTIGACIONES
E INNOVACIONES 1998-2000



Instituto
PARA LA INVESTIGACIÓN EDUCATIVA
Y EL DESARROLLO PEDAGÓGICO
ALCALDÍA MAYOR DE BOGOTÁ D.C.

INVESTIGACIONES E INNOVACIONES DEL IDEP



EDUCACIÓN EN MATEMÁTICAS ANÁLISIS Y SÍNTESIS DE INVESTIGACIONES E INNOVACIONES 1998-2000



*Investigaciones e innovaciones del IDEP –
Educación en matemáticas*

- © 2001 Instituto para la Investigación
Educativa y el Desarrollo Pedagógico –IDEP–
Alcaldía Mayor de Bogotá.
- © 2001 Orlando Mesa Betancur, Jorge Castaño García,
Cecilia Dimaté Rodríguez, José Ignacio Correa Medina,
Vadimir Torres, Beatriz Espinosa, María Agustina García,
Carmen Elisa Saavedra, Doris Garzón, Ricardo Castañeda
Tinoco, Esperanza Garzón González, Gloria Patricia Reyes
Salcedo, Martha Bonilla Estévez, Neila Sánchez Heredia,
Martha Vidal, Pedro Gómez, Cristina Carulla, Edgar
Guacaneme, Patricia Perry, “una empresa docente”.

Dirección General del IDEP:

Clemencia Chiappe

Subdirección Académica:

María Cristina Dussán

Coordinación del área de

Comunicación Educativa:

María Eugenia Romero

Acompañamiento académico

en el área de matemáticas:

Aurelio Usón

Diseño conceptual de la colección:

José Darío Herrera

Francisco Montaña

Acompañamiento editorial:

Francisco Montaña

Edición:

Martha Luz Tirado Fandiño

Corrección de estilo:

Dora Bueno de Parra

Diseño de carátula y páginas interiores:

Adriana Casis

Recuadro carátula:

(Detalle) *Collage*. Max Ernst

ISBN de la colección: 8066-10-7
del volumen: 8066-12-3

Impreso en Colombia - Printed in Colombia

Impreso por Editorial Dellin Ltda



CONTENIDO

PRESENTACIÓN	9
INFORME DE CONTEXTUALIZACIÓN Y VALORACIÓN DE LOS PROYECTOS	11
Las tendencias en educación matemática y su implementación en los currículos y prácticas docentes	
<i>Orlando Mesa Betancur</i>	13
INVESTIGACIÓN PEDAGÓGICA	79
Concepciones y posiciones sobre la práctica pedagógica y evaluativa en las áreas de lenguaje y matemáticas en Bogotá –investigación	
<i>Olga Cecilia Díaz Flórez - Lilian Lucía Caicedo</i>	81
INVESTIGACIÓN EN EVALUACIÓN DE PROCESOS	119
Evaluación del proceso de construcción del conocimiento matemático de niños de preescolar a segundo – investigación	
<i>Jorge Castaño García</i>	121
INVESTIGACIÓN EN CONSTRUCCIÓN DE PENSAMIENTO TEÓRICO	139
Las categorías lógicas como expresión del desarrollo del pensamiento teórico – investigación	
<i>Filena Eva Jiménez de Rodríguez</i>	141
INVESTIGACIÓN SOBRE LA ARGUMENTACIÓN	163
Caracterización de los requerimientos didácticos para el desarrollo de competencias argumentativas en matemáticas en el aula – investigación	
<i>Olga Lucía León, Dora Inés Calderón</i>	165
¿Sirve para algo argumentar? – investigación	
<i>Cecilia Dimaté Rodríguez, José Ignacio Correa Medina</i>	191

INVESTIGACIÓN SOBRE LA RELACIÓN LENGUAJE-PENSAMIENTO MATEMÁTICO	219
Una experiencia de aula: La verbalización de las acciones en el desarrollo del pensamiento matemático escolarizado – investigación <i>Vadimir Torres, Beatriz Espinosa</i>	221
INVESTIGACIÓN SOBRE CONSTRUCCIÓN DE CONCEPTOS EN EL AULA	245
Construcción del concepto de área en estudiantes de quinto y séptimo grado – investigación <i>María Agustina García, Carmen Elisa Saavedra, Doris Garzón</i>	247
Sistematización de una experiencia de matemáticas contemporánea en el aula – investigación <i>Ricardo Castañeda Tinoco</i>	269
INVESTIGACIÓN SOBRE EL DESARROLLO DE PROCESOS	293
El juego de la triplete como herramienta pedagógica para contribuir al desarrollo de algunos procesos de pensamiento matemático – investigación <i>Esperanza Garzón González, Gloria Patricia Reyes Salcedo</i>	295
INVESTIGACIÓN SOBRE CONCEPCIONES DE LOS DOCENTES	311
Comprensión de algunos conceptos aritméticos en profesores de primaria – investigación <i>Martha Bonilla Estévez, Neila Sánchez Heredia, Martha Vidal</i>	313
Enseñanza constructivista, conocimiento didáctico del profesor y análisis didáctico en matemáticas. El caso de la función cuadrática – investigación <i>Pedro Gómez, Cristina Carulla</i>	337
INVESTIGACIÓN SOBRE CURRÍCULO	365
Una experiencia de innovación en el precálculo de la educación media, mediada por una innovación universitaria – innovación <i>Cristina Carulla, Edgar Guacaneme, Patricia Perry</i>	367
SISTEMATIZACIÓN DE ENCUENTROS SOBRE INVESTIGACIÓN EDUCATIVA	395
Teoría y práctica de la educación matemática. Encuentro de saberes en precálculo y tecnología – encuentro de saberes <i>“una empresa docente”</i>	397

PRESENTACIÓN

El Instituto para la Investigación Educativa y el Desarrollo Pedagógico IDEP es una entidad oficial de la ciudad de Bogotá que tiene como misión apoyar, realizar y difundir investigaciones educativas y producir proyectos innovadores de uso de los medios masivos en la educación.

Es dentro de este programa que el IDEP realiza cada año un cierto número de convocatorias para apoyar económicamente el desarrollo de proyectos de investigación y de innovación hechos por y para las escuelas de la ciudad. Apoyado en investigaciones previas y en las necesidades sentidas por la comunidad educativa, el Instituto también hace invitaciones a desarrollar proyectos de investigación y de innovación en áreas detectadas como críticas para el sector. Esta dinámica adquiere un mayor sentido cuando se entiende que gracias a la reflexión académica que le impone a los maestros el desarrollo de un proyecto de investigación o de innovación, puede adquirir una conciencia más profunda y crítica sobre su actividad en vista a mejorarla.

Las actividades del IDEP dentro del sector educativo de la ciudad y del país se convierten en fundamentales cuando a partir del conocimiento producido en su interacción directa con los maestros es posible definir prioridades, campos de problemas, acentos útiles que pueden orientar las políticas educativas de la ciudad.

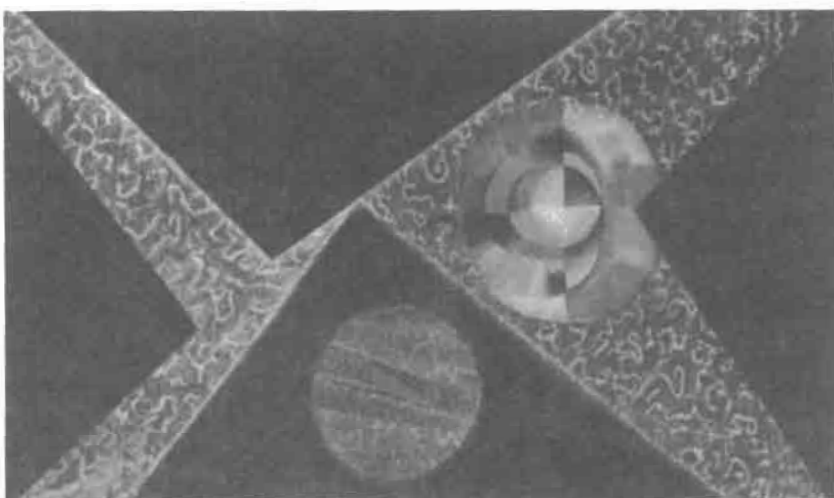
En este sentido la divulgación y puesta en común de los caminos, los resultados y los análisis realizados por expertos sobre un grupo de investigaciones y de innovaciones realizadas durante el trienio correspondiente a los años 1997-1999, se convierte en una tarea crucial que permite completar el círculo de la validación académica de la producción intelectual educativa.

Así es como en estos cinco volúmenes se presentan las síntesis de algunos de los proyectos de investigaciones e innovaciones apoyados como resultados de las convocatorias abiertas y focalizadas –realizadas durante 1997, 1998, y

1999– y agrupados a partir de un análisis de las tendencias propias de la investigación y la innovación educativa y en sincronía con las pruebas de competencias básicas impulsadas por la Secretaría de Educación del Distrito Capital. Estas sinopsis, realizadas en su mayoría por los investigadores responsables, están precedidas por un análisis valorativo y una puesta en el contexto de la discusión mundial en las áreas donde los proyectos fueron catalogados. Debido a que la categorización que agrupó los proyectos y que dio lugar a los estudios especializados fue posterior a las convocatorias, algunas de las síntesis de estos proyectos aparecen en más de un tema. Esto a la vez que permite al lector encontrar coherencia editorial en cada volumen, evidencia la metodología con la cual fueron concebidos estos productos editoriales.

Este libro “Innovaciones e investigaciones del IDEP – Educación en matemáticas” hace parte de la colección de cinco libros que ponemos en manos de los investigadores especializados, de los maestros en ejercicio y en formación, de los formadores de docentes y del público general con el fin de ofrecer un aporte significativo a la discusión académica que permita reconocer nuevos caminos hacia el mejoramiento de la educación.

INVESTIGACIONES E INNOVACIONES DEL IDEP



INFORME DE CONTEXTUALIZACIÓN Y VALORACIÓN DE LOS PROYECTOS EN EDUCACIÓN EN MATEMÁTICAS

LAS TENDENCIAS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA Y SU IMPLEMENTACIÓN EN LOS CURRÍCULOS Y PRÁCTICAS DOCENTES*

*Orlando Mesa Betancur**

La educación matemática, como objeto de preocupación y estudio, llega al año 2000 como un problema abierto con múltiples interrogantes, pero también enriquecido con los aportes, continuamente crecientes, de las comunidades académicas que estudian temáticas relacionadas con ella, principalmente los grupos de expertos en didáctica de las matemáticas y en teorías sobre el aprendizaje humano, además de la influencia que recibe de las nuevas concepciones sobre la disciplina matemática y la creación de sus constructos en contextos socioculturales e individuales específicos.

Aunque el campo de aplicación de la educación matemática se extiende a todos los niveles educativos, es en los niveles básico y medio en donde se viene construyendo más eficazmente como un campo autónomo de conocimiento, es decir, con un objeto propio de estudio y unas metodologías para obtener conocimientos a partir de unos referentes teóricos aceptados por comunidades de pares.

El campo conceptual de la educación matemática, como disciplina científica, no cubre totalmente el campo real de la educación matemática que, como práctica social, existe allí donde alguna institución tiene como propósito la enseñanza de las matemáticas. En otras palabras, la educación matemática real es el campo de interpretación y aplicación del concepto educación matemática, que ocurre en las escuelas y bajo la responsabilidad de pequeñas comunidades, o de individuos. Parece adecuada la interpretación de Steiner (Steiner. 1985, vol 5. nº. 2, pp. 11-17) para quien la Educación Matemática, además de ser una disciplina científica, también es un sistema social interactivo que comprende teoría, desarrollo y práctica. Esta disciplina encierra “el complejo

* El informe final de este trabajo se publicó en su totalidad en esta edición.

* Orlando Mesa Betancur: omesa@epm.net.co

fenómeno de la matemática en su desarrollo histórico y actual y su interrelación con otras ciencias, áreas prácticas, tecnología y cultura; la estructura compleja de la enseñanza y la escolaridad dentro de nuestra sociedad, y las condiciones y factores altamente diferenciados en el desarrollo cognitivo y social del alumno" (Steiner. 1984, p. 16).

La expresión *educación matemática* evoca dos conceptos (educación y matemática) en cuya relación se crean múltiples significados que originan tendencias curriculares diferentes, muchas veces contradictorias. Así, por ejemplo, si la educación se entiende como la preparación de los futuros hombres y mujeres para que puedan hacer uso de informaciones y medios, de acuerdo con las normas y los recursos disponibles en sus entornos socioculturales, entonces, educar será fundamentalmente enseñar; pero, si la educación pretende formar al nuevo y deseado ciudadano, con unos propósitos y unos fines que impliquen el cambio y la cualificación de la vida individual y colectiva, se tendrá que pensar en la educación como acción prioritariamente integradora de los saberes específicos necesarios con los requerimientos sociales y con las posibilidades e intereses individuales para adecuar o crear nuevos conocimientos.

Al referirse a la educación, Miguel de Guzman (1993) escribe:

La educación ha de hacer necesariamente referencia a lo más profundo de la persona, una persona aún por conformar, a la sociedad en evolución en la que esta persona se ha de integrar, a la cultura que en esta sociedad se desarrolla, a los medios concretos personales y materiales de que en el momento se puede o se quiere disponer, a las finalidades prioritarias que a esta educación se le quiera asignar, que pueden ser extraordinariamente variadas...

En el mismo sentido, pero precisando la tarea educativa actual, Carlos Hernández (1999) afirma:

La educación tiene hoy una tarea muy compleja: debe recoger y transmitir el saber acumulado, aquellos conocimientos y formas de pensamiento y de trabajo alrededor de los cuales podría decirse que hay un consenso a nivel mundial; pero también debe formar los ciudadanos de una nación, capaces de compartir ideales y de trabajar mancomunadamente en la producción de la riqueza colectiva y en la solución de sus necesidades materiales y espirituales. La educación debe asegurar, en síntesis, la formación de ciudadanos competentes para el trabajo y para la vida social.



MARCO TEÓRICO

El campo pedagógico como referente general

La definición de Pineau (1999) sobre el concepto de campo pedagógico, como “conjunto de saberes no necesariamente coherentes, ni cerrados, ni completos que se organizan disciplinariamente para referirse a lo educativo en su acepción moderna”, ofrece la gran ventaja de permitir la consideración, tanto de las teorías organizadas con pretensión disciplinar, como de las teorías y prácticas mayoritarias que se imponen desde otras concepciones y condiciones, sin olvidar, de acuerdo con Pineau, que “La organización disciplinaria –forma típica de la modernidad– implica una determinada relación poder/saber, una manera especial de ordenar el uso y la economía de los saberes a fin de producir sujetos útiles y dóciles”.

Recurrir al concepto de *campo pedagógico* como referente general para insertar en él la *educación matemática* como un campo pedagógico particular, ofrece la posibilidad de establecer puentes analíticos entre la multiplicidad de concepciones e interpretaciones que se han producido y se continúan produciendo para explicar las relaciones de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en contextos socioculturales e individuales específicos y particulares.

En palabras de Godino (1991, pp. 105-148) quien, como otros autores, no diferencia los conceptos de educación matemática y didáctica de la matemática:

El estado de la Didáctica de la Matemática puede definirse como el de un campo de investigación científico-tecnológico emergente en el que se identifican un cúmulo de teorías competitivas, expresadas generalmente de un modo informal y dependientes especialmente de planteamientos psicológicos. Sin embargo, el número y calidad creciente de las investigaciones en el área nos hacen ser optimistas sobre la consolidación de nuestra disciplina como campo autónomo de conocimiento en un futuro no muy lejano.

Del paradigma de la Era Industrial al paradigma del uso y creación de información

El sistema educativo actual posee, en todo el mundo, una dinámica de cambio originada en múltiples propuestas que buscan encontrar soluciones para enfrentar los problemas que plantean los nuevos paradigmas, en una sociedad cada vez más globalizada.

Si bien parece cierto que para la educación matemática no es posible disponer de un único paradigma, en el sentido de Khun (1975), sí tiene más sentido aceptar el nacimiento de un paradigma general para la educación, sustitutivo del paradigma industrial, dentro de la era de la información.

La era industrial tuvo como propósito educativo preparar trabajadores y profesionales que se adaptaran a la producción y a los servicios que se derivaban de la ciencia y la tecnología. Los saberes y las habilidades requeridas, en cada trabajo y profesión, se podían precisar y jerarquizar, de modo que la función principal de la escuela fuera garantizar la preparación necesaria. Esto originó el enfoque educativo instruccional conductual, en donde el papel del alumno es pasivo; el del docente se limita a la interpretación, organización y presentación de conocimientos establecidos y secuenciados, y los currículos se evalúan de acuerdo con la demanda laboral sobre los egresados. No tiene sentido, en esta concepción, que el alumno participe en la construcción de sus conocimientos, puesto que ya han sido pensados y definidos por grupos de expertos y aceptados por grupos de poder. La rigidez conceptual y operativa se ve favorecida por la guerra económica de las editoriales, que imponen sus interpretaciones de las políticas y orientaciones educativas en cada país, relegando a un segundo plano la capacidad creativa de los docentes y las instituciones educativas.

La reacción mundial a la concepción industrial de la educación queda bien representada en palabras del profesor Robert B. Reich (1994), ex secretario de trabajo de Clinton:

Los sistemas de las actuales escuelas primarias y secundarias imitan a los sistemas de producción en masa de mitad de siglo. Los niños pasan de grado en grado de acuerdo con una secuencia planificada de temas, como moviéndose sobre la cinta transportadora de una fábrica. En cada etapa, se inyectan determinadas informaciones en sus cabezas. Los de mayores capacidades para absorber las nociones transmitidas y los más sumisos al orden imperante, son transferidos en una vía más rápida; aquellos con menos memoria y más indisciplinados, a una lenta; la mayoría de los niños se ubica en una cinta transportadora de velocidad media. En diversos puntos de la línea, se realizan evaluaciones rutinarias, a fin de medir cuánta instrucción recibieron y los "productos defectuosos" son retirados de la línea y llevados hacia atrás para su "reprocesamiento". Al igual que en un sistema de producción en masa, el orden y la disciplina están por encima de todo.

(...) Con los maestros sucede lo mismo que con los trabajadores de las líneas de montaje, quienes tienen poca injerencia sobre el producto final



que contribuyen a ensamblar. Están obligados a seguir fielmente planes de estudios diseñados por especialistas ubicados en niveles altos y que les son impuestos y comunicados por una jerarquía de administradores, inspectores, directores, etc. Esta es la solución para la preparación de una sociedad de grandes volúmenes de producción.

La robotización de las industrias desplaza, cada vez más, grandes cantidades de trabajadores de los centros de producción. La demanda laboral se concentra en la búsqueda de personas capaces de utilizar y producir conocimientos, a través del uso de tecnologías que posibilitan el manejo de inmensos volúmenes de información actualizada e interdisciplinaria, liberándolas de las limitaciones para informarse, en el espacio y en el tiempo. Hoy es posible estudiar y trabajar desde el hogar, lo que obliga a replantear el papel de los centros educativos y, más específicamente, el de los docentes, para que se adapten a las nuevas condiciones y asuman propósitos, fines y didácticas más adecuados para la construcción del nuevo hombre y la nueva mujer.

El nuevo paradigma

La superación de los problemas que enfrenta la educación actual exige un replantamiento de las concepciones, los propósitos, los fines y las didácticas existentes. Como un punto de partida que permita interpretar el estado actual de las tendencias predominantes en educación matemática, se resumen, más adelante, las posiciones mejor aceptadas en el mundo sobre la educación, en general.

Concepciones para el nuevo paradigma

Al referirse al paradigma educativo emergente, Reggini (1994) presenta, como elementos constitutivos de él, las siguientes condiciones:

- La educación centrada en el alumno y la construcción de su conocimiento (enfoque constructorista).
- Los nuevos medios de información fundamentalmente en manos del alumno.
 - El maestro en tareas de observación y guía.
 - Visión global evitando la fragmentación de conocimientos.
 - Criterios interdisciplinarios para comprender y resolver problemas que requieren hoy respuestas de muchas disciplinas.
 - Reversión epistemológica hacia formas más concretas de aprender.
 - La educación debe suministrar experiencias significativas de la vida diaria.

Referentes para la construcción de la educación matemática como disciplina

Vasco, en su artículo *“La educación matemática: una disciplina en formación”* (1994, pp. 57-75), identifica ocho disciplinas como referentes constitutivos para analizar las complejas relaciones de este campo de estudio. Distribuye, en un octágono, la biología (principalmente la neurología), la lingüística (o la semántica general), la psicología, la antropología (¿incluyendo la sociología?), la informática (o ciencias de la información), la historia de las matemáticas, la lógica y la filosofía (o gnoseología general). Amplía de este modo el modelo del tetraedro de Higginson (presentado por Bonilla, 1989, pp. 1-18), en donde los componentes fundamentales de la educación matemática son las matemáticas, la filosofía, la psicología y la sociología; modificando también la ampliación de Bonilla, quien le agregó la antropología y la lingüística. Sin embargo, es posible esperar una ampliación de los componentes, originada en las preguntas que se planteen los investigadores, y en aquellos otros contactos que nacen cuando la educación matemática se considera como un caso particular de la educación, en general.

Si la investigación en educación matemática supera el concepto de enseñanza para penetrar en la compleja red de los contextos individuales y socioculturales es razonable que no se espere disponer de una única teoría científica que dé cuenta unívoca para cada uno de los interrogantes actuales y futuros. En su lugar, se validan, cada vez más, diferentes teorías particulares que responden circunstancialmente a los problemas, pero que pueden flexibilizarse y enriquecerse continuamente. Esta posición prevalece actualmente en la cultura occidental, en donde el concepto Educación Matemática se identifica con el concepto Didáctica de la Matemática, que incluye otras teorías como referentes, pero no como globalizantes.

En el artículo: *“Didáctica de las matemáticas y psicología”* (Armendáriz y otros, 1993, pp. 62-63), se describen los elementos constitutivos de un programa para la didáctica de las matemáticas:

Ideas principales del artículo:

1. El análisis del currículo se debe abordar interdisciplinariamente.
2. El aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas son objeto de estudio de la didáctica de las matemáticas y será el didacta el que modelará el currículo interpretando, en primer lugar, un saber disciplinar para elaborar un conocimiento a enseñar. Este proceso exige reconceptualizaciones que sólo serán posibles tras los filtros epistemológicos, socioantropológicos y psicopedagógicos.



El “saber a enseñar” que surge de esta transposición didáctica es ya un producto de otra naturaleza, de naturaleza didáctica. Pero además, dado el componente finalista de la acción didáctica, ningún producto didáctico puede surgir al margen de las teorías psicológicas que explican el comportamiento inteligente del ser humano, su estructura y su génesis, ni del proyecto educativo globalmente considerado, que preside un currículo concreto.

3. La didáctica no se identifica con la práctica educativa. El didacta selecciona información de distintas áreas del conocimiento, como las siguientes:

- La Matemática con su estructura específica.
- La Historia y la Epistemología de la Ciencia que explican la génesis, el desarrollo y la evolución del conocimiento científico y en particular de las matemáticas.
 - La Sociología, que permite plantearse la interdependencia entre Ciencia y Sociedad, y su influencia en la formación de los individuos de una sociedad democrática cada vez más inmersa en la tecnología.
 - La Lingüística cuyo papel es fundamental para comprender muchos de los problemas conceptuales propios de las dificultades de aprendizaje.
 - La Psicología, que aporta el conocimiento del desarrollo del individuo y de los modelos teóricos para el análisis del conocimiento a enseñar, del aprendizaje y de los procesos de enseñanza/aprendizaje en los que el profesor actúa como mediador.
 - La Pedagogía, que aporta el análisis de las relaciones entre enseñanza en el marco de las instituciones escolares.

Todo ello sin dejar de lado otras áreas, como la Comunicación y la Tecnología, con las cuales existe una relación cada vez más importante.

4. La didáctica de las matemáticas es una disciplina autónoma, interdisciplinar, con un campo teórico y práctico propio, en fase de desarrollo pero cada vez más definido.

5. Para los docentes es importante el desarrollo de una metodología que propicie el hábito de análisis de los problemas concretos que aparecen con unos alumnos concretos, en un aula y en unas condiciones determinadas, análisis que propiciará la comprensión de los mecanismos profundos del proceso de enseñanza y aprendizaje.

Los puntos anteriores resumen el punto de vista de Steiner (1985, pp. 11-17. 1990, pp. 194-197), quien considera el carácter global y dialéctico de la

educación matemática como disciplina, pero también como un sistema social que se relaciona con otros sistemas, cada uno con sus teorías, sus desarrollos y sus prácticas.

La primera conclusión, al observar un panorama tan amplio y complejo, es que la educación matemática como disciplina será siempre un campo en formación, cuyos avances y precisiones conceptuales estarán condicionados por los alcances de las otras disciplinas, pero esto no le niega la necesidad ni la posibilidad de encontrar y crear conceptos propios que sólo aparecen en las relaciones que definen su campo. Como argumenta Shulman (citado por Godino, 1986):

... para el caso de las ciencias sociales y humanas y, por tanto, para la Educación Matemática, la coexistencia de escuelas competitivas de pensamiento puede verse como un estado natural y bastante maduro en estos campos ya que favorece el desarrollo de una variedad de estrategias de investigación y el enfoque de los problemas desde distintas perspectivas. La complejidad de los fenómenos puede precisar la coexistencia de distintos programas de investigación, cada uno sustentado por paradigmas diferentes, con frecuencia mezcla de los considerados como idóneos para otras disciplinas.

Desde esta visión no tiene sentido pretender, como lo hace el racionalismo crítico, que exista un sólo método científico (en el sentido de Popper) para construir la disciplina de la educación matemática como una ciencia. Está más cercana la posición de la teoría crítica, para la cual los métodos varían de acuerdo con los objetos de conocimiento (Habermas y Adorno).

Por otra parte, es común que quienes hablan de la educación matemática como disciplina traten los mismos temas que aquellos que hablan de la didáctica de la matemática (o de las matemáticas). Por esto es más conveniente analizar algunos pormenores de los planteamientos específicos que se hacen desde las distintas tendencias. Así, para quienes consideran la didáctica de las matemáticas *como una ciencia en construcción* (La Escuela Fundamental francesa y el grupo que dirige Godino en Granada, por ejemplo) es posible definir un campo autónomo de investigación que rompa la dependencia tradicional de este campo de estudio con otras teorías generales pedagógicas o psicológicas pero, quienes consideran la didáctica de las matemáticas *como un arte*, abandonan la pretensión de construir una teoría científica sin negar el rigor en los métodos de indagación. Es el caso de Freudenthal (1978), quien identifica el quehacer del educador matemático como una *ingeniería* y piensa que la pretensión científicista es de tipo ideológico.



Las disciplinas fundantes de la educación matemática

La matemática misma ha sido, históricamente, el referente fundamental para que las instituciones y los docentes se definan frente al qué y cómo hacer la enseñanza. Implícita o explícitamente se asumen concepciones sobre el significado y el sentido de las matemáticas en la cultura y, por lo tanto, en la escuela. Cuando la matemática se considera como un saber terminado y rígido, la enseñanza se caracteriza como instructiva y la didáctica se reduce a la búsqueda de estrategias que ayuden a un aprendizaje eficiente de los conceptos y los procedimientos que, con anterioridad, han sido fijados como necesarios. Si la matemática es pensada como un saber en permanente construcción, en cuanto a sus significados y usos, y frente a la cual es posible, para la mayoría de las personas, una participación activa en la reconceptualización y conceptualización, entonces la didáctica exige plantearse y responder preguntas en el espacio creciente de las complejas relaciones entre los objetos matemáticos, los sujetos que los aprenden o los crean, los sujetos que enseñan, los medios que se utilizan y los contextos internos y externos que afectan la educación matemática. En otras palabras, es necesario tener respuestas a preguntas como las siguientes: ¿Qué objetos estudia el saber matemático? ¿Cómo se organizan estos objetos? ¿Qué métodos utiliza para construir sus conceptos? ¿Qué exigencias cognitivas se plantean para comprender sus constructos? ¿Qué vínculos genéticos se pueden establecer entre los conceptos y los fenómenos? ¿Qué relaciones se pueden establecer entre el lenguaje de quienes aprenden y los lenguajes matemáticos? ¿Qué usos tiene la matemática?

Con esta perspectiva se hace evidente la necesidad de una consideración interdisciplinaria para los objetos que intervienen en la educación matemática, básicamente para dar cuenta de los siguientes elementos constitutivos:

1. Las condiciones (cognitivas, socioafectivas, culturales y económicas) de las personas que aprenden y crean matemáticas.
2. Los constructos de la cultura matemática que deben ser conocidos y conservados por la cultura actual (selección de contenidos temáticos).
3. Las temáticas particulares que se deben tratar según las necesidades Nacionales y Regionales.
4. Las estrategias de intervención pedagógica (modos de la enseñanza) que hagan óptima la participación de los estudiantes y los docentes.
5. La selección de medios y mediadores, incluyendo el diseño de situaciones para el aprendizaje, que permitan el abordaje no mecánico ni atomista de las informaciones y los problemas.

6. La definición y precisión de sistemas de evaluación cualitativa (que no nieguen la cuantificación, cuando ella tiene sentido) que garanticen la más alta calidad posible en los logros formativos y cognitivos.

El panorama, hasta ahora presentado, justifica el porqué de la participación de otras disciplinas en la construcción del objeto de la educación matemática, principalmente de la Psicología, la Sociología y la Tecnología pero, como cada una de estas disciplinas posee diferentes propósitos, con marcos teóricos y métodos de investigación también diferentes, afectan de igual manera las concepciones, las investigaciones y las prácticas educativas. A continuación se presentan, sintéticamente, los enfoques más sobresalientes de las disciplinas citadas como fundantes de la educación matemática.

La psicología y la educación matemática

En principio, toda Psicología aporta a la educación en general y a la educación matemática en particular. Sin embargo, algunas ramas de esta disciplina han ejercido, tradicionalmente, una mayor influencia. Es el caso de la *Psicología de la Instrucción* y de la *Psicología Cognitiva*. Además, existe una escuela específica, dedicada a la construcción de la rama *Psicología de la Educación Matemática*. De estas corrientes se presentan los resúmenes de sus enfoques educativos.

El enfoque de la psicología de la instrucción

Este enfoque, también llamado conductivo o asociacionista por Skinner y Thorndike, y acumulativo por Gagné, es caracterizado por Armendáriz, Azcárate y Deulfeo (1993, p. 81):

Para una concepción de orientación conductiva la enseñanza se planeaba así:

(...) por medio del “análisis de tareas” se identifican los objetivos elementales que constituyen otro complejo y los objetivos, expresión de metas de aprendizaje, quedan jerarquizados.

(...) Se imponen, aquí, criterios de orden y de aplazamiento para entender el ‘sentido’ global. Se da gran importancia a la “práctica y a la ejercitación de rutinas con la consiguiente hipertrofia de lo sintáctico. Las secuencias en el aprendizaje son enormemente rígidas.

Según García Cruz (Internet, 2000):

Se presta importancia principal al producto, respuesta de los alumnos, y no al proceso, cómo y por qué se ha dado la respuesta. En definitiva, existe poco o nulo interés en explorar las estructuras y los procesos



cognitivos. La enseñanza programada, las fichas y las secuencias largas de objetivos y subobjetivos caracterizan la corriente más radical dentro del conductismo.

La tendencia a la “partición atomista” de los conocimientos y a la planeación y organización exacta de los contenidos temáticos, hizo que el conductismo se transformara en un orientador para una educación memorística y, en gran parte, acumuladora de conocimientos rara vez comprendidos.

El enfoque de la psicología cognitiva

La Psicología Cognitiva aporta a la educación matemática fundamentalmente a través de la descripción que hace sobre los procesos de aprendizaje y el posible uso de estos conocimientos para guiar los procesos de enseñanza. Las tendencias más relevantes se orientan hoy hacia el conocimiento del comportamiento humano; las formas de representación y el uso del conocimiento durante los aprendizajes; los estudios de formas de comportamientos cognoscitivos, cada vez más complejas; el aprendizaje significativo y la comprensión.

De esta disciplina se desprende la llamada *orientación cognitiva* para la enseñanza de las matemáticas, en donde se consideran las interrelaciones entre los conceptos y las organizaciones cognoscitivas que permiten los comportamientos matemáticos. Se origina a partir de las concepciones de Jean Piaget y Jerónimo Bruner, y continúa con la teoría sobre el aprendizaje significativo de Ausubel, entre otros.

El estructuralismo piagetano es una *superación*, en el sentido más positivo, del estructuralismo alemán de Wertheimer y Kohler, o escuela de la *Gestalt*, quienes, según Carretero se interesaban por “analizar los aspectos internos de la conducta, es decir la elaboración de la información que realiza el sujeto para que aparezca la nueva conducta (...) los gestalistas pusieron su interés en estudiar cómo el sujeto elabora soluciones posibles al problema que el sujeto concibe como tales desde la primera vez que las utiliza”. El estructuralismo piagetano es diferente al estructuralismo gestalista, en muchos aspectos que no se pueden explicar en unas cuantas frases. Se puede afirmar, simplemente, que mientras los gestalistas estudiaron fundamentalmente la conformación de las estructuras perceptivas, Piaget estudió las estructuras de conformación del pensamiento lógico y las relaciones de éste con las estructuras perceptivas.

De Piaget, la enseñanza de las matemáticas recibió muchos aportes. Sobre todo aquellos que permiten interpretar los procesos de conformación de las

nociones matemáticas y la calidad de esta conformación. Se sabe, por ejemplo, cómo distinguir un esquema mental *aditivo* de un esquema mental *multiplicativo*, un estado de pensamiento *operatorio concreto* de un estado de pensamiento *operatorio formal*; se diferencia la *abstracción matemática* de la *abstracción física*; y es posible inspirarse en su análisis y descripción del proceso *equilibrio inicial-desequilibrio-reequilibrio*, para diseñar estrategias de intervención pedagógica y de evaluación de los aprendizajes, pero con Piaget pasó algo similar a lo ocurrido con el conductismo de Thorndike, Skinner y Gagné, también se presentó *reduccionismo* y *transposición acrítica* de sus teorías a las didácticas. En matemáticas se creyó, ingenuamente, que se podían enseñar las estructuras formales. Se confundió el nivel explicativo con el operativo y logístico; por eso se diseñaron unidades de lógica y conjuntos, y de relaciones y operaciones abstractas, para ser enseñadas desde los primeros años.

Era tan “evidente” la profunda relación entre la investigación piagetana y las condiciones para aprender las matemáticas, que muchas personas en todo el mundo, acosadas por las dificultades que siempre ha tenido la educación matemática, corrieron a inferir, precipitadamente, contenidos y métodos de enseñanza, sin profundizar en el estudio directo de los trabajos de Piaget. Una muestra de ello se puede encontrar en los contenidos de las cuatro primeras conferencias latinoamericanas (Barrantes. 1998, pp. 1-10).

Otra fue la intención de los investigadores en educación matemática, formados en la escuela de Piaget. En palabras de Howson y Bruner (citados por Armendáriz. 1993, p. 82):

Para el enfoque estructuralista el propósito de transmitir las estructuras científicas no es la adquisición del conocimiento de esas estructuras por los alumnos; no es tanto el tratar las estructuras como contenido educativo como el ‘desplegar’ la esencia explicativa existente bajo lo particular. Así, a largo plazo, se hace posible la correspondencia entre estructuras científicas y cognitivas promoviendo los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos.

(...) Bruner asume el problema de cómo enseñar y mantiene que los alumnos cuyas estructuras cognitivas no alcancen los grados de complejidad adecuados para asimilar “las estructuras matemáticas”, pueden acceder a ellas de forma intuitiva e, incluso, emprender generalizaciones y abstracciones aun cuando sólo perciban parte de lo relacionado y lo generalizado.

(...) La combinación de actividad-descubrimiento y el desarrollo del currículo en espiral, se convierten en recursos metodológicos que permiten al alumno comportarse en cierta medida como un científico que va



‘rellenando’ tales estructuras; además, asegura que el progreso tendrá lugar secuencialmente desde los niveles más bajos a los más altos, y de lo menos a lo más complejo. Conceptos como conjunto, función, grupo de transformaciones, isomorfismo pueden ser introducidos de forma rudimentaria a los alumnos jóvenes y ser presentados en sucesivas ocasiones, hasta conseguir una comprensión más amplia y profunda de los mismos.

La mayoría de las propuestas estructuralistas, en el sentido de Howson, no alcanzaron a tener suficiente experimentación y aplicación generalizada. Es el caso de la metodología de Zoltan. P. Dienes (1970, 1973, 1975), con su propuesta para ayudar a construir las nociones matemáticas a través de materiales, como los bloques lógicos, y frente a los cuales se organizaría un trabajo que respetara las etapas: juego libre, detección de regularidades, representación, descripción verbal y definición. También es importante citar la propuesta, menos extensa pero muy orientadora para la intervención pedagógica, del profesor Gastón Mialaret (1977), quien propone recorrer un proceso de acompañamiento desde las acciones con materiales concretos hasta las representaciones simbólicas, recurriendo a las conductas del relato durante y después de las acciones.

Es apenas lógico que un estructuralista organice los elementos de su propuesta respondiendo a una mirada de conjunto, y que relacione estos elementos en subconjuntos jerarquizados; pero esto no es lo mismo que conocer todos los pasos y todas las posibilidades de las secuencias.

Los modelos constructivistas actuales

Inspirados en el enfoque cognitivo aparecen los modelos constructivistas que se originan en el supuesto de que el sujeto construye, activamente, el conocimiento a través de la interacción y organización entre sus constructos mentales y el medio. Aunque la instrucción afecta claramente a lo que el sujeto aprende, no determina tal aprendizaje. Así, desde esta perspectiva, y como una propuesta alternativa de los modelos expositivos, surgen las didácticas participativas que incluyen variantes que van desde las posiciones “sumisas” (constructivismo radical) a lo que los estudiantes quieran aprender y hacer, hasta los modelos de acción fina y exigente, para que los estudiantes, además de encontrar respuestas a sus inquietudes, también se confronten frente a las preguntas planteadas por el profesor, en un ambiente de conocimiento, conservación y promoción del saber formal. Según Vergnaud (citado por Godino. 1991, pp. 105-148): “La construcción del conocimiento consiste en la construcción progresiva de representaciones mentales, implícitas

o explícitas, que son homomórficas a la realidad para algunos aspectos, y que no lo son para otros”.

El enfoque de procesamiento de la información

Este enfoque se desprende de las investigaciones sobre inteligencia artificial. Escribe García (Internet, 1997), refiriéndose a las capacidades cognitivas y a las posibilidades de estudiarlas científicamente:

Los hombres poseemos capacidades o habilidades cognitivas o mentales. Podemos razonar y resolver problemas; actuar de forma racional para conseguir objetivos; ver cosas, reconocerlas y dotar de significado a lo que vemos; formarnos imágenes mentales de las cosas; hablar, comprender el lenguaje y comunicarnos; inventar cosas nuevas, diseñar cosas útiles, crear cosas bellas, (...). La Ciencia Cognitiva es el estudio científico de las capacidades cognitivas (...). Podemos realizar experimentos psicológicos que intenten explicar las capacidades cognitivas. Se puede observar a la gente para ver cómo resuelven problemas; estudiar en qué difieren y en qué son similares sus respuestas; estudiar cómo los cambios en su cerebro pueden afectar a cambios en sus estados mentales (...). Podemos estudiar los cerebros. Cómo las diferentes partes realizan diferentes funciones; cómo los daños cerebrales afectan el comportamiento (...). También podemos usar ordenadores que simulen las capacidades cognitivas de los hombres e implementar y probar las teorías que explican las capacidades cognitivas.

Algunos, entendiéndolo mal el propósito de esta ciencia, creen que se trata de imitar los modelos estructurales de los ordenadores para analizar los procesos mentales pero, por el contrario, los investigadores en este campo utilizan propuestas estructurales sobre el pensamiento humano, originados en campos tan variados como la neurobiología y la semántica, para crear los modelos cibernéticos que hacen posible el trabajo de los ordenadores. Se hacen observaciones detalladas de las formas como las personas resuelve los problemas, para buscar regularidades y caracterizarlas, de manera que sirvan para proponer modelos de procesos de comprensión. Modelos que se simulan en los ordenadores y que pueden llegar a aportar como propuestas para la acción educativa. Estas investigaciones plantean un verdadero problema para las investigaciones futuras, que puede enunciarse así: si el resolutor principal de los problemas tiende a ser el ordenador, ¿qué papel de resolutor le corresponderá a los sujetos?

A continuación se presentan algunos apartes de la descripción que hace Godino (1991, pp. 105-148) sobre el grupo que estudia la Psicología Matemática como una disciplina autónoma.

El Grupo PME (*Psychology of Mathematics Education*)

Este grupo considera que el aprendizaje de las matemáticas posee características especiales que no puede estudiar, por su formación, un psicólogo general. Entre ellas, cita Balachef (1990a):

La especificidad del conocimiento matemático, que exige un análisis epistemológico sobre los diferentes conceptos y un conocimiento sobre los procesos para construir estos conceptos y, la dimensión social, que considera tanto el status social del conocimiento como las múltiples interacciones que lo afectan. Se promueve, entonces, las investigaciones en el aula y el diseño de nuevos y adecuados referentes teóricos y metodológicos que permitan avanzar hacia modelos didácticos prácticos.

Al preguntarse sobre cuáles son las cuestiones esenciales para la Educación Matemática para las cuales una aproximación psicológica puede ser apropiada, Vergnaud (1988) cita las siguientes:

- El análisis de la conducta de los estudiantes, de sus representaciones y de los fenómenos inconscientes que tienen lugar en sus mentes;
- Las conductas, representaciones y fenómenos inconscientes de los profesores, padres y demás participantes.

De un modo más especial, analiza cuatro tipos de fenómenos cuyo estudio, desde una aproximación psicológica, puede ser fructífero:

- 1) La organización jerárquica de las competencias y concepciones de los estudiantes.
- 2) La evolución a corto plazo de las concepciones y competencias en el aula.
- 3) Las interacciones sociales y los fenómenos inconscientes.
- 4) La identificación de teoremas en acto, esquemas y símbolos.

Sin embargo, el análisis de las actas de las reuniones anuales del PME revela que los informes de investigación aceptados incluyen tanto investigaciones empíricas como teóricas, y que cubren ámbitos no estrictamente psicológicos. No es posible detallar, por su amplitud, los temas tratados en las distintas conferencias, pero sí puede ser de interés citar el esquema de clasificación de los informes de investigación (*research report*) presentados en la última reunión (Furinghetti, 1991) ya que indica, a grandes rasgos, las cuestiones sobre las que se está trabajando en la actualidad. Dicho esquema se indica en el cuadro 1.

1. Geometría y pensamiento espacial
2. Ordenadores y aprendizaje matemático
3. Pensamiento algebraico
4. Funciones
5. Pensamiento matemático avanzado
6. Fracciones, decimales, números racionales, razonamiento proporcional
7. Imágenes y visualización
8. Aprendizaje matemático en los primeros niveles
9. Demostración
10. Resolución de problemas
11. Concepciones de los alumnos, creencias...
12. Concepciones de los profesores, creencias...
13. Factores sociales y afectivos, metacognición
14. Construcción social del conocimiento matemático y lingüística
15. Matemáticas fuera de la escuela, el papel del contexto
16. Evaluación
17. Cuestiones teóricas y epistemológicas
18. Materiales curriculares
19. Formación de profesores

Cuadro 1. Clasificación de temas en la XV Conferencia PME

El enfoque sociocultural

Se centra en el análisis de las interacciones sociales, dando importancia tanto a los sujetos que intervienen en los procesos de enseñanza y aprendizaje como a los efectos que pueden tener los diferentes entornos sobre dichos procesos. Vygotsky y Bandura son representantes de este enfoque. Kilpatrick (1994, p. 14 y 15) se refiere a este enfoque así:

... profesores y estudiantes son miembros de varios grupos sociales; la enseñanza y el aprendizaje son procesos sociales; y las matemáticas que se enseñan están determinadas socialmente (...). Un área creciente de la literatura de investigación se está preocupando por la relación entre la cultura de las matemáticas escolares, la cultura que el niño trae a la escuela y la cultura dentro de la cual el adulto hace matemáticas”.



Para Vygotsky (1977), el desarrollo de las funciones psicológicas superiores se presenta en el plano social antes que en el individual. Acepta que se pueden transmitir y adquirir conocimientos a través de la interacción (plano interpsicológico) y la internalización (plano intrapsicológico). La internalización es el paso de lo interpersonal a lo intrapersonal. En este proceso de lo social a lo personal juegan un papel determinante los mediadores, entendidos como instrumentos que transforman la realidad, en lugar de imitarla. El docente es un mediador, como también lo son las herramientas y los símbolos. Se trata de promover estructuras cognitivas para el pensamiento y la acción a través de medios como el modelamiento, el manejo de contingencias, la instrucción, las preguntas y la estructuración cognoscitiva. Introduce el concepto zona de desarrollo próximo entendido como la distancia entre el nivel de desarrollo, determinado por la capacidad de resolver independientemente un problema y el nivel de desarrollo potencial, determinado a través de la resolución de un problema bajo la guía de un adulto o en colaboración con un par más capacitado.

El enfoque tecnológico

Si se analiza este enfoque desde una visión antagónica, por ejemplo comparándolo con la posición crítica hermenéutica de Habermas (1987), para afirmar que el enfoque tecnológico confronta el mundo de la vida y niega el humanismo, entonces se pierde la posibilidad humana de recurrir a los objetos y procedimientos que nos ofrece la tecnología, para recurrir a prácticas que sin ella sería imposible realizar. Además, haciendo uso de la oferta liberadora en cuanto al tiempo y las herramientas, para poder pensar críticamente y extender el espacio de los conocimientos.

Hoy, la tecnología en educación matemática está centrada, fundamentalmente, en el uso de calculadoras y los programas de ordenadores como medios y mediadores para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, ampliando sorprendentemente el espacio de las situaciones didácticas. Se viene favoreciendo, entre otros temas, el estudio de las geometrías, las matemáticas discretas, el cálculo variacional y los problemas de estrategias; temas para los cuales el texto tradicional ofrece pocas opciones didácticas.

Una guía para indagar los modelos de investigación en educación matemática

Frente a la cantidad y variedad de enfoques existentes que comparten la construcción del campo pedagógico en educación matemática, conviene recurrir a categorías que faciliten alguna clasificación. Se presenta a Kilpatrick

(1994, pp. 1-18), para recoger las grandes temáticas, y a Padrón (1998, pp. 160-169), para acoger unas categorías.

Después de un breve recorrido por la historia de la investigación en educación, Kilpatrick ubica los orígenes de la investigación en educación matemática en el siglo XIX, cuando las universidades se propusieron ampliar los programas para cualificar la preparación de los profesores de matemáticas, lo que generó el comienzo de la investigación en este campo. En los comienzos del siglo XX, la Psicología empieza a influir de manera predominante, sobre todo en Alemania y Estados Unidos.

Para este autor, las temáticas que han determinado los estudios tienen que ver con los cambios en las metodologías de investigación, los cambios curriculares, la práctica docente, el proceso de aprendizaje, el empleo de tecnología, las prácticas de evaluación, el desarrollo profesional y el contexto social.

En cuanto a los cambios en las metodologías de investigación responden a las concepciones predominantes en cada momento histórico, desde cuando las ciencias humanas imitan los métodos de las ciencias naturales, influenciadas por el pensamiento positivista y neo-positivista, hasta las visiones fenomenológicas, sociocríticas, antropológicas y sistémicas actuales.

Como un punto de referencia para observar los modelos de investigación en educación matemática, se presenta la visión de Padrón sobre la estructura de los procesos de investigación, que llama *Modelo de Variabilidad de la Investigación Educativa*. Según este autor, para analizar las posibles variaciones observables en las investigaciones es necesario considerar, como criterios mayores de diferenciación, la *estructura diacrónica* (evolución temporal) y la *estructura sincrónica* (independiente del tiempo).

Bajo una perspectiva diacrónica, toda investigación supera los límites del individuo y es observada dentro de una red temática y problemática dentro de la cual trabajan y han estado trabajando otros investigadores (programa de investigación o, mejor, línea de trabajo).

Con el propósito de fijar categorías que den, con alguna claridad, un informe sobre grupos homogéneos en educación matemática, es conveniente interpretar, para este campo de estudio, las fases que sobre el desarrollo investigativo exhibe Padrón (descriptiva, explicativa, contrastativa y aplicativa). Fases que se interpretaran, de acuerdo con los intereses de este trabajo, como organizadoras de amplios grupos de investigadores, no siempre conectados entre sí.



Las investigaciones descriptivas

Comprenden las observaciones o registros de la realidad estudiada.

Sus técnicas típicas de trabajo varían según el enfoque epistemológico adoptado dentro del Programa de Investigación o dentro de la Línea: mediciones por cuantificación aritmética o estadística (enfoque empirista-inductivo), registros de base cualitativa (enfoque introspectivo-vivencial) o construcción de estructuras empíricas mediante sistemas lógico-formales (enfoque racionalista-deductivo) Padrón (1998, p. 162).

Tiene sentido comprender en este grupo a todas las investigaciones en el aula o para el aula, es decir, que se realizan observando, analizando e interpretando el comportamiento de individuos o grupos de individuos, mientras aprenden o enseñan; ya sea que lo hagan con un enfoque psicológico, sociológico, antropológico o tecnológico: los individuos son, generalmente, estudiantes, docentes o ambos en relación.

Las observaciones y registros que sirven de punto de partida de cualquier investigación en educación, y particularmente en educación matemática, se originan en campos restringidos que “olvidan” otras observaciones, posiblemente también determinantes del problema estudiado. Así, por ejemplo, investigaciones de tipo cuantitativo, centradas en la obtención de logros como las pruebas TIMMS y las Olimpiadas de matemáticas (en el nivel internacional) y las pruebas ICFES (en el nivel nacional) no recogen directamente toda la información sobre el currículo real ofrecido a los estudiantes, ni sobre los contextos sociales, culturales y afectivos que rodean las prácticas de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en cada caso (sería imposible hacerlo). En el otro extremo, un modelo cualitativo, de fuerte tendencia constructivista, puede olvidar el aprendizaje significativo que muchos estudiantes logran desde la enseñanza llamada tradicional, o recurriendo a los actuales modelos tecnológicos, la mayoría de los cuales son resultado de calificaciones al modelo instruccional. Esta inevitable circunstancia debería servir como filtro de control para las pretensiones globalizantes, propias de la mayoría de los grupos de investigación.

Las investigaciones explicativas

Éstas son las más sólidas, teóricamente, pero también las más atrevidas en los modelos de investigación.

El objetivo central de estas investigaciones consiste en proveer modelos teóricos (explicativos, abstractos, universales, generales) que nos permitan elaborar predicciones y retrodicciones dentro del área fáctica a la cual se

refiere el modelo. Se estructuran sobre la base de preguntas cuya forma lógica se orienta a interpretar la ocurrencia de una cierta clase de eventos (consecuentes) por mediación de otra clase de eventos (antecedentes): ¿Por qué ocurre p? ¿De qué depende p? ¿Qué clase de hechos condiciona la ocurrencia de p? Sus operaciones estandarizadas son las formulaciones de sistemas de hipótesis, los desarrollos de hipótesis (por comprobación o por derivación), las construcciones de sistemas interpretativos, etc. Sus técnicas típicas de trabajo varían según el enfoque epistemológico adoptado dentro del Programa de Investigación o dentro de la línea: inducción y construcciones probabilísticas (enfoque empirista-inductivo), introspección y elaboraciones simbólico-culturales (enfoque introspectivo-vivencial), deducción y construcción de sistemas de razonamiento (enfoque racionalista-deductivo) Padrón (1998,162).

En esta categoría sobresalen el grupo de estudio de La Teoría de La Educación Matemática TME, la escuela de Psicología Matemática PME (que ya fue presentada) y la Escuela francesa de la Didáctica de la Matemática. A continuación se reproducen, por su importancia, los apartes que hace Godino (Op. cit., p. 26), sobre los dos grupos faltantes.

El grupo TME (Theory of Mathematics Education)

El grupo TME fue fundado por Steiner en el V Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME), celebrado en 1984. Tuvo como propósito la construcción de *Una Teoría de la Educación Matemática*. Su importancia radica en que logró promover y recoger un amplio campo académico que integrara la investigación, el desarrollo y la práctica. Los componentes fundamentales para esta línea de investigación fueron:

A. La identificación y formulación de los problemas básicos en la orientación, fundamento, metodología y organización de la Educación Matemática como una disciplina, tales como:

1. La existencia de distintas definiciones, incluso discrepantes, de la Educación Matemática como disciplina.
2. El uso de modelos, paradigmas, teorías, y métodos en la investigación y de herramientas apropiadas para el análisis de sus resultados.
3. El papel que deben jugar los “macromodelos”, esto es, marcos de referencia generales que relacionan significativamente los múltiples aspectos de la Educación Matemática y los micromodelos, que proporcionan información detallada sobre áreas restringidas del aprendizaje matemático.

4. El debate entre “teorías específicas” frente a interdisciplinariedad y transdisciplinariedad.

5. Las relaciones entre la Educación Matemática y sus campos referenciales como Matemáticas, Pedagogía, Psicología, Sociología, Epistemología, etc.

6. Las relaciones entre teoría, desarrollo y práctica: las tareas integradoras y sintéticas de la Educación Matemática frente a las tendencias recientes hacia una ciencia normal y la creciente especialización.

7. Los aspectos axiológicos éticos, sociales y políticos de la Educación Matemática.

B. El desarrollo de una aproximación comprensiva a la Educación Matemática, que debe ser vista en su totalidad como un sistema interactivo, comprendiendo investigación, desarrollo y práctica. Esto lleva a destacar la importancia de la teoría de sistemas, especialmente de las teorías de los sistemas sociales, basadas en conceptos como interacción social, actividad cooperativa humana, diferenciación, subsistemas, autorreproducción y sistemas autoorganizados, autorreferencia y reflexión en sistemas sociales, etc.

Así mismo, interesa la identificación y el estudio de las múltiples interdependencias y mutuos condicionantes en la Educación Matemática, incluyendo el análisis de las complementariedades fundamentales.

C. La organización de la investigación sobre la propia Educación Matemática como disciplina que, por una parte, proporcione información y datos sobre la situación, los problemas y las necesidades de la misma, teniendo en cuenta las diferencias nacionales y regionales y, por la otra, contribuya al desarrollo de un metaconocimiento y una actitud autorreflexiva como base para el establecimiento y realización de los programas de desarrollo del TME.

La Segunda Conferencia del Grupo TME (Bielefeld, 1985) se centró sobre el tema genérico “Fundamento y metodología de la disciplina Educación Matemática (Didáctica de la Matemática)” y, por tanto, la mayoría de las contribuciones resaltaron el papel de la teoría y la teorización en dominios particulares. Entre estos temas, figuran:

- Teorías sobre la enseñanza.
- Teoría de las situaciones didácticas.
- Teoría interaccionista del aprendizaje y la enseñanza.
- El papel de las metáforas en teoría del desarrollo.

- El papel de las teorías empíricas en la enseñanza de la matemática.
- La importancia de las teorías fundamentales matemáticas.
- Conceptos teóricos para la enseñanza de la matemática aplicada.
- La teoría de la representación como base para comprender el aprendizaje matemático.
- Estudios históricos sobre el desarrollo teórico de la educación matemática como una disciplina.

Los grupos de trabajo se dedicaron a diferentes dominios de investigación con el fin de analizar el uso de modelos, métodos, teorías, paradigmas, etc.

El tema de trabajo de la Tercera Conferencia (Bélgica, 1988) trató sobre el papel y las implicaciones de la investigación en Educación Matemática en y para la formación de los profesores, dado el desfase considerable existente entre la enseñanza y el aprendizaje. Concretamente, las cuestiones seleccionadas fueron:

- El desfase entre enseñanza-aprendizaje en el proceso real en las clases de matemáticas, como un fenómeno tradicional y como un problema presente crucial.

- El desfase entre investigación sobre la enseñanza e investigación sobre el aprendizaje.

- Modelos para el diseño de la enseñanza a la luz de la investigación sobre el aprendizaje.

- La necesidad de la teoría y la investigación en trabajos y proyectos de desarrollo y su posición en el contexto de investigación sobre enseñanza-aprendizaje.

- El papel del contenido, la orientación del área temática y las distintas perspectivas de las matemáticas en el estudio y solución del desfase investigación-aprendizaje y el desarrollo de modelos integradores.

- El desfase enseñanza-aprendizaje a la luz de los estudios sobre procesos e interacción social en la clase.

- Implicaciones del tema de la conferencia sobre la formación de profesores.

- El ordenador como un tercer componente en la interacción enseñanza-aprendizaje.

Los temas tratados en la Cuarta Conferencia celebrada (México, 1990), fueron los siguientes:

I. Relaciones entre las orientaciones teóricas y los métodos de investigación empírica en Educación Matemática.

II. El papel de los aspectos y acercamientos holísticos y sistémicos en Educación Matemática.

Así mismo, en esta reunión se inició la presentación de distintos programas de formación de investigadores en Educación Matemática en el seno de distintas universidades, tanto a nivel de doctorado como de “master”.

En la Quinta Conferencia (Italia, 1991), los temas fueron:

I. El papel de las metáforas y metonimias en Matemáticas, Educación Matemática y en la clase de matemáticas.

II. Interacción social y desarrollo del conocimiento. Perspectiva de Vygotsky sobre la enseñanza y el aprendizaje matemático en la zona de construcción.

Como se ha expuesto, los fenómenos estudiados en las conferencias del TME incluyen un rango muy diverso: matemáticas, diseño de currículum, estudio de los modos de construcción, por los alumnos, del significado de las nociones matemáticas, las interacciones profesor-alumno, la preparación de los profesores, métodos alternativos de investigación, etc. La razón de esta diversidad se debe a que el término “Educación Matemática” no está aún claramente definido. No parece existir un consenso acerca de las cuestiones centrales para la Educación Matemática, que agrupe todos los intereses aparentemente diversos del campo.

Si bien los temas tratados en las conferencias TME son de interés para distintos aspectos de la Educación Matemática, no resulta fácil apreciar en ellos un avance en la configuración de una disciplina académica, esto es, una teoría de carácter fundamental que establezca los cimientos de una nueva ciencia por medio de la formulación de unos conceptos básicos y unos postulados elementales. Se encuentran muchos resultados parciales, apoyados en supuestos teóricos externos (tomados de otras disciplinas) que tratan de orientar la acción en el aula, aunque con un progreso escaso.

La escuela fundamental francesa

En Brousseau (1989, p. 3) se define la concepción fundamental de la Didáctica de la Matemática como: “una ciencia que se interesa por la producción y comunicación de los conocimientos matemáticos, en lo que esta producción y esta comunicación tienen de específicos de los mismos”.

Sus representantes más sobresalientes son Brousseau, Chevallard y Vergnaud. Esta escuela posee una “concepción global de la enseñanza, estrechamente

ligada a la matemática y a teorías específicas de aprendizaje y búsqueda de paradigmas propios de investigación, en una postura integradora entre los métodos cuantitativos y cualitativos... Los modelos desarrollados comprenden las dimensiones epistemológicas, sociales y cognitivas y tratan de tener en cuenta la complejidad de las interacciones entre el saber, los alumnos y el profesor, dentro del contexto particular de la clase". Asumen el concepto de sistema interno, considerando en él, como subsistemas, al alumno, el docente, el saber enseñado y el medio (materiales, juegos, situaciones didácticas); este sistema estaría afectado por los entornos cercanos (la sociedad, los padres, los matemáticos, etc.). Trabajan fundamentalmente los siguientes temas:

Aprendizaje y enseñanza: Teoría de Situaciones Didácticas

Asumen la perspectiva piagetana al aceptar que el conocimiento se construye en un proceso interactivo entre el sujeto y el objeto, pero considerando que los contenidos son el abstracto que permite desarrollar las estructuras mentales, "el problema principal de investigación es el estudio de las condiciones en las cuales se constituye el saber, pero con el fin de su optimización, de su control y de su reproducción en situaciones escolares. Esto obliga a conceder una importancia particular al objeto de la interacción entre los dos subsistemas, que es precisamente la situación-problema y la gestión por el profesor de esta interacción".

Puesto que el conocimiento matemático incluye conceptos, sistemas de representación simbólica y procedimientos de desarrollo y validación de nuevas ideas matemáticas, podemos contemplar varios tipos de situaciones:

- *Situaciones de acción* sobre el medio, que favorecen el surgimiento de teorías (implícitas) que después funcionarán en la clase como modelos protomatemáticos.

- *Situaciones de formulación*, que favorecen la adquisición de modelos y lenguajes explícitos. En éstas se suelen diferenciar las situaciones de comunicación que son las situaciones de formulación que tienen dimensiones sociales explícitas.

- *Situaciones de validación*, requieren de los alumnos la explicitación de pruebas y por tanto, explicaciones de las teorías relacionadas y los medios que subyacen en los procesos de demostración.

- *Situaciones de institucionalización*, que tienen por finalidad establecer y dar un "status" oficial a algún conocimiento aparecido durante la actividad

de la clase. En particular se refiere al conocimiento, las representaciones simbólicas, etc., que deben ser retenidas para el trabajo posterior.

Los obstáculos y sus tipos

El aprendizaje por adaptación al medio, implica necesariamente rupturas cognitivas, acomodaciones, cambio de modelos implícitos (concepciones), de lenguajes, de sistemas cognitivos. Si se obliga a un alumno o a un grupo a una progresión paso a paso, el mismo principio de adaptación puede contrariar el rechazo, necesario, de un conocimiento inadecuado. Las ideas transitorias resisten y persisten. Estas rupturas pueden ser previstas por el estudio directo de las situaciones y por el estudio indirecto de los comportamientos de los alumnos (Brousseau, 1983).

Un obstáculo es una concepción que ha sido, en principio, eficiente para resolver algún tipo de problemas, pero que falla cuando se aplica a otro. Debido a su éxito previo, se resiste a ser modificado o rechazado: viene a ser una barrera para un aprendizaje posterior. Se revela por medio de los errores específicos que son constantes y resistentes. Para superar tales obstáculos se precisan situaciones didácticas diseñadas para hacer a los alumnos conscientes de la necesidad de cambiar sus concepciones y para ayudarlos en conseguirlo.

Brousseau (1983) da las siguientes características de los obstáculos:

- Un obstáculo es un conocimiento, no una falta de conocimiento.
- El alumno utiliza este conocimiento para producir respuestas adaptadas en un cierto contexto que encuentra con frecuencia.
- Cuando este conocimiento se usa fuera de este contexto, genera respuestas incorrectas. Una respuesta universal exigiría un punto de vista diferente.
- El alumno resiste a las contradicciones que el obstáculo le produce y al establecimiento de un conocimiento mejor. Es indispensable identificarlo e incorporar su rechazo en el nuevo saber.
- Después de haber notado su inexactitud, continúa manifestándolo, de forma esporádica.

Se distinguen los siguientes tipos de obstáculos:

- *Obstáculos ontogenéticos*, a veces llamados obstáculos psicogenéticos: son debidos a las características del desarrollo del niño.
- *Obstáculos didácticos*: que resultan de las elecciones didácticas hechas para establecer la situación de enseñanza.

- *Obstáculos epistemológicos*: intrínsecamente relacionados al propio concepto.

Evidenciado por medio de un análisis histórico, tal tipo de obstáculo se debe considerar como parte del significado del concepto. Por tanto, encontrarlo y superarlo, parece ser una condición necesaria para la construcción de una concepción relevante.

Observamos que, frente a la teoría psicológica que atribuye los errores de los alumnos a causas de tipo cognitivo, se admite aquí la posibilidad de que tales errores puedan ser debidos a causas epistemológicas y didácticas, por lo que la determinación de este tipo de causas proporciona una primera vía de solución.

Relación con el saber: Relatividad del conocimiento respecto de las instituciones. Recientemente, Chevallard (1989) ha adoptado una posición de notable generalidad para los estudios de Didáctica. Desde una perspectiva antropológica, la Didáctica de la Matemática sería el estudio del Hombre – las sociedades humanas– aprendiendo y enseñando matemáticas.

Para Chevallard (1989), el objeto principal de estudio de la Didáctica de la Matemática está constituido por los diferentes tipos de sistemas didácticos –formados por los subsistemas: enseñantes, alumnos y saber enseñado– que existan actualmente o que puedan ser creados, por ejemplo, mediante la organización de un tipo especial de enseñanza.

La problemática del estudio puede ser formulada, globalmente y a grandes rasgos, con la ayuda del concepto de relación con el saber (*rapport au savoir*) (institucional y personal). Para este autor, dado un objeto conceptual, “saber” o “conocer” dicho objeto no es un concepto absoluto, sino que depende de la institución en que se encuentra el sujeto. Así la expresión “sabe probabilidad”, referida a una persona dada, puede ser cierta si nos referimos a las probabilidades estudiadas en la escuela, y falsa si nos referimos al mundo académico, e incluso en éste habría que diferenciar si nos referimos al conocimiento necesario, para la enseñanza en los primeros cursos de una carrera técnica o al que sería preciso para realizar investigación teórica sobre Cálculo de Probabilidades.

Hay que distinguir, pues, entre relación institucional (saber referido al objeto conceptual, que se considera aceptable dentro de una institución) y relación personal (conocimiento sobre el objeto de una persona dada) que puede estar o no en coincidencia con el institucional para la institución de la que forma parte. Sobre estos conceptos, se plantean dos preguntas fundamentales:



1. ¿Cuáles son las condiciones que aseguran la viabilidad didáctica de tal elemento del saber y de tal relación institucional y personal a este elemento del saber?

2. ¿Cuáles son las restricciones que pueden impedir satisfacer estas condiciones?

El problema central de la Didáctica es, para este autor, el estudio de la relación institucional con el saber, de sus condiciones y sus efectos. El estudio de la relación personal es fundamental en la práctica, pero secundario epistemológicamente. Este programa, sin embargo, no puede tener éxito sin una toma en consideración del conjunto de condicionantes (cognitivos, culturales, sociales, inconscientes, fisiológicos, etc.) del alumno, que juegan o pueden jugar un papel en la formación de su relación personal con el objeto de saber en cuestión.

Transposición didáctica

La relatividad del saber a la institución en que se presenta lleva al concepto de transposición didáctica, (Chevallard, 1985), el cual se refiere a la adaptación del conocimiento matemático para transformarlo en conocimiento para ser enseñado.

En una primera fase de la transposición se pasa del saber matemático al saber a enseñar. Se pasa de la descripción de los empleos de la noción a la descripción de la misma noción y la economía que supone para la organización del saber. La constitución de un texto para fines didácticos reduce así la dialéctica, esencial al funcionamiento del concepto, de los problemas y los útiles matemáticos. Hay una descontextualización del concepto. También se asiste a un fenómeno de deshistorización, por el cual el saber toma el aspecto de una realidad ahistórica, intemporal, que se impone por sí misma, que, no teniendo productor, no puede ser contestada en su origen, utilidad o pertinencia.

Una vez realizada la introducción del concepto, el funcionamiento didáctico va, progresivamente, apoderándose de él para hacer "algo" que no tiene por qué tener relación con los móviles de quienes han concebido el programa. Su inmersión en el saber enseñado va a permitir, finalmente, su recontextualización. Pero ésta no conseguirá, en general, sobre todo en los primeros niveles de enseñanza, ni reconstituir el modo de existencia original de la noción, ni llenar todas y únicamente las funciones para las cuales se había decidido introducirlo.

Las investigaciones contrastativas

Es la tarea de “evaluar o validar las explicaciones o modelos teóricos contruidos en los grupos explicativos, con el objeto de establecer respaldos de confiabilidad para los productos elaborados dentro de la teoría. Sus operaciones típicas son las derivaciones de proposiciones particulares a partir de hipótesis globales, la búsqueda de inconsistencias e incomplettitudes, el hallazgo de casos que contradicen o escapan al modelo teórico, etc.” (Padrón. 1998, p. 163).

Se pueden incluir aquí todas las investigaciones sobre cuyas hipótesis se intenta una validación práctica: responden a la pregunta ¿cuáles son los efectos resultantes al aplicar un modelo A? Son la fuente más importante de nuevas preguntas, nuevas propuestas y replantemientos a los modelos iniciales. De cierto modo se puede afirmar que las teorías sobre educación matemática crecen, se transforman o desaparecen, gracias a la investigación contrastativa. De este modo se ha podido verificar la validez de algunos planteamientos de Piaget y la insuficiencia de otros, para explicar lo que realmente ocurre durante el aprendizaje. De manera similar, con todos los teóricos y todas las teorías.

Desde una mirada global existe, en casi todos los países, una frustración por los resultados de la educación matemática, lo que cuestiona la validez de los modelos predominantes y hace evidente el desfase entre los resultados de las investigaciones de los académicos y sus posibles impactos en las prácticas educativas.

Las investigaciones aplicativas

Su objetivo central está en proveer tecnologías o esquemas de acción derivados de los conocimientos teóricos contruidos dentro de la secuencia de la Línea. Estas investigaciones carecen, propiamente hablando, de preguntas. Más bien tienden a establecer una relación productiva, ingeniosa y creativa, entre las posibilidades de un modelo teórico, por un lado, y las dificultades o necesidades que se confrontan en el terreno de la práctica, por el otro. Mientras en los tres tipos anteriores de investigación el “Problema” es una pregunta formulada desde una actitud de ignorancia, en las investigaciones aplicativas el “Problema” es una cierta situación práctica formulada desde una actitud de expectativas de cambio, situación que resulta deficitaria, inconveniente o mejorable y que puede ser transformada o manejada mediante un cierto prototipo de control situacional (Padrón. 1998, p. 164).

Pertenecen a este grupo las investigaciones sobre prácticas educativas centradas en los modelos de enseñanza, las investigaciones relacionadas con las creencias y con los conocimientos de los docentes, las investigaciones sobre estrategias para formar docentes y las tesis de grado que elaboran, en las universidades, los estudiantes de posgrado en temas relacionados con la educación matemática.

La influencia de las escuelas en las propuestas curriculares

Indudablemente, ninguna de estas referencias justifica las reformas que se aplicaron a la enseñanza de las matemáticas desde la década de los años 60, con el nombre de *matemáticas modernas*. Para analizar las concepciones y los efectos de esta reforma en los currículos europeos y latinoamericanos, se pueden consultar los informes sobre las nueve primeras conferencias realizadas por el *Comité Interamericano de Educación Matemática* (Barrantes. 1998, pp. 1-10). Importa, aquí, resaltar el enfoque deductivo que orientó la enseñanza, acorde con una concepción de la matemática como un conocimiento *a priori*, sin relaciones con la experiencia, lo que promueve una enseñanza que niega el papel de la intuición y las aproximaciones heurísticas en la comprensión de los conceptos. Consecuentemente con esta ideología, se transformaron los programas de formación de docentes de matemáticas y se escribieron los textos para los estudiantes. En la Tercera Conferencia latinoamericana, celebrada en Argentina en 1972, ya comenzó a socializarse el fracaso de la reforma, aunque se imputaba principalmente a la mala preparación de los docentes: "... sin embargo, el aspecto psicológico y pedagógico de los educandos, las posibilidades reales de que esto se pudiera llevar a cabo, rara vez se tuvieron en consideración". A partir de la Quinta Conferencia (Brasil, 1979) aparecen con fuerza las influencias de las corrientes cognoscitivas e interpretativas. De esto dan cuenta los títulos de los conferencias y los grupos de trabajo. Conferencias: *Aprendiendo matemáticas para la vida futura* (Whitney); *Talento creatividad y expresión* (Nachbin); *La geometría en la enseñanza* (Lluis). Grupos: *Situación de la enseñanza de la geometría, frente a las nuevas tendencias de la educación matemática, el impacto de las calculadoras en la educación matemática; Métodos no tradicionales en la enseñanza y su incidencia en la educación matemática; Nuevas tendencias en el aprendizaje y evaluación matemática*. Los grupos de la Sexta Conferencia (México, 1985) trataron los siguientes temas: *Raíces culturales e históricas de la enseñanza de las matemáticas; Cambios programáticos ante la influencia de las calculadoras y computadoras; Los procesos de elaboración de modelos en la formulación y en la solución de*

problemas; *La reprobación en matemáticas: identificación de causas y posibles soluciones*. En la Séptima Conferencia (Santo Domingo, 1987), los grupos trataron: *Integración del contexto sociocultural en la enseñanza de la matemática; ¿Cómo desarrollar en los estudiantes habilidades para resolver problemas?; Usos innovadores de las calculadoras y las computadoras en la enseñanza de las matemáticas; ¿Cómo mejorar la enseñanza de la geometría en las escuelas primarias y secundarias?* En la Octava Conferencia (Miami, 1991) se abordaron los siguientes temas: *Integración del contexto sociocultural a la enseñanza de la matemática; La enseñanza eficaz de las matemáticas; Usos innovativos de las calculadoras y las computadoras en la enseñanza de las matemáticas; Cambios curriculares para el siglo XXI*. En la Novena Conferencia (Chile, 1995) los temas fueron: *Tendencias, políticas y enfoques, estándares y de evaluación, Informática y educación matemática, Investigación y educación matemática*.

Los cambios curriculares

Los cambios curriculares se investigan considerando la enseñanza de la matemática como “facilitadora de la adquisición del conocimiento en contraposición de una visión transmisora del conocimiento”; buscan incorporar las nuevas tecnologías, analizar los errores originados en un determinado proceso de instrucción; se pretende dar más importancia a las matemáticas aplicadas, haciendo uso de la tecnología computacional; pretende el desarrollo de las habilidades para razonar a través de la resolución de problemas; se le da más importancia a los procesos de enseñanza que a los contenidos temáticos, y se estudian los efectos sobre el currículo de diferentes contextos exteriores e interiores al salón de clase. Además, se retoma la clasificación que presentan Robitaille & Travers (1992), como un tema importante de investigación: El currículo propuesto por las autoridades escolares, el currículo implantado por el profesor y el currículo aprendido por los estudiantes. Finalmente aparece la problemática epistemológica de la enseñanza de las matemáticas, como un tema de investigación.

Las investigaciones en evaluación

Para los propósitos de este trabajo, y como marco de referencia, se presenta la taxonomía de significados que, sobre el concepto de evaluación, presenta la *Enciclopedia Práctica de Pedagogía* (1988, vol. 4, p. 11). Según ella:

1. Evaluar ha sido, y es aún, de alguna manera, medir, contabilizar, dimensionar. Como fruto de la evaluación surgía una puntuación obtenida a partir de unos parámetros o instrumentos de medida.

2. Diagnosticar, determinar una situación, unas posibilidades y un potencial, detectar los puntos débiles y fuertes en un momento determinado del desarrollo.

3. Evaluar es, así mismo, establecer una determinada comparación. Se puede establecer una comparación entre individuos que se hallan en un mismo proceso o que se proponen unos objetivos comunes. Establecer comparaciones no competitivas entre individuos. Establecer comparaciones diacrónicas de un mismo individuo en dos momentos distintos de su trayectoria de desarrollo, o lo mismo entre individuos para analizar el peso de distintos factores y leyes generales del desarrollo.

4. Evaluar ha sido valorar, es decir, enjuiciar.

5. Evaluar ha sido la mejora y optimización del proceso y los resultados obtenidos.

6. Evaluar para orientar, guiar, favorecer, formar en y a través de la propia acción (p. 11).

Los anteriores significados dan cuenta de las diferentes interpretaciones que se asignan al concepto evaluación. Interpretaciones que se utilizan de acuerdo con las teorías que se estén considerando durante el análisis de un fenómeno o de unos datos específicos.

Generalmente se acostumbra evaluar las habilidades matemáticas a partir de dos grandes tendencias teóricas: las que se basan en *la medición al volumen de adquisiciones* logrados por las personas, y las que se basan en las investigaciones psicogenéticas sobre *los procesos de comprensión de los conceptos*. Las primeras, con independencia de su origen conceptual, no se preocupan fundamentalmente por el análisis de los procesos del sujeto o del entorno donde ellos ocurren; parece que sólo les interesara el resultado obtenido frente a las preguntas y las situaciones propuestas en las pruebas y, en los mejores casos, en el análisis de los tipos de problemas o las categorías definidas para clasificarlos. Las segundas, con “vocación de laboratorio”, pretenden reducir la evaluación de las competencias y las habilidades a la interpretación cualitativa de los comportamientos cognoscitivos que muestran los sujetos, una vez sometidos a los interrogatorios o situaciones problemáticas que previamente han establecido las teorías. Sin embargo, está surgiendo una tendencia integradora, por una parte, de ambas tendencias (cualitativa-cuantitativa) y, por la otra, de los nuevos elementos que vienen aportando las investigaciones relacionadas con las características del pensamiento, en cuanto a su construcción y posible movilización.

El cuestionamiento más contundente a los métodos cuantitativos de evaluación la hace Gould (1994). La crítica científica a la psicometría está basada en la refutación a las que llama las dos grandes falacias del determinismo biológico: *la reificación* o tendencia a convertir los conceptos abstractos en entidades (cosas que pueden ser precisadas y ubicables en algún lugar), y *la gradación* o tendencia a ordenar las variaciones complejas utilizando una escala graduada ascendente.

La obra de Gould descubre la terrible red de implicaciones políticas y éticas que se tejió para defender el racismo y justificar el desprecio y sometimiento de grupos humanos –negros, judíos, europeos pobres y latinos– que vivían en situaciones desventajosas desde un punto de vista económico, social o cultural. Sin embargo, justo es reconocerlo, la gran mayoría de los científicos, profesionales e instituciones, que recurren a los test que pretenden medir la inteligencia, lo hacen con propósitos sanos, tratando de conocer las potencialidades mentales, y de este modo ayudar a la superación de las limitaciones o a la promoción de las habilidades.

Por otra parte, la interpretación del "C.I."¹ se ha modificado con las investigaciones; en general ya no se utiliza el concepto de razón, la psicometría ha sido penetrada por los avances de la estadística. Es común, por ejemplo, utilizar la técnica de correlación de Karl Pearson (intensidad de la relación entre dos medidas); la formulación vectorial, realizada por Thurstone a partir del análisis factorial de Charles Spearman y, en general, las pruebas de hipótesis y demás nociones de la estadística inferencial.

Otras escuelas, con orientación epistemológica moderna, consideran que el gran problema de la psicometría parece deberse a su reduccionismo. La inteligencia no se debe medir, exclusivamente, por la cantidad de conocimientos adquiridos por una persona. Es fundamental conocer los procesos mediante los cuales conoce y la calidad de la comprensión de los conocimientos adquiridos.

Se trabaja, entonces, en la construcción de modelos de evaluación integral, que incluyan los aportes de diferentes teorías y tendencias, teniendo en cuenta la complejidad del ser humano.

¹ C. I. = $100 \times EM/EC$. Donde EM es la edad mental o edad del sujeto promedio: Un niño de 6 años tiene una edad mental de 6 años.



Tendencias y enfoques en la investigación en educación matemática en Santa Fe de Bogotá

La presencia, cada vez más creciente, de pequeños grupos de investigadores que asumen un tema específico de investigación, permite reconocer la influencia, explícita o implícita, que en la mayoría de los casos ejercen las diferentes escuelas, tendencias y enfoques citados en este trabajo; sin embargo, la precisión sobre las características, significados y sentidos de esta influencia no es tarea fácil; entre otras razones, porque las teorías y los conceptos generalmente se transponen y se integran para ser usados como referentes en contextos de aplicación que no son los mismos que han definido las respectivas teorías. Así, por ejemplo, las teorías cognitivas infieren afirmaciones sobre las condiciones y características del aprendizaje matemático. Afirmaciones obtenidas en contextos bajo control de variables y que requieren de investigaciones contrastativas en las condiciones normales de una acción educativa, para poder ser usadas en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Una mirada, primero global, a los problemas de investigación planteados y a los métodos y procedimientos utilizados para obtener inferencias, permite detectar las siguientes características como sobresalientes:

1. Predomina *la investigación en el aula* con dos intenciones diferentes: algunos quieren contrastar sus teorías para poder validar sus concepciones sobre la educación matemática, sacrificando, a veces, el uso de otras informaciones, posiblemente útiles o necesarias para la investigación respectiva. Otros, la mayoría de los examinados, investigan para transformar las prácticas educativas buscando recoger elementos para obtener una educación de mejor calidad que la actual.

2. Casi todas las investigaciones son asumidas como *propuestas alternativas*, aceptando que el modelo existente es el tradicional, implícitamente negativo. Esto que seguramente es válido en la mayoría de los casos, puede inducir a no investigar los modelos exitosos, o menos catastróficos, en sus causas y posibilidades. Recordemos que siempre han existido instituciones y docentes que con sus modelos y métodos han formado una elite académica nacional. Los paradigmas predominantes, siempre, y afortunadamente, han estado confrontados por paradigmas creados y vividos por minorías críticas u opuestas.

3. Las tendencias predominantes en la comunidad internacional de educadores matemáticos son aceptadas, en la generalidad de los casos, como válidas para ser interpretadas y adecuadas en nuestro medio. Es de esperarse que una vez se avance en la constitución disciplinar e integral de la comunidad nacional en este campo, se pueda disponer de un discurso crítico autónomo.

4. Las investigaciones más exitosas, en cuanto a intenciones y logros, son aquéllas realizadas por docentes en ejercicio o a través de ellos con la ayuda de investigadores; sobre todo cuando forman parte de la labor cotidiana y continua de los docentes.

5. Conforta descubrir una tendencia a superar la evaluación negativa, centrada en lo que los estudiantes y docentes *no son capaces de hacer*, para ensayar *propuestas positivas*, en donde lo deseable es facilitado y propiciado.

Síntesis del examen de las investigaciones

A continuación se presentan los resúmenes de las investigaciones examinadas, en los que se puede observar la influencia de varias de las tendencias citadas en la primera parte. Es común la multiplicidad de influencias, para casi todos los casos, si no en los métodos de investigación, sí en las concepciones que las inspiran. Esta cercanía con la diversidad de informaciones tiende a favorecer la eficacia del trabajo de investigación en un campo que no permite el control de condiciones y variables, como sí ocurre en la investigación, en las ciencias naturales y exactas.

Investigación pedagógica

La investigación pedagógica recibe un gran aporte en el trabajo: “Prácticas pedagógicas y evaluativas en lenguaje y matemáticas” (Díaz y Caicedo, 1999). Sin pretensiones fundantes, ni asumiendo principios absolutistas o universales para hacer derivar de ellos todas las didácticas, el estudio acoge que “investigar es resaltar lo que por anticipado estaba y pasaba desapercibido; investigar es reconocer, ver lo que ya estaba con otra mirada, otro gesto, otro estilo; investigar es ver la realidad en opciones comunicativas, hermenéuticas y complejas” (p. 47). Aborda, sistemáticamente, el registro de las concepciones predominantes en la cultura occidental sobre las prácticas pedagógicas (¿didácticas?) en lenguaje y matemáticas para leerlas en un contexto regional, muy representativo de las prácticas nacionales, consultando docentes, estudiantes y directivos.

El planteamiento hipotético de que la evaluación es fundamentalmente *anticipadora* de las prácticas pedagógicas, en cuanto a sus acciones, significados,



finés y sentidos, aparece como *un aporte* en este estudio. Se avanza sobre la interpretación de la evaluación como “revisión y verificación”, para delimitar y aclarar los contextos (precomprensiones e ideologías) bajo los cuales se actúa, para la escuela y en la escuela.

El resultado de este refinado trabajo aparece en la clarificación y tipificación de tres tendencias predominantes y coexistentes, muchas veces, en las prácticas pedagógicas y evaluativas (pp. 143 a 152): la tendencia “en la que se favorecen las rutinas preestablecidas, los hábitos estereotipados, las acciones formativas basadas en ‘el deber ser’ en las que no se abre espacio para la problematización”. Responden *al paradigma de la simplificación*, en donde se privilegia la adquisición de conocimientos, habilidades y competencias y, además, prescribe “la reducción –unificación de lo que es diverso– o bien la disyunción –separación de lo que está ligado–”. La segunda tendencia persigue la *experimentación*, facilita la problematización y en la evaluación, favorece la *autorregulación*, privilegiando los procesos cognitivos y comunicativos, previo reconocimiento de las condiciones de partida de los sujetos en formación. Sobre esta tendencia estarían obrando diferentes grupos de poder que pretenden “institucionalizar unas determinadas identidades pedagógicas”, principalmente el discurso pedagógico oficial que responde a las nuevas exigencias del mercado internacional y nacional, y los grupos que pretenden el resurgir de orientaciones religiosas, nacionales y culturales “con el propósito de estabilizar el pasado en el futuro”. Ambos grupos crean tensiones institucionalizadas entre las exigencias endógenas y las internas. En cualquier caso, “la identidad de los estudiantes sería formada más a través de mecanismos de proyección que de mecanismos de introyección”. Por último, la tendencia que busca crear rupturas y fisuras en el paradigma vigente, generando condiciones para la emergencia de un nuevo(s) paradigma(s) centrados en la recuperación del sujeto que tendría efectos individualizantes y colectivizantes, transformándolo en actor de su propia historia liberándolo, por una parte, de la sociedad de masas, y por la otra de la comunidad que lo distancia de la cultura. Inspirados en Touraine y en su concepto de *La escuela del Sujeto*, escriben:

La escuela del Sujeto se alejará cada vez más del modelo que la concibe como agente de socialización, pues aunque la escuela forma parte de una sociedad, enseña unos conocimientos específicos y reconoce la realidad nacional o regional –enraizamiento que se ve como necesario–, ella no ha de estar hecha para la sociedad, su misión principal no ha de ser la formación de lo ciudadanos o los trabajadores sino, más bien, el aumento de la capacidad de los individuos para ser Sujetos.

Este estudio despierta inquietudes y motiva nuevos problemas de investigación, relacionados con preguntas como éstas:

¿Dentro del concepto escuela del Sujeto, es posible diseñar estrategias que garanticen la participación eficiente y crítica de los individuos en el paradigma vigente, a la vez que los potencie como germinadores de un nuevo paradigma?

¿Qué condiciones y características deben tener los procedimientos para seleccionar las teorías y las informaciones provenientes de las múltiples disciplinas que se relacionan con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas?

La evaluación anticipadora supone precisiones sobre los fines de la educación y una concreción sobre los procedimientos de organización, relacionales y didácticos que aterricen en los contextos del aula, la familia y la comunidad, para ser viable lo deseable.

Una investigación en evaluación de procesos

La investigación "Evaluación del proceso de construcción del conocimiento matemático del niño de preescolar a segundo" (Castaño y otros. 1997), pretende construir un modelo evaluativo que supere los modelos de tipo analítico y prescriptivo; para esto se buscó trabajar indicadores de logro con los que se pudiera hacer una evaluación efectiva de los procesos de construcción del pensamiento matemático.

El procedimiento seguido en la investigación consistió en la formulación inicial del modelo, que luego es contrastado en la práctica para obtener una formulación final, que finalmente fue socializada.

La indagación empírica partió de entrevistas de "tipo piagetano" que buscaban definir, entre otros aspectos, el tipo de tareas a evaluar y el cómo presentarlas. Además se aplicaron pruebas escritas, cuyos resultados fueron revisados con el propósito de eliminar o dejar las tareas. También observaron y registraron hechos durante las clases.

Los referentes conceptuales se presentan así: en principio se hacen unas reflexiones de carácter general sobre las concepciones sobre evaluación, diferencian la evaluación por objetivos de la evaluación por procesos. A continuación reflexionan sobre la concepción de educación que se desprende de las dos concepciones anteriores, y precisan sobre la diferenciación entre evaluación de logros y evaluación por objetivos en la función de la escuela. Por último, hacen referencia a la construcción del pensamiento matemático.

Los referentes conceptuales muestran con claridad la concepción evaluativa con la cual se pretende construir el modelo. Se acepta la

importancia de desarrollar competencias y de definir los procesos específicos desde el área, con los cuales se busca alcanzar las competencias. Se reconoce que es fundamental organizar los contenidos que orienten el proceso. Lo esencial, para ellos, es evaluar el proceso de construcción de un conocimiento que se da en el alumno, y de las condiciones pedagógicas que se propician.

Su modelo evaluativo posee la siguiente estructura: procesos cognitivos, procesos interactivos y procesos pedagógicos

En *los procesos cognitivos* se consideran “los procesos de pensamiento que se generan para *aprehender* los sistemas conceptuales propios del conocimiento matemático” (p. 44).

Obsérvese cómo la palabra *aprehender*, usada por los autores, convoca al significado: “coger” “asir”; es decir, se considera que los conceptos matemáticos son externos al sujeto y éste debe apropiarse de ellos.

Diferencian, con Vasco, el sistema conceptual de los números naturales (conceptualizaciones de los individuos) del sistema de los números naturales como construcción dentro de la disciplina matemática.

Se nota la influencia (a través de otros autores) de la conceptualización piagetana sobre los esquemas aditivo y multiplicativo, aunque para Piaget estos esquemas responden a relaciones mucho más profundas y complejas que las citadas en el texto, incluyendo no sólo el pensamiento lógico, sino también, y simultáneamente, el pensamiento infralógico.

En *los procesos interactivos* tienen en cuenta el mundo subjetivo del niño, las reglas de interacción social, los lenguajes, el ejercicio del poder, el manejo de la disciplina, los afectos, la organización espacial, la interacción con el objeto de conocimiento, el deseo, la voluntad, la tenacidad y la culminación de tareas, entre otros.

En cuanto a los procesos pedagógicos “condiciones que favorecen u obstaculizan el aprendizaje por parte de los alumnos” (p. 63) consideran: lo institucional, el aula (desarrollo del currículo), tipo de situaciones problema, contenidos, metodología, organización de los tiempos, materiales y recursos.

Las actividades propuestas

Las actividades se plantean teniendo en cuenta las mismas categorías de los indicadores de logro. Se establecieron unos rangos numéricos de acuerdo al grado, así:

- Preescolar, números de 0 a 15
- Primero, números de 0 a 99
- Segundo, números de 0 a 999

A partir de estos rangos fueron diseñadas varias actividades con el mismo esquema de preguntas. El nivel de dificultad se supone según el orden numérico.

Una investigación en construcción de pensamiento teórico

“Las categorías lógicas como expresión del desarrollo del pensamiento teórico, una estrategia didáctica para estudiantes de grado sexto y séptimo” (Jimenez, Bejarano y otros, 1998). Los autores aplicaron una estrategia pedagógica llamada “Juegos de semejanzas y diferencias” para ayudar a construir, en los estudiantes, elementos teóricos relacionados con *Categorías Lógicas*, desde una perspectiva aristotélica. Logran superar el reconocimiento empírico de propiedades para avanzar en la asignación de propiedades como la Cualidad, la Relación y la Cantidad, mejorando, además, las capacidades argumentativa e inferencial de sus estudiantes.

Los referentes conceptuales son el resultado de un trabajo colectivo de la asociación Anillo de Matemáticas, que viene realizando un trabajo de reflexión-acción, con todos sus participantes, y sobre su propia práctica docente. Por lo tanto, los referentes teóricos superan los aportes de los autores y emergen del trabajo previo que viene realizando, de tiempo atrás, la asociación. Sin embargo, la teoría es sometida a prueba durante la intervención para modificarla o ampliarla de acuerdo con los resultados que van encontrando durante el proceso.

El piso teórico de la investigación, sin ubicarse en las teorías psicogenéticas (pero sin desconocerlas), asume la interpretación del desarrollo del pensamiento lógico mediante el análisis del cómo los estudiantes efectúan generalizaciones y abstracciones mediante la actividad con los objetos, el empleo de la lógica natural y el uso de lenguajes propios.

La pregunta objeto de la investigación es, para los autores: “¿El proceso de describir y comparar objetos favorece la construcción de categorías lógicas como expresión del desarrollo del pensamiento teórico?”. Con esta pregunta buscan validar su estrategia didáctica como mediadora para el desarrollo del pensamiento teórico de los estudiantes. Evidentemente, se supone el uso adecuado de la estrategia.

Sobresale la perspectiva teórica acogida como significado sobre la facultad de pensar; escriben:

Desarrollar la facultad de pensar se ha erigido en el propósito principal de corrientes pedagógicas y didácticas, que tienen entre sus presupuestos el de superar el acceso a los conocimientos como fin último de la enseñanza, empleando en cambio los contenidos como mediación para un desarrollo conceptual articulado a la comprensión de las reglas esenciales de constitución de las diferentes áreas del conocimiento. Este enfoque enmarca la presente propuesta, en la medida en que se apunta al desarrollo de la capacidad para explorar, tomar decisiones, plantearse hipótesis y someterlas a prueba, a través, entre otras situaciones didácticas, del análisis de situaciones problemáticas que requieran de la explicación de diferentes procesos de solución.

La superación de la transposición conceptual de las teorías a la práctica escolar, no es fácil. Generalmente se olvidan las diferencias de construcción de los modelos y su relativa validez para los contextos prácticos. Sin embargo, todas aquellas conceptualizaciones que no han sido negadas o superadas por investigaciones contrastativas pueden y deben ser utilizadas en el diseño y aplicación curricular, siempre y cuando sean sometidas a las adecuaciones e interpretaciones que las condiciones particulares impongan. Es el caso, en esta investigación, del uso que se hace de dos teorías fundamentales para entender el pensamiento: la teoría piagetana y la teoría de Dadidov. Con la primera se la da significado a las operaciones lógicas construidas mediante la interacción con los objetos, y con la segunda a la relación entre actividad práctica y actividad social. Como teoría básica referencial de las categorías, se recurre al pensamiento aristotélico, recuperando, sin anquilosamiento, elementos conceptuales que todavía viven y pueden ser utilizados para explicar nuestras relaciones con el mundo. Esto sin abandonar otras referencias históricas y actuales sobre las mismas categorías aristotélicas.

La respuesta afirmativa a la pregunta planteada en la investigación, acompañada de la sugerencia para investigar la estrategia en otras áreas del conocimiento, es un ejemplo de cómo transformar progresivamente, y desde diferentes metodologías, las prácticas educativas predominantes.

Las investigaciones sobre la argumentación

Se hace referencia, aquí, a dos investigaciones: “Caracterización de los requerimientos didácticos para el desarrollo de competencias argumentativas en matemáticas” (León y Calderón. 2000, investigación en curso) y “De la geometría a los procesos de sustentación de saberes. Contextos cognitivos: argumentar para transformar (Correa, Dimaté, Martínez y Silva. 1999).

En la primera (León y Calderón, 2000) se trabaja para construir “un referente didáctico para el diseño de actividades de argumentación matemática en el aula, tendientes al desarrollo de competencias cognitivas y discursivas como la argumentación, la validación y la demostración, en los campos aritmético y geométrico” (p. 2). Se investiga en poblaciones de estudiantes de primer semestre de programas de educación matemática y en estudiantes de un curso de posgrado en esta área, a partir de una síntesis bastante amplia y completa sobre el estado del arte en este tema, que muestra la influencia de la escuela fundamental francesa y los aportes anteriores de los mismos investigadores en este campo.

La gran importancia de este estilo de investigación radica en la búsqueda de didácticas que promuevan el cambio positivo sobre las arraigadas prácticas actuales, que no han resuelto los clásicos problemas de la enseñanza para lograr aprendizajes significativos. De esta intención dan cuenta las tres preguntas fundamentales que se plantean en la investigación:

1. ¿Qué competencias matemáticas desarrolla en los estudiantes la práctica de la interacción argumentativa en situaciones de validación y demostración de lo geométrico y de lo aritmético en el aula?
2. ¿Cuáles son las condiciones didácticas que garantizan el desarrollo de competencias argumentativas en geometría y en aritmética, en estudiantes de último grado de secundaria y de primer semestre de licenciatura en matemáticas?
3. ¿De qué naturaleza es la relación que se da entre los componentes epistemológicos, comunicativo y cognitivo en la situación didáctica? (p. 8).

Los contenidos temáticos explícitos –aritméticos y geométricos– que se usan como referentes para los diferentes análisis, son prototipos adecuados y representativos de las prácticas pedagógicas en este campo. Además, permitieron que aparecieran variadas formas argumentativas y de validación de las creencias de los estudiantes, recurriendo a más de un modelo de representación externa (varios lenguajes).

En el punto de partida teórico para el trabajo se identifican tres requerimientos didácticos: el epistemológico, el cognitivo y el comunicativo, y posteriormente lo amplían con el requerimiento sociológico. Para cada uno de estos requerimientos, los investigadores van estructurando una compleja y coherente red de conceptos y relaciones entre ellos, que van convergiendo hacia la construcción de un modelo didáctico integral y flexible. Es decir, adaptable de tendencias complementarias y modificable por datos experimentales. El sentido (individual y colectivo), las tramas de encadenamiento y de argumentación, los significados desde el saber disciplinar (las matemáticas en este caso); los

requerimientos cognitivos para la significación (semiótica, sígnica, inferencial, inductiva, abductiva, analógica...), los procesos de interacción social, los dialógicos, las normas que permitan el diálogo; la construcción social de conocimientos a partir de las construcciones individuales y mediante la socialización. Todo orientado hacia el diseño de actividades que reciben, implícita o explícitamente, los aportes de las teorías acogidas y de las modificaciones que la reflexión y la experimentación aportan.

La segunda investigación “De la geometría a los procesos de sustentación de saberes” (Correa y otros. 1999) aborda el análisis del papel de la argumentación a partir del reconocimiento de procesos cognitivos (fundamentalmente perceptivos) y de competencias que tienen que ver con la construcción del pensamiento geométrico, a través de actividades que potencian la capacidad argumentativa en el ámbito escolar.

Orientados en los trabajos de Sperber y Wilson (1994) sobre *los efectos contextuales*, para interpretar las inferencias del entorno en las concepciones de los sujetos, y acogiendo el modelo de Van Hiele para interpretar la construcción del pensamiento geométrico en la educación escolar, los autores investigan para desarrollar una propuesta pedagógica (didáctica) para trabajar los procesos argumentativos con base en la geometría. Su propuesta está constituida por dos componentes fundamentales: *el componente de construcción cognitiva* “maneras como los sujetos construyen su conocimiento en contextos de sustentación y cómo, en esos contextos, se avanza en la constitución del saber geométrico” (p. 88) y el componente estratégico “constituido por el conjunto de las estrategias básicas que se hacen pertinentes para la puesta en marcha de una didáctica de la argumentación y que se harán efectivas en la medida en que se creen las condiciones (micro y macro) curriculares requeridas” (p. 90).

La construcción cognitiva comprende, según los autores, cuatro momentos: el de la *aproximación intuitiva*, el de la *acción-reflexión*, el de la *representación* y el de la *sustentación* de saberes. El componente estratégico estaría conformado por las siguientes estrategias: la *tematización* de un problema de conocimiento, la *utilización de la pregunta* intencionadamente cognitiva, la *producción discursiva* contextualizada y el *encuentro de saberes*.

Importa resaltar que, en las conclusiones de este trabajo, se reconoce la insuficiencia del modelo de Van Hiele para dar cuenta de algunas complejidades y características en la construcción del pensamiento geométrico por nuestros estudiantes, lo que permite caracterizar, además, esta investigación como de carácter *contrastativo*. Por otra parte, plantea la posibilidad de ampliar

este campo de investigación hacia otras áreas del conocimiento y de la vida: “¿es que acaso el razonamiento deductivo debe circunscribirse a los ámbitos de la lógica y las matemáticas? ¿No es pertinente para ayudar a explicar el accionar humano cotidiano, lleno de incertezas, dudas, transformaciones y correcciones permanentes?” (p.94). Más aún, promueven que la concepción de argumentación se extienda al currículo en general, para poder contar con “sujetos participativos, críticos y constructores de cualquier tipo de conocimiento”... y la escuela se convierta “en el espacio en el que los interlocutores con acciones pedagógicas mancomunadas transforman las visiones, concepciones, haceres que se tienen frente al poder, al saber, al ser en todas sus dimensiones, y no solamente para el campo de la geometría sino para todos los ámbitos del conocimiento que se privilegian en el campo escolar” (p. 95).

Relación lenguaje-pensamiento matemático

La relación lenguaje-pensamiento matemático es estudiada en la investigación: “Cultura matemática en la educación básica” (Torres, Espinoza y Bejarano. 1997). Esta investigación de enfoque cualitativo, orientada por los modelos *investigación acción* y *etnográfico*, hace uso de la estrategia que llamaron *verbalización de las acciones* para indagar los tipos de discurso elaborados en la construcción de conceptos matemáticos en el contexto de la actividad escolar, con niños de quinto grado de básica.

Se busca responder a la pregunta: ¿cómo se pasa de un no discurso sobre el conocimiento a un discurso matemático escolar?

Teóricamente, el trabajo presenta elementos para tratar la relación entre el lenguaje y el pensamiento, centrándose en tres aspectos del funcionamiento del lenguaje: el desarrollo del habla, las funciones simbólicas y la verbalización de las acciones. Se busca desarrollar el habla en la producción del discurso matemático e investigar cómo puede ayudar la enseñanza a desarrollar en los niños habilidades para verbalizar formulaciones en lenguaje matemático.

Se profundiza en el concepto de acción y en sus formas (según Galparín): material, verbal, externa y mental. Además se analizan las representaciones materiales, verbales y mentales, mediante la interpretación de las competencias matemáticas –con los aspectos sintáctico, semántico, pragmático y argumentativo– y la competencia cultural, considerando la relación de los niños con el conocimiento, la actividad de estudio (su desarrollo) y las prácticas sociales. También se analizan las diversas relaciones que se generan entre los niños en una determinada acción, la que se puede manifestar de una manera interna o externa, y destinados para otros o para sí.



El procedimiento para la investigación consiste en presentar a los niños situaciones problema para que las resuelvan y luego sustenten, verbalmente, las respuestas. El texto de las situaciones se refiere a contenidos variados (operaciones básicas, fraccionarios, medida). En la verbalización de las acciones (estrategia didáctica aplicada) se tienen en cuenta tres aspectos para el análisis: el cognitivo, las funciones del lenguaje y el lugar cultural. El maestro interviene haciendo las preguntas que considera necesarias para que el niño tome conciencia de lo que hizo.

Los registros se obtienen de cuatro fuentes: las notas de los estudiantes, el diario de campo, las relatorías de los maestros y las grabaciones. En el diario de campo se consignan tanto los procedimientos y los pensamientos de los estudiantes como los obstáculos que se les presentan durante las actividades.

En la evaluación se usan, como categorías de análisis: la lógica del discurso, la articulación, la competencia pragmática, la competencia lingüística y las formas de validación, aunque falta más conceptualización sobre estas categorías.

Interrogantes pendientes

Dado que en la verbalización de las acciones se pueden hacer visibles problemas de comprensión de los conceptos implicados, y que no tienen que ver propiamente con la competencia comunicativa o con un problema en el lenguaje, sino con un aspecto cognitivo que compromete las estructuras con que cuenta el niño y el tipo de pensamiento que lo caracteriza, parece pertinente reflexionar específicamente desde los procesos que se originan en las diferentes temáticas tratadas: operaciones básicas, fraccionarios y medidas.

Preguntas como las siguientes tienen sentido en este contexto:

- ¿Cómo promover e interpretar los cambios en los discursos durante la intervención didáctica?
- ¿Cómo detectar los avances conceptuales en cada alumno?
- ¿Cuáles son las implicaciones que, para movilizar de un tipo de discurso a otro, se derivan de las condiciones: edad de los niños, niveles en el proceso de lectura y escritura, estados culturales, dificultades específicas o trastornos en la comunicación oral, estructuras cognitivas y tipos de pensamiento? En síntesis:
- ¿Cómo superar el carácter descriptivo y avanzar hacia la propuesta de estrategias, para cualificar los discursos de los niños, mediante la acción del maestro?

Investigaciones sobre construcción de conceptos en el aula

“La construcción del concepto de área en estudiantes de quinto y séptimo grado” (García, Garzón y Saavedra. 1998). Trabajo interesante y, además, adecuado para movilizar el pensamiento matemático. Pensado más en la posibilidad de cambio cualitativo que en la descripción psicológica de las limitaciones. Modelo de lo que debe ser, en intención, el verdadero trabajo de aula.

En la investigación, la presentación de la información se estructura de una manera diferente a los otros trabajos analizados. Se va contando qué, cómo, por qué y para qué se hizo el estudio. Se integran en el discurso elementos como los referentes conceptuales, las concepciones de evaluación, aprendizaje, estrategia pedagógica y estrategia didáctica; además de las concepciones pedagógicas de los maestros.

El estudio se centra en el análisis y descripción del *trabajo de aula*, presentando ejemplos con diversidad de situaciones, del proceso que se construyó con los estudiantes, desde la fase inicial (diagnóstico) hasta las últimas intervenciones con el grupo.

En el referente teórico se hace uso integral de las citas, de modo que les permite justificar lo que se está haciendo y ampliar y cualificar, progresivamente, su objeto de estudio. Por ejemplo, en el proceso con el concepto de superficie se van especificando las diferenciaciones entre los dos grados escogidos (5° y 7°), *describiendo las proposiciones* y las justificaciones que hacen los estudiantes para las respuestas de sus actividades.

Resumiendo, el informe de investigación muestra:

1. Una concepción de enseñanza que da prioridad al desarrollo del pensamiento matemático, superando la enseñanza de contenidos mediante la promoción de procesos de construcción de conceptos matemáticos, en donde el alumno comprenda significativamente y avance en su aprendizaje. El maestro se asume como un orientador que no deja las necesidades de los estudiantes al libre albedrío, comprometiéndose con la cualificación y teniendo en cuenta el tipo de pensamiento que caracteriza a los alumnos.

2. Que es posible integrar experiencias de la vida cotidiana con el currículo de la escuela, y a partir de intervención didáctica construir conceptos y desarrollar competencias. Esto se evidencia en los niveles de construcción del concepto de superficie que alcanzaron los alumnos.

3. Que los maestros pueden construir, desde la experiencia de una investigación, elementos teóricos que sirvan para avanzar en el conocimiento

de un objeto de estudio, en este caso el concepto de área. Por ejemplo, esta investigación propone unas etapas de desarrollo del concepto de superficie, que sirven como punto de partida para que otros maestros mejoren la intervención didáctica (aporte teórico del trabajo).

4. Que una investigación en el aula se debe encausar de acuerdo con las necesidades que aparecen durante el proceso de intervención, así sea necesario detenerse en una temática o situación, no pensada con anterioridad. Estos investigadores tuvieron que reconsiderar el objeto inicial de estudio (el concepto de área) para explorar primero el concepto de superficie, sin el cual no tendría sentido avanzar en el concepto de área.

5. Una concepción definida sobre lo que significa *la educación matemática* y cuáles deben ser los tipos de interacciones que se deben generar en el aula para lograr que los alumnos piensen matemáticamente.

Hubiera sido conveniente un mayor cuidado en la enumeración de las figuras utilizadas, y una mejor profundización en la presentación de los conceptos: sintaxis, semántica, pragmática y argumentación; con los cuales se describen las etapas para el concepto representación y medida de superficies.

“Sistematización de una experiencia de matemáticas contemporáneas en el aula” (Castañeda. 1997). ¡Sorpresa! es la palabra que carga de significado y sentido lo que se siente al leer este informe de investigación en el aula, y reconocer que es posible alcanzar logros de alto nivel cuando se combinan, en la práctica escolar, las concepciones modernas sobre la enseñanza de las matemáticas con el conocimiento matemático profundo del docente que acompaña el aprendizaje. El autor presenta su trabajo así: “el proyecto... plantea una forma de hacer matemáticas con los alumnos desde la contemporaneidad, donde el azar, el caos determinista, la iteración, los sistemas dinámicos, los fractales, las teselaciones y la utilización del ordenador son el centro de la actividad”. Más adelante: “A nuestro juicio, la consolidación del pensamiento matemático requiere de mucho más que el simple manejo de algoritmos, se necesita de una conexión de diferentes conocimientos: información, experiencia, percepción, creatividad, búsqueda, etc.”.

La propuestas alternativas en la enseñanza de las matemáticas están encaminadas a transformar al estudiante para que deje de ser un receptor pasivo y participe activamente en la construcción de sus propios conocimientos, aunque éstos ya existan, de alguna manera, en los saberes institucionalizados. Las metodologías explorativas, lúdicas y confrontadoras de datos intuitivos,

promueven e incitan al deseo de conocer y a la superación de las dificultades para la comprensión.

El tema de los contenidos en los currículos continúa como un interrogante sin respuestas o alternativas claras. Pareciera que los lamentables resultados obtenidos por la mayoría de los estudiantes colombianos sean imputables, por muchos docentes e investigadores, más a las limitaciones cognoscitivas de los alumnos que a las inadecuadas concepciones que sobre el aprendizaje, la enseñanza y la matemática, predominan en el campo pedagógico nuestro. La contrastación de lo que es posible aprender y enseñar sólo se logra mediante investigaciones positivas y optimistas, orientadas a la cualificación permanente de procesos y logros relacionados con el pensamiento y los conocimientos matemáticos.

La filosofía educativa de la Escuela Experimental Pedagógica, ampliamente reconocida, pero no suficientemente divulgada, es un ejemplo contundente de las posibilidades de cambio en el sistema educativo colombiano. El profesor Castañeda, como docente permanente en la institución, tuvo la gran ventaja de incorporar la investigación en el aula como una actividad normal, evitando la presencia de los elementos desestabilizadores que aparecen cuando personas ajenas a la institución llegan para realizar estudios, muchas veces desconociendo los contextos y situaciones particulares.

Las actividades se realizaron utilizando el tiempo necesario, con un buen número de estudiantes en grupos de 24. Se recurre a materiales variados como el lápiz, el papel, el compás, la regla, el transportador, las calculadoras comunes y de gráficas y los programas del ordenador: Logo, Qbasic, Matemática, Derive, Matcad y Matlab, entre otros. Pero lo importante del proyecto es la forma como se acompañan los procesos de construcción y explicación, que dan los alumnos para que ocurran cambios conceptuales y se originen nuevos intereses de conocimiento. De aquí que los problemas que se plantean sean fundamentalmente abiertos, ya se trate de juegos de estrategias, laboratorios de matemáticas, construcción de teselaciones, problemas de lógica o realización de programas de ordenador, etc. La socialización y el trabajo en grupos permiten el planteamiento y la confrontación permanentes de hipótesis.

Esta investigación es un argumento más para los que pensamos que una estrategia de enseñanza bien elaborada, y bien apoyada institucionalmente, puede alcanzar altos resultados formativos en la mayoría de los estudiantes (que es lo que debe interesar en el sistema educativo).



Investigaciones sobre el desarrollo de procesos

“El juego de la tripleta como herramienta pedagógica para contribuir al desarrollo de algunos procesos de pensamiento matemático” (Garzón y Reyes. 1998).

La propuesta pedagógica busca desarrollar algunos de los procesos de pensamiento matemático, considerando tres tipos de pensamiento: el numérico, el espacial y el lógico, y utilizando el juego como estrategia didáctica; específicamente el juego de las tripletas numéricas, de las tripletas de área y de las tripletas de relaciones.

Al igual que en otras investigaciones, se expone el problema de la motivación en el aprendizaje de las matemáticas y la pretensión de que los alumnos cambien de actitud con respecto a ellas. Propician una construcción significativa de los conceptos con la participación activa de los estudiantes. Escriben: “La enseñanza debe orientar la búsqueda de la comprensión conceptual, presentándole al estudiante un campo amplio de aproximaciones técnicas y estrategias, con el fin de enfrentarlo con seguridad al análisis, la percepción de relaciones y estructuras; también la argumentación en cualquier tipo de situación problemática”.

La gran cantidad de tendencias y autores citados, por fuera de una estructura organizadora, hace casi imposible detectar el hilo teórico conductor de la investigación. Sin embargo, es fácil detectar la estrategia didáctica aplicada y los procedimientos de evaluación utilizados. La estrategia didáctica consta de:

1. La aplicación de tres pruebas piloto.
2. La aplicación de una prueba diagnóstico.
3. La realización de actividades de entrenamiento para el trabajo con la tripleta numérica con operaciones combinadas, la tripleta de construcción y cálculo de áreas y la tripleta de relaciones matemáticas.
4. Aplicación de las tripletas para el pensamiento numérico, espacial y lógico.

Las tres pruebas piloto fueron diseñadas en forma de pregunta o de formulación de problema, intentando detectar los tres tipos de pensamiento matemático considerados y recurriendo a diferentes niveles de dificultad. Se presenta un cuadro en donde se explican las preguntas, los procesos que involucran, las dificultades que se presentaron al aplicarlas, y los cambios y correcciones que se tuvieron que hacer.

La prueba diagnóstica estuvo conformada por doce situaciones problema. Tanto en esta prueba como en la piloto, existió un espacio para argumentar las razones de las respuestas dadas.

Las actividades de entrenamiento, basadas en juegos, tuvieron como propósito, en palabras de los autores, “afinar los dispositivos de aprendizaje y los procesos de pensamiento”.

Después de cada actividad, ésta se analizó y evaluó con la ayuda de observadores externos. Se incluye un informe sobre avances de los estudiantes, en donde se describe, con gran detalle, la variedad de respuestas encontradas.

El procedimiento para la evaluación fue, en general, el siguiente:

Inicialmente se diseñan unos indicadores de logros para cada proceso y tipo de pensamiento; luego se registra la información obtenida para cada alumno y para cada actividad. Con los datos anteriores se calculan los promedios de logros en los grupos y se hacen análisis descriptivos especificando avances y dificultades. Sin embargo, la ausencia de una organización teórica impide detectar la metodología utilizada, tanto en el diseño de las pruebas como en la evaluación de los procesos.

Predominantemente es una investigación centrada en la cualificación de métodos de enseñanza.

Investigaciones sobre concepciones de los docentes

“Comprensión de algunos conceptos aritméticos en profesores de primaria” (Bonilla, Sánchez y Vidal. 1999). En un detallado y sistemático estudio, las autoras investigan las concepciones que poseen algunos docentes de primaria, sobre las estructuras aditiva y multiplicativa, acompañadas de sus algoritmos respectivos. Ofrecen a continuación una propuesta de formación de maestros, que incluye dichas temáticas.

Su perspectiva teórica se inscribe en el conocimiento que las instituciones formadoras de maestros deben tener con respecto a las relaciones que existen entre las concepciones previas sobre los contenidos temáticos y el modelo didáctico utilizado en la práctica escolar.

Es interesante observar cómo en esta investigación se constata, indirectamente, uno de los hechos más lamentables de la educación colombiana: la pésima formación, que en la didáctica de los saberes específicos reciben los educadores en las normales y facultades de educación; además de la poca pertinencia y limitada eficacia que muestran los programas de cualificación



de maestros en ejercicio. Las características de la población estudiada en este trabajo son representativas para la mayoría de los docentes del país: normalistas, licenciados (algunos con posgrado) o estudiantes de licenciatura, y prácticamente todos han asistido a cursos de perfeccionamiento docente. Adicionalmente, en este estudio, 24 de los 62 profesores investigados han asistido a cursos sobre la temática tratada en este trabajo, 19 participaron en un curso sobre desarrollo del pensamiento matemático, dirigido por los investigadores de este proyecto y 43 son estudiantes de licenciatura en básica primaria. Explícitamente, señalan las autoras:

Desde una perspectiva descriptiva, se puede decir que el conocimiento de los profesores sobre los aspectos tratados se puede considerar como un conocimiento en uso, que ha sido adquirido más por la práctica que por la participación en programas académicos que traten los temas de manera explícita, y desde la perspectiva de la elaboración de un conocimiento profesional adecuado desde las perspectivas tratadas en los referentes teóricos presentados en el capítulo inicial (p. 52).

Las falencias encontradas en los profesores van más allá de la pedagogía y la didáctica. Dan cuenta del reduccionismo conceptual que tradicionalmente se utiliza en la presentación y análisis de los contenidos matemáticos. Hipotéticamente, es posible que un educador matemático desconozca las presentaciones que hacen los investigadores en didáctica sobre los esquemas aditivo y multiplicativo que, desde un punto de vista cognitivo estudió la Psicología Genética, pero no tiene justificación el desconocimiento de las relaciones reversibles entre las operaciones básicas (y derivadas) ni la ignorancia sobre los procesos constructivos (semánticos y sintácticos) de los conceptos, incluyendo los algoritmos.

Metodológicamente, las autoras recurren, de manera eficaz, al uso de técnicas cualitativas y cuantitativas, lo que les permitió profundizar en el análisis de los datos a través de categorías descriptivas, interpretativas y explicativas, cuyas unidades de análisis se desplazan, vertical y horizontalmente, de acuerdo con los estados de complejidad conceptual resultantes en la investigación o planeados en el diseño. Con rigor y precisión dan cuenta de las relaciones internas en cada categoría y de las comparaciones entre ellas, tanto para el análisis de los enunciados de los problemas aritméticos considerados, como para el análisis de los algoritmos.

En síntesis, se puede afirmar que esta investigación cumplió con sus objetivos y aportó a los investigadores para el conocimiento de las necesidades

reales de formación que tienen los profesores de básica primaria, en el área de matemáticas.

“El análisis del contenido matemático como herramienta para la construcción de modelos pedagógicos: El caso de la función cuadrática” (Gómez y Carulla). Los autores interactuaron con profesores de matemáticas de básica secundaria, para explorar las concepciones predominantes sobre un tema específico: *la función cuadrática*. Recurren a un procedimiento analítico que incluye los contenidos, la instrucción y la cognición. Usan los sistemas de representación y los mapas conceptuales como mediadores para interpretar las concepciones y, finalmente, construyen un instrumento de codificación que integrando todos los elementos analizados, permitió caracterizar las producciones de los maestros.

La calidad de la educación está fuertemente relacionada con la calidad de los contenidos tratados en ella. Ante una pobreza conceptual, no existe pedagogía profunda válida.

Un conocimiento matemático presentado en forma atomista, desmembrado de las estructuras conceptuales que le dieron y le dan significado, no puede llegar a ser significativo para los estudiantes. De aquí la importancia de las organizaciones integrales y complejas con los conceptos de formación básica, *como se hace en este trabajo con la función cuadrática*. Este tema, como casi todos los temas tratados en la educación matemática en nuestra cultura, aparece, por lo general, aislado y parcialmente tratado, olvidando vínculos conceptuales con otros conceptos de la matemática (geometría y ecuaciones, por ejemplo) y de las ciencias fenomenológicas (física, química y economía, entre otras).

Las concepciones de los profesores de matemáticas son resultado, en gran parte, de la formación previa que recibieron sobre los conceptos y las didácticas de enseñanza. De aquí la importancia de promover la reflexión crítica y colectiva sobre su quehacer y cómo hacer para que la enseñanza cambie. Vale la pena resaltar cómo la conclusión más importante de este trabajo se refiere a una estrategia de actuación, que se podría validar desde el sentido común, si no fuese por la tradicional permanencia de didácticas pensadas desde la simple presentación de conceptos aislados. Escriben los autores, en sus conclusiones:

El análisis intra-grupal muestra que la formación previa de los profesores, los aportes de los investigadores en las asesorías, el conocimiento de las producciones de los otros grupos y la posibilidad de trabajar e interactuar

en grupo, son factores que afectan la evolución de las producciones de los profesores" ... Esto "es producto de una experiencia de trabajo e interacción en la que ellos pudieron poner en juego sus concepciones previas y en la que ellos enfrentaron retos que los llevaron a reestructurarlas y desarrollarlas (p. 22).

Se toca, así, uno de los problemas más graves de la organización escolar: el individualismo y la asignación de programas para los maestros. Cada quien es libre de interpretar y servir el programa como quiera, en lugar de cumplir un programa diseñado colectivamente y con el aporte de todas las individualidades. Es necesario asumir una estructuración para los contenidos, de acuerdo con unos propósitos claramente definidos y una argumentación sólida. No se pueden abandonar a lo que cada profesor piense, ni olvidar la historia institucional en cada saber. El verdadero sentido del concepto libertad de cátedra es el de capacidad argumentativa, y no el de imponer lo que un individuo o institución piensa.

Evidentemente, como creen los autores, el estudio presenta un método sistemático para evaluar el impacto que puede tener un programa de formación permanente de profesores, temática que es necesario definir en el panorama nacional, en donde se vienen invirtiendo grandes recursos económicos sin que existan, previamente, procedimientos que permitan una evaluación y valoración confiables. Es posible diseñar muchos métodos similares, y otros diferentes a los presentados en este trabajo, pero en todos es necesario considerar las relaciones entre las representaciones internas y las externas, además de las posibles transformaciones que de ellas se puedan obtener mediante la confrontación dialéctica sobre los significados y usos de los conceptos.

En síntesis, esta investigación aporta tanto a las teorías sobre diseño curricular como a las relacionadas con la formación permanente de maestros, y a los métodos para evaluar el impacto de esta formación.

Investigaciones sobre currículo

"Innovación curricular en precálculo para la educación media" (Carulla. 2000, informe de avance). Después de haber realizado una investigación sobre el mismo tema, en las asignaturas introductorias de matemáticas en la Universidad de los Andes para estudiantes de carreras técnicas, el grupo de investigación inicia una aplicación-extensión, con docentes de la educación media, de la estrategia desarrollada.

El proyecto se asume como innovador en el siguiente sentido, en palabras de la autora del informe:

Se puede mirar la innovación original como un “proceso” en donde los actores implicados hacen sistemáticamente unas reflexiones, se ayudan en la tarea de resolver problemas de aprendizaje con los estudiantes y en diseñar problemas que apunten a la solución de los mismos. Se puede mirar la innovación original como un “resultado” que se plasma en los problemas diseñados y en el programa y se puede mirar la innovación original como lo que sucedió en cada uno de los salones de los profesores implicados en el proceso. Todos estos aspectos son importantes y no podemos reducir una innovación a alguno de ellos (p. 11).

Esta reflexión importa porque es fácil constatar que el desfase entre lo que se plantea y lo que se hace tiene mucho que ver con la manera de planear y apoyar las acciones; esto es, con la estructuración, sistematización y logística de las programas. Al respecto escribe Yurén (1990, pp. 33-37):

La innovación introduce una novedad, que puede tener diversos niveles que van desde la que implica la sustitución de los propósitos (y por tanto, valores) de la praxis que se innova, hasta aquellos que se reducen a una adecuación de las acciones a los propósitos ya existentes en dicha praxis. Podemos así hablar de proyectos de innovación tendientes a obtener otra calidad, que se postula mejor en contraposición con proyectos tendientes a refuncionalizar la praxis educativa para hacerla más eficaz en relación con el mismo tipo de resultados, es decir, obtener niveles más elevados en la misma calidad, en el mismo tipo de satisfactor de una necesidad o un conjunto de necesidades educativas.

Análogamente a como ocurre en cualquier proceso de producción, se requiere conocer las características de los elementos que van a participar en el proceso. En este caso, *elementos humanos* (estudiantes, docentes, familia, administradores y comunidad), *medios disponibles* (económicos, físicos, técnicos y tecnológicos), *políticas concretas para la acción* (pedagógicas y didácticas) y procedimientos para evaluar los resultados obtenidos, de modo que se puedan tomar, a tiempo, medidas correctivas. Escribe Pacheco²:

La innovación educativa sólo puede ser eficaz si es el proyecto de un grupo social, sobre todo (pero no únicamente) el de los agentes que tienen su sede en la escuela: los profesores y el personal académico-administrativo.

² Sobre la innovación participativa y otras estrategias de innovación, cfr. Pacheco Méndez. 1991. pp. 75-93/ pp. 79-83.

Pero considerando la complejidad y niveles de especialización de sus actividades, que hagan suyo un proyecto, no se puede reducir a ejecutarlo por obediencia o, siquiera, aceptarlo de manera pasiva y acrítica. De los proyectos (como ocurre con las normas morales) sólo se puede decir que son propios cuando se les ha examinado atentamente, se constata que son compatibles con los valores propios y, además, que éstos se realizan en esos proyectos. En otras palabras, cuando son el resultado de procesos participativos (p. 18).

Los investigadores, equipados con el marco conceptual diseñado y experimentado en la investigación universitaria, asumen el proceso de adecuación para la educación media buscando respuestas a las preguntas que caracterizan las concepciones matemáticas de los estudiantes; las concepciones matemáticas y didácticas de los profesores; el significado del saber matemático escolar y su relación con el saber matemático esperado en la educación superior; las metas y objetivos de la educación matemática, media y superior; las diferentes visiones sobre el mismo tema en ambas instituciones; las diferencias en las condiciones de los contextos educativos, y las posibilidades y estrategias para innovar en la educación media. Todo orientado a crear un espacio de reflexión que les permita extender su propuesta con las adaptaciones y modificaciones necesarias, y con los aportes de los profesores participantes.

Usan, al igual que en la investigación previa, un conjunto de herramientas didácticas (los mapas conceptuales, los sistemas de representación, y el análisis didáctico para los aspectos de contenido, comprensión, instrucción y evaluación). También utilizan, parcialmente, las calculadoras, recurriendo al proyecto con la Texas.

Las temáticas acordadas con los maestros para ser tratadas con los alumnos fueron para 10º, las funciones lineal, cuadrática, logarítmica y exponencial y, para 11º, las funciones trigonométricas, racionales y radical. Intentan, así, ayudar a los estudiantes para que comprendan el concepto de función en general.

Sobresale el trabajo de campo que realizan los docentes, registrando y sistematizando sus experiencias para luego compartirlas con los investigadores y con otros docentes; esto beneficia a unos y a otros, sobre todo por el enriquecimiento que originan las confrontaciones positivas.

En síntesis, todo parece indicar que están logrando cambiar las concepciones de los maestros sobre sus prácticas educativas, haciéndolos agentes y partícipes en la transformación curricular para el área de matemáticas en la educación media.

Sistematización de encuentros sobre investigación educativa

“Teoría y práctica de la educación matemática. Encuentro de saberes en precálculo y tecnología”, reporte final (Patricia Perry y otros. 2000).

El establecimiento de realizaciones dialógicas entre investigadores en educación matemática, profesores en ejercicio docente y funcionarios públicos, es el propósito fundamental de los encuentros organizados por el grupo de trabajo de la Universidad de los Andes “una empresa docente”. Aunque las temáticas tratadas se refieren fundamentalmente a los objetos de estudio de dicha empresa, no deja de ser significativo el esfuerzo para avanzar en la reducción de la brecha existente entre los tres tipos de agentes considerados, principalmente porque uno de los problemas que más influyen en nuestro atraso didáctico es el aislamiento y la soledad informativa que vivimos todos los que trabajamos en educación.

Tradicionalmente, el Ministerio de Educación y las Secretarías de Educación departamentales y municipales trabajan para recoger las tendencias pedagógicas más actualizadas, nacional e internacionalmente con el fin de, a partir de ellas, orientar la ejecución de los currículos. Sin embargo, rara vez logran llegar, con el significado de esas propuestas, a las instituciones escolares. Entre otras razones por el tradicional desfase entre la formación ofrecida a los docentes y sus necesidades reales. En la ya ampliamente conocida “feria de créditos y de recursos del Estado”, la incompetencia y la improvisación actúan sin control ni evaluación para imponer a los docentes su ideología y perpetuar el estado actual de la pobreza pedagógica. Más grave aún, que la expropiación económica sea el impedimento real para que los educadores se puedan transformar, ayudados por los investigadores honestos y serios. No es suficiente la normatividad para que las instituciones y los docentes construyan su propio PEI, es necesario que posean las herramientas teóricas, logísticas e instrumentales para lograrlo. La verdadera libertad es producto del conocimiento que posibilita escoger las orientaciones y asumir los cambios.

En los maestros se viene creando un movimiento nacional que presiona para que se les actualice y prepare adecuadamente. De alguna manera, no quieren seguir siendo tratados como discapacitados para realizar transformaciones. Cuando un docente pide la “receta”, está manifestando un dolor más profundo: la conciencia de la negación de lo que está haciendo. Por eso, no es adecuado abandonarlo en su vacío. Por lo tanto, la creación de espacios de reflexión crítica para la construcción integral de currículos cumple, además, un papel remedial sobre la deficiente formación recibida en las facultades de



Educación y en las Normales. Problema difícil de superar; sobre todo si se sigue pensando que la formación de los maestros no es responsabilidad de todos los programas académicos relacionados en la enseñanza.

Encuentros como éstos, de “una empresa docente”, se han realizado y se vienen realizando en el país, organizados por entidades públicas y privadas. Pero, éstas en particular, tienen la gran ventaja de la continuidad y sistematización de las experiencias tratadas. En todos los casos es posible hablar de *las relaciones entre el poder y el saber*, sólo que cuando la convocatoria proviene de entidades oficiales, rara vez permanecen y se desarrollan en el tiempo. Los intereses momentáneos y ahistóricos de los funcionarios con capacidad de decisión impiden la incorporación de los avances positivos y la superación de los errores.

Sea ésta la oportunidad para reconocer el trabajo de apoyo a la investigación y divulgación que viene haciendo el *Instituto de Investigación Educativa y Desarrollo Pedagógico* (IDEP) del distrito de Bogotá. Si las administraciones lo conservan podrá llegar a influir notablemente en la calidad de la educación de la ciudad y, por extensión, con el país entero.

Los siete encuentros realizados entre los meses de noviembre de 1999 y julio de 2000 contaron con una asistencia decreciente, cuyas causas convendría analizar (84, 58, 56, 60, 30, 29 y 19 personas).

En el primer encuentro, tres reconocidos investigadores de Bogotá: Gloria García, de la Universidad Pedagógica Nacional, Pedro Javier Rojas, de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, y Pedro Gómez, de “una empresa docente”, de la Universidad de los Andes, se refirieron, respectivamente, a la “investigación en educación matemática”, la “formación de profesores de matemáticas” y al “diseño curricular”. En la primera conferencia se trataron las dificultades para, simultáneamente, investigar de acuerdo con los requisitos internacionales y formar maestros según las necesidades que demanda la sociedad. Se planteó la necesidad de introducir la educación matemática como disciplina académica y de crear líneas de investigación e innovación con el apoyo de la sociedad. Se propuso pasar de la búsqueda de modelos de enseñanza a modelos de aprendizaje y comunicación. En la segunda conferencia se consideró que la formación de maestros ha estado dominada por la enseñanza de contenidos con pocos elementos pedagógicos y humanistas. Se sugirió una formación que se acerque más a la realidad escolar y a los significados de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En la tercera conferencia se plantearon varias posibilidades para

que los investigadores universitarios participen en los diseños curriculares, principalmente mediante proyectos de investigación e innovación, y acompañando a los maestros durante el diseño; se deja abierto el problema de la multiplicación de experiencias piloto, dado que las condiciones de cada situación son diferentes.

Las preguntas de los asistentes dan cuenta de las necesidades más sentidas por los maestros de matemáticas: ¿Qué debe saber de matemáticas? ¿Qué de la enseñanza y el aprendizaje? ¿Cómo se relacionan la calidad del docente y la calidad de los aprendizajes de los alumnos? ¿Qué uso tiene la matemática de la educación media en la práctica social? ¿Cómo diseñar currículos, integrados y continuos? ¿Cómo investigar en el aula? ¿Cómo superar la cultura de lo fácil? ¿Cómo hacer para que la investigación en la universidad no se aleje del conocimiento de las condiciones reales de la escuela? ¿Cómo evaluar a un docente?, y otras.

En el segundo encuentro se escucharon, fundamentalmente, experiencias de profesores que realizaron investigaciones en sus instituciones; se hizo patente el aislamiento de estos trabajos y los obstáculos para incidir en los PEI respectivos. Obstáculos con los significados de los conceptos de investigación e innovación y con la participación de los otros docentes en las investigaciones.

El tercer encuentro tuvo como propósito escuchar a funcionarios públicos: dos del IDEP (Aurelio Usón, que se refirió a la investigación, y Elizabeth Riveros, sobre la innovación) y una del Ministerio (Celia Castiblanco, sobre los lineamientos curriculares).

Aurelio, además de presentar la estructura y la misión del IDEP, con sus objetivos y criterios, ofreció una pertinente reflexión sobre la necesidad de disponer de un riguroso contexto explicativo y comprensivo sobre el fenómeno educativo. Además, valoró los procesos de investigación en el aula como mediador válido en la formación de los maestros.

Elizabeth le dio sentido a los procesos de innovación en la medida que transformen, integralmente, las prácticas escolares y produzcan un nuevo saber, mediante la problematización, la intervención, la validación y la transferencia.

Celia explicó los marcos teóricos bajo los cuales se diseñaron los nuevos lineamientos curriculares, y convocó para que se comiencen a usar las nuevas tecnologías. Además, anunció un proyecto en este campo, que el Ministerio está desarrollando con universidades y colegios, apoyado por el CINESTAV de México.

Importa resaltar, de las relatorías originadas en los dos grupos de trabajo, la posición firme del IDEP, sobre la necesidad de que las innovaciones educativas estén articuladas al PEI de las instituciones, con el propósito de buscar cambios positivos en la calidad de la educación.

Al Ministerio se le incita para que recurra a estrategias más eficientes de divulgación de sus orientaciones y delineamientos, de modo que se logre una construcción personal (de los maestros) e institucional, de los nuevas orientaciones.

En cuanto al uso de nuevas tecnologías en el aula, hoy todas las entidades oficiales y privadas le reconocen su necesidad e importancia. Lo que hace falta es una mayor implementación de líneas de investigación en este campo.

En el cuarto encuentro, y en los tres restantes, el tema tratado fue la relación entre educación matemática y tecnología en la educación matemática. La profesora Marina Ortiz presentó un informe sobre el estado de las investigaciones que, en este campo, se vienen realizando en el país. Describió las tendencias, las preguntas y los intereses predominantes. El profesor Bernardo Gómez presentó un modelo experimental, usando *software* matemático.

Las presentaciones originaron reacciones entre los asistentes que dan cuenta, por una parte, de sus temores e inseguridades para el uso de nuevas tecnologías, y por la otra, de sus intereses y deseos por aprender a usarlas adecuadamente.

El quinto encuentro se limitó, prácticamente, a la presentación y discusión de ejemplos de problemas prototipo, usando nuevas tecnologías.

En el sexto encuentro se explicaron dos tipos de experiencias diferentes: la profesora Leonor Camargo resume y justifica el proyecto de investigación del Ministerio sobre tecnología en educación matemática, y el profesor Iván Castro, de la Universidad Javeriana, explica el uso que hace del *software Derive*.

El último encuentro recogió experiencias de dos profesores que han realizado experiencias usando tecnología portátil en clase (Jorge Rodríguez y Mariana Sarmiento), sin estar inscritos en algún programa de investigación. Cada uno está satisfecho con su trabajo, y son un ejemplo de cómo un maestro preocupado e informado puede ir introduciendo modificaciones curriculares importantes.

Las conclusiones presentadas en los siete encuentros promueven reflexiones sobre problemas que hay que enfrentar. En primer lugar, se requiere de un mejor acercamiento entre los contextos teóricos de los investigadores y la realidad escolar que pretenden investigar. En segundo lugar, se deben mejorar las condiciones laborales de los maestros, de manera que puedan realizar investigación permanente en el aula, superando el papel de simples receptores

de informaciones. En tercer lugar, urge introducir el uso de nuevas tecnologías en la educación matemática, previa creación de espacios de reflexión y formación con los docentes.



CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Una mirada a las componentes predominantes de los trabajos

Más allá del nombre de la tendencia o tendencias asumidas para cada investigación, la interpretación y el uso de ellas varía sensiblemente entre unos y otros trabajos. La mayoría de los autores precisan sus referentes teóricos y consecuentemente diseñan su investigación de manera coherente con ellos. Para unos pocos, las teorías aparecen como un pretexto para validar sus concepciones, llegando en algunos casos a olvidar los puntos de partida, abandonando algunas preguntas que inicialmente se habían planteado.

En investigación, el conocimiento del estado del arte debe superar la cita “rápida” y momentánea de autores y tendencias, olvidando el análisis histórico-crítico, tan necesario para definirse frente a una concepción. Además, el desconocimiento de investigaciones realizadas en otros países y en el nuestro, sobre el mismo tema o temas relacionados, puede debilitar el valor de los trabajos y de los resultados obtenidos. Es posible que el deseo y la presión institucional y social para formar parte de las comunidades en boga, esté originado un “cierto olvido” de la lectura, lenta y cuidadosa, de tendencias y pensadores profundos, contemporáneos y clásicos.

Por otra parte, una mirada positiva permite detectar, en todos los trabajos, la existencia de una aceptación del sujeto como “el otro” capaz de participar activamente en la construcción del conocimiento. Ésta es la característica principal. Se busca superar, al menos teóricamente, la visión de la enseñanza como una técnica de transmisión de los conocimientos, asumiendo así la orientación predominante para que la investigación indague más por los procesos de aprendizaje que por los de enseñanza.

A continuación se resumen las características más sobresalientes de las componentes, descriptiva, explicativa (con mayor énfasis) contrastativa y aplicada, considerando que todas están presentes en todos los trabajos, pero que la descriptiva y la explicativa son las más sobresalientes.

La componente descriptiva

La componente descriptiva, predominante en casi todos los casos examinados, está orientada en el enfoque cualitativo (introspectivo-vivencial). Sin embargo, la mayoría también recurre a los métodos cuantitativos aritméticos –principalmente a los porcentajes y a las tablas de frecuencias– para organizar los datos en informaciones: se observa una superación del enfoque cuantitativo estadístico para correlacionar variables, de tanto uso en las décadas de los años 70 y 80.

Las preguntas, las actividades, los significados de los conceptos utilizados como los de representación, conocimiento, competencia, habilidad, proceso, comprensión y evaluación, enseñanza y aprendizaje, entre otros, dan cuenta del grado de profundización y de grandes diferencias en las conceptualizaciones de los investigadores. Los datos aislados son “mudos”, es necesario relacionarlos para que informen algo, pero la relación ya implica una opción teórica, un acto del pensamiento; y es aquí donde la conceptualización arma, con los datos, la interpretación. Esto origina que frente a unos mismos datos se posibiliten múltiples interpretaciones, cuya valoración externa está también condicionada por las concepciones e informaciones disponibles en los evaluadores.

Los datos son la respuesta a la pregunta planteada, lo que condiciona la información que se pueda construir con ellos. Así, por ejemplo, si considero que el concepto de número es construible desde la percepción visual, entonces indagaré por su comprensión a través de figuras pero, si interpreto la construcción de este concepto como resultado de una interacción del sujeto, mediante actividades y relaciones con los contextos culturales y problémicos, entonces la indagación se volverá más compleja y profunda. En otras palabras, los datos no son objetivos por ellos mismos, la objetividad se construya por medio de la argumentación.

En las investigaciones examinadas, los datos poseen la objetivación que les permitió la teoría asumida en cada caso, y se expresan mediante los símbolos de los lenguajes utilizados: números para contabilizar respuestas, números para jerarquizar categorías, categorías para organizar problemas, respuestas y procesos; gráficas para visualizar niveles de logros y descripciones escritas y verbales.

La componente explicativa

Consecuente con lo anterior pueden ser observadas variaciones notables en la componente explicativa presente en cada caso. Aceptando que la explicación

es lo que mejor informa sobre el carácter científico de una investigación, se resume lo fundamental explicativo para cada caso:

- La investigación pedagógica “Prácticas pedagógicas y evaluativas en lenguaje y matemáticas” (Díaz y Caicedo, 1999), desde su visión universal, explica cómo las concepciones de los evaluadores determinan el objeto (logros, contenidos, competencias, procesos, etc.) y la importancia de estos objetos en la práctica educativa. Interpretan la concepción de la evaluación como *anticipadora* de lo que va a ocurrir en la acción didáctica, y acogen la tendencia llamada “la escuela del sujeto” para promover una evaluación orientada hacia el cambio revolucionario de los propósitos formativos en la escuela, de modo que se pueda recuperar al hombre del espacio en donde habita, como un sujeto de la masa.

- En la investigación “Evaluación del proceso de construcción del conocimiento matemático del niño de preescolar a segundo” (Castaño y otros, 1997), se presenta una interpretación propia de los procesos de construcción del pensamiento numérico, suponiendo los niveles de conceptualización que deben alcanzar los niños y la validez de las formas de representación utilizadas para las actividades. Sin considerar muchos de los resultados de otras innumerables investigaciones realizadas en este campo, asumen la aplicación sistemática de su modelo y, consecuentemente, infieren de acuerdo con los datos recogidos. Es de esperar que este trabajo continúe con el análisis y la explicación de las diferencias encontradas en las respuestas de los niños de cada grado escolar, y de los procesos interactivos y pedagógicos que se dieron durante la aplicación de las pruebas.

- La investigación “Las categorías lógicas como expresión del desarrollo del pensamiento teórico, una estrategia didáctica para estudiantes de grados sexto y séptimo” (Jimenez, Bejarano y otros. 1998), evalúa cómo los estudiantes pueden construir categorías lógicas, y explican cómo una estrategia puede desempeñar un papel mediador en la construcción del pensamiento lógico, adaptando y adecuando las teorías consultadas, a la práctica.

- En la investigación “Caracterización de los requerimientos didácticos para el desarrollo de competencias argumentativas en matemáticas” (León y Calderón. 2000, investigación en curso), la explicación está orientada a sustentar la validez de un modelo didáctico, elaborado a partir de sus preguntas fundamentales y sustentado firmemente en informaciones actualizadas. Se ve nacer una línea clara de investigación en educación matemática, que puede ayudar a integrar y a desarrollar otras investigaciones relacionadas con las

formas comunicativas en la formación matemática en todos los niveles (básico, medio y universitario).

- La investigación “De la geometría a los procesos de sustentación de saberes” (Correa y otros. 1999), aborda el estudio de la competencia argumentativa pero en un contexto más puntual: el proceso de construcción cognitiva bajo estrategias orientadas para la comprensión en geometría. Integran el conocimiento intuitivo con la actividad, la reflexión, la representación y la sustentación; a través de redes de conocimiento, planteamiento de preguntas intencionalmente cognitivas y socialización de saberes. De este modo construyen coherentemente su propuesta.

- La investigación “Cultura matemática en la educación básica” (Torres, Espinoza y Bejarano. 1997), explica la construcción progresiva de lenguajes matemáticos en diferentes temas de la enseñanza básica. Su núcleo de análisis es una de las conductas del relato: *la verbalización de las acciones*, conducta que se utiliza para diseñar su estrategia de actuación en el aula que recurre al reconocimiento de las competencias creadas por la cultura (etnográficas). Ven en su modelo una posibilidad globalizante, es decir, como factible de ser generalizado como estrategia para cualquier sector del conocimiento escolar.

- La investigación “La construcción del concepto de área en estudiantes de quinto y séptimo grado” (García, Garzón y Saavedra. 1998) es un ejemplo prototipo de los modelos de construcción teórica a partir de la investigación en el aula: Su explicación supera la interpretación de las teorías utilizadas, para avanzar hacia construcciones propias “con sabor” de experiencia docente. Su intención es propositiva hacia la cualificación del pensamiento matemático.

- La investigación “El juego de la tripleta como herramienta pedagógica para contribuir al desarrollo de algunos procesos de pensamiento matemático” (Garzón y Reyes. 1998), muestra que su explicación está centrada en el análisis de los datos encontrados, principalmente de las respuestas que dan los estudiantes frente a las actividades; respuestas que son observadas minuciosamente, pero sin pretender construir, explícitamente, algún modelo que dé cuenta de la metodología utilizada y de la evaluación aplicada.

- La investigación “Sistematización de una experiencia de matemáticas contemporáneas en el aula” (Castañeda. 1997), posee una explicación implícita de más impacto educativo que la explicación explícita de los conceptos matemáticos y metodológicos utilizados. Interpretando el trabajo y sus resultados, se puede inferir que la mayoría de los estudiantes pueden alcanzar altos resultados formativos e informativos cuando interactúan con modelos pertinentes

en cuanto a la motivación, calidad de los contenidos temáticos, acompañamiento adecuado y oportuno, y flexibilidad en el uso de los tiempos escolares. Es en este trabajo en donde mejor se valida la posibilidad de construir una educación con altos resultados académicos, contando con docentes, conceptual y académicamente bien preparados.

- La investigación “Cómo enseñamos la aritmética” (Bonilla, Sánchez y Vidal, 1999), construye una propuesta para la formación de maestros en básica primaria, sustentada en los resultados y en el análisis que hicieron en una indagación sobre las concepciones más arraigadas de los docentes, cuando enseñan matemáticas. Abre el espacio para investigar qué tan eficientes son los programas de formación docente que se ofrecen en nuestro país, incitando a reflexionar sobre este tema.

- En la investigación “Innovación curricular en precálculo para la educación media” (Carulla, 2000, informe de avance), se le da significado y sentido al concepto de innovación bajo una concepción que busca transformar las prácticas cotidianas con las matemáticas en la escuela. La educación media tradicionalmente ha recibido la influencia de la educación básica universitaria en matemáticas: los temas tratados son, por lo general reducciones y simplificaciones de temas que se estudian en las primeras asignaturas de los programas de educación superior. Además, en las mismas universidades se escogen los temas para remediar las falencias de la educación media, cayendo en un círculo vicioso que mueve la mediocridad en ambas direcciones. En esta investigación se comenzó con una reforma a los programas universitarios, para luego validarla con modificaciones, en la educación media. El problema de que no todos los estudiantes van a tener acceso a la educación superior no afecta este trabajo, puesto que los temas tratados son de necesidad formativa universal. En todo caso, habría que independizar los intereses de ambos tipos de instituciones.

- La investigación “El análisis del contenido matemático como herramienta para la construcción de modelos pedagógicos: el caso de la función cuadrática” (Gómez y Carulla) explica cómo el análisis detallado de las redes conceptuales que se pueden elaborar con los conceptos matemáticos, si son el resultado de elaboraciones críticas por parte de los docentes –y mejor con la ayuda de investigadores–, puede llegar a transformarse en una actividad permanente de los educadores en ejercicio para, entre otros objetivos, llegar a superar el esquematismo predominante de la mayoría de los programas de matemáticas. Sus reflexiones se inscriben en las concepciones más actualizadas sobre diseño curricular.

- El encuentro “Teoría y práctica de la educación matemática. encuentro de saberes en precálculo y tecnología, reporte final” (Patricia Perry y otros. 2000), es un ejemplo de socialización de experiencias y concepciones interinstitucionales sobre un tema fundamental: el uso de la tecnología en la educación matemática. Aunque los encuentros estuvieron centrados y orientados hacia el fortalecimiento de la línea investigación que en este campo realiza “Una Empresa Docente” de la Universidad de los Andes, es evidente su importancia y su necesidad. La diferencia de estos encuentros con otros parece radicar en la estructura y continuidad que tuvieron, además de la sistematización e historia que se elaboró para cada encuentro y para el conjunto. No es una costumbre colombiana construir historia conscientemente, preferimos la acción kafkiana de repetir el primer encuentro.

La componente contrastativa

Rigurosamente, sólo la investigación sobre innovación curricular puede ser categorizada como contrastativa, de acuerdo con Padrón. Sin embargo, en una visión amplia, todas las investigaciones contrastan, en la práctica escolar, algún modelo o concepción predominante en las comunidades académicas o en la mente del investigador. Sólo que en algunas investigaciones hizo falta la manifestación explícita de la consideración contrastativa. Esto puede facilitar la cualificación de los modelos utilizados.

La componente aplicativa

Con el significado expuesto se perfilan como aplicativas las investigaciones: “Potenciación de las matemáticas escolares a través de red de instituciones educativas- fase 1” y “Teoría y práctica de la educación matemática. Encuentro de saberes en precálculo y tecnología”. Con un significado general, todos los trabajos hicieron uso de algún dispositivo de aplicación.

Sugerencias para impulsar y desarrollar la investigación en educación matemática

- Sería deseable elaborar un programa macro de investigación con el propósito de elevar la calidad de la educación en toda la ciudad, dando prioridad a *las investigaciones en el aula* y con efectos sobre los PEI de cada institución. Como parte del programa se precisarían Líneas de Investigación sobre temas más puntuales orientados a la transformación e innovación curricular. Para estas investigaciones se convocaría por concurso. El programa macro se puede constituir en un espacio apropiado y deseado para realizar trabajos

y tesis de grado. Tendría también la ventaja de facilitar la creación de semilleros de investigadores, apoyados por el conocimiento de los más expertos.

- Es fundamental incorporar a los docentes en las investigaciones. Para esto se puede constituir un grupo de asesores que, utilizando internet, ayuden en la estructuración, diseño e interpretación de las investigaciones.

- El IDEP podría estructurar una base de datos sobre investigaciones en educación matemática, en donde se incorporarían todas las investigaciones que viene apoyando. Además, ofrecería información teórica y técnica para los docentes y los investigadores.

- Se requiere vincular las investigaciones a la búsqueda de soluciones para los problemas reales de la escuela. De aquí que sea fundamental evaluar el impacto de cada investigación sobre los grupos investigados.

- La existencia de un centro de documentación bibliográfica, especializada y de fácil acceso, es condición necesaria para elevar la calidad de las investigaciones.



BIBLIOGRAFÍA

ARMENDÁRIZ, Victoria; AZCÁRATE, Carmen y DELUFE, Jordi. *Didáctica de las matemáticas y psicología*. Editorial Infancia y Aprendizaje. 1993.

BARRANTES, Hugo; RUIZ, Ángel. *La Historia del Comité Interamericano de Educación Matemática*. Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Colección Enrique Pérez Arbeláez. N° 13. Santa Fe de Bogotá. 1998.

BONILLA, Elisa. En: "Educación en matemáticas". Grupo Editorial Iberoamericana, S.A. México. Vol. 1, N° 12. 1989.

DE GUZMÁN, Miguel. *Tendencias innovadoras en educación matemática*. Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura. Editorial Popular Edición HTML. Joaquín Asenjo. 1993.

DIENES, Zoltan. P. *Las seis etapas del aprendizaje en matemática*. 2ª edición. Teide. Barcelona. 1975.

_____ *La matemática moderna en la enseñanza primaria*. Teide. Barcelona. 1973.

_____ *La construcción de las matemáticas*. Vincens Vives. Barcelona. 1970.

- DIENES, Zoltan P. y GOLDING, E. *Los primeros pasos en matemáticas*. Teide. Barcelona. 1980.
- Enciclopedia práctica de pedagogía*. Volumen 4. Editorial Planeta. Barcelona. 1988.
- FREUDENTHAL, H. *Weeding and Sowing*. Dordrecht. Reidel Pub. Co. 1978.
- García Cruz. Antonio *Matemáticas en Secundaria. La Didáctica de las Matemáticas: una visión general*. Internet. 2000.
- GARCÍA, B. Álvaro: arreiro: *Qué es Ciencia Cognitiva?*. Tue Apr 1 13:30:35 MET DST 1997.
- GODINO, Juan D. "Hacia una teoría de la didáctica de la matemática". En: A. Gutiérrez (Ed.), *Área de Conocimiento: Didáctica de la Matemática*. Madrid. Síntesis. 1991.
- GOULD, Stephen, J. "Un devastador ataque contra el determinismo biológico de la inteligencia" En: *La falsa medida del hombre*. Antoni Bosch (trad. cast.). Barcelona. 1984.
- HABERMAS, J. *Teoría de la Acción Comunicativa*. Vol. 2. Madrid. Taurus. 1987.
- HERNÁNDEZ, Carlos A. *Aproximaciones a la Discusión sobre el Perfil del Docente*. II Seminario Taller sobre perfil del docente y estrategias de formación, países de Centroamérica, el Caribe, México, España y Portugal (San Salvador, El Salvador del 6 al 8 de diciembre de 1999).
- KILPATRICK, J. "Investigaciones en educación matemática: su historia y algunos temas de actualidad". En: *Educación Matemática*. Kilpatrick, J , Rico, L, y Gómez, Pedro. (Eds) "una empresa docente" & Grupo Editorial Iberoamericana. Santa Fe de Bogotá. 1994.
- KUHN, T.S. *La estructura de las revoluciones científicas*. México. F.C.E. 1975.
- MIALARET, Gastón. *Las matemáticas. Cómo se aprenden y cómo se enseñan*. Madrid. Pablo del Río. 1977.
- PACHECO MÉNDEZ, Teresa, "Los procesos de innovación educativa. Su medición institucional". En: *Revista latinoamericana de estudios educativos*. México, Centro de Estudios Educativos. Vol. XXI. 1er. trimestre 1991.
- PADRÓN, J. *La estructura de los procesos de investigación*. Caracas. Publicaciones del Decanato de Posgrado. USR. 1998.
- PINEAU, Pablo. *La pedagogía entre la disciplina y la dispersión: una mirada desde la historia*. Editorial del IEF E. Romero Brest. Argentina. 1999.

REGGINI, C. Horacio. "Miradas a la educación actual, La nuevas tecnologías y la reformulación del papel de la educación en la nueva sociedad de la información". Artículo publicado en la revista *IDEA*. Buenos Aires, abril. 1994.

ROBITAILLE, D. F. y TRAVERS, K. J. "International Studies of Achievement in Mathematics". En: Grows, D. A. (Ed). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learnig*. New Jprck. Macmillan. 1992.

STEINER, H.G.; BALACHEFF, N. y otros. (Eds.). *Theory of mathematics education (TME)*. ICME 5. Occasional paper 54. Institut für Didaktik der Mathematik der Universität Bielefeld. 1984

STEINER, H.G. *Theory of mathematics education (TME): an introduction. For the Learning of Mathematics*. Vol. 5. Nº 2. 1985.

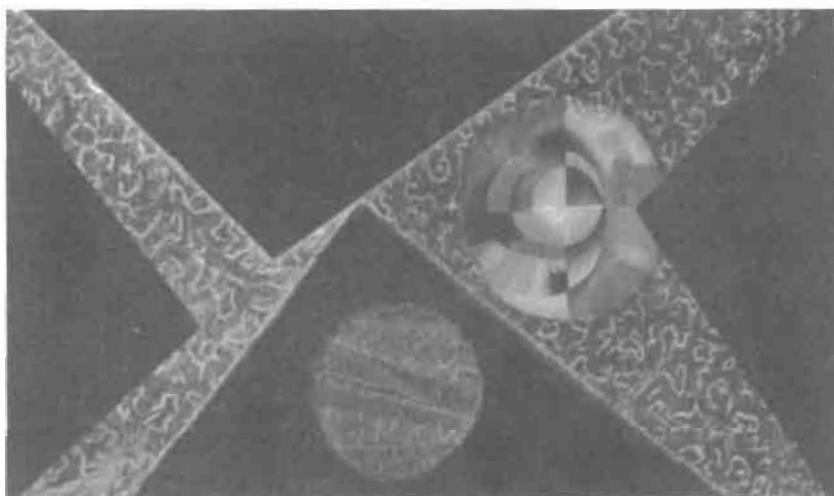
STEINER, H.G. "Needed Cooperation Between Science Education and Mathematics Education". *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*. Nº 6. 1990.

VASCO, Carlos. E. "La educación matemática: una disciplina en formación". En: *Matemáticas. Enseñanza Universitaria*. Revista de la ERM. Vol. 3. Nº 2, mayo de 1994.

Vygotsky, L.S. *Pensamiento y Lenguaje*. La Pléyade. Buenos Aires. 1977.

YURÉN C., María Teresa. "¿Qué significa elevar la calidad de la educación?" En: *Cero en conducta*. México. Año 5. Nº 17, enero-febrero de 1990.

INVESTIGACIONES E INNOVACIONES DEL IDEP



INVESTIGACIÓN PEDAGÓGICA

CONCEPCIONES Y POSICIONES SOBRE LA PRÁCTICA PEDAGÓGICA Y EVALUATIVA EN LAS ÁREAS DE LENGUAJE Y MATEMÁTICAS EN BOGOTÁ

Análisis de Tendencias¹

Olga Cecilia Díaz Flórez²

Cuando se trata de vislumbrar el papel que hoy se atribuye y desde el cual se orienta la educación, la pedagogía y la evaluación, es necesario considerar las nuevas perspectivas en la forma de asumir la sociedad, la cultura y al sujeto en función de las transformaciones socioeconómicas, políticas y del conocimiento producidas en el orden mundial y que se constituyen en horizontes desde los cuales se tensionan los sentidos y visiones a privilegiar en el campo cultural y social.

Así, esta investigación se inscribe en un análisis comprensivo de las perspectivas que se juegan en torno a prácticas pedagógicas y evaluativas, las cuales inicialmente se pueden percibir como un asunto local y específico para dar cuenta de lo que acontece en el contexto escolar. Sin embargo, este estudio supuso un abordaje global y de conjunto en el que se intentaron reconocer las interrelaciones que se producen entre los ámbitos social, político, económico, educativo, que son promovidos en un momento histórico particular. Esta orientación, en tanto parte de asumir el carácter social que está en juego en la producción de mundo, reconoce que las prácticas sociales son construcciones generadas desde las concepciones que una sociedad hace posible en función de unas formas de ver y decir que configuran los paradigmas propios de una cultura en condiciones históricas específicas.

En este sentido, la comprensión de las prácticas pedagógicas y evaluativas, como parte de una serie de dispositivos configurados en la dinámica social, nos permite identificar las nuevas perspectivas en emergencia dentro de lo que se podría denominar “régimen discursivo estratégico”, en el que dos áreas

¹ El presente artículo es una síntesis de la investigación adelantada, la cual fue aprobada y financiada por Instituto para la Investigación Educativa y el Desarrollo Pedagógico –IDEP, a la Fundación para la Promoción de la Cultura Infantil y Juvenil –FUNDACULTURA. Participó en la convocatoria 01-98. El informe final se encuentra en el Centro de Documentación del IDEP.

² Lilian Lucía Caicedo Obando fue la coinvestigadora de este estudio.

del conocimiento como el lenguaje y las matemáticas adquieren una visibilidad preponderante, señalando en ellas el papel de espacios para el desarrollo de “capacidades básicas de aprendizaje”. Así, el abordaje de estas áreas no es producto de una arbitrariedad o del acoger “una moda”, sino precisamente de intentar comprender por qué en nuestra sociedad actual el lenguaje y las matemáticas se han constituido en el punto de visibilidad preponderante, en tanto a estos campos del conocimiento se atribuye la confianza –al igual que a la evaluación– de ofrecer las “salidas” a múltiples necesidades y orientaciones de la acción educativa.



MARCO TEÓRICO

Problema

Dar cuenta de las concepciones y posiciones vigentes en la comunidad educativa (directivos, estudiantes y docentes) en torno a las prácticas pedagógicas y evaluativas en dos áreas del conocimiento: lenguaje y matemáticas en 20 instituciones oficiales de 11 localidades de Bogotá.

Con esta investigación se buscó, entonces, una aproximación a interrogantes relacionados con: ¿cómo se ven y qué tipo de condiciones contextuales afectan la acción docente?, ¿cómo se posicionan los diferentes actores de la comunidad educativa frente a las actuales políticas educativas en los campos pedagógico y evaluativo?, ¿qué visiones se privilegian de lenguaje, de matemáticas?, ¿qué sentido se da a los procesos de apropiación/construcción del conocimiento en estas dos áreas?, ¿cuáles características adquiere la acción evaluativa en función de sus objetos y finalidades?, ¿qué relación se establece entre las concepciones de los estamentos considerados en torno a las categorías contempladas en el estudio?

Propósitos

- Identificar y analizar las concepciones sobre educación y evaluación que se actualizan en diferentes contextos educativos y el posicionamiento de docentes y directivos frente a las actuales políticas educativas desde la inscripción de lo educativo en el orden social.
- Caracterizar las visiones de conocimiento y los procesos que median la relación entre sujetos y saberes de los diferentes estamentos –directivos, docentes y estudiantes– en el ámbito de las áreas de lenguaje y matemáticas.



- Describir las relaciones que se establecen entre las concepciones de los diferentes actores en las instituciones educativas, en torno a sujetos, conocimiento y saberes, pedagogía y evaluación.
- Reconocer las diversas tensiones que se hacen visibles en las instituciones escolares, en las áreas objeto de la investigación.

Perspectiva metodológica

Desde la mirada conceptual que caracteriza la presente investigación, el problema no fue visto como una idea regulativa, un norte hacia el cual se dirige la acción investigativa; tampoco como un obstáculo –lo puesto por delante– por superar. Se intentó asumir un desplazamiento epistemológico que consiste en ubicar el problema en el centro mismo de la perspectiva a construir. Así, la investigación no pretende superar el problema; éste no ha estado fuera, se le ha visto como el motor –que desde una fuerza centrípeta– da lugar a permanentes reflexiones y reorientaciones, incluso sobre el sentido y la pertinencia del problema mismo. En este sentido, se trató de mirar buena parte de las aristas del problema, esto es, concentrar el mayor número de perspectivas para que los actores, en este caso docentes, directivos y estudiantes, se vean reconocidos pero también problematizados. De manera semejante, el desarrollo metodológico más que un a priori a seguir, se vio como un condensado de caminos recorridos.

Bajo esta perspectiva se acogió la idea de que investigar es resaltar lo que por anticipado estaba y pasaba desapercibido; investigar es reconocer, ver lo que ya estaba con otra mirada, otro gesto, otro estilo; investigar es ver la realidad en opciones comunicativas, hermenéuticas y complejas³.

Se trató, entonces, de elaborar una reconstrucción que diera cuenta de los procesos de significación mediante los que diferentes actores producen determinados tipos de realidad escolar, en relación con dos grandes categorías: las condiciones contextuales de la acción educativa y las posiciones y concepciones, las cuales se consideran inscritas en paradigmas dominantes y en emergencia.

Participantes y estrategias de recolección de información

La investigación centró su atención en el discurso y enunciados de docentes, directivos y docentes de veinte instituciones oficiales, pertenecientes a once

³ Perspectiva ganada en el proceso de asesoría de la presente investigación; en particular se retoman los planteamientos de MARÍN, Fernando. *Ensayos sobre los nuevos paradigmas de la educación, la cultura y la democracia*. 1999.

localidades del Distrito Capital. El criterio de selección de la muestra fue intencional, dado que la vinculación al estudio estuvo mediada por el interés y el compromiso, tanto de los docentes como de los directivos, frente a la dinámica propuesta (participar en una entrevista grupal por área y responder un cuestionario individual).

La muestra total de participantes de la investigación inicialmente fue de ciento cincuenta docentes y veinte directivos; grupo con el cual se adelantó la entrevista grupal (docentes de las áreas de lenguaje y matemáticas) e individual (directivos). De este grupo, ciento venticinco docentes y quince directivos docentes respondieron la primera (caracterización sociodemográfica y laboral) y segunda parte del cuestionario (condiciones contextuales de la acción docente). De este grupo, finalmente, cien docentes y catorce directivos diligenciaron la totalidad de los instrumentos.

En el caso de básica primaria, donde los maestros asumen todas las áreas, el grupo interesado en participar desarrolló dos entrevistas o abordó diferencialmente la discusión sobre cada área y a nivel del cuestionario se subdividieron en forma voluntaria para responderlo en una de ellas. Inicialmente se había previsto contar con un número máximo de ocho docentes por institución; sin embargo, en algunos casos, por interés de los docentes, se amplió este número hasta doce.

A nivel del grupo de directivos docentes, la entrevista se realizó con el rector, el coordinador académico o el orientador; en todos los casos se contó con aquella persona vinculada estrechamente a la dinámica pedagógica de las áreas.

Las diferentes estrategias se concibieron como suscitadoras de un diálogo, que en tanto pretexto permiten mirar un campo discursivo más amplio, vinculado con las transformaciones culturales, sociales y educativas que están emergiendo. Así, se construyó una entrevista grupal para docentes y estudiantes, y un cuestionario individual tanto para docentes como para directivos.

Resultados

Para la organización general de la información se optó por combinar el análisis cuantitativo con el cualitativo. Este análisis se inicia con una caracterización general del grupo participante en el estudio, para luego realizar la identificación de orientaciones y perspectivas, en función de las categorías preestablecidas y de aquellas que fueron construidas a partir de los enunciados incluidos en las preguntas abiertas de estos instrumentos.

A nivel de la caracterización de la población objeto de la investigación –primera sección del cuestionario– se hizo uso de una base de datos⁴ a partir del cual se desarrolla un análisis descriptivo. El análisis de las siguientes secciones del cuestionario se realizó a partir de la lectura minuciosa de los enunciados de los docentes (secciones 2 y 3) y directivos (sección 2), para lograr una categorización y subcategorización que posibilitara identificar unas tendencias que se visualizan en sus enunciados.

Así, en primera instancia, la identificación de orientaciones en los enunciados se realizó desde un abordaje cualitativo, que a su vez, posibilitara la identificación de orientaciones susceptibles de ser trabajadas como variables descriptivas en la base de datos seleccionada para este procesamiento. El otro nivel de aproximación cualitativa, tiene que ver con la lectura teórica que se hace de la amplia gama de informaciones recolectadas. Este análisis, por supuesto, se vincula con una perspectiva que pretende ser hermenéutica, compleja, contextual, en consonancia con la orientación conceptual por la que se optó, de tal manera que avanzara en la construcción de un mapa complejo de tendencias y relaciones entre concepciones y posiciones de las prácticas pedagógicas y evaluativas presentes en los discursos de docentes y directivos docentes de un grupo de instituciones del sector oficial pertenecientes al Distrito Capital.

De las características generales de los participantes

Con relación a la primera parte del instrumento, que corresponde a la caracterización de la muestra en sus aspectos socioeducativos y laborales (respondida por 125 docentes y 15 directivos docentes), se han seleccionado las variables descriptivas de la muestra participante que se considera dan la información más relevante.

El grupo encuestado tiene mayoritariamente una vinculación con su actual institución, entre un año y cinco (44 profesores –35%– y siete directivos docentes –47%–); en segundo lugar el porcentaje más alto se ubica en el rango de seis a diez años (37 docentes y 5 directivos). En cuanto a la edad, el grupo mayoritario se ubica entre los 36 y los 45 años, seguido por el grupo entre los 46 y los 55 años, tanto a nivel de directivos como de docentes.

Llama la atención el alto porcentaje de participantes en el estudio que reportan tener un nivel de posgrado, específicamente en el área de la educación

⁴ Para el diseño de la base de datos y el análisis correspondiente se utilizó el paquete estadístico StatView (SAS Institute Inc. Second edition. First printing, March, 1998).

(48% de los docentes y 66,7% de los directivos docentes). También se destaca que el 83% de los docentes y la totalidad de los directivos poseen formación profesional en educación.

Se consideró de interés explorar hasta qué punto el grupo encuestado tenía vinculación con más de una institución educativa: el grupo mayoritario (62,4% de los docentes y 53,3% de los directivos docentes) tiene vinculación con una sola institución educativa. Cerca del 30% de los maestros y el 46% de los directivos docentes informaron que trabajan en dos colegios y seis de los docentes en más de dos.

En cuanto a actividades relacionadas con la acción docente que se desarrollaron por fuera de la jornada laboral, 65 de los maestros dicen realizar entre 4 y 6 actividades por fuera de su jornada, entre ellas se incluye: trabajo de preparación de clases, lectura y corrección de trabajos; mientras que 8 de los directivos dicen realizar entre 1 y 3 actividades relacionadas con su labor en la institución por fuera de su jornada. Estos datos mostrarían cierta sobrecarga de trabajo, pues tanto docentes como directivos tienen que realizar múltiples actividades que se esperaba tendrían que estar incluidas dentro de su tiempo y carga laboral.

De las condiciones contextuales de la acción educativa

Esta caracterización⁵, parte de la importancia atribuida a la necesidad de contextualizar la situación en que maestros y directivos desarrollan su acción. En este sentido, este aspecto no se considera como un asunto tangencial o accesorio, más bien se trata de comprender cómo a partir de ciertas condiciones –las cuales no sólo, ni fundamentalmente, se refieren al ambiente físico o a los recursos materiales– se producen dinámicas que afectan tanto las interacciones como las realizaciones que se intentan promover en el contexto escolar.

Por tanto, la importancia de la contextualización estriba en que desde ella ha de visualizarse y valorarse la acción de los agentes educativos; los llamados “factores asociados”⁶ pretenden así configurarse desde nuevos abordajes, de

⁵ En este apartado se retoman algunos de los análisis cualitativos realizados; no obstante, en el informe completo de este estudio se incluye el análisis de frecuencias, porcentajes y se incluyen las tablas y figuras respectivas.

⁶ Esta categoría proviene de orientaciones recientes en la política educativa, según la cual se intenta establecer cuáles variables –según un listado preestablecido– se consideran determinantes en el logro cognitivo de los niños y jóvenes. Desde este tipo de estudios se ha fundamentado buena parte de las políticas y la inversión en educación a nivel mundial.



tal manera que se logre una aproximación cualitativa a las dinámicas que, desde la mirada de docentes y directivos, se consideran significativas al dar cuenta de los procesos educativos y del papel que realizan estos agentes.

Como condiciones que se vinculan con la acción docente, se incluyeron los aspectos administrativos, de interacción, políticas y formación. Desde ellos se elabora un panorama en el que se muestra la percepción y valoración de diversos asuntos que se consideran interrelacionados e imbricados en la práctica docente y, por supuesto, en la manera como ellos se vinculan con las concepciones y posiciones que se viabilizan en torno a las áreas de conocimiento contempladas en el presente estudio.

Condiciones administrativas

Las condiciones administrativas⁷ que influyen en la acción docente se subdividieron en factores internos y externos⁸, no para establecer una separación entre el adentro y el afuera de la institución, sino para diferenciar aquellos aspectos que se relacionan con la dinámica cotidiana y más próxima a los docentes y directivos (planta física, materiales de trabajo, organización de tiempo, dotación institucional, relaciones de poder, trabajo en equipo), de aquellos que con frecuencia aparecen como ajenos a la institución, en tanto parecen depender de agentes externos o situaciones sobre las cuales no se considera posible tener injerencia (políticas educativas, acciones de entes administrativos –particularmente de la Secretaría de Educación Distrital– y condiciones familiares de los sujetos en formación).

A nivel de los *factores internos* que inciden en la acción docente, los materiales de trabajo y la organización del tiempo fueron los aspectos que aparecieron con mayor frecuencia. En el primer caso, se destacó la insuficiencia, poca disponibilidad y la carencia de recursos necesarios para llevar a cabo su labor; en el segundo se mencionó, por un lado, la carencia de espacios para profundizar en el trabajo escolar con los estudiantes y entre los docentes, y por el otro, el desorden generado por la programación de reuniones de docentes en la jornada escolar. Se destaca que mientras para algunos docentes la dificultad evidenciada en el manejo del tiempo tiene que ver con que no se cumple con

⁷ Es de aclarar que el haber incluido algunos ejemplos de estos factores (tiempos, espacios, reuniones de trabajo, relaciones de poder, recursos físicos, materiales de trabajo, acciones de la Secretaría de Educación, etc.), en buena medida, se constituyó en un “sesgo” que determinó el tipo de enunciados que se privilegiaron en esta pregunta abierta.

⁸ Se parte del reconocimiento de que algunos de los factores llamados internos son determinados por factores externos y viceversa; éstos no se pueden separar, unos y otros se constituyen mutuamente, se desarrollan de manera tal que recíprocamente se sostienen, se dan fuerza y hacen posible la existencia del otro.

lo previsto en la planeación diseñada al comienzo del año escolar, para otros el problema radica en que no se abren espacios desde los cuales se revisen y adecuen los procesos en función de las necesidades que van surgiendo. Este aspecto también fue señalado como relevante para los directivos, quienes hacen referencia tanto a la distribución de las actividades que limita la posibilidad de cualificar la acción docente, como a la interrupción generada por actividades no previstas –generalmente provenientes de la Secretaría– que se considera afectan el desarrollo de los procesos inicialmente previstos por la comunidad educativa.

Al contrastar esta tendencia con los resultados presentados en los estudios de factores asociados con la calidad de la educación (MEN. 1993, p. 89), se destaca que un factor como la distribución de los tiempos no es considerado desde la perspectiva de quien diseña este tipo de instrumentos. De manera semejante, el factor “materiales de trabajo” se reconoce en el estudio en mención como de menor importancia, mientras que en la presente investigación, para el grupo participante, éste se constituye en determinante. También es de resaltar que “la cantidad de materiales disponibles por alumno” aparece en el estudio del MEN (1993) como responsabilidad de los estudiantes y no como un compromiso en el cual el Estado tiene una importante contribución; mientras que para los docentes participantes en el presente estudio, los materiales son recursos que ha de brindar la institución.

Otro factor interno que aparece como relevante para docentes, pero que no se valora de igual manera para los directivos, es el trabajo en equipo; aspectos como la organización de grupos de trabajo en torno a las necesidades institucionales, la importancia de discutir y llegar a acuerdos sobre las propuestas pedagógicas y evaluativas que dirijan el rumbo de la institución son, entre otros, los argumentos con los cuales se explicita este factor y que además, su no existencia se considera que repercute de manera negativa, especialmente en el trabajo académico.

En cuanto al factor “relaciones de poder”, también caracterizado como interno, se destaca que la noción de poder que subyace a los enunciados tanto de maestros como de directivos, se asume desde un ejercicio unilateral, es decir, se considera que una condición de jerarquía –desde los más altos a los más bajos niveles– en la que se determinan las acciones de unos agentes sobre otros, de tal forma que el poder es ejercido por entes como la Secretaría de Educación, el cual difícilmente se ve susceptible de movilización. Algo semejante se aprecia en los enunciados de los docentes cuando se refieren al manejo de poder unilateral por parte del directivo. Por supuesto, se desconocen



los ejercicios de poder que cada actor viabiliza desde su propia posición y de las relaciones de fuerza que se producen en el intersticio de tales manejos. Sin embargo, cuando se hacen análisis sobre la relación entre estos factores y sus efectos, buena parte de los docentes y directivos consideran que las formas de ejercicio de poder personal e institucional tienen una gran incidencia en la proyección y viabilidad de los procesos generados o por desarrollar.

En cuanto a los *factores externos*, tanto docentes como directivos resaltan las acciones de entes administrativos –especialmente de la Secretaría de Educación Distrital–, considerando que repercuten especialmente en la viabilidad de las propuestas institucionales. En este sentido, la mayoría de los enunciados plantea un análisis negativo del papel que en la actualidad cumple este estamento.

Los factores externos, no se suelen considerar en la perspectiva de los estudios oficiales; mientras que en el presente estudio existe, para muchos docentes, una relación estrecha entre lo que acontece en el interior de la institución y los factores externos que afectan la acción de los agentes educativos, es decir, se percibe una mirada que reconoce una dinámica macro involucrada en las acciones que se promueven y que puede resultar contraproducente a los procesos y dinámicas particulares que las comunidades intentan desarrollar en la institución educativa.

Con respecto a la percepción que se tiene en torno a los aspectos que se ven afectados por los factores administrativos mencionados, la mayoría de docentes y directivos destaca que el trabajo académico –visto como contenidos desarrollados superficialmente–, la proyección y la viabilidad de los procesos institucionales –manejo coyuntural de las acciones e improvisación en su desarrollo–, se ven perjudicados.

Interacción

En este aspecto se indagó por la manera como las relaciones afectan la dinámica cotidiana en el contexto laboral. Para ello se inquirió sobre la forma como los estamentos consultados caracterizaban estas relaciones y la valoración que hacían de ellas, considerando las relaciones entre: directivos, maestros, alumnos y padres de familia. Para efectos de la categorización de estos enunciados se optó por establecer una distinción en función de unos ámbitos que fueron identificados: personal, profesional y administrativo.

La visión de las relaciones entre los diferentes agentes caracterizados, desde nuestra perspectiva, da cuenta de las concepciones de sujeto, de sus roles, de

las expectativas que se elaboran alrededor de su papel dentro de la institución, es decir, se vinculan con imaginarios culturales y sociales que se han estructurado acerca del “deber ser” de los roles de cada sujeto inmerso en la institución escolar.

En este sentido, de manera general, se destaca que mientras para los docentes el carácter profesional aparece como eje predominante de la interacción con todos los demás estamentos, para los directivos se plantea el ámbito personal/social como estructurante de dicha interacción. Se podría decir que el lugar desde donde se ubica al otro se vincula con el rol que se ejerce; así, mientras el docente se percibe a sí mismo como agente que desarrolla una acción de transformación de los sujetos desde unos conocimientos y unos comportamientos que se privilegian en la institución educativa, en el caso del directivo el ejercicio de su rol es asumido más en términos de disposición de las relaciones, de tal manera que se posibilite un “clima de interacción favorable” que permita cumplir con una dinámica administrativa esperada.

Para el caso de la percepción que se tiene de la relación maestro-alumno, ésta se caracteriza dentro de una amplia gama que va desde relaciones próximas y afectivamente positivas, hasta relaciones autoritarias y distantes. Además, para un buen número de docentes y directivos, la orientación de esta interacción no ha variado sustancialmente, pues se evidencia en ella rastros de un manejo unilateral del poder por parte del docente, quien también logra percibir las actitudes de rechazo y descontento por parte del estudiante. Sin embargo, para otro grupo de directivos la relación ha empezado a transformarse, pues se percibe la emergencia de nuevas modalidades de interacción, algunas de ellas marcadas por el interés del docente por lograr mayor incidencia en la vida del estudiante, y otras orientadas hacia el reconocimiento de los saberes y visiones del estudiante.

También se resalta que, para algunos docentes, se establece una estrecha relación entre los ámbitos personal y profesional, en tanto se considera que un alto grado de proximidad entre docentes y estudiantes –lo que implica una aproximación más minuciosa a la vida del estudiante– da lugar a un mayor compromiso del estudiante con el conocimiento y a una mayor concientización frente a su aprendizaje, lo cual generará unas actitudes y comportamientos adecuados a las expectativas socialmente deseables. En consonancia con esta visión, la evaluación del estudiante parte del presupuesto de que a mayor conocimiento de éste –su contexto, necesidades e intereses– será posible evaluarlo más justa y “objetivamente”.



En relación con la visión de la interacción entre maestro-directivo/padre de familia, si bien se percibe un consenso en el ámbito profesional como aquél desde el cual se espera se desarrolle la relación entre los docentes y los directivos con los padres de familia, también se percibe la añoranza de lograr involucrar a los padres en las dinámicas académicas y pedagógicas que se intentan promover en la institución. En este sentido, se aspira a un alto grado de “coherencia” entre lo que el colegio y los docentes proponen, y lo que la familia tendría que apoyar en aras de favorecer la llamada educación integral.

Políticas

En esta investigación también se quiso identificar la visión que los maestros tienen de la política educativa, y la manera como ella afecta la acción docente; análisis que necesariamente se interrelaciona con las orientaciones identificadas a nivel de las áreas objeto de estudio: lenguaje y matemáticas.

De los cien docentes que respondieron la pregunta que les pedía mencionar las políticas educativas que a su juicio influyen significativamente en su acción –ya sea por su impacto favorable o desfavorable–, cuarenta y cinco de ellos mencionaron la evaluación educativa (examen de Estado, promoción automática, evaluación de la calidad, recuperación, evaluación de docentes, evaluación por logros, evaluación de competencias).

En relación con esta política se evidenciaron diferencias importantes cuando la evaluación es referida a los estudiantes o a los docentes y directivos. En el primer caso, para buena parte de los participantes se juzgan como convenientes las transformaciones que se han generado a este nivel, particularmente las referidas a indicadores de logro, evaluación de la calidad o la evaluación por competencias, y cuando aparecen críticas a estas reformas ellas tienen que ver con el escaso compromiso evidenciado en los estudiantes frente al trabajo académico. En el segundo caso, por su parte, se cuestiona el sentido, los efectos y la incidencia que tiene la acción de evaluar a los docentes y directivos, pues se considera que desde este tipo de acciones no se lograrán generar transformaciones significativas en la educación.

Esta tendencia fue igualmente identificada en la valoración que se propuso al grupo encuestado para que valorara el nivel de importancia, aporte, impacto y utilidad de algunas políticas⁹. A este nivel se ratificó la valoración diferenciable que se establece entre evaluación especialmente referida a los estudiantes

⁹ Las políticas escogidas para que fuesen valoradas en una escala fueron: Decreto 1860/94, lineamientos generales de procesos curriculares, proyecto educativo institucional, Resolución 2343 de 1996, evaluación de la calidad de la educación, exámenes de Estado, evaluación de docentes y directivos, y, plan de incentivos.

–evaluación de la calidad, exámenes de Estado, indicadores de logro– y la evaluación de docentes y directivos. En torno a esta última, es evidente la distribución heterogénea de las valoraciones en los diferentes criterios, pues no hay tendencia al acuerdo sobre su importancia, aporte, impacto y utilidad; mientras que en el primer caso se privilegia una valoración homogénea positiva en torno a estos criterios.

Estas valoraciones diferenciales que se establecen en uno y otro caso, mostrarían una posición de relativo acomodamiento frente a la política educativa. En este sentido, se podría aceptar el señalamiento de Rockwell y Mercado (1993), quienes, también a través de la investigación, han evidenciado como los maestros se apropian de manera diferencial de las políticas educativas, utilizándolas de diversas formas: para legitimar acciones propias o para controlar acciones ajenas.

El hecho de que aparezca la evaluación como política de gran incidencia, se vincula con que éste es un tema que en la actualidad ocupa la atención y convoca los intereses de la mayoría de los agentes educativos; sin embargo, sólo para unos pocos docentes y directivos –a partir del análisis desarrollado sobre las políticas seleccionadas– existe una estrecha relación entre el rumbo de los modelos políticos y económicos actuales (neoliberalismo, globalización) y la necesidad de la evaluación. Tampoco se visibiliza una problematización en torno al interjuego centralización–descentralización, pues por un lado se está hablando de la necesidad de la participación de las comunidades en el rumbo y desarrollo de sus intereses, pero a la vez se hace visible un sistema de control (evaluación masiva y de aula) por medio del cual no se pierde de vista lo que acontece con dicha participación, que al tiempo conlleva la consigna de la “autonomía”.

Esto nos remite a una de las hipótesis planteadas en esta investigación y es que la evaluación es constitutiva y constituyente de la acción educativa, es decir, no sólo se encarga de verificar el rumbo de la educación sino que, sobre todo, en forma reciente, lo elabora y define, esto es, se constituye en una anticipación de la dinámica educativa propiamente dicha.

La evaluación como *revisión* y *verificación* (por ejemplo, de procesos-resultados, objetivos-logros, insumos-productos) que se privilegia en el contexto educativo y en la cual se moviliza una relación medios-fines, estaría ligada a servir de instrumento o medio que *ratifica, valida y legitima* ciertas orientaciones que se movilizan dentro de los ámbitos económico, jurídico-político y de la ciencia, en que la educación aparecería como uno de los casos en los cuales este ordenamiento se materializa o se exterioriza.

Esta elaboración se inscribe en el señalamiento que hace Foucault (1970) sobre los múltiples procedimientos de control y delimitación del discurso que se vinculan con la voluntad de verdad, los cuales funcionan como sistemas de exclusión y que considera conciernen a la parte del discurso que pone en juego el poder y el deseo. Así, la disciplina, tal como la plantea Foucault (1970, p. 12), se define por “un ámbito de objetos, un conjunto de métodos, un corpus de proposiciones consideradas como verdaderas, un juego de reglas de definiciones, de técnicas y de instrumentos: todo esto constituye una especie de sistema anónimo a disposición de quien quiera o de quien pueda servirse de él, sin que su sentido o su validez estén ligados a aquel que se ha concentrado con ser el inventor”. Este autor ubica la conformación de las disciplinas como uno de los procedimientos internos de control y delimitación del discurso, esto es, procedimientos que “juegan un tanto a título de principios de clasificación, de ordenación, de distribución, como si se tratase en este caso de dominar otra dimensión del discurso: aquella de lo que acontece y del azar” (p. 21).

Por su parte, la evaluación como *anticipación*, que consideramos nos vincula con un nuevo panorama en la que ésta se constituye como un fin en sí misma, en tanto *selecciona, controla y redistribuye* las orientaciones desde las cuales es posible asumir los enunciados sobre los ámbitos señalados en la anterior tendencia.

A partir de lo señalado, se plantea que la evaluación se constituye en un *a priori*—lo cual no negaría la verificación, simplemente se resalta el otro dominio de esta acción—, es decir, la evaluación genera los contenidos, los procesos y marca el derrotero de las temáticas; por tal razón, la evaluación no sería un proceso interior, ni el remate de un supuesto desarrollo, ni el momento en que miramos, sino que se convierte en una precomprensión o un prejuicio¹⁰. Así, se diría que la evaluación no está al final sino que anticipa las prácticas pedagógicas e incluso las prácticas evaluativas de verificación.

Con relación a los directivos, éstos seleccionaron como prioritarias tres políticas: calidad, cobertura (jornada única, grado cero, refrigerio gratis) y democratización/participación (gobierno escolar, participación) —36% en cada uno de estos casos—, le siguen en orden de prioridad la descentralización y la

¹⁰ Las nociones de precomprensión y prejuicio se ubican en la perspectiva hermenéutica —Heidegger y Gadamer—, según la cual “toda interpretación se fundamenta en un *tener previo*, en un *ver previo* y en un *concebir previo*. Lo que equivale a decir que no hay interpretación sin presupuestos” (Barrera, 2000:21). Aclarando, como lo destaca este autor, que “los prejuicios existen como posibilidades múltiples de sentido en las cosas y no son simples velos opacos que la educación y la cultura han interpuesto para cegarnos ante la verdad y de los que habría que liberarse a toda costa”.

evaluación en quinto lugar. El privilegiar estas políticas podría tener que ver con que ellas se vinculan con las funciones administrativas del directivo, en tanto le afectan de manera explícita y directa en su labor.

Por otro lado, es de resaltar que, dentro del análisis de políticas educativas, aspectos como la dotación y el manejo de recursos no se contemplan como significativos. La forma como se reconoce que las políticas tienen que ver en este aspecto es mínima dentro de las instituciones. Sin embargo, esta apreciación contrasta con el hecho de que se reconoce que éste es un factor que tiene alta incidencia en la labor docente, tal como se había mencionado en los aspectos administrativos.

Formación: inicial, posgrado, permanente, en el sitio de trabajo

En los resultados que se describen a continuación, se pretende resaltar una mirada desde la cual cada respuesta alrededor de la formación recibida expresa una expectativa y un ideal de lo que ella representa, es decir, cuando se mencionan aspectos positivos, negativos o ausentes en dicha formación se está hablando desde lo esperable o no de dicha formación y de lo que en cada etapa, de tales procesos formativos, se aspira y considera como apropiado. De esa manera se procuró identificar los aspectos que se resaltan en cada tipo de formación y se trató de identificar los aspectos que en cada uno de ellos se consideran como relevantes, o necesarios a reconocer.

La relación que aquí se intenta bosquejar vincula dos aspectos que resultan centrales en la comprensión y valoración de la dinámica educativa: la percepción de la formación del docente y el tipo de orientaciones y perspectivas –concepciones y posiciones– que se visibilizan en los discursos y prácticas frente a su acción pedagógica. En este sentido, es innegable la injerencia y mediación que se genera entre formación profesional y prácticas pedagógicas, interrelación que, sin ser causal, sí establece unos puntos de encuentro en términos de los diversos imaginarios que se promueven en los procesos educativos.

En términos generales, se aprecia que en la formación inicial se consideran como aspectos relevantes la adquisición de conocimientos, la preparación profesional y el desarrollo de valores; esta última orientación se destaca en este nivel de formación y no ocupa un lugar relevante en los restantes niveles de formación profesional.

Con respecto a la formación de posgrado, el aspecto que se menciona como más relevante tanto por docentes como por directivos es la profundización



y actualización, seguido de la adquisición de conocimientos de la propia disciplina y de otras. Como aspectos que se valoran negativamente o que se mencionan como carencia, están la calidad y exigencia de los programas, la escasa relación teoría-práctica, la poca correspondencia con intereses particulares; la escasa formación investigativa, el bajo nivel de profundización y la carencia de apoyo estatal e institucional para adelantar estos estudios.

En cuanto a la formación permanente se espera que tenga un alto nivel de profundización y actualización, que esté referida especialmente a estrategias metodológicas, didácticas, avances teóricos y de experiencias que estén al día con el trabajo en las instituciones.

Cabe anotar que tanto en la formación de posgrado como en la formación permanente, se reclama contar con mayores niveles de profundización y actualización, ampliar la apropiación de conocimientos, especialmente de carácter disciplinar, didáctico y a nivel de estrategias pedagógicas.

Una de las diferencias que se identificaría entre estos dos tipos de formación es que en la segunda –formación permanente–, se reclama mayor vinculación entre las necesidades y requerimientos cotidianos de docentes y directivos y el aporte que se espera de esta formación, esto es, en los procesos de educación profesional la contextualización se considera como característica central.

Otro aspecto que se reconoce como importante y que comparten estas dos modalidades de formación, el cual no se hace visible en los otros niveles contemplados, es la investigación –orientación que en la actualidad se considera indispensable en la cualificación de la labor docente.

En relación con la formación en el sitio de trabajo, las expectativas están centradas en la contextualización, la adquisición de conocimientos, la profundización y la interlocución, referidos especialmente al ámbito institucional. En este sentido se señala que como los requerimientos de las instituciones tienen un carácter muy específico, la formación tendría que ver con aportes a la solución de problemas concretos e inmediatos. De los aspectos que solamente aparecen en esta modalidad, resalta el liderazgo pedagógico, el cual es reclamado especialmente por parte de docentes. A este nivel es notorio el señalamiento en torno a la necesidad de contar con mayores niveles de coordinación entre las acciones de los docentes, de tal manera que se promueva la construcción de equipos de trabajo con orientaciones comunes en el campo pedagógico y académico.

Llama la atención que un aspecto como el investigativo, que en la actualidad se promueve e intenta afianzar como condición constitutiva de la acción

docente –en tanto se ve como estrategia de profesionalización, al asumir que desde la ciencia se logra mejorar el estatus del maestro a través de la fundamentación de su saber–, para el grupo de docentes y directivos no se ve como importante en esta modalidad de formación, pues no se señaló como proceso que se desarrolla en la institución –valoración positiva o negativa– y tampoco se consideró como una carencia –ausente–.

En este sentido se destaca el cuestionamiento que hace Popkewitz (1992, p. 99) en torno al sentido que recientemente se promueve sobre el rol atribuido al maestro: “el trabajo del profesor, así como su evaluación, se constituye en un elemento clave en los programas de reforma. La discusión vincula la calidad de la enseñanza con las limitaciones de la organización burocrática de la escolarización; desde esta perspectiva el lenguaje de la reforma intenta producir un cuerpo docente más profesional, con un estatus más elevado y con mayores responsabilidades y remuneraciones económicas”.

Estas tendencias subsisten en esfuerzos reformadores actuales, que enlazan el profesionalismo con la mejora escolar. No obstante, muchas de estas alternativas, en últimas, conducen a elevar la carga de trabajo del docente y a fortalecer el nivel de control de sus prácticas. De esta manera, muchas de las acciones evaluadoras del maestro orientadas a “rendir cuentas”, suponen la existencia de una relación directa entre el conocimiento de la evaluación y las prácticas y actuaciones específicas. Este tipo de concepción conduce a valorar de manera significativa los aspectos instrumentales de la enseñanza y a minimizar aquellos afectivos y sociales, que cualitativamente inciden en los procesos educativos.

El énfasis en la llamada “profesionalización” del docente como medio para favorecer la cualificación de la actividad educativa, tal como lo analiza Díaz (1994), es reelaborada por una pedagogía vinculada con el pensamiento pragmático, que enfatiza los aspectos de eficiencia y productividad sobre aquellos que se relacionan con procesos de conocimiento o de desarrollo personal. Esta visión se apoya, de manera implícita, en una serie de postulados de orden económico, en especial en la teoría del capital humano. Esta teoría incorpora a la concepción de la educación dos posiciones centrales: que a mayor educación mayor desarrollo, y que hay una vinculación natural y racional entre demandas laborales y capacitación profesional.

Lo que aquí se empieza a vislumbrar es una situación aparentemente paradójica, pues si bien desde las orientaciones de las reformas educativas y de los procesos de formación que se vinculan con ellas se da la sensación de una transformación de la visión que se tiene del maestro, las múltiples acciones

que se derivan de dichas orientaciones vuelven a instrumentalizar el sentido del rol docente. En este sentido podríamos destacar que el dispositivo educativo juega, ante todo, a la conservación: se muestra como cambio la conservación y en últimas, se niegan las posibilidades de cambio.

De las concepciones y posiciones

Con relación a los énfasis y orientaciones identificadas en la red elaborada¹¹, tanto en lenguaje como en matemáticas, se privilegian en mayor medida *el desarrollo de habilidades y el dominio y aplicación de conocimientos* (véanse Tablas 1 y 2); se destaca que la relación de frecuencias entre estos dos énfasis es inversa a nivel de las dos áreas contempladas en el estudio (Figura 1): mientras para el grupo de docentes de lenguaje resulta más relevante el desarrollo de habilidades comunicativas (17 de los 35), en matemáticas la tendencia de mayor énfasis se ubica en la apropiación de conocimientos impartidos por el docente (29 de los 48).

En términos del abordaje conceptual que orientó el estudio a nivel de las áreas objeto de trabajo, se diría que predominan las precomprensiones del lenguaje (véase diagrama 1) que se fundamentan en las *teorías referenciales* –particularmente desde quienes privilegian el dominio y aplicación de conocimientos impartidos–, *las teorías formales, estructurales y sintácticas* –especialmente desde los enunciados que destacan el desarrollo de habilidades–, y en una proporción menor, el lenguaje sería asumido desde las *teorías pragmáticas* –principalmente quienes enfatizan en el desarrollo de las competencias comunicativas, en la producción de textos en función de intenciones comunicativas, en el desarrollo del pensamiento, en la potenciación de condiciones comunicativas, y en un sentido más fuerte, la producción de mundo cultural y simbólico.

Tabla 1. Énfasis y orientación de los aspectos que se privilegian en las prácticas pedagógicas en el área de Lenguaje: tendencias

ÉNFASIS	FREC.	ORIENTACIÓN	FREC.
1. DESARROLLO DE HABILIDADES COMUNICATIVAS	17	Comunicación efectiva (desde manejo de aspectos gramaticales) Ejercitación (adquisición de la lectoescritura desde dominio)	8

¹¹ El análisis de esta categoría se hizo a partir de la sistematización de los enunciados del grupo de docentes, para lo cual se les solicitó que explicitaran, a través de una red conceptual, aquellos aspectos que dentro de sus prácticas pedagógicas consideran centrales, y las relaciones que entre dichos aspectos se construyen, identificando las prioridades que establecen en el trabajo de cada área.

ÉNFASIS	FREC.	ORIENTACIÓN	FREC.
		de aspectos morfológicos y fonéticos)	3
		Resolución de problemas para la competitividad	1
		Comprensión y expresión (comprensión de la realidad, de textos y aspectos gramaticales)	5
2. DOMINIO Y APLICACIÓN DE CONOCIMIENTOS IMPARTIDOS	8	Comprensión (de contenidos del área y aspectos gramaticales)	1
		Comunicación efectiva (desde el manejo de la gramática)	3
		Ejercitación (en función de reglas gramaticales, dar cuenta de contenidos del área)	4
3. PROMOCIÓN DE ACTITUDES Y VALORES VINCULADOS CON EL APRENDIZAJE Y LA CONVIVENCIA	5	Motivación e interés hacia el aprendizaje y la vida en comunidad	5
4. DESARROLLO DE COMPETENCIAS COMUNICATIVAS	5	Desarrollo de habilidades comunicativas	1
		Uso del lenguaje en situaciones específicas y en diferentes contextos (pragmática)	3
		Interacción y autorregulación	1
		Expresión de potencialidades de los niños (de emociones y experiencias)	1
5. PRODUCCIÓN DE TEXTOS EN FUNCIÓN DE INTENCIONES COMUNICATIVAS	3	Significación y comunicación (uso de lenguaje en de situaciones específicas, expresión, sentimientos y experiencias)	3
		Desarrollo de procesos cognitivos	1
6. PRODUCCIÓN DE MUNDO CULTURAL Y SIMBÓLICO	3	Construcción de sentido y apropiación de la cultura (comunicación y expresión de sentidos)	3
		Proceso de constitución de sujetos	1

7. POTENCIACIÓN DE CONDICIONES COMUNICATIVAS	1	Reconocimiento de la diferencia Recuperación y desarrollo de diferentes formas de comunicación (atenuación de las desigualdades)	1
8. DESARROLLO DE PENSAMIENTO	1	Producción de discursos y elaboración de textos	1
NO RESPONDE	1		

A nivel de las matemáticas, tal como se aprecia en la Tabla 2, se destacarían como precomprensiones predominantes (diagrama 2) los enfoques *logicista* y *formalista*, e incluso el llamado “platonismo”; esta última concepción se destacaría desde los enunciados que privilegian la idea de las matemáticas como un asunto de dominio y aplicación de conocimientos preestablecidos. Las otras dos aparecerían vinculadas con las orientaciones que destacan la apropiación de conceptos de la lógica matemática (logicismo) y a aquellas perspectivas que promueven un manejo riguroso de las demostraciones elaboradas desde la actividad matemática (formalismo).

Lo anterior se hace evidente en el tipo de perspectivas que se destacan como ejes centrales en la manera de asumir cada una de las áreas. Es de aclarar que las visiones que a continuación se analizan no fueron categorizadas como independientes unas de otras. Por tanto, las frecuencias a nivel de énfasis y orientación de las prácticas pedagógicas en estas dos áreas no fueron ubicadas de forma excluyente.

Tabla 2. Énfasis y orientación de los aspectos que se privilegian en las prácticas pedagógicas en el área de Matemáticas: Tendencias

ÉNFASIS	FREC.	ORIENTACIÓN	FREC.
1. DOMINIO Y APLICACIÓN DE CONOCIMIENTOS IMPARTIDOS	29	Manejo de contenidos y relaciones entre ellos	22
		Apropiación de conocimientos/ conceptos adquiridos a partir de la ejercitación	7
		Herramienta práctica para desenvolverse en la cotidianidad	1
2. DESARROLLO DE HABILIDADES	11	Solución de problemas Manejo de contenidos y	4

ÉNFASIS	FREC.	ORIENTACIÓN	FREC.
		relaciones entre ellos	2
		Manejo de operaciones	5
3. DESARROLLO DE PROCESOS COGNITIVOS Y DE PENSAMIENTO	9	Fomento de procesos analíticos y de comprensión	5
		Construcción/ resolución de problemas	2
		Apropiación de conceptos (lógica y estructura de la matemática)	1
		Apropiación/contextualización del proceso educativo	1
		Promoción de operaciones cognitivas y metacognitivas	1
4. PROMOCIÓN DE ACTITUDES Y VALORES VINCULADOS CON EL APRENDIZAJE Y LA CONVIVENCIA	8	Interés y motivación hacia el área	8
5. FORMULACIÓN/ANÁLISIS / SOLUCIÓN DE PROBLEMAS	6	Construcción/ resolución de problemas	5
		Desarrollo de procesos heurísticos	1
6. APROPIACIÓN DE NOCIONES	3	Construcción de conceptos y problemas	3
7. DESARROLLO DE COMPETENCIAS BÁSICAS	2	Construcción y resolución de problemas	2
8. CONTEXTO DE SENTIDO	1	Conexión con la vida	1
NO RESPONDE	1		

Con respecto a las concepciones sobre el lenguaje, para quienes destacan el *desarrollo de habilidades comunicativas* éste es visto como instrumento que posibilita una comunicación efectiva, a partir del manejo de aspectos gramaticales; o como el proceso de adquisición de la lectoescritura desde dominio de aspectos morfológicos y fonéticos, recurriendo para ello a acciones de ejercitación; o como un mecanismo a través del cual se logra la resolución de problemas que se vinculan con los actuales requerimientos en torno a la competitividad de los sujetos en formación; o como comprensión de la realidad, de textos y aspectos gramaticales del lenguaje, que se materializan en unas habilidades comunicativas determinadas (hablar, leer, escribir, escuchar).

En esta precomprensión se podrían ubicar tanto las *teorías formales y estructurales*¹² que consideran que el significado es objetivo y dado por una estructura del lenguaje independiente de los sujetos que son sus usuarios; así como las *teorías intencionales*¹³ que privilegian aquello que el hablante quiere decir o expresar, en una situación dada, entablándose un juego entre hablantes que desean afirmarse a sí mismos y que como lo dice Habermas (1990, p. 110) “el que sus interacciones vengan mediadas por el lenguaje, aparece como algo secundario frente a la capacidad de acción teleológica que los distintos sujetos poseen”; y las *teorías sintácticas*¹⁴ en las cuales se considera que el sentido de una expresión está en el rigor lógico de su construcción, es decir, que de la adecuada estructuración del lenguaje depende el significado de verdad que éste pueda adquirir.

Por su parte, para quienes el trabajo en esta área es un asunto de *dominio y aplicación de conocimientos impartidos*, en su enseñanza se enfatiza en la comprensión de contenidos preestablecidos, especialmente referidos al campo de la gramática, según momentos por los que secuencial y progresivamente transitan los sujetos en formación; en esta orientación también se promueve la ejercitación –en función de manejo de reglas gramaticales– y la comunicación efectiva desde unos parámetros considerados como legítimos en las acciones de manejo del lenguaje.

Por supuesto, en este tipo de visiones el lenguaje es visto como externo a los sujetos, como una materialidad que es aprehensible desde la apropiación de unas herramientas que el docente se encarga de otorgar y que, a su vez, éste ha adquirido desde su experiencia y formación pedagógica. El lenguaje, entonces, sería asumido desde lo que aquí se ha denominado teoría referencial, según la cual éste es una copia fiel del mundo. Por ello, el objeto de investigación no es el lenguaje sino la razón, pues él como tal es objetivo y un instrumento que nombra lo existente. A este nivel se ubicarían las teorías referenciales, es decir, teorías que asumen que lenguaje es el mundo existente, y de ahí que se considere el diccionario como elemento principal, pues aquí se encuentra el significado atribuible a todo aquello que el lenguaje logra describir.

Dentro de esta misma discursividad estaría incluido el énfasis en la *promoción de actitudes y valores vinculados con el aprendizaje y la convivencia*, orientación que aun cuando se ubicó independientemente de las anteriores

¹² Como representantes de estas teorías estructurales se ubicarían a Frege, Russel, Whitehead.

¹³ Son representantes de las teorías intencionales: Dummett, Grice, Bennett y Shiffer.

¹⁴ Un representante de las teorías sintácticas es Rudolp Carnap (neopositivismo de Viena).

–dado el marcado señalamiento hacia la idea de generar acciones para lograr incrementar los niveles de motivación tanto hacia el área como hacia la vida en comunidad–, ésta aparece interrelacionada con las dos perspectivas anteriormente caracterizadas.

Otra de las perspectivas que se identificó y que se considera producto de las discursividades que apenas empiezan a emerger en nuestro contexto educativo, se relaciona con el *desarrollo de competencias comunicativas*; desde este énfasis se privilegian como orientaciones el desarrollo de habilidades comunicativas, el uso del lenguaje en situaciones específicas y en diferentes contextos (pragmática), la interacción y la autorregulación de los sujetos en formación y la expresión de potencialidades de los niños, particularmente a nivel de emociones y experiencias.

Ligada a la anterior, también aparece como énfasis la *producción de textos en función de intenciones comunicativas*, en el que se promueven como orientaciones centrales la significación y comunicación, esto es, el uso del lenguaje en situaciones específicas, la expresión de sentimientos y experiencias de los sujetos en formación y en general, el desarrollo de procesos cognitivos.

Muy próximo a este último aspecto, pero con una visión que amplía la idea de desarrollo cognitivo, se identificó el *desarrollo de pensamiento*, asumido como producción de discursos y elaboración de textos, que tan sólo aparece en uno de los casos.

Estas precomprensiones se vincularían con las teorías que no se asumen como objetivistas ni como subjetivistas, sino que, como lo menciona Habermas (1990, p. 114) citando a Wittgenstein descubren “el carácter de acción que tienen las emisiones lingüísticas”, pues no sólo tienen significado en tanto acción unida al lenguaje, sino que adquieren una dinámica diferente que va construyendo nuevos sistemas de relación entre el conjunto de emisiones lingüísticas y actividades no lingüísticas, lo que Wittgenstein llama: “juegos de lenguaje”. Para que éstos se produzcan, se requiere que exista una forma de vida compartida entre sujetos, y por ello es posible hablar de intersubjetividades que se regulan a través de los diferentes elementos puestos en escena, esto es, en su uso.

Desde estas teorías se señala que el lenguaje es una forma de vida, que la cultura es un sitio de tensiones donde los acuerdos o desacuerdos se dan como usos del lenguaje y son posibles por un marco de referencia compartido (Wittgenstein). Son las teorías llamadas pragmatistas¹³ que consideran el lenguaje como productor de mundo. Por tanto, sus límites vienen dados por los límites

¹³ Son representantes de las teorías pragmatistas: Wittgenstein, Austin, Searle, Habermas.

del lenguaje, y hablar de lenguaje en una comunidad es hablar de que un grupo construye y comparte lenguaje. Bajo estos presupuestos el lenguaje es el estudio de nuestro ser, de cómo construimos identidades en tanto es el lugar desde donde se generan significados.

Así el lenguaje no es visto como un instrumento sino como un entretejido de una práctica interactiva en la que se refleja al tiempo que se produce una forma de vida. Aquí el significado no está dado ni por la estructura del lenguaje, ni por la intención del hablante; está dado por el uso. Esta perspectiva se hace explícita –desde una posición aún minoritaria– en la asunción del trabajo docente en el área de lenguaje como *producción de mundo cultural y simbólico*, desde la cual el lenguaje da lugar a una dinámica de construcción de sentido y apropiación de la cultura, en la que se favorecería la comunicación y expresión de sentidos, así como el reconocimiento de que en esta producción lo que está en juego es un proceso de constitución de sujetos y de reconocimiento de la diferencia.

También como un caso particular, se identificó el énfasis en la *potenciación de condiciones comunicativas*, en el cual se destaca la idea de recuperación y desarrollo de diferentes formas de comunicación como una manera de lograr la atenuación de las desigualdades, especialmente provenientes de condiciones físicas que dan lugar a necesidades educativas especiales.

En el campo de las matemáticas, de manera semejante, se han identificado como perspectivas predominantes (Tabla 2, diagrama 2): las matemáticas son un asunto *de dominio y aplicación en función de los conocimientos impartidos por el docente* (por tanto se enfatizará en el manejo de contenidos y sus relaciones, la apropiación de conceptos adquiridos a partir de la ejercitación y se le verá como una herramienta práctica y útil para desenvolverse en la cotidianeidad) y *el desarrollo de habilidades* (énfasis que destaca la apropiación de herramientas que favorezcan tanto el manejo de contenidos y las relaciones que los vinculan, como el dominio de operaciones y la solución de problemas).

La precomprensión que se podría vincular con esta discursividad sería la *Logocéntrica*¹⁶, en la cual se privilegia una visión de mundo basada en discursos producto de la racionalización. En este sentido, se diría que tanto la filosofía moderna como las ciencias humanas se desarrollan como discursos cuya finalidad es lograr una mirada unificadora (logos-razón) y explicativa de un sinnúmero de acontecimientos y procesos en las más diversas esferas (economía, política, ciencia, moral, derecho, arte, etc.). Discurso, que se podría considerar

¹⁶ Esta categorización conceptual fue elaborada conjuntamente con el equipo asesor del proyecto.

hegemónico en el período comprendido entre el siglo XV al XX, y que describe la modernidad como una realidad fundada en un Sujeto como su autor, un proceso caracterizado por ser unitario, homogéneo, teleológico, progresivo, crítico y en cierta medida, emancipatorio. Dentro de esta gran tendencia se ubicarían los llamados logicismo, formalismo e intuicionismo (Diagrama 2).

La caracterización que se establece en los “Lineamientos curriculares para el área de matemáticas” de estas orientaciones, muestra cómo, desde el *platonismo*¹⁷, las matemáticas son asumidas como un sistema de verdades que siempre han existido y son independientes del hombre; y aunque éste ha tenido que ver con las propiedades descubiertas, se piensa que “las matemáticas trascienden la mente humana, y existen fuera de ella como una ‘realidad ideal’ independiente de nuestra actividad creadora y de nuestros conocimientos previos” (MEN. 1998, p. 22). La tarea del matemático es, entonces, descubrir esas verdades matemáticas, pues se considera que está “sometido” a ellas y las debe obedecer.

La concepción *logicista*, por su parte, plantea que las matemáticas son parte de la lógica, que comparten un mismo origen y método y por tanto, constituyen una disciplina universal que regiría todas las formas posibles de argumentación. Así, los conceptos de la matemática tendrían que ser definidos desde las categorías de la lógica, mediante el empleo de deducciones lógicas (logificación de las matemáticas).

Desde esta corriente se asumiría que existen dos lógicas que se excluyen mutuamente: la deductiva y la inductiva. La primera de ellas busca la coherencia entre ideas y parte de premisas generales para llegar a conclusiones particulares; la segunda, busca la coherencia de las ideas con el mundo real y parte de observaciones particulares para lograr conclusiones generales que se van refinando a partir de evidencias empíricas.

La tercera concepción, el *formalismo*, por su parte, reconoce que las matemáticas son una creación humana, la cual se conforma de “axiomas, definiciones y teoremas como expresiones formales que se ensamblan a partir de símbolos, que son manipulados o combinados de acuerdo con ciertas reglas o convenios preestablecidos” (p. 24). En la actividad matemática, luego de fijadas las reglas, no se admite la imprecisión; las demostraciones han de ser rigurosas y basadas exclusivamente en el juego lógico deductivo predefinido, independientemente de las imágenes que se asocien con los términos y las relaciones; así, aquí lo que cuenta es la coherencia con las reglas del juego simbólico respectivo.

¹⁷ Visión que se correspondería con la llamada teoría referencial caracterizada para el caso del lenguaje.

**Diagrama 1. Aproximación a las precomprensiones en el campo del lenguaje
(Teoría del significado como lugar estratégico)**

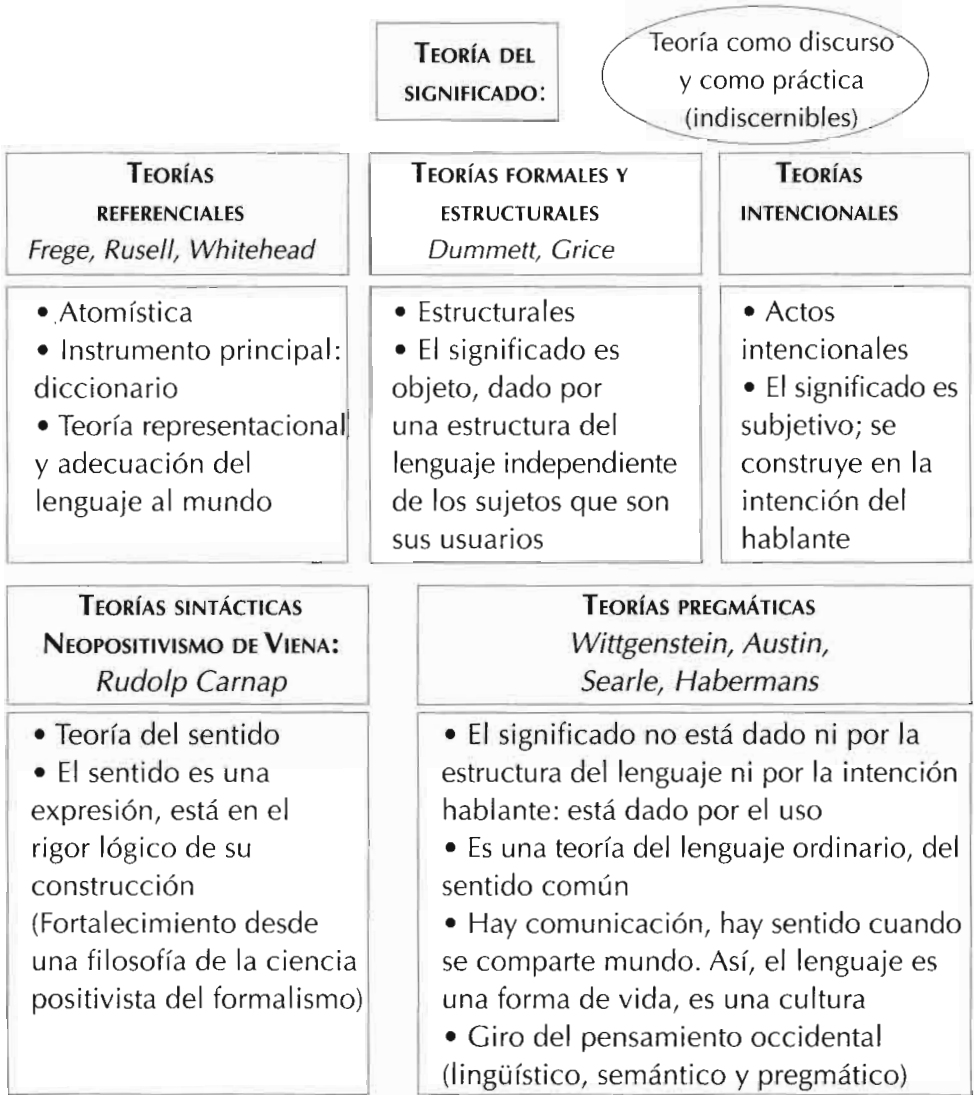
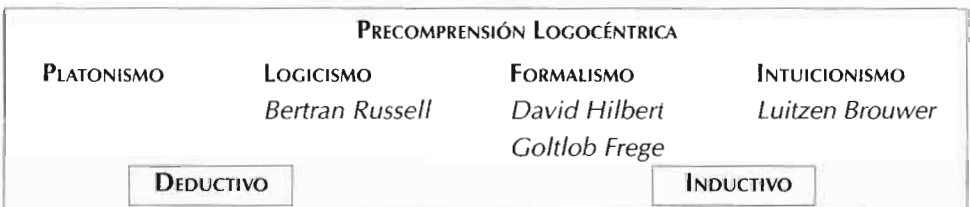
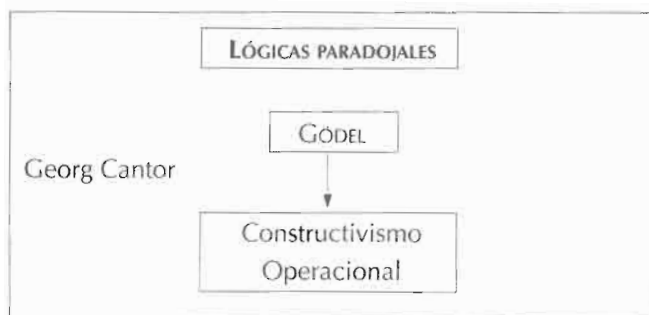


Diagrama 2. Aproximación a las precomprensiones en el campo de las matemáticas





La corriente llamada *intuicionismo*, considera que las matemáticas son producto de una construcción humana a partir de la percepción proveniente de los sentidos. Las matemáticas, por tanto, "han de partir de lo intuitivamente dado, de lo finito, y sólo existe lo que en ellas haya sido construido mentalmente con ayuda de la intuición" (p. 24). Desde esta concepción, autores como Brouwer señalan que en matemáticas la idea de existencia es sinónimo de constructibilidad y que la idea de verdad es sinónimo de demostrabilidad; de tal manera que un enunciado matemático se considera verdadero cuando se tiene una prueba constructiva de él.

La otra precomprensión, producida a partir de las transformaciones en la visión de conocimiento y de ciencia, se ubicaría en las *lógicas paradójales*, en las cuales la razón dualista, dilemática y discriminadora, empieza a perder protagonismo y entra en emergencia una razón dialógica, pragmática, múltiple, hermenéutica. Así, las nítidas fronteras que el imaginario moderno construyó entre lo racional y lo irracional; lo verdadero y lo ideológico; lo culto y lo popular; lo original y lo imitativo; lo bello y lo feo; lo culto y lo divertido; lo femenino y lo masculino; lo adulto y lo joven etc., están abandonando su rigidez delimitante y delimitadora.

En esta dirección se ubicaría el *constructivismo*, que en el presente abordaje es asumido desde el llamado *constructivismo operativo*, o como lo denomina Watzlawick (1998) *radical*, para diferenciarlo de la teoría de la relatividad de Einstein (las observaciones son relativas al punto de referencia del observador) y del principio de incertidumbre de Heisenberg (la observación influye en lo observado) y en el cual se parte de la interdependencia entre observador y mundo observado.

Este abordaje en el campo de las matemáticas se identifica como próximo al intuicionismo –formulado así en el documento de Lineamientos curriculares (MEN, 1998, p. 25)–, pues también éstas son vistas como creación humana, pues "únicamente tienen existencia real aquellos objetos

matemáticos que pueden ser contruidos por procedimientos finitos a partir de objetos primitivos”.

En esta concepción se ubicarían las posiciones de los docentes que enfatizan en el *desarrollo de procesos cognitivos y de pensamiento*, en las cuales se destaca el fomento en procesos analíticos y de comprensión, la construcción y resolución de problemas, la apropiación de conceptos –particularmente basados en la lógica y estructura de las matemáticas–, la contextualización del proceso educativo y la promoción de operaciones cognitivas y meta-cognitivas.

En general, se podría decir que la conjunción de estas orientaciones se relaciona con unas visiones que en el contexto macro se han producido como reguladoras de la acción social, política, económica, cultural y educativa. La escuela, desde su visión moderna, ha sido constituida por –y podríamos decir que también sigue siendo constituyente de– un proyecto que intenta fundar una jerarquía social basada en la competencia –y no en el origen social, como ocurrió en otras épocas– y que ha jerarquizado los conocimientos de acuerdo con su nivel de abstracción o formalización¹⁸.

En cuanto a las concepciones y posiciones en torno a las prácticas evaluativas, se optó por identificar las diferentes discursividades de los docentes de las dos áreas, procurando generar un amplio espectro de perspectivas a nivel de este campo; no obstante, también resulta inevitable identificar tendencias comunes en función de unas finalidades y unos objetos que se privilegian cuando se intenta dar cuenta de las realizaciones de los estudiantes (Tabla 3).

Tabla 3. Cuadro comparativo de las orientaciones en las posiciones frente a la evaluación en las áreas de Lenguaje y Matemáticas

Posiciones	Objetos de la Evaluación			
	LENGUAJE	FREC.	MATEMÁTICAS	FREC.
Disciplina (Moldes)	Conocimientos/ Hábitos	9	Conocimientos/ Hábitos	25
Control (Modulación)	Conocimientos/ Habilidades/		Conocimientos/ Habilidades/	

¹⁸ En este sentido, tal como lo destaca Touraine (1998: 276), refiriéndose a Francia, “aún hoy se mantiene la idea de que las matemáticas son superiores a las ciencias experimentales, y éstas a las ciencias de la observación. Por el lado de las ‘letras’, la filosofía ocupa la cumbre de una jerarquía imaginaria de la que las humanidades representan los escalones intermedios y las ciencias sociales el nivel inferior”.

Posiciones	Objetos de la Evaluación			
	LENGUAJE	FREC.	MATEMÁTICAS	FREC.
Autorregulación (Automodulación)	Actitudes/ Competencias	17 7	Actitudes Procesos Cognoscitivos/ Competencias	16 4
	Producción de sentido	Procesos cognitivos, emocionales y sociales	—	
Subjetivación y resistencia	Constitución de Sujeto	1 1	—	
No responde	—			3

Con relación a la evaluación vista como *disciplina* –tendencia que en las dos áreas aparece como la más frecuente–; se asume que los objetos a evaluación a privilegiar, tanto en lenguaje como en matemáticas, son los conocimientos específicos del área, así como los hábitos y comportamientos considerados como propios de un sujeto vinculado con un proceso educativo. En función de esta perspectiva se considera que la finalidad última de la acción evaluativa se centra en verificar, afianzar o constatar los conocimientos y habilidades requeridos en el área; diagnosticar y medir los aprendizajes para favorecer la toma de decisiones; identificar y establecer un conocimiento objetivo de las condiciones del estudiante; mejorar los procesos educativos, particularmente lograr la cualificación y adecuación de la práctica docente, así como el control de aprendizajes y desempeño de maestros y alumnos; detectar y hacer seguimiento a las fortalezas y debilidades; autoformación; reconocer la utilidad del conocimiento, eficiencia y eficacia; retroalimentar en función de logros preestablecidos; retroalimentar procesos y contenidos. En estas distintas orientaciones se privilegia, como instrumento, la observación de los aprendizajes adquiridos a través de diferentes medios: apreciación de formas de expresión de los sujetos, para el caso del lenguaje, y solución de problemas, experimentación o ejercitación para el caso de las matemáticas.

En cuanto a la segunda tendencia identificada con mayor frecuencia, según la cual la evaluación se asume como *Control*, los objetos que se destacan en la acción evaluativa en lenguaje y en matemáticas son: conocimientos, habilidades, destrezas, capacidades, actitudes, valores, comportamientos y com-

petencias. Al igual que en la anterior tendencia, los instrumentos a través de los cuales se establece la valoración de los aprendizajes se basan en la observación de las apropiaciones de los estudiantes. El matiz que aquí aparecería se vincularía con la tendencia a hacer de esta observación una acción constante, minuciosa y sistemática, ya sea de los conocimientos, habilidades, actitudes, competencias, y en general de los múltiples aspectos que se consideran forman parte de aquello de lo que se ha de dar cuenta en la dinámica educativa: desempeños, rendimiento, metodologías, didácticas, manejos administrativos.

En el presente estudio, las anteriores visiones se relacionan desde una contextualización histórica, con la descripción de las llamadas sociedades modernas de disciplina, condición que es caracterizada por Foucault (1990a), desde la configuración de un dispositivo disciplinario en el que se entrecruzan el saber y el poder, y que se hace visible en lo que el autor denomina el Panoptismo¹⁹.

Según Deleuze (1987, p. 60) “cuando Foucault define el panoptismo, unas veces lo determina concretamente como un agenciamiento óptico o luminoso que caracteriza a la prisión, otras lo determina abstractamente como una máquina que no sólo se aplica a una materia visible en general (taller, cuartel, escuela, hospital en tanto que prisión), sino que en general también atraviesa todas las funciones enunciables. La fórmula abstracta del panoptismo ya no es, pues ‘ver sin ser visto’, sino imponer una conducta cualquiera a una multiplicidad humana cualquiera. Sólo es necesario que la multiplicidad considerada sea reducida, incluida en un espacio restringido, y que la imposición de una conducta se realice por distribución en el espacio, ordenación y seriación en el tiempo, composición en el espacio-tiempo...”

Este dispositivo se vincula con la noción de diagrama, el cual se caracterizaría por ser una multiplicidad espacio-temporal, ser variable e inestable, y ser intersocial, esto es, está en devenir, no representa un mundo preexistente, sino que produce un nuevo tipo de realidad, un nuevo modelo de verdad y se

¹⁹ La idea de panóptico proviene de la figura arquitectónica instaurada en las cárceles, la cual es descrita y analizada por Foucault (1990a: 203-204), otorgándole un sentido que amplía su concepción material: “Conocido es su principio: en la periferia, una construcción en forma de anillo; en el centro una torre, ésta, con anchas ventanas que se abren en la cara interior del anillo. La construcción periférica está dividida en celdas, cada una de las cuales atraviesa toda la anchura de la construcción. (...) Basta entonces situar un vigilante en la torre central y encerrar en cada celda a un loco, un enfermo, un condenado, un obrero o un escolar (...). Tantos pequeños teatros como celdas, en los que cada actor está solo, perfectamente individualizado y constantemente visible. El dispositivo panóptico dispone de unas unidades espaciales que permiten ver sin cesar y reconocer al punto. En suma, se invierte el principio del calabozo; o más bien de sus tres funciones –encerrar, privar de luz y ocultar–; no se conserva más que la primera y se suprimen las otras dos. La plena luz y la mirada de un vigilante captan mejor que la sombra, que en último término protegía. La visibilidad es una trampa”.

configuraría de distinta forma en cada momento histórico, de tal forma que existirían diversas maneras de ejercicio de poder –unas fuerzas se ejercen sobre otras fuerzas.

Así, en el caso de la sociedad disciplinaria, el dispositivo panóptico se constituiría, siguiendo el análisis de Foucault (1990a, p. 206), en “una máquina maravillosa que, a partir de los deseos más diferentes, fabrica efectos homogéneos de poder. Una sujeción real nace mecánicamente de una relación ficticia (...) El que está sometido a un campo de visibilidad, y que lo sabe, reproduce por su cuenta las coacciones del poder; las hace jugar espontáneamente sobre sí mismo; inscribe en sí mismo la relación de poder en la cual juega simultáneamente los dos papeles; se convierte en el principio de su propio sometimiento”.

A nivel de la tercera orientación, la evaluación como *autorregulación*, ésta aparece orientada, tanto en lenguaje como en matemáticas, a la producción, argumentación, flexibilización, resolución de problemas, autoformación, apropiación, desarrollo de competencias, valoración de procesos cognitivos, autoevaluación, reconocimiento de la diferencia. Los objetos de evaluación que se privilegian son los procesos cognoscitivos, habilidades, competencias (pragmática, lingüística, comunicativa, en el caso de lenguaje) y los instrumentos adquieren un carácter más cualitativo: la argumentación, la observación de formas de expresión, la producción y realizaciones de los estudiantes, confrontación y diálogo con las perspectivas de los estudiantes, didácticas que interrelacionan enseñanza y evaluación.

Como se verá, existen vínculos entre esta posición y la anteriormente caracterizada –evaluación como control–; sin embargo, la diferenciación que aquí se ha establecido se vincula con el marcado énfasis que se hace en favorecer los procesos autónomos, en los que los sujetos se vuelven responsables y entran a formar parte del dispositivo de evaluación. Este dispositivo se asume como mecanismo que favorece el seguimiento de los procesos y cambios ocurridos en los sujetos a partir de la intervención generada desde el proceso educativo; la detección de fortalezas y debilidades desde unos presupuestos que determinan qué aspectos son deseables y cuáles indeseables; la obtención de información que permita valorar la efectividad de la acción de los agentes educativos en la vía de adecuar y mejorar la dinámica educativa; la generación de acciones evaluativas continuas y multidimensionales –en torno a condiciones cognitivas, afectivas, comportamentales– en aras de favorecer la cualificación gradual de los desempeños de los sujetos en formación. Como una de las finalidades que empieza a imperar en esta discursividad, se destaca la autorregulación como



estrategia que posibilita el que los sujetos adquieran las herramientas para un desempeño exitoso en función de las exigencias que hoy se le plantean tanto a los sujetos en formación como a las instituciones encargadas de prepararlos.

Las nociones de molde y modulación que se ubican como parte de las dos primeras posiciones, pretenden mostrar justamente el tránsito que se estaría produciendo desde una sociedad disciplinar hacia una sociedad de control, en la que se reconocería la metáfora de la automodulación como parte de un proceso modulador.

Desde este tipo de orientaciones, la naturaleza del conocimiento ya no tiene un valor de uso formativo para los individuos, sino un valor de cambio como componente de las mercancías: el conocimiento se empaqueta, se distribuye; en esa medida se considera que sólo es conocimiento aquella información con la cual se puede hacer algo (sentido tecnocrático-tecnológico).

Así, el eslabonamiento entre competitividad, éxito y evaluación aparece cada vez más visible y explícito en las discursividades analizadas, lo cual daría cuenta de una visión en la que la educación aparece orientada hacia la llamada vida activa. Es evidente, entonces, que entramos a formar parte de una sociedad poscapitalista, en la que el conocimiento se asume desde el hacer, donde éste ocupa el lugar central de la productividad; los trabajadores que lo distribuyen son el grupo dominante, en un nivel inferior estarían quienes prestan servicios. Desde esta perspectiva, la educación no está centrada en el individuo sino en la sociedad.

A partir del panorama estructurado para dar cuenta de las concepciones y posiciones identificadas en los enunciados de docentes y directivos, es posible señalar que al contrastar las prácticas pedagógicas con las prácticas evaluativas se vislumbra que el campo de innovación y transformación en cuanto a las primeras se ha ampliado, mientras que el reducido espectro en las segundas se sostiene: las prácticas alternativas e innovadoras han revisado el concepto de proceso pedagógico, pero muy poco el de evaluación. Esto significa que las orientaciones que tradicionalmente se han privilegiado en el contexto escolar en torno a la evaluación siguen teniendo un peso muy fuerte en el imaginario de docentes, directivos e incluso de los estudiantes.

Con relación a una de las hipótesis del presente estudio, se verá que la noción de evaluación como anticipación se vincula y se vuelve equivalente con la de la evaluación como revisión, disciplina y control –en los márgenes aparece la autorregulación–. El lugar de la ruptura y la experimentación aparece aún como un asunto tangencial. Por ejemplo, la evaluación como reconstruc-

ción de un camino, o el lenguaje como producción de mundo simbólico, o las matemáticas como construcción de sentido, son visiones aún incipientes.

Sin embargo, aun cuando se reconoce que todavía están muy afianzadas aquellas visiones según las cuales el conocimiento se ve como representación, el lenguaje como instrumento y la educación como transmisión, también se considera que no hay una condición estable en torno a la visión de lo pedagógico. Ella no se asume como inmanente, como una esencia o una sustancia que resulte inmodificable e invariable; en las orientaciones discursivas en emergencia se aprecian momentos, procesos, híbridos, heterogeneidad.

Bajo esta perspectiva, en la presente investigación no se partió de una posición maniqueísta en la que los maestros constructivistas se consideran los deseables, y los transmissionistas se ven como los indeseables. En este contexto, se dirá que el transmissionismo no está vinculado con las prácticas del maestro como algo esencial. Éste es un momento dentro de un proceso históricamente constituido y constituyente, donde se producen variaciones, interjuegos, movilizaciones. Esta alternancia es justamente la que favorece la irrupción del acontecimiento, la generación de nuevas visiones de conocimiento, educación, evaluación y, en general, de procesos de constitución de los sujetos.

Tomando en consideración esta diversidad, podríamos señalar que coexistirían tres grandes tendencias en la asunción de las prácticas pedagógicas y evaluativas: una en la que se favorecen las rutinas preestablecidas, los hábitos estereotipados, las acciones formativas basadas en “el deber ser”, en las que no se abre espacio para la problematización. Esta tendencia formaría parte del llamado paradigma de la simplificación, una precomprensión en la que la práctica pedagógica promovida se centra en la adquisición de conocimientos impartidos y el desarrollo de habilidades –incluso podríamos ubicar aquí las visiones instrumentales de las competencias–, y en la que la evaluación se asume como revisión de aprendizajes predeterminados. Por supuesto, es de esperar que tanto maestros como alumnos no se vean como sujetos que activamente pueden construir múltiples horizontes de sentido sobre su existencia.

Este paradigma de simplificación, ante cualquier complejidad conceptual, prescribe o bien la reducción –unificación de lo que es diverso–, o bien la disyunción –separación de lo que está ligado–. Tal como lo analiza Morín (1992, p. 221) “el paradigma no decide el tema, pero decide la alternativa y excluye cualquier tercera posibilidad. Así, todas las alternativas temáticas que se presenten en el campo científico son impuestas por la disyunción de un



paradigma simplificador²⁰, que hace absurda cualquier conjunción entre términos antinómicos”.

Para este autor, el paradigma, en tanto virtual, es total e inevitablemente inconsciente e invisible en la concepción clásica; cree que el conocimiento científico es el espejo de lo real, e ignora que toda teoría obedece a un núcleo no empírico y no verificable: el paradigma es invisible para cualquier pensamiento simplificante, pues éste no ve más que lo empírico y lo lógico allí donde está lo paradigmático. Lo que implica que el paradigma de simplificación escapa a cualquier aprehensión por el pensamiento simplificante que él genera. “El paradigma de la ciencia clásica no permite tomar consciencia de la noción del paradigma” (p. 242).

Una segunda tendencia, en la cual se abre lugar a la experimentación, se flexibilizan los roles, se trastocan los imaginarios de escuela, maestro y alumno, y se posibilita el espacio para la problematización e incluso para cierto nivel de incertidumbre, da lugar a concepciones en torno a la práctica pedagógica en las que se destacará el desarrollo de procesos cognitivos y de pensamiento y la potenciación de condiciones de partida de los sujetos en formación. En el plano de la evaluación, la posición que se asociaría con este tipo de perspectivas, sería la de ser mecanismo de autorregulación. Se podría identificar a este nivel con la tensión del paradigma dominante, en la que se abren condiciones de transformación paradigmática.

En este sentido, Morin (1992) identifica la revolución paradigmática como aquella que depende de condiciones históricas, sociales y culturales, que aun cuando ninguna consciencia podría mandar, sí tiene que ver con una revolución propia de la consciencia, la cual comporta el reconocimiento de la existencia, la realidad y el poder del paradigma. Al respecto, el autor señala que “el agotamiento de la confirmación, la irrupción no reprimida de los datos o argumentos que contradigan sus leyes es lo que crea las condiciones previas para una revolución paradigmática. Así, hoy el orden soberano absoluto está en crisis, e intenta salvarse haciéndose soberano constitucional, tolerando aquí y allá desórdenes menores, estadísticamente absorbibles o localmente aislables” (pp. 223-224).

²⁰ Según Morín, la ciencia clásica va a obedecer al gran paradigma de Occidente al decretar un paradigma de simplificación propio, apto para establecer una visión determinista perfecta de un universo que obedece a unas cuantas grandes leyes impecables. “La ciencia debe sustituir lo visible complicado por lo invisible simple”, según la formulación que Jean Perrin seguía creyendo pertinente mediado este siglo.

Una revolución paradigmática ataca evidencias, lesiona intereses, suscita resistencias que se confunden –para quienes están sometidos a él– con la evidencia lógica y empírica. Como lo plantea este autor, lo que se ve conmovido y con riesgo de hundirse es todo el edificio, toda la estructura del sistema de pensamiento; incluso se ve amenazado todo el orden social. Así, todas las teorías, ideas o enunciados incompatibles con el paradigma aparecen como contrarias a la lógica, delirantes o absurdas.

Aparentemente, nada podría resultar más simple o elemental que cambiar las bases de un razonamiento o una teoría, las relaciones asociativas o jerárquicas entre conceptos. Sin embargo, eso es lo más difícil, pues la estructura del razonamiento y la teoría dependen de esos conceptos iniciales y de sus relaciones asociativas; por tanto, no hay nada más difícil que modificar el concepto angular, el principio masivo que sostiene todo el edificio intelectual. Se pueden cambiar fácilmente las variables, lo cual no afecta para nada a los parámetros de un sistema dado, pero muy difícilmente los parámetros –es decir, los términos que definen el sistema–, y más difícilmente aún el principio que determina los parámetros²¹. En este sentido, una revolución paradigmática cambia nuestro mundo: “es una transformación del modo de pensamiento, del mundo del pensamiento y del mundo pensado. Cambiar de paradigma es a la vez cambiar de creencia, de ser y de universo” (Morín. 1992, p. 237).

En otro de sus trabajos este autor (1993, pp. 202-203) destaca que “la reforma de pensamiento necesitaría de una reforma de la enseñanza (primaria, secundaria, universitaria) que así mismo necesitaría de la reforma de pensamiento. Naturalmente, la democratización del derecho a pensar necesitaría de una revolución paradigmática que permitiera a un pensamiento complejo reorganizar el saber y conectar los conocimientos hoy encerrados en las disciplinas. Una vez más, comprobamos la inseparabilidad de los problemas, su carácter circular, dependiendo todos unos de otros, lo que hace que la reforma de pensamiento sea mucho más difícil y, al mismo tiempo, mucho más necesaria, puesto que sólo un pensamiento complejo podrá considerar y tratar esa circularidad interdependiente”.

Ahora bien, las dos tendencias identificadas no se estarían caracterizando como excluyentes u opuestas, ni como constitutivas del discurso de un grupo

²¹ Como lo plantea Bourguignon (1981), citado por Morín (1992, p. 239): “Si, para la física, un cambio de principio universal trae consigo un cambio del mundo entero, para las ciencias del hombre, un cambio semejante trae consigo un cambio del hombre en su totalidad. El mundo exterior no es insensible a nuestras actividades epistémicas, pues estas actividades “pueden hacer que los dioses desaparezcan para ser sustituidos por montones de átomos en el espacio vacío (Feyerabend)”



de agentes de la educación. Éstas coexisten simultáneamente e incluso en un mismo sujeto dan lugar a entrecruzamientos. Tampoco se estaría asumiendo que tales concepciones son un asunto de escogencia voluntaria y autónoma. Particularmente, estas dos tendencias podrían ser relacionadas con unas orientaciones macro que se producen en un momento histórico particular y que atienden a la tensión producida por diversas perspectivas que pretenden homogeneizar el discurso en el campo social y educativo.

Por su parte, en una tercera tendencia, se ubicarían las concepciones en las que se abre espacio para la ruptura, la fisura del paradigma dominante y se empieza a generar las condiciones para la emergencia de nuevo(s) paradigma(s). En el campo de las concepciones, la acción pedagógica se asume como posibilitadora de la construcción del mundo cultural y simbólico de los sujetos en formación, y, consecuentemente, la evaluación es vista como producción de sentido y como subjetivación y resistencia. A este nivel se plantean múltiples problematizaciones sobre el sentido del proceso educativo y sobre las nuevas condiciones que se vislumbran en torno a los procesos de constitución de los sujetos en el marco de un ordenamiento político, social y cultural en constante transformación.



BIBLIOGRAFÍA

ARENDRT, Hannah (1993). *La Condición Humana*. Barcelona. Paidós.

BAENA, Luis Ángel (1989). "El lenguaje y la significación". En: *Revista Lenguaje*, N° 17. Cali. Universidad del Valle.

BALL, Stephen (1994). *La micropolítica de la escuela. Hacia una teoría de la organización escolar*. Barcelona. Paidós.

BARRERA, Julio César. (2000). "El horizonte filosófico de la comprensión en Hans-Georg Gadamer". En: *Cuadernos de Filosofía Latinoamericana*. N° 78-79, enero-junio. Bogotá. Universidad Santo Tomás.

BUSTAMANTE, Guillermo. (1997). "Acerca de los instrumentos de factores asociados, aplicados por el Sistema Nacional de Evaluación de la Calidad de la Evaluación". En: *Revista Evaluación Escolar*. N° 3-4. Red de docentes investigadores en educación. Santa Fe de Bogotá.

BUSTAMANTE, Guillermo y CAICEDO, Lilian. (1998). *Construcción social de la evaluación*. Documento inédito.

CORAGGIO, José Luis (1995). Las propuestas del Banco Mundial para la Educación: ¿Sentido oculto o problemas de concepción? Ponencia presentada en el Seminario "O Banco Mundial e as Políticas de Educação no Brasil" organizado por Ação Educativa. Sao Paulo. Junio 28-30.

DELEUZE, Gilles. (1987) *Foucault*. Barcelona. Paidós Studio.

_____ (1995). "¿Qué es un dispositivo?". En: *Michel Foucault, Filósofo*. Varios autores. Barcelona. Gedisa Editorial.

_____ (1996) *Conversaciones*. Valencia. Pre-textos.

DÍAZ BARRIGA, Ángel. (1993) *El examen: textos para su historia y debate*. México. Universidad Nacional Autónoma de México.

_____ (1994) *El Currículo Escolar, surgimiento y perspectivas*. Argentina. Aiqué.

DÍAZ, Olga y ORDÓÑEZ, Carlos. (1998). *Estudio sobre los conceptos y enfoques de la evaluación pedagógica y educativa*. Santa Fe de Bogotá. IDEP.

FOUCAULT, Michel. (1970). *El orden del discurso*. Barcelona. Tusquets.

_____ (1990a). *Vigilar y castigar*. México. Siglo XXI.

_____ (1990b). *La arqueología del saber*. México. Siglo XXI.

_____ (1991a). *El sujeto y el poder*. Bogotá. CARPE DIEM Ediciones.

_____ (1991b). *Historia de la Sexualidad. Tomo 1 – La voluntad de saber*. México. Siglo XXI.

_____ (1994). *Hermenéutica del sujeto*. Madrid. La Piqueta.

JURADO, Fabio. (1996). Lenguaje, Literatura y Educación. Ponencia presentada en el evento de Socialización del Programa Red de Formación Permanente de Docentes. Santa Fe de Bogotá.

HABERMAS, Jürgen. (1989). *Ciencia y técnica como ideología*. Madrid. Tecnos.

_____ (1990). *Pensamiento Posmetafísico*. Madrid. Taurus Humanidades.

MARÍN, Luis Fernando. (1997). "Educación para la democracia (Del espacio académico al proyecto pedagógico)". En: Revista *Evaluación y cultura escolar*. No. 2. Red de docentes investigadores en educación. Santa Fe de Bogotá.

_____ *Ensayos sobre los Nuevos Paradigmas de la Educación, la Cultura y la Democracia* (Documento inédito).

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. (1993). *SABER –Sistema Nacional de Evaluación*. Santa Fe de Bogotá. Colección Avances de SABER, N°1.

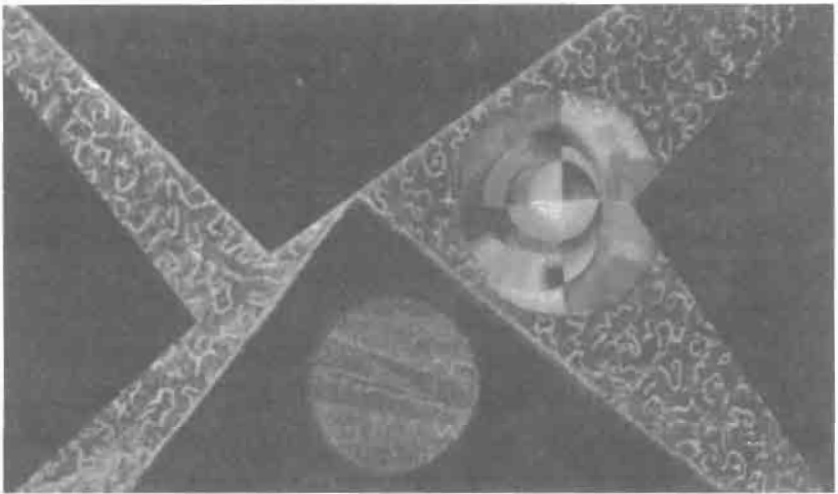
- _____ (1994). Decreto 1860.
- _____ (1994). Ley General de Educación.
- _____ (1996). Resolución 2343 de junio 5 de 1996.
- _____ (1997). *La evaluación en el aula y más allá de ella. Lineamientos para la educación preescolar, básica y media*. Santa Fe de Bogotá. Serie Documentos de Trabajo.
- _____ (1997). *Tercer Estudio Internacional de Matemáticas y Ciencias (TIMSS-Colombia). Diseño, Metodología y Resultados General*. Santa Fe de Bogotá. Serie Publicaciones para Maestros.
- _____ (1998). Decreto Número 272 de febrero 11 de 1998.
- _____ (1998a). *Lineamientos curriculares. Áreas obligatorias y fundamentales: Matemáticas*. Santa Fe de Bogotá. MEN-Magisterio.
- _____ (1998b). *Lineamientos curriculares. Áreas obligatorias y fundamentales: Lengua Castellana*. Santa Fe de Bogotá. MEN-Magisterio.
- MEN –ICFES. (1997). Sistema Nacional de Evaluación de la Educación: Evaluación de logros en las áreas de Lenguaje y Matemáticas. Resultados en los grados 3º, 5º, 7º y 9º entre 1992 y 1994. Santa Fe de Bogotá. Serie Publicaciones para Maestros.
- MORÍN, Edgar. (1992). "El Método". Tomo IV. *Las ideas*. Madrid. Cátedra.
- _____ y KERN, Anne Brigitte. (1993). *Tierra- Patria*. Buenos Aires: Kairós.
- _____ (1994). *Introducción al pensamiento complejo*. Barcelona. Gedisa.
- _____ (1997). "La necesidad de un pensamiento complejo". En: *Pensamiento complejo*. González, Sergio (Comp.) Santa Fe Bogotá. Magisterio.
- _____ (1998). "Cultura y Conocimiento". En: *El Ojo del Observador. Contribuciones al constructivismo*. (Watzlawick y Krieg, comps.) Barcelona. Gedisa.
- ORDÓÑEZ, Carlos. (1995). *Administración y desarrollo de comunidades educativas. Hacia un nuevo paradigma de organización escolar*. Santa Fe de Bogotá. Cooperativa Editorial Magisterio.
- POPKIEWITZ, Thomas S. (1992). "Algunos problemas y problemáticas en la producción de la evaluación". En: *Revista de Educación*. No. 299, (Pp. 95-118). Madrid. Ministerio de Educación y Ciencia.
- _____ (1994). *Sociología política de las reformas educativas*. Madrid. Morata.

ROCKWELL, E. y MERCADO, R. (1993). "La práctica docente y la formación de maestros". En: Revista *Planteamientos en Educación*. Santa Fe de Bogotá. Corporación Escuela Pedagógica Experimental.

TOURAINÉ, Alain. (1998). *¿Podremos vivir juntos? La discusión pendiente: el destino del hombre en la aldea global*. Buenos Aires. F.C.E.

WATZLAWICK, Paul. (1998). *El Ojo del Observador. Contribuciones al constructivismo*. Barcelona. Gedisa.

INVESTIGACIONES E INNOVACIONES DEL IDEP



INVESTIGACIÓN SOBRE EVALUACIÓN DE PROCESOS

EVALUACIÓN DEL PROCESO DE CONSTRUCCIÓN DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO DEL NIÑOS DE PREESCOLAR A SEGUNDO*

Jorge Castaño García

Esta investigación, realizada en el contexto de una experiencia pedagógica particular (la propuesta Descubro la Matemática) presenta el proceso seguido y los resultados del proyecto *Evaluación del proceso de construcción del conocimiento matemático*, que se inició en marzo de 1997 y culminó en diciembre del mismo año, en una búsqueda particular: diseñar y validar este proceso en niños de preescolar hasta segundo, superando los modelos analíticos y prescriptivos, en los que “generalmente se fundamentan los modelos de evaluación existentes”.

Los actores del proyecto son los docentes y alumnos de los niveles preescolar, primero, segundo del colegio Champagnat de Bogotá, colegio privado en el que se implementa el modelo *Descubro la matemática*, y una de las escuelas públicas pertenecientes a las instituciones Fe y Alegría.

Así mismo, el equipo investigador realizó seminarios-talleres con participación de expertos y docentes de las escuelas Fe y Alegría que participan en el proyecto institucional Universidad Javeriana y Fe y Alegría, así como en los demás docentes de los demás colegios de la comunidad marista. A este equipo se le presentan las formulaciones con respecto al modelo de evaluación y se les ofrecieron herramientas metodológicas basadas en los instrumentos elaborados, para que ellos apliquen la evaluación en sus respectivas aulas.

Para la elaboración de referentes conceptuales se identificaron las instituciones (bibliotecas, centros de investigación, universidades y librerías) a nivel local, nacional e internacional, que pudieran ofrecer información en este campo. Además, se realizó una bibliografía extensa de la temática en cuestión, delimitando los dos campos básicos que constituyen el modelo que se busca formular, focalizándose en los sistemas matemáticos: sistema numérico.

* El informe final de esta investigación se encuentra en el Centro de Documentación del IDEP.

A partir de esta revisión bibliográfica se adquirieron algunos libros, revistas y fotocopias y se realizaron resúmenes del material escogido, con el fin de construir referentes teóricos que sustenten el proyecto. Gracias a esto se logró establecer aproximaciones conceptuales de la realidad estudiada, y reelaborar permanentemente lo construido mediante la contrastación teórica-práctica-teórica.

Además, se desarrolló una aproximación a través de una doble dimensión: de una parte la revisión bibliográfica, como se dijo anteriormente, y de otra, del estudio del corte etnográfico que incluye la observación, registro, descripción e interpretación de las prácticas del aula, que posibilitaron elaborar categorías de análisis para identificar y explicar los factores de tipo subjetivo, más directamente asociados en la construcción escolar del conocimiento matemático.

Para validar el modelo se sometió a la contrastación desde la práctica, para lograr:

- Determinar la capacidad de predicción que tiene la descripción y explicación de los procesos cognitivos, e interactivos, que el modelo define para cada uno de los sistemas conceptuales identificados.
- Establecer la validez de los instrumentos dirigidos a recoger información sobre los niveles alcanzados por los niños (¿permiten escoger información sobre los procesos cognitivos que siguen los niños?, ¿se constituye en un apoyo real al proceso de evaluación del aprendizaje de los alumnos?, ¿cuál es su funcionalidad en la práctica escolar?).



MARCO TEÓRICO

A partir de la década de los años 70, los enfoques de evaluación en educación han hecho desplazamientos importantes que van desde una evaluación centrada en el *control de un proceso a una evaluación centrada en la intención de comprenderlo*.

La *evaluación como control* se interesa por recoger y analizar información para definir si el desarrollo de un determinado proceso responde al plan que se ha establecido –o más precisamente, preestablecido– para la consecución de las metas y fines –que también se han prefijado–, según unas formas de comprenderlo o unas expectativas que se tengan de éste y para identificar los factores que facilitan u obstaculizan el desarrollo del proceso. Esta comprobación de la correspondencia entre lo planeado y lo logrado y la identificación de la incidencia de factores asociados, se hace con el fin de introducir los



correctivos necesarios que garanticen el adecuado desarrollo del plan inicial o de optimizarlo tanto como sea posible.

En este enfoque nos parece que se pueden ubicar los modelos que se reconocen como *evaluación por objetivos*, expuestos entre otros por Bobboit, Tyler, Bloo, Taba, Block. Estos autores, a pesar de los matices diferentes que dan a sus propuestas, coinciden en que el cometido de la evaluación es discernir si los fines preespecificados, en un currículo, se han conseguido.

Para autores que podemos inscribir en esta tendencia, es necesario especificar de manera precisa los objetivos esperados, para compararlos con lo alcanzado después de un proceso. Soportados en teorías conductuales del conocimiento, consideran necesario formular los propósitos y objetivos en términos de conductas específicas y observables.

Gagné, decía: “Lo que realmente se desea saber respecto de un determinado currículo, es si funciona... para responder a esta cuestión es importante saber lo que un currículo pretende, y esto sólo es posible si se determinan las finalidades en términos de objetivos conductuales”, (1967) cada uno de los cuales “ha de describir un comportamiento observable del alumno o un producto que sea consecuencia de tal comportamiento” (Popham, 1969).

Para Wittrock, “Lo esencial es explicar los cambios logrados en el comportamiento mediante la instrucción, comenzando por la redacción de objetivos conductuales para el aprendizaje del estudiante, y siguiendo por la medición de cambios verificados en el comportamiento hacia dichos objetivos... Este enfoque posee evidentes ventajas a fin de evaluar el aprendizaje...” (1970). Para este autor lo importante de la redacción de los objetivos en términos conductuales está en el contar con una norma absoluta (un criterio) destinada a mediar el aprendizaje.

El segundo enfoque, *evaluación para la comprensión*, se interesa por recoger y analizar información para comprender la nueva realidad que está generando el desarrollo de un proceso. Ya no se trata aquí de evaluar para limitarse a contrastar lo esperado con lo realizado, sino de evaluar para que los sujetos involucrados en el proceso educativo tomen conciencia en lo que ellos están implicados.

Dentro de este enfoque se pueden ubicar autores inscritos en la perspectiva cualitativa, como Eisner, Crombach, McDonald, Stenhouse, House, Guba, Hamilton, Elliot, Stake, entre otros. Grombach (1980) afirma que un programa de evaluación es un proceso mediante el cual los que participan aprenden sobre ellos mismos y la racionalidad de su comportamiento.

Propuestas como la de “evaluación de procesos” de Stenhouse, nos parece responder a esta intención característica de la evaluación cualitativa, (que plantea Pérez G. 1985) de procurar “captar la singularidad de las situaciones concretas, las características particulares que definan una situación y que se pueden considerar responsables del curso de los acontecimientos y de los productos de la vida del aula. Los estudios sobre procesos han de registrar los sucesos en su evolución, en su estado de progreso, observar las situaciones e indagar los juicios, interpretaciones y perspectivas de los participantes”.

Como la generación de un proceso ya no es pensado en forma tecnocrática, es decir, prefabricado y definido de antemano por un grupo reducido de personas, se entiende que los planes y objetivos que se definan obedecen a las formas como los individuos y los grupos comprenden una realidad o aspecto de ésta. De manera que no existen *preestablecidos definidos en forma absoluta*, fines y planes tienen un carácter provisional, se reformulan a medida que los grupos implicados construyen nuevas comprensiones.

La evaluación así entendida es un acto reflexivo que permite la toma de conciencia de las formas de comprender lo que se actúa y la generación de nuevas comprensiones, de nuevas metas, de nuevas intencionalidades.

Algunos tipos de modelos de evaluación

Modelo de evaluación por objetivos

Responde a una concepción tecnocrática de educación escolar, donde la acción del educador se asume como la de un escultor, que esculpe sobre el espíritu del niño lo que se considera deseable y posible para su desempeño social.

Considera que es posible y necesario planear con precisión el acto educativo, para garantizar obtener los productos en las condiciones más cercanas a como fueron preestablecidos.

Desde esta perspectiva, la evaluación está llamada a dar información para establecer una mejor relación entre medios y fines.

Modelo de evaluación como comprensión

Surgen de una concepción de la educación más en correspondencia con la complejidad humana. Se asume el acto educativo como un acto de negociación, de comunicación, en el que el niño interactúa con el medio escolar, que él ayuda a construir junto con otros actores.

- KEMMIS, S. y otros. *Teoría crítica de la enseñanza*. Editorial Martínez Roca. Barcelona. 1988.
- LURIA, A.R. *Lenguaje y pensamiento*. Ediciones Roca Ltda. Reimpresión Bogotá. Traducido al castellano del original ruso por Pedro M. Merino. (Ediciones de la Universidad de Moscú). 1993.
- PETROVSKY, A. *Psicología Evolutiva y Pedagógica*. Editorial Progreso. Moscú. 1990.
- PIAGET, J. *Seis estudios de psicología* (Six études de psychologie). Trad.cast.: J. Marfá. 1964. Editorial Labor. Barcelona. 1991.
- _____ *Introducción a la epistemología genética*. Ediciones Paidós. México. 1987.
- _____ *La formación del símbolo en el niño*. Fondo de Cultura Económica. México. 1986.
- _____ *La construcción de lo real en el niño*. Editorial Crítica. Barcelona. 1989.
- ROJANO, T. *La matemática escolar como lenguaje. Nuevas perspectivas de investigación y enseñanza*. Enseñanza de las ciencias. Vol. 12 (1), marzo de 1994.
- SCHAFF, A. *Lenguaje y conocimiento*. Editorial Grijalvo. México. 1967.
- TALÍZINA, N. *Psicología de la enseñanza*. Traducido del ruso por Ana Clavijo. Editorial Progreso. Moscú. 1988.
- VICENTE, Maribel F. *Un modelo para la formación del sistema de habilidades matemáticas en la escuela media cubana*. Tesis de doctorado. Santiago de Cuba. 1995.
- WERTSCH, J. "La voz de la racionalidad. en un enfoque sociocultural de la mente". En *Vigotsky y la educación: Connotaciones y aplicaciones*. Traducc. al castellano de Miguel Wald. Editorial Aique. 1990.
- _____ *Vigotsky y la formación social de la mente*. Ediciones Paidós. Barcelona. 1988.

todo esto configura hábitos y habilidades, tanto en el plano intelectual, motivacional y afectivo, que no son otra cosa que maneras de pensar, sentir, actuar y conocer, construidas culturalmente.



BIBLIOGRAFÍA

- AZCOAGA, J. *Del lenguaje al pensamiento verbal*. Editorial El Ateneo. Buenos Aires. 1983.
- BRUNER, J. *Actos de significado*. Alianza Editorial. Madrid. 1991.
- _____. *Acción, lenguaje y pensamiento*. Editorial Gedisa. Barcelona. 1988.
- _____. *Realidad mental y mundos posibles*. Editorial Gedisa. Barcelona.
- _____. *La educación, puerta de la cultura*. Editorial Visor. Madrid. 1997.
- DAVIDOV, V. *La psicología evolutiva y pedagógica en la URSS*. Editorial Progreso. Moscú. 1988.
- _____. *La enseñanza escolar y el aprendizaje psíquico*. Editorial Progreso. Moscú.
- DAVIS, P. y HERSH, R. *Experiencia matemática*. Editorial Labor. Barcelona. 1988.
- DICKSON, L. y otros. *El aprendizaje de las matemáticas*. Editorial Labor. Barcelona. 1991.
- ELKANA, Y. *La ciencia como sistema cultural: una interpretación antropológica*. Módulo de pedagogía I. U.P.N. 1993.
- ELLIOT, J. *La investigación, acción en educación*. Ediciones Morata. Madrid. 1990.
- FOUCAULT, M. *Las palabras y las cosas: una arqueología de las ciencias humanas*. Trad.cast. 1968. E.C. Frost. (Editorial Siglo XXI: Colombia). 1991.
- _____. *La arqueología del saber*. Editorial Siglo XXI. México.
- GALPERÍN, 1958. Citado por Talízina, en *Psicología de la enseñanza*. Editorial Progreso. 1988.
- GOETZ, J.P. y LECOMTE, M.D. *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa*. Ediciones Morata. Madrid.
- HALLIDAY, M.A. *El lenguaje como semiótica social. Una interpretación social del lenguaje y del significado*. Fondo de Cultura Económica. México. 1982.
- MOREL, M. *Lecturas de Foucault*. Editorial Taurus. Madrid. 1983.

- Hacer visibles los procesos de apropiación del conocimiento matemático.
- Desarrollar lenguaje matemático escolar, es decir, hacer discurso matemático; lo que implica la presencia de otros y, por lo tanto, la implantación de la comunicación y el desarrollo de la respectiva competencia.
- Confrontar las representaciones de lo que es objeto de conocimiento en los espacios generados para tal fin, como el trabajo en las plenarios, el trabajo en equipo, y en el diálogo con el maestro.
- Crear un ambiente de trabajo a modo de un *lugar cultural* como espacio propicio para la reflexión, la polémica y la elaboración del discurso matemático escolar.

Los niños

- Cuando los niños ingresan a la escuela están en una etapa de formación de las operaciones lógicas y luego comienzan a construir el sistema de la lógica proposicional, es decir, comienzan a acceder al discurso.
- Los esfuerzos que hacen los niños en el Anillito consisten en poner todo el contenido de la representación en el discurso, es decir, la esencialidad de lo que es objeto de conocimiento con la dificultad de que dicho objeto se está elaborando. Por esto, es natural que los niños pasen por sucesivas elaboraciones discursivas o retóricas a medida que van afinando las funciones del lenguaje, como son la nominación, la atribución, la derivación y la articulación, que se van convirtiendo en discurso.
- Cuando los niños pueden representar puramente el objeto de la acción a partir de la interacción con objetos físicos y dependan de ello, se dice que la acción toma la forma material; si en cambio el objeto de la acción se representa verbalmente, se dice que la acción se corresponde con la forma verbal. Cuando la acción toma la forma mental, el niño ya no cumple la acción como práctica transformadora de objetos exteriores –ni materiales ni verbales–, sino que ahora la acción se realiza transformando las imágenes de estos objetos. Estas imágenes mentales de los objetos y fenómenos del mundo exterior son, ahora, la forma que toman las representaciones del objeto de la acción.
- La solución de problemas transforma al niño, no sólo en calidad y cantidad de conocimientos sino también en la apropiación de procesos y procedimientos generales, en estrategias y maneras diferentes de entender un problema, en formas diferentes de valorar y valorarse frente a un grupo social, en la elaboración de juicios y criterios para decidir cuándo algo es un problema;

- El lenguaje tiene su razón de ser y de existir, porque existe el conocimiento y porque este conocimiento impone la necesidad de comunicarlo a otros. Conocimiento que emerge de manera plena, de la acción consciente, y se va constituyendo en sistemas semánticos que buscan su adecuada expresión a través de la sintaxis del lenguaje articulado.

- Visto como instrumento, el lenguaje es un potente instrumento analítico pues hace posible analizar las representaciones (percepciones, imágenes, esquemas, estructuras conceptuales, que son formas de pensamiento sintético) al obligarlas a pasar por el tamiz lineal del lenguaje articulado y hacer de estos pensamientos verbales objetos de acción, es decir, de reflexión. Pero también puede centrar su foco de atención sobre sus procesos de elaboración e interiorización del conocimiento, tornando el pensamiento más consciente y haciéndolo más coherente.

- Una de las implicaciones del funcionamiento del lenguaje es que extiende el poder de las coordinaciones entre acciones articulando la representación mental, proveyendo al pensamiento al mismo tiempo, un instrumento que en principio es de control y luego de combinación, de transformación y de análisis, tanto de la acción como de la actividad. De esta forma el lenguaje transforma profundamente la estructura del pensamiento, al alcanzar formas de esquematización más avanzadas y una abstracción más móvil.

- En síntesis, las formas de la acción por las que circula la práctica del estudiante se dan en función de sus necesidades cognitivas, y de sus motivaciones e intereses; la práctica de éstas permite descubrir, por ejemplo, el objeto de determinada acción, el contenido de la misma –las operaciones, sus composiciones, su carácter consecutivo, la estructura en la cual se inscriben tales secuencias–, así como ejercer un control objetivo sobre la acción misma.

- El valor cognitivo de hacerse preguntas ante una situación problemática, en esta perspectiva, es apropiarse del esquema de la base orientadora de la acción, prestando atención a los datos importantes, a las condiciones esenciales del problema, y a las transformaciones posibles cuando la pregunta introduce nuevas condiciones. Además, se hace evidente la necesidad de saber si la pregunta está bien hecha, lo cual lleva al niño a trazar cursos posibles de acción y a resolver parcialmente el problema. Es, en síntesis, toda una construcción de sentido y de transformación de la actividad en un problema para sí.

- Desde el punto de vista de la relación pedagógica entre maestro y estudiante, la exigencia de verbalizar la acción –cómo estrategia en la apropiación del conocimiento–, tiene como fin:

la acción se debe recrear en la forma verbal, en forma muy precisa, de manera que otros puedan interactuar y comunicarse con el hablante.

- Quién hace verbalización de las acciones enriquece su argumentación y está en mejor posición para negociar significados.

- En el proceso de asimilación o representación del mundo se van formando capacidades culturales, vinculadas a la formación de una base cultural y en particular con capacidades específicas como el desarrollo del pensamiento matemático.

- Cuando se propone un objeto de conocimiento, el reto es apropiarse de la experiencia histórica acumulada sobre el mismo; además, el abordar el conocimiento sobre una base cultural distinta a la que se desarrolló históricamente permite hacer caminos nuevos, que pueden tener puntos de encuentro o de analogía con las problemáticas que promovieron la elaboración del conocimiento, pero en todo caso un camino nuevo que necesariamente producirá conocimiento nuevo, al menos en dos direcciones: en el interior de la disciplina –matemática escolar–, y otro de carácter didáctico.

- La asimilación de este conocimiento implica la asimilación de instrumentos culturales (regla, compás, ábaco, lenguaje, comunicación, argumentación...) luego las actividades deben estar dirigidas a configurar una historia de asimilación de algunos de estos instrumentos, de los más pertinentes para el desarrollo intelectual de los jóvenes.

- Dicha asimilación tiene como prerrequisito el que la actividad de conocer sea abordada como una actividad vital por parte del sujeto, porque modela no sólo nuevas operaciones motrices e intelectuales, sino también el espacio de relaciones, la imagen de conocimiento matemático, las formas de validación, las prácticas y los ritos configurando el ambiente cultural –lugar cultura– adecuado para la producción de conocimiento matemático escolar.

Papel del lenguaje

- Desde el punto de vista del *compromiso con el conocimiento*, el lenguaje puede mostrar tanto *una relación externa*, pasiva, de simple manipulación de estructuras superficiales, como *una relación interna*, de compromiso, activa, que se relaciona con la estructura profunda de su contexto de significado. En esta última relación siempre se está examinando qué tan bien representado está el sistema semántico en evolución mediante el sistema de signos articulados.

como objeto matemático, pero sólo en el aspecto semántico, enriquecido por la pragmática y elaborado por la argumentación. En el aspecto sintáctico aún no han elaborado suficientemente las reglas de su escritura (representación en el sistema de signos matemáticos). Por otra parte, expresan un diálogo escrito fluido, con el texto propuesto. No es un texto explicativo, es un texto que muestra la condensación de un pensamiento, un número de palabras significativamente menor, factores que caracterizan una tendencia hacia la predicación. El verbo ser es utilizado para mostrar la esencia del objeto de estudio.

Validación: están en el nivel formal de la demostración matemática, utilizan la simbología propia de la matemática.

Se puede afirmar que en la adquisición e interiorización de los conocimientos matemático así como para el desarrollo intelectual (formación del pensamiento matemático) de los estudiantes, es necesario que elaboren y realicen estos tipos de verbalización de las acciones. Con esto afirmamos que detrás de cada concepto hay trabajo intelectual intenso que realizar y que como su adquisición y apropiación es a menudo lenta, demanda largos períodos de tiempo.



CONCLUSIONES

El carácter cultural de la práctica pedagógica

- El lenguaje se ha convertido en un elemento básico para la ruptura de los mitos y prácticas anteriores, el verbalizar las acciones ha permitido tomar conciencia de ellas para luego volverlas objeto de reflexión y comunicación, proveyendo otras maneras de concebir la matemática escolar. Ha permitido elaborar un discurso cada vez más fino, gracias a una estrategia de gestión del conocimiento como es *la verbalización de las acciones*. En especial, ha hecho visibles los momentos de tránsito y de traducción de una lógica de la acción material –momento material materializado del proceso– a una lógica de los conceptos –momento de verbalización– de la comunicación en el proceso.

- La verbalización de las acciones vitaliza el desarrollo del lenguaje y la comunicación, permite la apropiación gradual de la carga cultural que tienen los objetos de conocimiento, en nuestro caso conocimientos matemático escolar. Por otro lado, representa y pone el conocimiento en el afuera, ya que

La articulación de las frases se hace por medio del “entonces” y del “y”, con la característica de que estos vínculos no son conectivos lógicos: sólo sirven de vínculo en la sucesión lineal que constituye la frase.

Realizan atribuciones de acciones físicas, que puedan comprobar y mostrar empíricamente, como en:

¿Dos sextos son equivalentes a cuatro novenos? No es equivalente porque al medir $4/9$ con $2/6$ notamos que $4/9$ es más grande que $2/6$. Entonces notamos que en la tira nos hace falta $1/9$ para completarlo (Jhon Alejandro García).

El razonamiento no se compromete, prevalece la acción física. Por otra parte siempre se espera una orden para ejecutar: no le hacen seguimiento a la acción. Interactúan con el maestro esperando que él diga si está bien o mal, no para hablar sobre el tema, sino para pedir que se le valide.

En la verbalización de la acción los verbos que más comúnmente usan son: tener, hacer, tomar, notar, dar; todos usados en pasado.

Validación: se apoyan en la evidencia empírica; así son las cosas porque son de hecho.

Tipo 2. Construyen proposiciones y las justifican, aparece el texto y el discurso sobre lo que es objeto de conocimiento. En la verbalización escrita aparece lo que ya se ha ido constituyendo en forma oral; no es lo mismo decir 15, 15 años o 15 como la edad de...

Se presta atención a las relaciones que entran en juego pero no se nominan (mayor que, menor que), se comprenden sin enunciarse. La explicitación es necesaria para tomar conciencia de las relaciones y poder considerarlas como objeto de estudio.

Validación: la validez está apoyada en las reglas de la estructura lógica de los conocimientos matemáticos que maneja.

Tipo 3. La verbalización de la acción es desplegada, todavía está en el nivel rutinario. Es narración de acciones, son en sí declaraciones argumentativas que contienen elementos de prueba. Están buscando la esencialidad del concepto, su comprensión. El interlocutor es explícito.

Validación: se apoyan en la evidencia empírica.

Tipo 4. La verbalización de la acción es reducida, su contenido es descontextualizado y está en el plano de la acción mental.

Están en el tránsito entre el contexto hipotético y el generalizado. Identifican las relaciones y las operaciones de la nueva estructura. Esta última se manifiesta

El trabajo realizado con los niños ha mostrado que siempre pasan de un NO discurso, a *estructuras lingüísticas narrativas*, como se puede verificar en este y otros ejemplos:

El problema del *ovillo de cabuya*: se trata de un ovillo de cabuya al que sucesivamente se le saca la mitad de lo que quedaba, hasta el momento en que se le sustraen $2/5$ y con los restantes 30 cm se hace un teléfono.

La estructura narrativa se pone de relieve en el siguiente registro:

Empezamos a investigar los $2/5$ que tomó la hermana y concluimos que en este problema cada $1/5$ cuesta 10 centímetros de cabuya. Entonces los $2/5$ miden 20 centímetros de cabuya y sobran 30 centímetros con las que al final hicieron un teléfono (David).

En este caso vemos que:

Empezamos a investigar los $2/5$ que cogió la hermana...

potencialidad de la acción

... y concluimos que en este problema cada $1/5$ cuesta 10 centímetros de cabuya...

puesta en acto de la acción

Entonces los $2/5$ miden 20 centímetros de cabuya y sobran 30 centímetros con los que al final hicieron un teléfono.

A continuación se presenta una primera aproximación a la periodización con base en la sistematización de los registros.

Aproximación a tipos de elaboración en la verbalización de las acciones

Una primera aproximación a los tipos de discurso que presentan los estudiantes cuando están trabajando la resolución de problemas en equipo, permite diferenciar cinco tipologías:

Tipo 0. No hacen verbalización de la acción, elaboran un texto más o menos escueto de las acciones hechas, contadas con el mínimo detalle.

Hay una intencionalidad pragmática por comunicarse, ya que los objetos que se manipulan en el discurso están adheridos no sólo a las acciones físicas sino al contexto rutinario y vivencial.

Validación: se espera que la validación sea dada por los otros. Las acciones son externas y ajenas, se hacen para complacer al otro.

Tipo 1. Describen la actividad con algunos detalles, por medio de frases cortas. Existe dificultad para nominar las acciones y diferenciar explícitamente lo que será objeto de conocimiento.

- Ante una situación, lo “natural” es hacer preguntas y discutir con otros, incluyendo a los maestros, para comprender y transformar la actividad.

Por todo lo anterior, podemos decir que más que una transposición didáctica lo que de hecho se da es una *transformación didáctica*, es decir nuestro trabajo se inicia en lo que los niños son capaces de hacer a partir de lo que ya saben, pues pretendemos colocarlos en zona de desarrollo próximo en cada uno de los momentos de desarrollo de la actividad. Por ejemplo, pueden abordar temas que no están programados para su grado de escolaridad.

Una “situación didáctica transformada” es entonces, una Situación de Aprendizaje que podemos caracterizar de la siguiente manera:

- Es una situación contextualizada y recontextualizada por los niños.
- Se convierte en una actividad en el sentido de Vigotsky.
- Es dinámica, siempre es posible transformarla.
- Genera retos cognitivos.
- Genera condiciones para la producción de conocimiento matemático escolar.
- Ofrece motivaciones desde los mismos procesos de acción e interacción en el contexto de la actividad.
- Es abierta, porque no tiene un curso fijo, pero posee un abanico de posibles cursos de acción.
- Convocan una gran variedad de conceptos en su base y son, en su mayoría, de mucha riqueza en posibilidades de desarrollo.
- Estas situaciones apuntan a la construcción de *campos conceptuales* con dominio en el desarrollo mismo del pensamiento matemático. Distinto de estructuras conceptuales, porque a estas últimas se les añaden otros elementos semánticos de carácter cultural.

Los registros también han mostrado que a mayor desarrollo de la competencia lingüística y comunicativa es mayor el acercamiento al lenguaje matemático. Las relaciones y operaciones involucradas son invisibles en la parte material materializada, y sólo son visibles cuando se acompañan y/o se reconstruyen en el lenguaje verbal externo, puesto que se convierten en *objetos de reflexión*, lo cual va decantando la esencialidad del objeto y, finalmente, se convierte en concepto. Otro efecto inédito de la reconstrucción de la acción en el lenguaje verbal externo es el desarrollo de la autoestima en los jóvenes, y la valoración de sus capacidades cognitivas frente a un colectivo exigente.

esto sucede lentamente—, la manera de aprender y las formas de trabajo también cambian.

La transformación didáctica

En contraste con lo que se ha denominado la teoría de la transposición didáctica por los franceses, hemos encontrado muchas similitudes y también distancias en esta manera de pensar. Sin embargo, se ha desarrollado una mirada propia hacia el conocimiento escolar.

Al considerar una “*Situación Didáctica*” en el trabajo del Anillito, ésta se puede caracterizar así:

- Es flexible, no se tiene un camino preestablecido, rígido; permitimos que la dinámica se desarrolle y opte por algunos de los caminos vislumbrados por los jóvenes. La actividad propuesta resulta transformada tanto por las preguntas de los niños (Op. it. Véase anexo N^o 1. *La Situación didáctica de: El tanque*)⁶ como por las de los maestros; aparecen posibles desarrollos y campos conceptuales de la matemática.

- Cuando el maestro conduce al niño hacia el objetivo que él desea, el niño no produce, termina haciendo lo que el maestro quiere sin comprometerse (hace acciones para cumplir con la actividad).

- Ambiente no sancionatorio. Se hacen juicios, conjeturas, reflexiones, se lanzan supuestos y se argumenta; sin que por estas acciones nadie se sienta discriminado, o bien porque no sabe o porque se equivoca, o se le echa abajo su argumento, o porque presentan altibajos en su producción intelectual.

- Las situaciones que se presentan están afuera del contexto matemático —algo que sucedió con frecuencia en los comienzos del trabajo con los niños— o bien dentro del contexto matemático; pudiéndose ahora con más facilidad proponer los segundos.

- Nuestro enfoque didáctico es la invención y resolución de problemas.

- La situación se presenta en forma material o materializada, por lo general en contextos rutinarios no matemáticos.

- Una característica de la matemática escolar en el Anillito, es la producción de conocimiento matemático escolar, los niños literalmente producen ideas, conjeturas, argumentos de orden matemático situado.

- La situación que se les presenta es inicialmente una tarea, pero las formas de trabajo tienden a convertirlas en actividades vitales para los niños.

⁶ El informe final de esta investigación se encuentra en el Centro de Documentación del IDEP.

Se puede considerar la verbalización de la acción por lo menos desde tres ámbitos: el cognitivo, el de las funciones del lenguaje y el de mediador recreando la acción y el carácter cultural configurando un *lugar cultural*. En los tres han surgido, con el desarrollo del proyecto, las siguientes preguntas:

- *Cognitivo*. ¿Cómo la verbalización de la actividad –de las acciones– es factor de desarrollo intelectual?

- *Las funciones del lenguaje*. El pensamiento es como una totalidad que emerge de manera simultánea –como si se pensara en forma sintética– y luego fuera traducido a una sucesión lineal que debe adecuarse a unas reglas lingüísticas. Este esfuerzo de representación del pensamiento en el lenguaje natural pasa por las cuatro funciones lingüísticas: nominar, articular, atribuir y designar. La pregunta que nos hacemos aquí, es ¿cómo se materializan estas funciones en la verbalización de las acciones? Y, ¿cuál es su relación con la interiorización o apropiación del conocimiento matemático?

- *Lugar cultural*. Nos preguntamos: ¿de qué manera las formas de actuar, pensar, sentir y conocer inmersas en el trabajo con los niños, están fomentando cambios en las distintas maneras de percibir códigos, reglas de conducta, formas de relación –con las demás personas– y con el conocimiento matemático? Éstas preguntas están guiando la presente innovación-investigación.

El lenguaje provee una herramienta de deconstrucción y construcción cultural muy potente, a través de la verbalización de las acciones, que en primera instancia se realiza cuando se empieza a trabajar con las cosas y las imágenes de ellas, dando un salto cualitativo que consiste en desprenderse de las imágenes y las cosas para manejar significantes y significados históricamente contruidos⁵. Pero estos símbolos no presentan, otra vez, las similitudes con lo representado, sino que lo simbolizan, es decir, lo sustituyen (lo puedo nombrar como quiera). Podríamos decir que la sustitución ocurre cuando el símbolo se desprende de la similitud con la cosa y se convierte en código.

Las relaciones con el conocimiento

Hemos encontrado que la manera como aprenden nuestros niños depende de la imagen de conocimiento que posean. Así, si la imagen es de un conocimiento verdadero, rígido, axiomático, entonces no preguntan, no discuten, quieren que todo se les ordene, se les dicte; leen y hacen resúmenes acrílicos. Pero a medida que la concepción de conocimiento matemático cambia –y

⁵ La apropiación de un campo conceptual tiene su historia en términos de las actividades que han sido vitales para su desarrollo.

Encontramos que la propuesta pedagógica soviética es de enseñanza programada, en la cual el maestro debe descubrir ante el estudiante todo el contenido de la acción, y que esta teoría contemplaba también la posibilidad de ser elaborada por el mismo estudiante. En nuestro caso, la intención original es generar un espacio donde sea posible pensar y hacer matemáticas, donde los niños tengan la posibilidad de mostrarse, ganar confianza y defender públicamente sus ideas comunicándose con los otros. Esto implica que la intervención educativa tienda a respetar los ritmos de trabajo, los tiempos y las maneras de comprender, para reducir al mínimo las interferencias producidas por la intervención educativa, la que más bien debe acomodarse a las condiciones que favorecen la reflexión, individual y colectiva, pues el fin último es que los jóvenes puedan hacer matemáticas en situaciones mínimamente controladas, guiados por la perspectiva pedagógica construida por los maestros durante años de reflexión y estudio colectivo (perspectiva elaborada por el colectivo de Anillo de Matemáticas, del cual los autores han sido miembros).

La diferencia esencial de nuestra propuesta es que los niños deben elaborar la base orientadora, propósito que llevamos a cabo mediante la conceptualización de lo que es problema para nosotros y para los niños.

A los niños se les propone una tarea que, mediante acciones verbales como hacerles el mayor número de preguntas y usando variadas formas de presentación, produjeron una forma didáctica de abordar y resolver los problemas con ellos. Esto se puede ver en el capítulo cinco “La pregunta como acción verbal para la construcción de objetos y estructuras verbales” del documento “El papel de la verbalización de las acciones en el desarrollo del pensamiento matemático escolarizado”⁴.

En el caso de Jhon Urrego, en el problema “el rollo de cabuya”, queda claro que opera con acciones verbales “ $2/5$ de cabuya son 30 centímetros”. Es decir, como opera y transforma estos objetos verbales –las fracciones–, establece equivalencias, usa una lógica conceptual plena de contexto y significado, es aquí donde emerge el discurso matemático escolar.

Desde el punto de vista de la incidencia en la formación matemática de los niños, la *verbalización de las acciones* cumple una función cognitiva que consiste en representar, por medio del lenguaje articulado –*discurso*–, aquellas representaciones que el niño ha construido al abordar situaciones problemáticas.

⁴ Publicación parcial de esta investigación, financiada por el IDEP. “El papel de la verbalización de las acciones en el desarrollo del pensamiento matemático escolarizado”, diciembre 22 de 1997.



es la comprensión de las acciones y operaciones que realiza cuando aborda situaciones problemáticas de conocimiento, en una aproximación honesta de lo que para él es inteligible, desde lo que ya conoce y le es familiar. Esto es, subyace una lógica y un sentido que le permite seguir vinculando los hechos y sus significados; perspectiva que por lo general el maestro pasa por alto.

- El potencial intelectual y motivacional están siendo subvalorados en la escuela. Esto nos coloca ante la perspectiva de lo que el niño es capaz de hacer hoy si le brindamos el espacio adecuado para su expresión y desarrollo. Por otra parte, lo que muchas veces se reconoce como limitación en el niño es, en una abrumadora cantidad de veces, limitación de nosotros, los maestros.

- Desde el punto de vista de la elaboración del conocimiento existe un cierto paralelismo o correlación entre las formas históricas de construcción del conocimiento y la génesis y constitución del conocimiento, tanto individual como colectivo.

- Existe una estrecha relación entre el desarrollo intelectual, el motivacional (ético) y el desarrollo lingüístico (competencia comunicativa).

- Ninguna teoría es capaz de explicar en su totalidad la complejidad del acto pedagógico. Esto supone que las teorías no son excluyentes, pues su nivel explicativo depende del ángulo o perspectiva adoptada. Así, si una teoría no puede explicar algo, puede existir otra que lo pueda hacer.

- Se ha asumido en esta investigación el concepto de Zona de Desarrollo Próximo propuesto por Lev Vigotsky, en relación con su ley genética general de desarrollo, como un principio didáctico: crear para los niños condiciones y situaciones que le permitan, a partir del desarrollo que ya han logrado, acceder a funciones que en el momento apenas comienzan a aparecer.

Avances realizados

En el desarrollo de la innovación surge, de manera reiterada, el cuestionamiento sobre el sentido y el papel de la actividad, pues si para el maestro la situación dada es un problema, para los estudiantes no lo es necesariamente, luego, ¿cómo hacer para que una situación propuesta se convierta en problema?

Retomamos las experiencias diarias y las confrontamos nuevamente con la teoría. Para nosotros cobra su pleno sentido la estructura de la acción que, para efectos de la gestión del conocimiento, se separa en tres partes: la orientadora, la ejecutora y la de control, aunque la de mayor interés es la parte orientadora, pues de su conformación depende el desempeño en las demás.

- La actividad de estudio, su desarrollo.
- Las prácticas sociales.

El tratamiento de los registros y su análisis se hace a partir de este enfoque conceptual y de las categorías que se han derivado en el proceso de sistematización.

Nuestras categorías de análisis son:

- La nominación: se refiere a la esencia de las representaciones, indica la capacidad para representarse apropiadamente los objetos de conocimiento y darles un nombre.
- La articulación: establece el funcionamiento coordinado de las representaciones unas con otras; da contenido a la pura forma verbal.
- La derivación: muestra el movimiento de las representaciones desde su origen, los matices y nuevos sentidos que adquiere: multiplicar, duplicar, triplicar.
- La atribución: da una representación en otra, por ejemplo: amigos y cuatro, forma cuatro amigos, cinco y número primo, forma cinco es número primo. Indica los procesos de categorización entre representaciones, el establecimiento de condiciones de existencia para las representaciones y de acreditación entre ellas.
- La competencia comunicativa: entendida como la capacidad de comprender las ideas matemáticas del otro y en el discurso hacer comprensible para el otro las ideas matemáticas propias.
- La imagen de conocimiento matemático: en tanto categoría de análisis cultural, ya que las imágenes de conocimiento determinan las prácticas, los valores, el estilo de las interacciones comunicativas, las formas de validar el conocimiento, los valores, los ritos, entre otros.

Gestión con el conocimiento

Con el desarrollo del proyecto y las discusiones en el interior de la Asociación Anillo de Matemáticas, se ha ido decantando nuestra perspectiva conceptual, la cual toma forma operativa a través de los siguientes principios didácticos:

- Los niños nunca se equivocan, puesto que sus elaboraciones están inscritas en contextos precisos, que tienen sentido y significado propios para el niño. Esta afirmación se basa en que el conocimiento es esencialmente acción mental interiorizada (Escuela de Ginebra), esto es, que para el niño lo que significa

La parte ejecutora de la acción es la parte de trabajo de desenvolvimiento y de búsqueda de posibles soluciones, en la cual se resuelve la situación dada.

La parte de control de la acción está dirigida a seguir la marcha cuidadosa de la acción, a confrontar los resultados obtenidos y a justificar la validez de las soluciones.

La verbalización de las acciones permite recrear plenamente la acción por parte del pensamiento verbal. Esta formación de la acción presupone que del contenido concreto de los objetos primero se han separado los rasgos y las propiedades sustanciales para la acción, las cuales se fijan a las palabras y se convierten en sus significados. Ahora es posible su utilización en forma de *objeto verbal*, es decir, el niño puede operar y reflexionar con las palabras y a través de ellas con sus significados.

De esta verbalización de las acciones que se hace en forma verbal oral y verbal escrita, se han tomado registros³ que nos han mostrado el papel del lenguaje, de la interacción comunicativa, de la cultura como escenario y de la formación cultural en la construcción del conocimiento matemático escolar desde dos competencias: competencia comunicativa y competencia cultural. Para efectos de análisis estas competencias se han separado así:

a) *Competencia matemática*, en la que consideramos:

- El lenguaje, en tanto sistema de signos verbales que articula la representación del pensamiento.
- El desarrollo de la competencia comunicativa, entendida como un conjunto de procesos y conocimientos de diverso tipo: lingüístico, socio-lingüísticos, estratégicos y discursivos, que el estudiante pone en juego para producir y comprender discursos matemáticos en contextos escolares.
- Para efectos de análisis, consideramos conveniente el diferenciar los cuatro aspectos de un sistema conceptual en construcción (Pérez, 1995): sintaxis, semántica, pragmática y argumentación. Este enfoque funcional del desarrollo del pensamiento matemático ha centrado los diseños didácticos en las capacidades pragmáticas de los estudiantes, en la semántica y argumentación, permitiendo a los alumnos elaborar su propia sintaxis.

b) *Competencia cultural*, en la que se atiende a la formación de un *lugar cultural* configurado, entre otros, por:

- La relación que los niños tienen con el conocimiento.

³ Registros que son las notas de trabajo de los estudiantes, el diario de campo de los maestros, y en algunas ocasiones grabaciones de audio o vídeo.

forma que da a esta expresión verbal. Esta forma de expresión se encuentra mediada por la intención comunicativa –para sí, o para otros–, por el “tono” de la interacción comunicativa y la clase de interlocutores a la que va dirigida. En suma, depende del contexto cultural escolar donde se desarrolla.

La forma mental de la acción significa que ésta se ha interiorizado y que se realiza “para sí”. Sus elementos estructurales son los conceptos, las operaciones y las simbolizaciones. En esta forma, la verbalización en voz alta adquiere la forma de imagen sonora de la palabra. La primera forma de acción mental es el «lenguaje externo para sí». Es ya una acción interna, pero aún dirigida hacia el exterior.

Por las funciones que desempeña, la acción se puede dividir en tres partes: la orientadora, la ejecutora y el control (Galpeín. Op. it., p. 58).

El cumplimiento de la acción por el sujeto presupone la existencia de un determinado objetivo que se alcanza sobre la base de cierto motivo. Éstos dependen tanto de la representación de la acción (comprensión del problema o situación a considerar) como de la representación del *sistema de condiciones objetivamente necesarias* para el cumplimiento de la acción (datos y condiciones esenciales del problema abordado).

La *base orientadora de la acción* se distingue de las condiciones objetivamente necesarias, porque incluye el contexto donde se interpreta la acción; es en lo que realmente se apoya el sujeto para comprender y cumplir la acción (la interpretación está mediada por presupuestos culturales tácitos, que hacen que se agreguen ciertas condiciones o que otras no sean significativas. En esta etapa la comprensión le permite divisar caminos de desarrollo o solución de la situación abordada). La base orientadora de la acción puede coincidir con las condiciones objetivamente necesarias, pero por lo general esto no sucede en situaciones de aprendizaje, pues con frecuencia sólo se toma parte de las condiciones objetivamente necesarias y otras veces se incluyen condiciones que no están en la situación abordada, pero que se asumen del contexto cultural en donde se desenvuelve la acción, o de la experiencia personal histórica con el objeto de la acción. Las operaciones son los modos por los cuales se realiza la acción.

La actividad de estudio. Si al resolver un problema coinciden el objetivo y la motivación del estudiante, divisando caminos de desarrollo y de solución, la tarea se convierte en actividad, es decir, se ha hecho significativa y retadora. En consecuencia, se ha convertido en una *tarea vital* al poderse fiar de su capacidad para resolverla. Así pues, cuando la tarea se ha convertido en actividad, ésta es *actividad de estudio*.



La forma de la acción “caracteriza el grado (nivel) de apropiación de la acción por el sujeto: el aspecto principal de los cambios de la acción en el camino de su transformación de externa (material) en interna (mental). Desde el punto de vista de la forma, puede ser material, verbal externa y mental. Dicho en otras palabras, la forma de la acción caracteriza la medida de la interiorización de la acción” (Talízina. 1988, p. 60).

Veamos las tres formas fundamentales de la acción: la forma material o materializada de la acción es la de partida. Consiste “en que el objeto de la acción se da al estudiante en forma de objetos reales (forma material de la acción) o en forma de modelos, esquemas, dibujos lineales (forma materializada de la acción)” (Talízina. Op. it., p. 61). La primera forma se hace visible cuando los niños interactúan con el *material didáctico* (ábaco, tangram, tetrábolos) y la forma materializada cuando abordan *situaciones problema* especialmente preparadas para este fin.

La verbalización de la acción se exige de manera categórica a los jóvenes, para que el objeto de la acción sea representado de forma verbal externa – oral o escrita. En esta forma “el proceso de transformación de la acción transcurre en forma verbal externa, en forma de razonamientos en voz alta o describiendo su marcha, adquiriendo el carácter de teórica” (Talízina. Op. it., p. 61). Ésta sólo es accesible a la observación, a través del análisis etnográfico a partir de la toma de registros en el lugar y momento en que se producen.

Como en el proceso de asimilación de esta nueva forma de acción el alumno se debe orientar tanto a su contenido como a su expresión verbal externa, orientarse únicamente a uno de estos dos aspectos hace que la expresión verbal externa resulte defectuosa. Si se orienta al contenido, sin reflejarlo en el lenguaje, sólo será capaz de realizar un círculo de tareas prácticas. Si sólo se orienta a la forma verbal, esto es, saltando la formación material de la acción y/o sustituyéndola de manera inoportuna, se expresará un formalismo hueco, con expresiones verbales de valor incompleto. Hecho que se hace habitual y que conduce a la reducción de la acción del sujeto a un círculo de tareas prácticas estrechas.

Es necesario aclarar que la reconstrucción de la acción en forma verbal externa no significa explicar cómo hay que actuar; es necesario realizar, *consumar verbalmente las cadenas de acciones simbolizadas e imaginadas, reflexionando y fundamentando sus vínculos.*

En la forma verbal, la acción cambia cualitativamente; el alumno se debe orientar tanto al contenido de lo que es objeto de conocimiento como a la

conocimiento matemático escolar, que tienen como requisito la construcción de contextos culturales escolares matemáticos.

Dichos contextos se configuran con base en las diferencias cognitivas que los estudiantes ponen en juego en las interacciones comunicativas (ya sean individuales, en equipo en plenaria, en la interacción con el maestro), en los roles de participación y construcción que se asumen, en la asunción de reglas de interacción social pactadas o convenidas de manera tácita pero consciente –con base en unas expresas y condicionadas por el sistema de enseñanza– por la emulación del trabajo individual y/o colectivo; competencia en la agudeza analítica y/o deductiva, en torno a lo que se ha tomado como objeto de discusión y comprensión y que constituye la finalidad de la interacción comunicativa y no a la persona trocando contextos o argumentos en el ámbito de la confrontación personal.

Evolución del problema de investigación

Se tenía una comprensión inicial del papel del lenguaje dentro del pensamiento matemático y, al mismo tiempo, de una herramienta para intervenirlo: *la formación por etapas de las acciones mentales*. De ésta se rescata un gran potencial de intervención didáctica, *la realización verbal de las acciones*, que en principio podría fomentar la producción de discurso, además de perfilarse como:

- Estrategia para hacer visible los procesos de apropiación del conocimiento.
- Instrumento para la construcción de los objetos del conocimiento matemático.
- Posesión en su funcionamiento de un potencial cognitivo y de desarrollo cultural.

Esta postura didáctica se fue decantando con el tiempo. Primero fue necesario contar con el límite de esta estrategia para conocer mejor: de una parte, difícilmente se trascendía la descripción de objetos y acciones, lo que genera en el estudiante una pérdida de sentido y motivación por esta práctica verbal; por la otra, existe una tendencia hacia su mecanización, lo que posteriormente dificulta el traslado de la acción de la forma material o materializada a la verbal.

Retomando los referentes teóricos

Desde el punto de vista teórico fue muy útil contrastar que la acción posee dos características fundamentales: *la forma y la estructura de la acción*.

mirar las operaciones y los procedimientos matemáticos de otra manera, es decir, se desprenden del problema concreto (número de discos) para mirar las cantidades como objetos matemáticos y preguntarse entonces por la relación entre ellos.



MARCO TEÓRICO

Enfoque investigativo

Hemos asumido el enfoque de la investigación cualitativa en educación que toma elementos tanto de la investigación acción como de la etnografía, constituyendo una forma de indagación autorreflexiva e interpretativa de los constructos de los estudiantes en actividades de resolución de problemas en equipo.

Este enfoque se hace a través de dos lentes: una, la relación lenguaje-pensamiento abordada mediante la verbalización de las acciones. La otra, la formación de una cultura matemática haciendo seguimiento a las imágenes de conocimiento matemático reveladas en las sesiones de trabajo, en las cuales se asumen roles sociales, surgen “líderes” de las discusiones o se alternan para desarrollar cadenas de razonamientos, en la solución parcial de un problema. En éste se interpretan datos, o conjuntos de datos, se hacen nuevas miradas al mismo asunto y de común acuerdo se hacen nuevas propuestas de solución.

Esta lente verifica la forma como se valida el conocimiento desde el punto de vista de la interacción social y comunicativa, destacando la capacidad de argumentar y contraargumentar en el ámbito de las matemáticas. Los argumentos o razones por fuera de este ámbito son objeto también de seguimiento, para comprender su “lógica oculta” que sirve de contexto y sustrato necesario para desarrollar el pensamiento matemático escolar de los jóvenes.

El estudio demostró que bajo estas condiciones de trabajo cooperativo no sólo se elaboraban situadamente las relaciones matemáticas, y con ellas la comprensión consciente de los conceptos matemáticos objetos de estudio, sino que era posible producir conocimiento escolar nuevo. Esto hace reconocer la existencia del conocimiento científico escolar matemático como categoría distinta de conocimiento científico matemático.

Sin duda, en la elaboración histórica del conocimiento científico aparecen analogías, pero hay evidencia de noveles caminos de construcción de

hacia el pensamiento algebraico, a partir de situaciones problema diversas, presentadas a los estudiantes; el material se toma de los contenidos de matemática de los grados 6°, 7° y 8°.

Como eje de investigación se asume la relación lenguaje-pensamiento, y en particular lenguaje-pensamiento matemático; en niños que estudian en instituciones oficiales del Distrito Capital y que han asistido, paralelamente y durante los mismos períodos escolares a nuestras sesiones de trabajo en jornada contraria.

Las discusiones en torno a la complejidad de la educación nos han persuadido de que ésta no es sólo una tarea técnica de procesamiento de información, ni siquiera una cuestión de aplicar en el aula teorías del aprendizaje, sino que "... es una empresa compleja de adaptar una cultura a las necesidades de sus miembros, y de adaptar sus miembros y sus formas de conocer a las necesidades de la cultura" (Bruner. 1997, p.62).

Problema de investigación

Consiste en indagar los tipos de elaboración verbal de las acciones logradas por los niños durante la construcción del conocimiento matemático, en situaciones de cooperación social.

Como contexto de investigación se pregunta: ¿Cómo pasan nuestros niños de una situación de no discurso sobre el conocimiento, a la elaboración del discurso matemático escolar?

La innovación

En particular se ha asumido como estrategia de gestión del conocimiento lo que denominamos: *la verbalización de las acciones*, para indagar los tipos de discurso elaborados en la construcción de conceptos matemáticos dentro del contexto de una actividad de estudio.

Desde el punto de vista de la gestión del conocimiento escolar, *la exigencia de verbalizar la acción en forma oral y escrita* –en la elaboración del conocimiento matemático–, tiene como fin:

- Reconstruir la acción en forma verbal externa, posibilitando el registro y análisis de los procesos de elaboración y apropiación del conocimiento matemático escolar por parte de los jóvenes, tanto individual como colectivamente.
- Desarrollar lenguaje matemático escolar, es decir, hacer discurso escolar matemático; lo que implica la presencia de otros y, por lo tanto, de la elaboración

UNA EXPERIENCIA DE AULA: LA VERBALIZACIÓN DE LAS ACCIONES EN EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO ESCOLARIZADO¹

El Anillito: Cultura Matemática en la educación básica

Vladimir Torres A.
Beatriz Espinosa B.

La presente investigación se desarrolla dentro del marco de una propuesta de trabajo pedagógica que propende a la formación cultural en matemáticas de estudiantes de quinto grado de educación básica²; este proyecto se ha desarrollado en Santa Fe de Bogotá, en el Colegio Distrital San Francisco, con financiación del IDEP para el año 1997.

La experiencia de aula muestra los momentos de tránsito que van desde una situación de no discurso a la elaboración del discurso matemático escolar. Se indagan los conceptos de realización verbal y verbalización de las acciones logradas por los niños durante la construcción del conocimiento matemático en situaciones de cooperación social. Se presenta una aproximación a los tipos de elaboración verbal realizadas por los niños. Se hace especial seguimiento al ambiente de aula que se genera y configura con cada sesión de trabajo, y al papel del lenguaje en el desarrollo de competencias cognitivas en matemáticas, en particular se muestra el carácter cultural del desarrollo de dichas competencias. Finalmente se presentan algunas conclusiones sobre el carácter cultural de la práctica pedagógica y el papel del lenguaje en el desarrollo del pensamiento matemático.

Se parte de los conceptos espontáneos y cotidianos que sobre la comprensión de las relaciones matemáticas fueron introducidos por las situaciones de aprendizaje, y que marcan el pasaje del pensamiento aritmético

* El informe final de esta investigación se encuentra en el Centro de Documentación del IDEP.

¹ Se refiere al proceso de formación de estudiantes y de su actividad de estudio, que se desarrolla en el contexto de una propuesta pedagógica adelantada con la S.E.D. y que involucra la organización del espacio, del tiempo y de las actividades escolares de los niños del *Anillito*.

² Son 60 estudiantes que han cursado quinto grado en tres escuelas del Distrito y que estudian en el Colegio Distrital San Francisco, jornada tarde.

especial seguimiento a las imágenes de conocimiento matemático que se revelan, sus cambios lentos en el tiempo y los nuevos modos de ver y hacer matemáticas de modo cooperativo.

Trabajo en Equipo

El trabajo cooperativo se realiza en dos niveles: en la relación maestro-alumno y en la relación alumno-alumno en el trabajo en pequeños grupos y en la plenaria. En estas sesiones la regla de interacción exigía el despliegue de la acción en forma verbal oral y verbal escrita. La calidad de las intervenciones era regulada por los profesores, quienes usaban sentencias de interacción: *¿Cómo sabes que es correcto? No entiendo lo que estás diciendo.* También con *¿Me puedes repetir?, por qué dices que..., yo creo que, no estoy de acuerdo...*

Cuando los niños están escribiendo y resolviendo un problema, lo hacen en voz alta; el resto del grupo escucha y va escribiendo su propio razonamiento, lo interpreta, le pide precisión y establece relaciones entre las condiciones del problema y lo que están significando, encuentra regularidades y diferencias en las estrategias de trabajo. Por otra parte, el que va hablando en voz alta realiza un control de la acción, a la vez que se somete al control de la acción del grupo surgiendo así, tanto en el colectivo como en quien habla, nuevas conjeturas, argumentos y la posibilidad de otras vías de solución.

Esto lo hace el grupo, también porque va llevando el hilo del proceso y, al unísono, realiza el análisis de la lógica implícita en él. Precisa los datos, la sintaxis o formación de frases, las relaciones que entran en juego, haciéndolo de manera espontánea, facilitando el volver en el proceso de la acción, es decir, dar marcha atrás para poder encadenar los argumentos de mejor manera.

Trabajo en la plenaria

- Los niños muestran todo el proceso de solución seguido hasta llegar a una *respuesta “del” grupo*, es decir, cuentan con mucho detalle cómo empezaron a abordar el problema, cuáles fueron las regularidades que iban encontrando, como por ejemplo “el número de discos no podía ser par”, argumentando la razón de tal afirmación.

- Los demás niños, tomando como base lo presentado por el grupo, hacen preguntas e inclusive comienzan a hacer un trabajo por todos los demás niños, entendiendo primero la propuesta y luego buscando algunas otras cosas matemáticas que el grupo que expone no encontró. Por ejemplo, “cuáles son las regularidades que encontró”. Esto significa que los niños comienzan a

y puestas en escena de la interacción comunicativa y el desarrollo de la respectiva competencia.

- Confrontar públicamente las representaciones de lo asumido como objeto de conocimiento, en los espacios de interacción generados para tal fin: trabajo individual, trabajo en equipo, trabajo en las plenarias y diálogo con el maestro.
- Crear un ambiente de trabajo histórico, a modo de un *lugar cultural*, como espacio propicio para la reflexión, la polémica y la elaboración de discurso matemático escolar.

Organización del sistema de enseñanza

Con base en el enfoque histórico cultural de la psicopedagogía soviética, la organización de la enseñanza se diseña para que se adapte a los propósitos de la investigación y a la teoría de la formación por etapas de las acciones mentales, a partir de su funcionamiento. De las tres etapas propuestas en el proceso de separación de la asimilación de la acción –orientadora, ejecutora y de control (Galperín. 1958, p. 58)– hemos preferido retomar la parte orientadora, porque si el estudiante no comprende cuál es el problema a resolver no podrá resolverlo con éxito. A esta parte del trabajo de clase se le dedica todo el tiempo que sea necesario, para tener una garantía mínima de que el problema se ha recibido como una actividad vital. Presentamos el problema usando distintas estrategias, desde la reconstrucción escrita e icónica de la “historia”, pasando por la presentación del dibujo en imágenes hasta la dramatización de la situación propuesta. Esta etapa siempre se consideró crucial en el ulterior desarrollo de las actividades de los estudiantes, y por lo general dichos presupuestos siempre se confirmaron en el desarrollo de las sesiones de trabajo. La parte ejecutora se desarrolla trabajando en pequeños grupos (3 o 4 personas) y la parte de control que, aun cuando se ejerce durante todo el desarrollo de la actividad por parte de maestro y compañeros, tiene un espacio privilegiado, la plenaria, donde los representantes de los niños presentan los intentos de solución, cómo se dieron cuenta de que algo no funcionaba y cómo saben que su respuesta es correcta.

Es también importante hacer seguimiento al ambiente del aula que se genera y configura con cada sesión de trabajo: la forma como se significa, desde cada individuo, el problema o situación, pues muy a menudo refleja los contextos culturales de donde vive. Indagamos la lógica oculta en las declaraciones de los jóvenes, pues como principio orientador del trabajo escolar sostenemos “que los niños nunca se equivocan, responden desde su contexto significativo cultural con una lógica frecuentemente muy contundente”. También hacemos

basada en el Modelo de Razonamiento de Van Hiele. Madrid. Centro de Publicaciones del Ministerio de Educación y Ciencia. 1994.

HEDERICH MARTÍNEZ, Christian; CAMARGO URIBE, Ángela; GUZMÁN RODRÍGUEZ, Leonor y PACHECO GIRALDO, Juan Carlos. *Regiones cognitivas en Colombia*. Santa Fe de Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional. CIUP. Colciencias. 1995.

LOTMAN, Luri M. *La semiosfera I. Semiótica de la cultura y del texto*. Madrid. Cátedra-Universitat de Valencia. 1996.

LOTMAN, Luri M. *La semiosfera II. Semiótica de la cultura, del texto, de la conducta y del espacio*. Madrid. Cátedra. 1998.

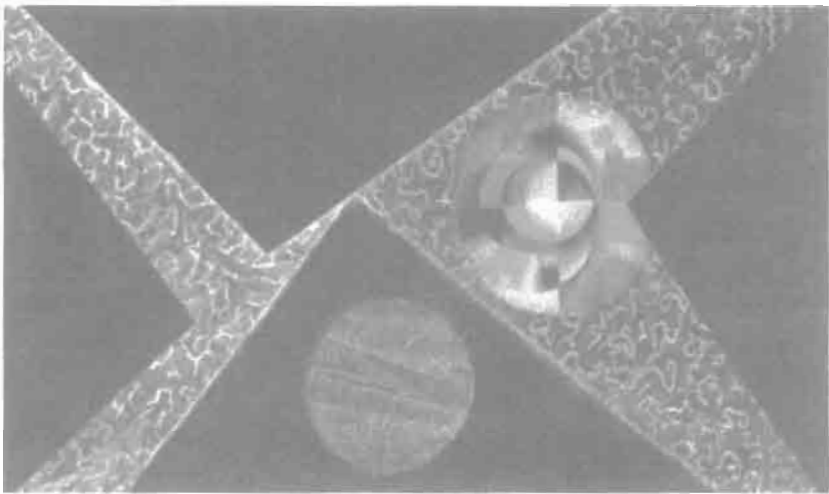
MARKEL, Norman. "Micropolitics: conversational style as an expression of social superstructure". En: *Actas I. VI Simposio Internacional de Comunicación Social*. Centro de Lingüística Aplicada. Editorial Oriente y Consiglio Nazionale delle Ricerche. Santiago de Cuba. 1999.

VYGOTSKY, L.S. *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Barcelona. Editorial Crítica. 1979.

VYGOTSKY, Lev S. *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Barcelona. Crítica. 1979.



INVESTIGACIONES E INNOVACIONES DEL IDEP



INVESTIGACIÓN SOBRE LA RELACIÓN
LENGUAJE-PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Didáctica de la Argumentación

aproximación intuitiva

saber intuitivo

acción-reflexión

saber en la acción

representación

saber representacional

sustentación de saberes

saber sustentado

A manera de conclusión

Lo expuesto a lo largo de este documento nos permite ofrecer las siguientes conclusiones, provisionarias hasta tanto no puedan ser confrontadas en la acción pedagógica concreta, pero, por ello mismo, susceptibles de constituirse en hipótesis de trabajo para intervenciones futuras.

- En relación con “la recuperación” del *sentido espacial intuitivo* (SEI), pudimos detectar que –aunque no existe un contexto pedagógico adecuado para la reflexión que posibilite el desarrollo de razonamiento deductivo– sí es notorio que el desarrollo de dicho sentido espacial intuitivo se hace evidente, principalmente, en el empleo de estrategias de razonamiento inductivo.

- Por otra parte, se hace notorio que el mejoramiento del SEI incide de manera notable en la constitución de contexto cognitivo adecuado para pasar de lo no consciente a lo consciente, base del desarrollo cognitivo, al decir de Vygotsky.

- En relación con las *modalidades de pensamiento*, se hizo evidente que la mayor parte de los estudiantes de las instituciones se mostraron poseedores de un sistema de conocimiento analógico, sensibles al contexto y constructores de una modalidad de pensamiento narrativo (en los primeros grados) que tiende hacia el pensamiento lógico-paradigmático (en algunos alumnos de los últimos grados). Dicho de otra manera, priman los alumnos que, en su desarrollo cognitivo, privilegian lo operativo y dan mayor relevancia a la información que proviene del contexto, con lo que se hace evidente una cierta dificultad de acceso a códigos simbólicos de la lógica, es decir abstractos.

fortalecimiento de la de sus interlocutores. El producto de este proceso lo hemos denominado *saber sustentado* y se estructura, para el caso del conocimiento geométrico, en el razonamiento de tipo deductivo en el que la demostración y la verificación son acciones características que requieren de un alto nivel de abstracción y de un manejo lógico-matemático con el correspondiente dominio del lenguaje simbólico propio del campo de las matemáticas (registro matemático, propiamente dicho). Para otras áreas del conocimiento, se estructurará desde razonamientos de tipo inductivo o abductivo, el primero caracterizado por inferir la regla a partir de un caso y un resultado; el segundo, por ser de un alto nivel conjetural, por no constituir certezas y por inferir la regla y resultado –al mismo tiempo– a partir del caso.

El Componente Estratégico

Constituido por el conjunto de las estrategias básicas que se hacen pertinentes para la puesta en marcha de una didáctica de la argumentación y que se harán efectivas en la medida en que se creen (micro y macro) las condiciones curriculares requeridas. Las estrategias que hemos podido determinar, hasta ahora, son las siguientes:

- La *tematización de un problema de conocimiento*: que se realiza a partir del reconocimiento del saber intuitivo de los interlocutores y del propósito de formación que caracteriza la institución. Se identifica a partir de la expresión de vivencias, intereses, conocimientos, etc.
- La *utilización de la pregunta intencionadamente cognitiva*: pregunta que debe formularse para indagar y generar conocimiento. Su utilización es continua. Una pregunta conduce a la búsqueda de una respuesta, a la ampliación de la información, a la pesquisa de la profundidad conceptual, a la construcción de otra pregunta, a la complementación de conocimiento evidenciado.
- La *producción discursiva contextualizada*: condición fundamental para suponer la existencia de saber y su posibilidad de ser sustentado. Esta producción debe darse en su dos formas (oral y escrita) y debe transformarse cualitativamente a partir del fortalecimiento de las competencias comunicativas.
- El *encuentro de saberes*: estrategia en la que los sujetos a través de las producciones discursivas construidas a partir de la experimentación, de la documentación, de la investigación, etc., entrelazan los conocimientos alcanzados, los enriquecen y transforman su entorno cognitivo.

En forma esquemática, la propuesta pedagógica de que hemos dado cuenta puede representarse de la siguiente manera:

conceptual, estratégica y operativamente alrededor de la argumentación, como ha sido parcialmente el propósito de esta investigación por cuanto el trabajo con la *propuesta de argumentación* se constituyó en un pretexto para propender al establecimiento y transformación de procesos de innovación.

Con todo, una vez volvemos la mirada sobre las acciones y los procesos que constituyen nuestra intervención, podemos advertir la incidencia favorable que el discurso argumentado ha tenido en la construcción de individuos y comunidades capaces de autonomía y responsables de su propia libertad.

Una sociedad más igualitaria tendrá razón de ser en el momento en que los individuos puedan justificar sus saberes y cuestionar racionalmente los saberes propios y los de los demás. Y una didáctica de la argumentación puede ser uno de los caminos más despejados para la transformación de las prácticas pedagógicas y, por ende, de la sociedad en pleno.



BIBLIOGRAFÍA

BERMEJO, Vicente (editor). *Desarrollo cognitivo*. Madrid. Editorial Síntesis S.A. 1994.

BRUNER, Jerome. *Desarrollo cognitivo y educación*. Madrid. Editorial Morata S. L. 1995.

_____. *La educación, puerta de la cultura*. Madrid. Visor. Dis. S.A. 1997.

_____. *Realidad mental y mundos posibles. Los actos de la imaginación que dan sentido a la experiencia*. Barcelona. Editorial Gedisa. 1988.

CASTRO, Jorge V. y CORREA M., José Ignacio. *Enfoque sociopedagógico para el aprendizaje de la lengua materna*. Bogotá. Instituto Caro y Cuervo (Monografía de Magister). 1992.

CORREA Medina, José Ignacio; Dimaté Rodríguez, Cecilia, y Martínez Álvarez, Nancy. *Saber y saberlo demostrar. Hacia una didáctica de la argumentación*. Santa Fe de Bogotá. Universidad Externado de Colombia-Colciencias. 1999b.

FLAVELL, John H.; Miller, Patricia H. y Miller, Scott A. *Cognitive Development*. New Jersey. Englewood Cliffs. 1977.

GUTIÉRREZ Rodríguez, Ángel (Coordinador) *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la Geometría en Enseñanza Secundaria*



Así mismo, en esta situación encontramos una explicación inicial a la poca presencia del razonamiento deductivo en el desempeño de los estudiantes, en tanto no tienen contruidos entornos cognitivos que les permitan partir – con cierta facilidad– de leyes generales en su reflexión.

Surge, a estas alturas, una inquietud que se puede tomar como problema en otro momento: ¿es que acaso el razonamiento deductivo se debe circunscribir a los ámbitos de la lógica y las matemáticas? ¿No es pertinente para ayudar a explicar el accionar humano cotidiano, lleno de incertezas, dudas, transformaciones y correcciones permanentes? Esperemos que los docentes que estén interesados en continuar con el proyecto puedan ayudarnos a dilucidar estos interrogantes y, de paso, nos permitan encontrarle una contextualización a las palabras de Ian Mitroff (1981, p. 174), cuando afirma que “los científicos ‘ilógicos’ son una espina perpetua en el costado de la profesión y por esa razón, también, una provocación perpetua...”.

- Dadas las características del razonamiento de los estudiantes del proyecto, difícilmente fue posible aplicar a cabalidad *el modelo de Van Hiele*. Por ello, como se expuso en el documento, resulta preferible adelantar las adaptaciones necesarias con el fin de permitirle a los estudiantes un mayor desarrollo de sus procesos de construcción de conocimiento geométrico. Anotemos, adicionalmente, que la intervención de nuestro equipo mostró el valor de la geometría intuitiva y, con ella como punto de partida, concebimos la propuesta pedagógica que antes se expuso.

- La puesta en marcha de una didáctica de la argumentación crea las condiciones para que los interagentes de la semiosfera particular del aula construyan y sustenten conocimiento geométrico, a partir de acciones cognitivas individuales que se comparten en colectivos de discusión. Sin embargo, los logros que se puedan alcanzar en esa semiosfera tan particular son mínimos, si no se traslada la concepción de argumentación a una dimensión mayor del currículo que exija la participación plena de las comunidades educativas involucradas. La argumentación como propuesta didáctica verá sus frutos en sujetos participativos, críticos y constructores de cualquier tipo de conocimiento, si la escuela se convierte en el espacio en el que los interlocutores con acciones pedagógicas mancomunadas transforman las visiones, concepciones, haceres que se tienen frente al poder, al saber, al ser en todas sus dimensiones y no solamente para el campo de la geometría, sino para todos los ámbitos del conocimiento que se privilegian en el contexto escolar. Ello requiere de una transformación de la institución, que necesariamente debe partir de la estructuración de los componentes básicos que la organicen

carbono en una molécula; La elaboración de diagramas de flujo incide en la argumentación y sustentación de saberes; ¿La representación espacial topológica en el niño, limita sus aprendizajes en la lengua escrita?; ¿Cómo mejorar los formatos de facturación a partir de un manejo espacial apropiado?; Desarrollo del pensamiento espacial intuitivo brindando herramientas para que el niño o niña construya el concepto de figura, por medio de la argumentación.

La constitución de equipos de trabajo para el abordaje de la situación problema.

El diseño de estrategias didácticas para la enseñanza de la geometría en un contexto de sustentación de saberes y con el Modelo de Van Hiele como referente para la descripción de los niveles de desarrollo del pensamiento geométrico y para la aplicación de fases de aprendizaje.

- *Los instrumentos de recolección de la información:* para avanzar en el proceso investigativo y recoger la información requerida para los propósitos del estudio, se sugirió a los docentes la utilización de *protocolos* (véase Anexo 4) y *diarios de campo*, para registrar la información obtenida de los contextos particulares de aula, en estos instrumentos se hizo énfasis en los aspectos relacionados con: 1. el contexto, considerado como lugar y situación en la que se lleva a cabo la actividad; 2. el plan de trabajo, que constituye la descripción de la actividad; 3. la caracterización de procesos por las situaciones interesantes, relevantes, irrelevantes, problemas, relación con la disciplina, además de permitir el registro de preguntas, conjeturas, puntos débiles y fuertes, uso del lenguaje; 4. formas de participación de docentes y estudiantes; 5. evaluación y 6. conclusiones. El protocolo fue el instrumento utilizado por los docentes para recoger la información de su contexto particular, con algunos diarios de campo que sirvieron para complementar tal fin. Por otra parte, el equipo de investigación responsable del proyecto, requirió de:

- la elaboración de diarios de campo*, a partir de la aplicación de la técnica de observación participante, realizada en los momentos de actualización y socialización de las acciones del mismo, para ir construyendo la categorización inicial;
- la entrevista semiestructurada*, realizada a siete de los docentes que tuvieron diferentes niveles de participación en el proyecto, y cuyo propósito principal era ampliar la información registrada por los equipos en sus informes de investigación con miras a fortalecer la categorización inicial –de la cual nos ocuparemos en el siguiente capítulo– a través de la identificación de las propiedades de cada una de las categorías propuestas;
- el grupo focal*, conformado por siete docentes adscritos a una

embargo, a medida que transcurre su interacción dialógica¹³ con pares y maestros, se va constituyendo en un verdadero aprendiz pensador “que va indagando día tras día; participa, explica, comprueba, analiza, resume, plantea problemas y de la misma manera trata de buscarle una posible solución, no se conforma con lo que le dicen, presta mucho interés y esto para ir escogiendo lo que le puede servir para el mañana y así ir construyendo con esas bases su proyecto de vida sin desconocer el medio que lo rodea (Documentos previos).

El proceso

A partir de los objetivos trazados para el presente proyecto y de la relación establecida con los docentes participantes, se desarrolló un proceso en el que se destacan tres momentos principales:

- *La actualización e interlocución teórica:* caracterizada por el encuentro y socialización de saberes alrededor de tres campos temáticos: la cognición, la argumentación y la enseñanza de la geometría. Este primer momento se llevó a cabo a través de seminarios-taller liderados por el equipo de investigación y con la participación de la totalidad de docente inscritos. El propósito que orientó la fase estuvo encaminado a la consolidación de un conocimiento básico común que sirviera como punto de referencia para adelantar las acciones investigativas que exigía el proyecto. Los temas centrales tratados en estos encuentros fueron:

- *Cognición:* percepción, sentido espacial intuitivo, cognición en general y cognición espacial, aprendizaje, desarrollo cognitivo, pensamiento.

- *Argumentación:* procesos argumentativos, argumento, semiosfera, competencia comunicativa, competencia argumentativa.

- *Enseñanza de la geometría:* modelo de Van Hiele, medida, figura geométrica. Aplicaciones. Construcción de materiales didácticos para geometría.

- *El diseño de una propuesta de intervención pedagógica:* definido por los docentes a partir de:

La identificación de una situación problémica, de carácter geométrico, detectada en los diferentes contextos de aprendizaje que se constituyen en cada una las instituciones. Durante esta fase del proceso se definieron los siguientes problemas: *Hacia el concepto de medida; Las representaciones simbólicas a través de las planimetrías; Representación espacial del átomo de*

¹³ Incluye, entre otros, los procesos de textualización, negociación comunicativa, reflexión, verificación, compromiso, concentración y resolución de problemas.

El Componente de Construcción Cognitiva

Hace referencia a la manera como los sujetos construyen su conocimiento en contextos de sustentación y cómo, en esos contextos, se avanza en la constitución del saber geométrico. Comprende:

- Un *momento de aproximación intuitiva*, que se produce como resultado de la experimentación cotidiana y de la transmisión cultural, constituyendo así el *saber intuitivo* con el que los interlocutores intervienen en cualquiera de sus negociaciones comunicativas cotidianas. Un fragmento de este saber intuitivo debe ser privilegiado en la semiosfera particular del aula de geometría, a través de la tematización de un problema de conocimiento propio de la disciplina y que interesa a los interlocutores. Tematizamos, por ejemplo, el espacio, el polígono, la medida, o cualquiera otro aspecto que consideremos relevante para la construcción del saber disciplinar. La estrategia de la tematización nos lleva, casi de manera simultánea, al segundo de los momentos que interesan a este componente de la propuesta.

- Un *momento de acción-reflexión* de relaciones, caracterizado por dos eventos relevantes: *la acción-reflexión* sobre los objetos y acerca de sí mismo y *la acción-reflexión* con el otro, de los cuales consecuentemente resulta un *saber en la acción*, gracias a: 1) el acceso que los interlocutores tienen a la manipulación, la experimentación y la construcción de objetos en contextos físicos delimitados por la cultura en la que se desenvuelven; y 2) a la explicitación de estructuras, relaciones, características, etc., identificadas en esos objetos. Este saber en la acción se alcanza a través de estrategias de diálogo en las que la pregunta, intencionadamente cognitiva, juega un papel fundamental.

- Un *momento de la representación* que se concreta en la construcción y utilización de imágenes y símbolos. Al saber alcanzado en este momento, que lo hemos denominado *saber representacional*, implica el manejo de estructuras cognitivas complejas que son producto del análisis, la comparación, la clasificación, la abstracción y la conceptualización, entre otros. La elaboración de planos, mapas, objetos a escala con su respectiva codificación, la lectura y análisis de vistas, medidas, posiciones, etc., junto con el encuentro de saberes permanente, la negociación de sentidos, el uso de la pregunta intencionadamente cognitiva y la producción discursiva contextualizada, caracterizan el trabajo pedagógico de este momento.

- Un *momento de la sustentación de saberes* en el que el sujeto con el conocimiento disciplinar construido se pone en evidencia para fortalecer su propia construcción y, de manera colaborativa, para participar en el

de las instituciones participantes, con el propósito de tener una información ampliada acerca de la caracterización y comportamiento de las categorías planteadas inicialmente.



CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Una presentación de resultados

Hacia una propuesta pedagógica

Este proyecto considera pertinente –en aras de responder a las exigencias de la propuesta inicial– ofrecer este acercamiento a lo que se puede constituir en una propuesta de didáctica de la geometría, fundada en la argumentación, o –dicho de una manera que resulte más apropiada con el desarrollo del trabajo–, una didáctica de la argumentación con base en la geometría y, en lo posible, en otros saberes que circulan en el espacio académico. No obstante, lo que planteamos a continuación debe tenerse en el nivel de una hipótesis, susceptible de transformaciones, ampliaciones, refundiciones y cuestionamientos a que haya lugar. No es posible, teniendo en cuenta la metodología adoptada y los desarrollos actuales del conocimiento afirmar que esta propuesta es el modelo de trabajo pedagógico único y eficaz. Quizá, incluso, la experiencia posterior nos demuestre que tiene poca validez o que sí tiene alguna, pero no será sino en la acción práctica donde podamos comprobarlo. Hasta no llegar a ella no podemos tomar posición en uno u otro sentido.

Con el ánimo de dar cuenta de este resultado, digamos inicialmente que el interjuego semiótico dato teórico-dato de campo, que se ha venido realizando a lo largo del proceso investigativo y del cual hemos hecho acopio en los párrafos precedentes, nos ha aportado dos componentes estructurales para la conformación de una propuesta de didáctica de la geometría en el marco de la sustentación de los saberes, como se plantea en el objetivo de la presente investigación. Nos hemos permitido ubicar estos componente bajo una macroestructura que denominamos *Didáctica de la argumentación* y con la que –nos atrevemos a lanzar esta afirmación a manera de hipótesis– *es posible trabajar otros campos de conocimiento que competen al sistema educativo colombiano*. Los componentes a que hacemos referencia son el de construcción cognitiva y el de construcción estratégica.

Y surge, a partir del análisis de este enunciado, otro aspecto definitorio de las relaciones que se practican en la institución: la horizontalidad de las decisiones, el consenso negociado al que se llega luego de las discusiones académicas, didácticas, procedimentales, y demás, que se entablan allí: existe un espacio académico destinado a tal reflexión, *las reuniones de PEI*. Por ello es posible pensar en la trascendencia del trabajo, en la medida en que hace parte de sus expectativas pedagógicas y no surge como resultado de imposición alguna:

...porque nosotros sí pensamos seguir con el proyecto, porque estamos inquietos, pero a ver (...). No somos duchos en el modelo, la investigación tiene un espacio muy reducido de tiempo y acción, también, pero yo pienso que de alguna manera, aunque el modelo no está muy dado para una determinada forma, para una determinada didáctica, el modelo podría permitirnos a nosotros encontrar alternativas de trabajo, de pensamiento espacial de los muchachitos, como más organizadas, como más estructuradas (EG-01).

Y naturalmente, esa visión que se tiene del estudiante como interlocutor válido se hace evidente en la relación cotidiana, en la construcción solidaria de sentido que se lleva a cabo en el aula de clase: la discusión desprovista del influjo de jerarquizaciones arbitrarias que surgen del ejercicio irracional del poder, se traslada al salón de clase y es posible, entonces, reconocer –sin rubores– que,

...nuestro modelo pedagógico (es gracioso, yo siempre repito lo mismo) es completamente promiscuo. Nosotros llevamos como cinco años en este tipo de discusiones, muchas lecturas, muchos errores, muchas llegadas, aterrizadas así como duro, pero hemos llegado a la conclusión de que no nos casamos con una escuela o con una corriente pedagógica específica: reconocemos nuestra carga histórica y nuestra carga cultural y la de los niños.

(...) Nosotros dijimos siempre –y eso lo tenemos como claro, en eso sí no nos hemos movido mucho– que íbamos a darle un enfoque desde el desarrollo genético, entonces hay que meterse con Piaget; pero, en lo social, esto por ejemplo de los procesos de argumentación, sentarnos con los niños y discutir una problemática sin que ellos se sonrojen, sin que se callen porque ‘me da pena’, eso sí es vigotskiano... (EG-01. El resaltado es nuestro).

El interlocutor del docente, cuando llega a la institución, presenta características que nos permiten ubicarlo dentro de la categoría bruneriana del aprendizaje imitativo, dado que responde a la estrategia de acumulación unidireccional de conocimiento que fomenta la educación tradicional. Sin

accionar pedagógico, a saber: análisis, comprensión, desarrollo del pensamiento, comprensión del mundo, lecto-escritura, habla, escucha, comunicación y diálogo, susceptibles de ser formalizados de la siguiente manera:



Esquema realizado por los docentes del CED Diana Turbay I, con el ánimo de dar cuenta de su propuesta de desarrollo del pensamiento.

Gracias, pues, a la claridad conceptual de la comunidad y a los planteamientos del PEI, fue posible que nuestro proyecto se imbricara plenamente con las necesidades institucionales, en la medida en que el desarrollo del pensamiento matemático hace parte integrante del mismo PEI. Por ello, resulta coherente la explicación dada por una de las maestras del CED Diana Turbay I:

Pues, sí, la verdad fue que también cuando asumimos esto dijimos que no nos íbamos a complicar la vida, porque nosotros vamos en una trayectoria y en una dinámica dentro de nuestro PEI y que no fuese que, de pronto, el proyecto de geometría nos fuese a mandar dentro de otra dinámica... Que lo asumamos y que lo tomemos dentro de esa misma dinámica para no sentir que es como algo de fuera, impuesto, impositivo, entonces fue como una manera de hacerlo, de la misma manera como se trata y se trabaja lo otro, en eso estuvimos de acuerdo (EG-01).

manifiesta en el aula, y pueda convertirse en un interferente para el logro de los propósitos que se hayan planteado dentro de este contexto más particular del aula donde se trabaja su disciplina.

Visión de los interlocutores

En las líneas inmediatamente anteriores se ha hecho mención de la visión que se tiene del maestro y del alumno dentro del contexto institucional y a través de su práctica pedagógica, lo cual nos ha permitido un acercamiento a estos interagentes fundamentales de la semiosfera particular del aula. Algo hablamos ya de los maestros. El segundo interlocutor esencial es el estudiante, cuya visión se define a partir de ser considerado, en no pocas ocasiones, como un aprendiz imitativo, receptáculo, que realiza un proceso todavía muy lento para lograr la meta de ser aprendiz pensador. Este interlocutor –ya lo hemos esbozado– se encuentra influido por un entorno cultural y social conflictivo y con muchas dificultades que se traducen primordialmente en baja motivación y en poco interés hacia las actividades escolares. Es de anotar que se echa de menos un mayor desarrollo teórico, manifiesto en una competencia comunicativa limitada, en especial en lo que se refiere al nivel del aula, por cuanto no hace evidente un conocimiento de los saberes que se manejan en las diferentes disciplinas, ni siquiera durante las interacciones en los contextos en los que se hace pertinente; situación ésta que dificulta el desarrollo de procesos comunicativos enmarcados en un contexto de sustentación de saberes. De todas maneras, sería importante centrar la atención –también– en la visión que el maestro tiene al respecto:

Considerando que se les ha explicado a los estudiantes que el trabajo que se realiza en la clase de ciencias es observar características (con ojos y oídos principalmente) fenómenos, conceptos, frases, comparándolos con los saberes de cada uno y con los que hay en el cuaderno, explicarlos, clasificarlos y complementarlos, es difícil lograrlo en la mayoría, sólo lo hacen 6 o 7 estudiantes en cada salón (Primer informe, grados novenos. El resaltado es nuestro).

– Centro Educativo Distrital Diana Turbay I

Panorama de la institución, concepción de la práctica pedagógica y visión de los interlocutores

Provista la institución de un PEI (Escuela para el desarrollo) que responde a la conceptualización coherente que han llevado a efecto los miembros de la comunidad académica, alrededor de dos ejes (lúdica y expresión), arroja entre sus resultados la exposición de una serie de procesos que se fomentan en el

...decidimos desde un principio trabajar el mismo problema; con los otros compañeros, por ejemplo, es el lazo de afectividad que hay, de compañerismo, ¿cierto?, pues entonces eso también dio lugar a que nos acercáramos y decidiéramos formar un grupo de trabajo y pues determinamos un tema que pudiéramos desarrollar, que se pudiera desarrollar por todo el grupo que quería trabajar en este aspecto. (...) O sea, fue muy fácil compaginar el grupo, tomar un tema para desarrollarlo (E-31).

Concepción de la práctica pedagógica

La institución posee un PEI que da cuenta de innegables avances teóricos, académicos, pedagógicos, axiológicos e infraestructurales. No obstante, subsisten diferentes metodologías, entre las que prima la clase magistral, estructurada a partir del discurso recontextualizado de las diferentes disciplinas que conforman la estructura curricular de la institución. Sin embargo, hay que reconocerlo, se plantea como una prioridad –desde las diferentes áreas– la transformación de modelos y prácticas pedagógicas, por cuanto existe en los docentes la conciencia de que se está en un proceso de crecimiento, y hacen evidente la intención de crear condiciones para que el aprendizaje sea cada vez más significativo y se pueda alcanzar un desarrollo de pensamiento mucho más complejo que el que hasta ahora se ha venido logrando:

(...) nosotros en el colegio estamos en un proceso de crecimiento. Vamos muy lento, pero sí se han logrado cosas; pero definitivamente, nosotros tenemos estudiantes que vienen de un proceso en el cual se ha desarrollado todo imitativamente, todo se les da, no se da dentro del proceso de clase un momento en el que puedan construir, en el que ellos puedan construir su propio conocimiento, pero sí encontramos, en la gran mayoría de estudiantes, un proceso que viene guiado a través de un desarrollo inductivo bien marcado (E-09).

Esta necesidad de cambio de la práctica pedagógica está acompañada por una manifiesta intención de cualificación, tanto a nivel profesional como personal, por cuanto se considera necesaria para alcanzar esos procesos de transformación de los que se ha hablado permanentemente. Existe apertura hacia las propuestas de trabajo pedagógico que llegan a la institución; sin embargo, se espera que éstas se limiten a dar cuenta de las necesidades que la misma institución vaya generando. Con ello se busca no ir más allá de lo existente, de lo estrictamente contextual inmediato, pues consideran que trabajos mayores –de mayor alcance– corren el riesgo de convertirse en una carga adicional a su trabajo pedagógico que obstaculice el desarrollo que se

de grupo, como que toca hacer ese proyecto. Pero no, un trabajo en equipo, fuerte, no lo hay. Yo pienso que no lo hay (E-34. El resaltado es nuestro.).

Si a esta problemática añadimos la visión que se tiene del interlocutor (especialmente del estudiante), que incluso lleva a la interiorización del discurso signado por tal visión, nos permite conjeturar dificultades para la construcción cognitiva en otros momentos de la relación pedagógica, dado el concepto de *referencia inmanente* manejado por la micropolítica, el cual expone que no importa cuál sea el contenido de nuestro discurso, siempre estamos ofreciendo a los otros la visión que tenemos del contexto en el que intervenimos y, por ende, reproducimos sus estructuras ideológicas (Markel. 1999, p. 64). Basta, para el efecto, asociar lo que dice este alumno de grado noveno con lo expuesto en relación con las comunidades académicas artificiales de que hemos dado cuenta antes:

...para hacer una evaluación del trabajo realizado durante este tiempo yo... organizaría o seleccionaría a los alumnos dentro de tres grupos: (1) el grupo del que no hace nada, del que no le importa el trabajo, (2) el que va con la corriente del trabajo, pero que es muy despreocupado de ese trabajo y (3) los que verdaderamente se interesan por ese trabajo. De los 36 alumnos que hay en el salón, yo encuentro que a cinco no les importa hacer el trabajo, que están pensando en otras cosas (...). Y de los que van con la corriente del trabajo, que yo hago el trabajo porque es mi deber, más o menos hay unos 25 estudiantes. Y encontramos el grupo de los que les importa el trabajo, hay autonomía para desarrollar el trabajo y se crean expectativas, ¿no? (...) cinco estudiantes (Socialización de avances).

Por otra parte, es necesario reconocer que –a pesar de las dificultades que hemos anotado– se fue conformando una comunidad académica signada por la reconstrucción de las relaciones de poder dentro de la institución, lo cual devino trabajo colegiado de tipo colaborativo, básico para la evolución del sistema educativo contemporáneo: “uno de los metaparadigmas nuevos y más prometedores de la era postmoderna es el de la *colaboración*, como principio articulador e integrador de la acción, la planificación, la cultura, el desarrollo, la organización y la investigación” (Hargreaves. 1996, p. 268). Este trabajo colegiado colaborativo redundaba –entre otras cosas– en: apoyo moral de los miembros del equipo, el incremento del impacto de su labor, la reducción del exceso de trabajo, una mayor capacidad de reflexión y de respuesta a la institución, etc. Bien lo exponen algunos integrantes de dicha comunidad en ciernes, cuando dicen que los motivos que los impulsaron a trabajar en equipo fueron dos: primero la disciplina, pues con los compañeros del área.

una mayor flexibilidad, una mejor capacidad de respuesta y una mejor comunicación (Cfr. Hargreaves. 1996, p. 115), como correspondería a estos finales de siglo, sino –más bien– ha implicado una sensación de sobrecarga laboral, producto de mantener intacta buena parte de la rigidez de las estructuras curriculares heredadas de los sistemas educativos anteriores.

Los profesores detectan y manifiestan la existencia de un débil compromiso de los padres de familia con el proceso de aprendizaje de sus hijos, que contrasta con el compromiso manifiesto de otros integrantes de la comunidad educativa (los maestros, por ejemplo) de la institución, con su trabajo pedagógico que sólo alcanza a hacerse evidente en el contexto específico del aula, pero que no puede enriquecerse con espacios de discusión más amplios, dadas las limitaciones de tiempo y espacio que sufren en la institución, lo que ha significado –entre otras cosas– el poco avance en la motivación del estudiante por el aprendizaje y una mayor dificultad para alcanzar niveles de integración curricular.

... Es que los muchachos están acostumbrados, o los acostumbramos, a que cada asignatura es como si fuera un mundo independiente. Entonces, cuando viene uno a manejar conceptos de otra disciplina, ellos no los relacionan... (E-31).

Además de limitaciones en la plena estructuración de sus equipos de trabajo colegiado, teniendo que recurrir a la conformación de comunidades académicas artificiales y transitorias que buscan responder a los requerimientos de instancias directivas (rectores, Secretaría de Educación, gobierno nacional, etc.), quienes les plantean permanentes exigencias que ya hacen parte de nuestro actual sistema educativo.

Un ejemplo claro de lo que exponemos tiene que ver con la manera como se han venido conformando los grupos de trabajo de la institución, los cuales caen dentro de lo que Hargreaves denomina *colegialidad artificial*, en la que las relaciones de trabajo en equipo carecen de espontaneidad, voluntad de libre asociación, orientación a la solución de problemáticas sentidas, etc. (1996, p. 221). Más bien, se nota la existencia de unos grupos reglamentados por la administración, obligatorios, orientados a la implementación de políticas estatales y estáticos en -el uso de tiempos y lugares para desarrollar su actividad. No de otra manera se expresan los docentes al respecto:

Sí, los venimos teniendo (los equipos de trabajo) a raíz de los proyectos transversales que hay que desarrollar, ¿no? entonces, *se da ese trabajo como... pero yo no lo llamaría de equipo, ¿no?* Esos son más trabajos como

La semiosfera

La semiosfera, entendida como el único espacio que posibilita la generación de sentido, constituido en un *continuum* semiótico, complejo y abstracto, sin el cual resulta imposible concebir cualquier proceso comunicativo y la subsecuente producción de nueva información (Lotman. 1996, pp. 22-23), adquiere plena importancia para el presente estudio, por cuanto es en ella en la que se hace posible la circulación de mensajes con contenidos e intenciones específicos, delimitados por fronteras que permiten tanto el mantenimiento de la individualidad dentro de la heterogeneidad semiótica, como la existencia de múltiples fronteras que especializan cada parcela de sentido y que permiten el paso de información con miras a su enriquecimiento en la construcción última del sentido global.

El abordaje de esta forma de contextualización del universo semiótico de la presente investigación, a partir de la puesta en escena de los diferentes tipos de sentido construidos por los sujetos participantes¹¹, nos ha permitido identificar una visión de institución, una visión de práctica pedagógica y una visión de maestros y estudiantes como interlocutores válidos, a partir de las cuales se pueden caracterizar, especialmente, las dos instituciones que tuvieron participantes plenamente comprometidos con el proyecto:

– *Centro Educativo Distrital Marruecos y Molinos (jornada de la mañana)*

PANORAMA INSTITUCIONAL: el Centro Educativo Distrital Marruecos y Molinos J.M., concibe su Proyecto Educativo Institucional como la “respuesta al sueño de ser felices mientras aprehendemos” y lo estructura a partir de cuatro ejes fundamentales: el cognitivo, el ético-valorativo, el socionatural y el comunicativo. Su “semiosfera particular”¹² como a bien tiene denominarla el grupo de Ciencias Naturales, se caracteriza por ser un espacio en el que los problemas económicos, sociales y familiares de los estudiantes tienen un peso importante en su actitud poco interesada y, en ocasiones, apática hacia el conocimiento escolar, que incide en la baja efectividad de los procesos de enseñanza. De igual manera, se considera que la institución no ha logrado la evolución histórica requerida para alcanzar un cambio de paradigma que le permita ajustarse a las necesidades que demandan las nuevas exigencias educativas. La compresión del tiempo y el espacio no ha significado para la institución

¹¹ Hecha evidente en manifestaciones orales y escritas que han sido registradas a través de diarios de campo y entrevistas realizados en el contexto de cada una de las instituciones mencionadas.

¹² Denominación utilizada en la socialización de los avances del proceso de investigación, realizada por los profesores participantes el día 13 de septiembre.

partir de la información recolectada) con el *desarrollo teórico*. El propósito fundamental es la construcción o la reconstrucción teórica, ya sea en el momento mismo de la recolección del dato o al finalizar el proceso de análisis. Por lo tanto, el componente teórico se convierte en un elemento fundamental de la metodología.

El MECC se ocupa –entonces– de generar categorías conceptuales, sus propiedades y las hipótesis que surgen de las relaciones entre dichas propiedades. El propósito fundamental no es la verificación sino la generación de teoría a partir de la información conceptual y de campo que se recoge a lo largo de la investigación (Cfr. Valles, Miguel S. 1997, p. 347). Desde este marco se ha pretendido generar una propuesta de didáctica de la argumentación para el caso específico de la geometría, a partir de la comparación entre los elementos que constituyen el fundamento teórico y los datos que se han recogido en la intervención de campo que ha llevado a efecto esta investigación, y en cuya primera fase se han identificado la *percepción, la construcción de conocimiento y la sustentación de saberes* como categorías iniciales.

La población

La población que participó en la investigación pertenece a cinco instituciones de la localidad 18 del Distrito Capital, las cuales conforman la RED EDUCATIVA que se encuentra incorporada al desarrollo de la presente investigación. Las instituciones fundamento de nuestro accionar son: *Centro Educativo Distrital Molinos y Marruecos*, jornada de la mañana, *Centro Educativo Distrital Diana Turbay I*, jornadas de la mañana y de la tarde; como participantes plenos. Es de anotar que, adicionalmente, en determinados pasajes del trabajo se contó con la participación de algunos docentes de las instituciones *Centro Educativo Distrital Paulo VI*, *Centro Educativo Distrital El Consuelo* y *Centro Educativo Distrital Molinos del Sur*. Para continuar en nuestro empeño, se torna imprescindible realizar una caracterización de los participantes, docentes y estudiantes, cuyas formas de intervención posibilitaron el planteo de la siguiente clasificación:

- *Participante pleno*, por cuanto desarrolló las fases completas del proceso investigativo, y al cual pertenecen docentes y estudiantes de las dos primeras instituciones mencionadas.
- *Participante parcial*, quien acompañó el proceso en las fases de actualización e interlocución teórica, y al que pertenecen el resto de profesores inscritos en el proyecto.

Identificación de propiedades de las categorías: surgen de la caracterización de las categorías y de la realización de la codificación, el análisis y la recolección de otros datos que puedan complementar los iniciales (éstos pueden ser teóricos o de campo).

Delimitación de la teoría: en la que se consolida la explicación y comprensión del fenómeno, desde categorías conceptuales, y se proponen niveles de aplicación de la teoría.

Reconstrucción teórica: momento en el que se consolida una propuesta de enriquecimiento teórico, a partir de los hallazgos derivados del momento anterior.

Enmarcados dentro de las perspectivas de los enfoques cualitativos y, en especial, dentro de la corriente denominada *Metodología Teóricamente Sustentada*, el trabajo de intervención y la revisión teórica buscaron dar luces a la resolución del problema de investigación que ha sido la razón de este proyecto:

La recuperación del “sentido espacial intuitivo” y el desarrollo de procesos argumentativos en el aula, así como la estructuración de diferentes modalidades de pensamiento, tienen su punto de partida en una didáctica de la argumentación sustentada en los planteamientos de la geometría activa.

Problema investigativo que hemos querido encarar teórica y metodológicamente con el objetivo de:

Diseñar una propuesta didáctica que, sustentada en los aportes de la geometría activa, propicie la recuperación del “sentido espacial intuitivo” y el desarrollo de procesos argumentativos en el aula, así como la estructuración de diferentes modalidades de pensamiento, de tal manera que al finalizar el proceso de formación básica los sujetos tengan una cultura geométrica con visión histórica interdisciplinar, apliquen estos conocimientos para modelizar, crear o resolver problemas reales y mejoren sus procesos de razonamiento (deductiva e inductivamente).

El arraigo en la construcción teórica desarrollada se hace pertinente y necesario en la medida en que esta *metodología* se fundamenta en el interjuego semiótico del desarrollo teórico y el dato que se recoge y analiza sistemáticamente. Se lo considera un método de estudio comparativo constante (MECC), en la medida en que se confrontan la *categorización*¹⁰ (originada a

¹⁰ Procedimiento fundamental para la satisfactoria implementación de este tipo de enfoque.

Como se aprecia en el cuadro anterior, el modelo⁹ incluye dos aspectos: el *DESCRIPTIVO*, conformado por cinco niveles de razonamiento, está orientado a explicar cómo razonan los estudiantes; y el *prescriptivo*, que da pautas para seguir en la organización de la enseñanza para lograr que los estudiantes progresen en su forma de razonar. El modelo, visto desde la esquemática exposición teórica, puede constituirse en una herramienta eficaz para la instauración de procesos argumentativos en los que subyacen saberes susceptibles de ser potenciados mediante la construcción cognitiva en geometría. Faltará su contrastación con la realidad educativa de las instituciones educativas para conocer el verdadero valor pedagógico que puede subsistir en ellas, en especial si tenemos en cuenta que cualquier sustentación de saberes (*argumentación*, para nosotros) requiere de la adaptabilidad de buena parte de los niveles y las fases que hemos enunciado, en relación dialógica con todos los demás saberes construidos individual y socialmente.



ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

Acerca del Proceso de Intervención

El enfoque del diseño

La *Metodología Teóricamente Sustentada* (MTS), a partir de la cual se ha desarrollado el presente proyecto de investigación, considera cuatro momentos que se entrelazan y en ocasiones operan simultáneamente (Cfr. Valles, Miguel S. 1997, pp. 348-354).

Categorización inicial: se produce a partir del dato empírico, obtenido a través de la utilización de diferentes estrategias (observación, entrevistas, cuestionarios, análisis de texto, etc.). En esta primera fase se identifican elementos comunes y se los agrupa bajo una denominación (código) conceptual, fundada en el dato mismo, en la experiencia del investigador y el cuerpo teórico que sustenta la investigación.

⁹ Para la presentación del modelo de Van Hiele hemos tomado como base, entre otros, los siguientes textos: MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL (1998). *Matemáticas. Lineamientos curriculares*; Adela Jaime Pastor (1994). *¿Por qué los estudiantes no comprenden la geometría?*; W. F. Burger & J. M. Shaughnessy (1986). *Characterizing the Van Hiele Levels of Development in Geometry*; M. L. Crowley (1987). *The Van Hiele Model of the Development of Geometric Thought*; y Ángel Gutiérrez Rodríguez (Coord.) *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría en la enseñanza secundaria basada en el modelo de razonamiento de Van Hiele*.

las define, identifica relaciones entre los elementos constitutivos de éstas y elabora razonamientos para hacer demostraciones”.

Veamos en detalle la descripción del modelo, para adentrarnos en su propuesta inicial y, posteriormente, buscar sus aportes a una propuesta de didáctica de la geometría que contemple la producción discursiva argumentada y, por ende, la producción de razonamientos de índole formal e informal.

ASPECTOS	NIVELES DE RAZONAMIENTO
<p>D E S C R I P T I V O</p>	<p>1. <i>De reconocimiento</i>: las figuras se perciben de manera global, como totalidades unitarias. No hay claridad acerca de partes ni propiedades.</p> <p>2. <i>De análisis</i>: ya se reconocen las figuras por sus partes y/o elementos constitutivos; sin embargo, aún no hay capacidad para establecer relaciones lógicas entre ellos.</p> <p>3. <i>De clasificación</i>: aquí comienza el verdadero razonamiento matemático: ya hay posibilidades –limitadas, es cierto– de descubrir y generalizar propiedades.</p> <p>4. <i>De razonamiento deductivo</i>: los individuos ya están en capacidad de entender y realizar procedimientos lógicos formales y pueden elaborar construcciones propias originales.</p> <p>5. <i>De rigor formal</i>: el más alto nivel de razonamiento, el cual permite a los usuarios comprender y utilizar planteamientos de diferentes procedencias teóricas, con el mayor rigor matemático que se conoce.</p>
<p>P R E S C R I P T I V O</p>	<p>FASES</p> <p>1. <i>Información</i>: permite un acercamiento primario de maestro y estudiante. Uno y otro pueden obtener la información previa necesaria para saber el tipo de trabajo que se va a realizar.</p> <p>2. <i>Orientación dirigida</i>: busca que los estudiantes descubran, comprendan y construyan los conceptos, propiedades, figuras que se trabajarán.</p> <p>3. <i>Explicación</i>: resulta ser el primer momento de socialización de saberes entre pares, con las intervenciones del maestro que sean estrictamente necesarias.</p> <p>4. <i>Orientación libre</i>: propicia que los estudiantes busquen maneras adecuadas de aplicar los conocimientos construidos para solucionar otras problemáticas en situaciones de aprendizaje diferentes.</p> <p>5. <i>Integración</i>: procura convertirse en el espacio óptimo para el diálogo intertextual de los diferentes conocimientos construidos hasta ahora, en las fases anteriores.</p>

De la percepción a la construcción de conocimiento

La construcción del conocimiento se enmarca en un contexto de dos tipos significativos de producción: la *lingüística*, en la que el lenguaje hace posible la representación y transformación cualitativa de los procesos psicológicos, y la *cognitiva*, en la que se ponen en juego tanto los procesos psicológicos superiores⁶ como los sistemas de conocimiento⁷ a los que recurre el sujeto para representar la realidad en su memoria. Uno y otro tipo de producción tendrán en su base la percepción, como proceso que, aunque no constituye la estructura cognitiva completa, sí define rasgos fundamentales de esa construcción y que, como ya lo hemos dicho, se constituye en aspecto de primordial importancia para la construcción del conocimiento específico de la geometría.

Ahora bien, con el ánimo de establecer nexos efectivos entre los presupuestos teóricos adoptados en relación con la construcción cognitiva, la argumentación y el área específica de la geometría, este equipo investigador ha asumido el *modelo de Van Hiele* como constructo óptimo para analizar las implicaciones pedagógicas que dichos presupuestos puedan tener en la educación colombiana, al relacionarlos con lo que hemos denominado *sustentación de saberes*, la cual no es otra cosa que la reconceptualización de la argumentación puesta al servicio del desarrollo cognitivo.

Un modelo de descripción del pensamiento geométrico

Diferentes teóricos y pedagogos consideran al modelo de Van Hiele como “la propuesta que parece describir con bastante exactitud esta evolución (la del pensamiento geométrico, que va de lo intuitivo a lo deductivo) y que está adquiriendo cada vez mayor aceptación a nivel internacional en lo que se refiere a geometría escolar” (MEN, 1998, p. 58). Por ello se constituye en el punto de referencia de nuestro trabajo, en la medida en que –como se expone en la evaluación del informe de avance⁸ de este mismo proyecto– “permite describir estados o niveles de pensamiento geométrico categorizados según la forma como el estudiante describe figuras planas (triángulos, cuadriláteros),

⁶ Vygotsky considera como *procesos psicológicos superiores* tanto la percepción como las operaciones sensorio-motrices, la atención y la memoria, “cada una de las cuales es parte integrante de un sistema dinámico de conducta (...) sistemas que cambian radicalmente en el curso del desarrollo del niño (y en los) que el lenguaje introduce cambios cualitativos, tanto en su forma como en su relación con otras funciones” (1979, p. 57).

⁷ Los sistemas de conocimiento a que hacemos referencia corresponden a las *formas* como el sujeto representa la realidad en su memoria y que, según Mayor, podrían clasificarse así: *proposicional, analógico, procedimental, distribuido y paralelo y de modelos mentales* (1993, pp. 15-16).

⁸ Presentado al IDEP en mayo de 1999.

La visión del estudiante como conocedor, que atiende con mayor relevancia el conocimiento cultural acumulado, evitando así el riesgo que se tiene en la anterior visión de sobreestimar el intercambio social en la construcción del conocimiento. Desde esta perspectiva, se sostiene que “la enseñanza debería ayudar a los niños a entender la distinción entre el conocimiento personal, por una parte, y lo que se da por conocido en una cultura, por otra” (Íbid., p. 79). El concepto de desarrollo aquí planteado surge –como en el caso anterior– de las formas como los sujetos hacen evidentes sus maneras de representar el mundo, con la diferencia de que esa representación ha sido construida en el marco de la discusión con el conocimiento acumulado por la cultura⁵. La relación existente entre conocimiento personal (individual) y conocimiento cultural (supraindividual), determinará las características que el sujeto cognoscente va perfilando a lo largo de su exposición a los conocimientos culturales, contrastados permanentemente con los conocimientos personales alcanzados.

Estas dos visiones se pueden desarrollar en el contexto educativo a partir de la consolidación de una didáctica de la argumentación, constituida por elementos tales como los que se esbozan a continuación, y que se revisarán con mayor detenimiento durante el análisis de la intervención en las instituciones “Diana Turbay I” y “Marruecos y Molinos”, de la localidad 18:

- La definición de la semiosfera particular del aula: interagentes con roles específicos (argumentador-contra-argumentador), límites a la vez demarcados y difusos, circulación y entrecruce de múltiples códigos y discursos con un contenido semiótico ilimitado.
- La utilización (por los interagentes) de un discurso geométrico argumentado.
- La elaboración del mensaje del texto, argumentado con el saber específico (matemático, geográfico, geométrico, etc.) que se encuentra demarcado por la semiosfera particular del aula.
- La utilización de estrategias argumentativas: comparación, analogía, etc.

Elementos que, en el contexto de aprendizaje del componente geométrico, necesariamente tienen que atender con mayor precisión al desarrollo de procesos de percepción, y muy especialmente de percepción espacial, como condición básica para la construcción de conocimiento geométrico, del cual nos ocuparemos en el siguiente apartado.

⁵ Al respecto del concepto de cultura, partimos inicialmente de reconocer que ella cobija todas las producciones humanas a un punto tal que –como plantea Lotman– la cultura presenta la “inteligencia supraindividual” que es interiorizada por cada individuo y a la que aporta con miras a su construcción y reconstrucción permanentes (1998, p. 41).

propia existencia" (Íbid., p. 90). Vygotsky afirma que el desarrollo ocurre cuando se da el paso de una forma de actuar no consciente a otra consciente, proceso que ocurre en varios planos y que se hace evidente en el cambio que se produce cuando un instrumento de mediación pasa del estado de inexistencia hasta llegar a instalarse en el nivel mental. Este proceso de desarrollo se plantea en tres momentos:

- Incapacidad en el uso de la posible ayuda de un estímulo externo con otro mediador.
- Uso del estímulo externo como signo mediador.
- Uso del estímulo interiorizado como instrumento mediador.

Estas dos perspectivas, con aportes altamente significativos para el desarrollo cognitivo, han provisto a los psicólogos, y muy especialmente a los maestros, de un cuerpo de conocimiento a partir del cual se define la dinámica que se presenta en el aula de clase. Esta dinámica, enmarcada en la visión constructivista (interaccionista en Piaget y sociocontextual en Vygotsky), ha sido desarrollada a través de visiones que posibilitan el diseño de espacios de aprendizaje demarcados por la creencia, el saber, la intención, etc., de que un sujeto aprendiz alcance un tipo específico de conocimiento⁴. Entre estas visiones destacamos las dos que, a nuestro juicio, constituyen el marco propicio para el aprendizaje del conocimiento geométrico:

La visión del estudiante como pensador, fundamentada en el intercambio intersubjetivo en el que se reconoce abiertamente la perspectiva del que aprende, estimulando el "entendimiento a través de la discusión y la colaboración, animando al aprendiz a expresar mejor sus opiniones para conseguir algún encuentro de mentes con otros que puedan tener otras opiniones" (Bruner, 1997, p. 74). Las investigaciones que más desarrollo han alcanzado en esta visión son: la intersubjetividad, las teorías de la mente y la metacognición. En todas ellas la relación con el otro, la discusión y la argumentación, son aspectos esenciales. El desarrollo será abordado desde esta perspectiva a través de las formas como los sujetos hacen evidentes sus maneras de representar el mundo; es decir, a través de la estructuración conceptual que ellos hacen de la realidad, y que se hará evidente a través de la creación de espacios en los que será necesario el discurso argumentado para poner en evidencia el conocimiento construido.

⁴ Jerome Bruner plantea cuatro modelos de organización de la mente de los aprendices y de sus relaciones con la cultura, que han sido relevantes para nuestras instituciones educativas en los últimos tiempos: el modelo del aprendiz *imitativo*; el modelo del aprendiz *receptáculo*; el modelo del aprendiz *pensador*; y el modelo del aprendiz *conocedor* (1997: 71-80).

162), los cuales manejan aspectos relacionados con el *cambio*, con la *edad* y, en la mayoría de los casos, con las *constantes* y las *interacciones*, que se dan a lo largo del tiempo (Bermejo. 1994, pp. 41 a 43). La relación que los diferentes teóricos establecen entre estos enfoques es la que ha permitido lograr una caracterización de los aspectos más relevantes del comportamiento cognitivo de los sujetos en uno u otro momento de su desarrollo, y que se conoció desde la perspectiva piagetiana como *estadios*, pero que hoy –sin tener aún una nueva propuesta– es un concepto que ha sido fuertemente discutido por la psicología cognitiva en general. Pero a pesar de este cuestionamiento, la definición y caracterización de los diferentes momentos de *maduración*, *evolución o cambio* –tampoco en este sentido hay unanimidad de criterios– han aportado una información útil para el contexto educativo, por cuanto han dado la posibilidad a la pedagogía de ir consolidando tanto su propio constructo teórico como su papel dentro del contexto que la teoría ha ido generando.

Dos son las corrientes que han tenido principal importancia en estos últimos tiempos para el trabajo pedagógico, por su explicación de los fenómenos del desarrollo: *la corriente piagetiana*, la cual marcó el principio de transformación del concepto de conocimiento y que se sustenta en el paradigma de la equilibración (asimilación-acomodación) y *la corriente vygotskiana* (de antigua data aunque de reciente difusión) que ha propiciado la consolidación de asombrosos aportes a la psicología cognitiva; es conocido que la propuesta de Vigotsky funda su paradigma en la denominada zona de desarrollo próximo, en la cual el concepto de *mediación* se plantea como fundamento de desarrollo de los denominados “procesos psicológicos superiores”: percepción, memoria, pensamiento y lenguaje.

Una y otra perspectiva de estudio han definido las características del desarrollo de los sujetos que consideran pertinentes para sustentar su modelo teórico. Piaget se fundamenta en la concepción interaccionista en la que se considera que “la inteligencia se origina y progresa por la necesaria interacción del sujeto con el objeto (durante la cual) ambos se modifican mutuamente, de lo que resulta un progresivo desarrollo del sujeto y una consecuente transformación de las funciones de los objetos” (Martínez. 1994, p. 88). Uno de los grandes aportes a la psicología cognitiva –desde la concepción interaccionista– fue el planteamiento del desarrollo cognitivo como una secuencia ordenada de estadios (SENSOMOTOR \longrightarrow OPERACIONAL CONCRETO \longrightarrow OPERACIONAL FORMAL).

Vigotsky, por su parte, planteó que el desarrollo humano “consiste en complicadas transformaciones cualitativas que se han llevado a cabo a lo largo de la humanidad, y que cada individuo debe reconstruir y actualizar en su

Desbrozar el camino del Desarrollo Cognitivo

Para nosotros, el concepto de *desarrollo cognitivo* se constituye en el punto de partida para cualquier reflexión que, en torno a los procesos educativos, podamos adelantar en cada uno de los instantes de intervención, trátase de investigación, cualificación, innovación o evaluación institucional.

Es en esta medida que nos hemos visto precisados a reconocer que el estudio del desarrollo cognitivo³ ha significado –para la psicología– el hallazgo de uno de sus más representativos objetos de investigación y que, en esa medida, su evolución ha posibilitado la construcción de un cuerpo teórico cada vez más amplio que, como era de esperarse, ha respondido a los momentos que han caracterizado el desarrollo de esta ciencia pero que, paradójicamente, ha ampliado la cantidad de interrogantes que aún permanecen sin ser resueltos.

Uno de los momentos que ha marcado una significativa evolución de la ciencia corresponde a la aparición de las denominadas *ciencias cognitivas*, surgidas alrededor de 1950, cuyo objeto fundamental de estudio es el conocimiento. Esta situación ha permitido el encuentro de diferentes disciplinas (lingüística, psicología, neurología, epistemología, inteligencia artificial, entre otras) que desde sus propias especificidades han incursionado en el tema y han aportado información teórica y tecnológica que se ha visto reflejada –entre otras cosas– en el acelerado desarrollo de la humanidad en la segunda mitad del presente siglo.

La psicología, por su parte, se ha valido de esta información y ha consolidado un fundamento teórico mucho más sólido alrededor de la temática de la cognición y de su forma de desarrollo en el sujeto. Sin embargo, como es también característico de la ciencia, el abordaje de la temática se ha hecho desde enfoques diferentes que han intentado explicar el comportamiento cognitivo de los sujetos y han posibilitado la constitución de algunas de las “escuelas” que –aunque han generado sus propias teorías– comparten entre ellas algunos conceptos. Así es posible encontrar, entre otros, el enfoque piagetiano, el neopiagetiano, el del procesamiento de la información, el sociocontextual (Flavell. 1993, pp. 2-21), la perspectiva del ciclo vital o la conexionista (Bermejo. 1994, pp. 109-

³ Conviene aclarar que este trabajo –ante las dificultades teóricas que subsisten acerca de la adopción de una única denominación– al referirse al *desarrollo cognitivo* tiene en cuenta, así mismo, procesos de pensamiento y, subsecuentemente, *estará* aludiendo al *desarrollo del pensamiento*, tal como también lo hacen Mayor, Santa Cruz y Peraita, cuando afirman que “si a esto añadimos la indefinición y vaguedad del concepto ‘pensamiento’ tendremos la suficiente justificación para ceder al uso dominante de la expresión ‘desarrollo cognitivo’ para referirnos al desarrollo del pensamiento” (1985, p. 381).

requiere convencer (vencer con palabras) o persuadir al interlocutor –sus pares y/o su profesor– de que ha construido o reconstruido un determinado conocimiento.

Consciente de esta problemática, la Facultad de Educación de la Universidad Externado de Colombia ha venido implementando maneras de ofrecer alguna respuesta valedera a las inquietudes que –en ese sentido– le ha formulado el sistema educativo, en tanto reconocemos –así mismo– las bondades que los procesos argumentativos le proporcionan a cualquier interacción comunicativa, en especial cuando nos referimos a la comunicación pedagógica. Para el efecto, nuestra Institución ha incursionado en varios procesos investigativos acerca de la argumentación, uno de los cuales es el que nos ocupa en este momento: *De la geometría a los procesos de sustentación de los saberes*², cofinanciado por el IDEP, y realizado durante el año lectivo de 1999, con la participación de cinco comunidades educativas de la localidad 18, del Distrito Capital.



MARCO TEÓRICO

El andamiaje teórico y conceptual que sustenta el proyecto de que damos cuenta tiene relación –fundamentalmente– con tres grandes objetos de reflexión, a saber:

1. El desarrollo cognitivo, entendido como desarrollo del pensamiento y, por ende, sintetizador de procesos de índole mental que posibilitan su estudio desde ópticas relacionadas con la pedagogía y la educación.
2. El conocimiento geométrico, en tanto uno de los principales objetos de conocimiento que circulan en el ámbito educativo, y su relación estrecha con los demás saberes escolares.
3. La sustentación de los saberes, asumida como resultado del accionar de la competencia argumentativa que es –a su vez– resultado del ejercicio de múltiples procesos racionales del individuo que aprende.

² El proyecto fue diseñado, realizado y concluido por un equipo de investigadores adscrito a la Facultad de Educación, de la Universidad Externado de Colombia, compuesto de la siguiente manera: *Investigadores principales*: Cecilia Dimaté Rodríguez y José Ignacio Correa Medina; *Coinvestigadoras*: Silvia Bonilla y Nancy Martínez. Los resultados fueron expuestos en diversos eventos y, en forma completa, se encuentran en el texto *Contextos cognitivos: argumentar para transformar*, de donde se ha tomado lo sustancial de estas líneas.

¿SIRVE PARA ALGO ARGUMENTAR?*

Cecilia Dimaté Rodríguez
José Ignacio Correa Medina

En los últimos tiempos se ha manifestado en la academia colombiana una preocupación creciente acerca de la importancia de los procesos argumentativos y de su incidencia en la construcción cognitiva. No obstante, en la escuela de nuestro país se continúan perpetuando prácticas hegemónicas que riñen con las propuestas argumentativas, sin importar la óptica desde donde se las quiera abordar.

Como se sabe, la argumentación se puede concebir –con las orientaciones tradicionales o, incluso, a partir de la propuesta teórica de la denominada *nueva retórica*– como una estrategia discursiva encaminada a sustentar una evidencia que se encuentra en entredicho¹, sustentación ésta que tiene por objeto cambiar el juicio del interlocutor o garantizar la validez del planteamiento (Cfr. Vignaux, 1986) o, en palabras de Perelman “cubre todo el campo del discurso que busca persuadir o convencer, cualquiera sea el auditorio al cual se dirige y cualquiera sea la materia sobre la cual se versa” (1997, p. 24), finalidad (la de *persuadir o convencer*) que se reafirma más adelante, al exponer que “el fin de una argumentación no es deducir las consecuencias de ciertas premisas sino *producir o acrecentar la adhesión de un auditorio a las tesis que se presentan a su asentimiento*” (Íbid., p. 29).

No obstante, consideramos que esta concepción de *argumentación* no satisface plenamente las necesidades del trabajo que se realiza en el ámbito académico, razón por la cual no podemos compartir la idea de que –por ejemplo– un estudiante que busca argumentar el conocimiento que posee

* Este trabajo es resultado de una aproximación sintética al informe final del proyecto *De la geometría a los procesos de sustentación de los saberes*, presentado al IDEP en octubre de 1999. El informe final se encuentra en el Centro de Documentación del IDEP.

¹ Esta característica básica de los procesos argumentativos, que ya había sido expuesta por Aristóteles (vid. *Tópicos*), Perelman (1970, 1980 y 1997) y otros, ha tomado enorme fuerza en la reflexión teórica actual y es expuesta con claridad por Adriana Silvestri (2000), cuando afirma que «la *argumentación* se identifica con el enunciado de un problema o situación que admite potencial o efectivamente posiciones a favor o en contra de una tesis».

LEÓN, Olga Lucía. "El Papel del Quinto Postulado en la Arquitectura del Libro Primero de los Elementos de Euclides". Ponencia presentada para defensa de candidatura a doctor. Doctora en Educación Matemática. Universidad del Valle. 2000.

LO CASCIO, Vincenzo. *Gramática de la argumentación*. Madrid. Alianza Editorial. 1991.

PEIRCE, Charles. "Abduction and Induction". En: J. Buchler. *Philosophical Writings of Peirce*. Nueva York. Dover Publications. 1955.

_____. *Deduction, Induction and Hypothesis. The Popular Science Monthly*, vol. XIII. 1978.

PEREDA, Carlos. "Teorías de la Argumentación". En: LEÓN, Olivé (ed.) *Racionalidad Epistémica*. Madrid. Trotta. 1995.

PERELMAN, Chäim y OLBRECHT-TYTECA, Lucien. *Tratado de la Argumentación*. Madrid. Gredos. 1989.

PÉREZ, Jesús Hernando. "Trilogía de Pierce". Ponencia presentada en el Encuentro de profundización. Proyecto "Caracterización de los requerimientos didácticos para el desarrollo de competencias argumentativas en matemáticas", IDEP-Bogotá. Sede Asociación Anillo de Matemáticas. 2000.

VASCO, Carlos Eduardo. "Dynamic geometry in the Colombian school curriculum", en: *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21 Century*. Dordrecht. Kluwer Academic Publisher. 1998.

ZÁRATE, E. "Generalización del Teorema de Pitágoras". En: *Educación Matemática*, vol. 8 No. 2. México. Grupo Editorial Iberoamericano. 1996.

competencias, que proviene de un proceso de investigación-acción; b) abonar el campo del debate científico sobre este tema.



BIBLIOGRAFÍA

ÁLVAREZ, Carlos. "Two ways of reasoning and two ways of arguing in geometry. Some remarks concerning the application of figures in Euclidian geometry", (en prensa). México. UNAM. 2000.

BENSON, Donald. "The moment of proof". Nueva York. Oxford. University Press. 1999.

CAMPOS, Alberto. *Axiomática y Geometría desde Euclides hasta Hilberth y Bourbaki*. Bogotá. Alberto Campos Editor. 1994.

CALDERÓN, Dora. "Género Discursivo, Discursividad y Argumentación". Ponencia presentada para la defensa de candidatura a doctor. Doctorado en Lenguaje y Educación. Universidad del Valle. 2000.

DUVAL, Raymond. *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. (Tr. Myriam Vega). Cali. Universidad del Valle. 1999.

_____ *Argumentar, demostrar, explicar: ¿Continuidad o ruptura cognitiva?* Bologna. Querétaro. Grupo Editorial Iberoamericano. 1995.

EUCLID. *The Thirteen Books of Euclid's Elements*. Introduction and Commentary by Sir Th. L. Heath. Nueva York. Dover Publications, Inc. Vol. I, II, II (2ª. edición). 1956.

FRANCOS, D.F. "Demostraciones del Teorema de Pitágoras". En: *Notas de Matemáticas No. 28*. Universidad Nacional. Departamento de Matemáticas y Estadística. Bogotá, octubre de 1989.

GÓMEZ, Adolfo León. *Argumentos y Falacias*. Cali. Universidad del Valle. 1993.

_____ *El primado de la razón práctica*. Cali. Universidad del Valle. 1991.

JONES, K. "Deductive and inductive approaches to solving geometrical problems". En: *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21 Century*. Dordrecht. Kluwer Academic Publisher. 1998.

JOSEPHSON, J.r. y JOSEPHSON, S.G. (Eds.) *Abductive Inference. Computation, Philosophy, Technology*. Cambridge. Cambridge University Press. 1996.



aprendizaje de la geometría se convirtió en un llamado fundamental para el desarrollo de los requerimientos didácticos. Esto por cuanto el uso de ellos fue el que permitió, en el análisis de la tarea, identificar el bloqueo para la formulación de la relación pitagórica. De esta manera, los requerimientos cumplían su doble función: en primer lugar permitieron el diseño de una secuencia didáctica; en segundo explican las razones que impiden una adecuada elaboración de conocimiento matemático.

Desde el punto de vista del análisis de la argumentación en el aula, se evidenció que el efecto de los requerimientos en el desarrollo de competencias argumentativas en matemáticas se sitúa en dos contextos. En primer lugar, los requerimientos proporcionan criterios que determinan competencias específicas a desarrollar. En segundo, ellos proporcionan criterios para valorar los estados de desarrollo de las competencias. En esta perspectiva los resultados de este estudio permiten reconocer que la identificación de una competencia argumentativa en geometría pasa por el reconocimiento de unas competencias básicas en geometría.

De la reflexión anterior se concluyó que la elaboración de requerimientos siempre implicaría la realización de selecciones teóricas y de perspectivas de análisis. Por ello resulta fundamental la explicitación de elementos reguladores de la puesta en juego de los requerimientos. Preguntas como ¿los requerimientos permiten la elaboración de diseños de aula? y, ¿los requerimientos aclaran la mirada sobre los procesos realizados por los estudiantes en el cumplimiento de un propósito didáctico, y permiten anticipar efectos del diseño en el proceso escolar?, proporcionan los elementos de regulación ineludibles para los requerimientos.

Finalmente, en la perspectiva del impacto de la estrategia de socialización del proyecto en la comunidad académica, se puede concluir que cumplió una función, que más que socializante fue formadora. Esto, en tanto que la estrategia permitió construir, desde la diversidad disciplinar y de desempeño laboral y estudiantil, un espacio de reflexión que comprometió al desarrollo del proyecto en una dinámica social de elaboración de conocimiento. A la vez, consolidó una respuesta para una pregunta que se repetía en estos encuentros: ¿Qué es el desarrollo de una competencia argumentativa en geometría? Naturalmente que en un contexto teórico y metodológico general, la respuesta que proporciona este estudio se convierte en un aporte para la teorización sobre este aspecto. Teorización que cumple dos funciones en el contexto de la educación matemática y del lenguaje y la educación: a) ser una herramienta para los docentes e investigadores en el tema de las

solución. Es decir, que el proceso argumentativo responde a una petición epistémica y social de dar cuenta de, bajo el criterio de validez, corrección y prueba.



CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

La investigación determinó cuatro requerimientos didácticos fundamentales para el desarrollo de competencias argumentativas en geometría: el *requerimiento epistemológico*, que constituye un referente orientador para la acción vigilante del profesor en la articulación de campos conceptuales, en la aceptación de un enunciado como matemático, de una argumentación como pertinente y de una prueba como demostración. El *requerimiento cognitivo* que identifica las exigencias que el conocimiento a elaborar plantea al proceso didáctico, y el efecto que conocimientos particulares como la geometría tienen en las estructuras cognitivas del sujeto, como lo plantea Duval (1999): “más allá de un contenido de tal o cual conocimiento, la geometría, más que otras áreas en matemáticas, puede ser usada para descubrir y desarrollar diferentes formas de pensamiento”. El *requerimiento comunicativo* que es el dispositivo que da razón de la estructuración del contexto del aula y el espacio para la producción de formas discursivas particulares (como la argumentación) que dan vida a las relaciones didácticas, por cuanto una situación didáctica es, en sí misma, una situación de comunicación. Y el *requerimiento sociocultural* del aula, que establece relaciones entre todos los elementos constitutivos del contexto didáctico y determina los procesos de producción, internalización y puesta en escena de normas de interacción al servicio del desarrollo efectivo y eficaz de las relaciones didácticas.

De otra parte, la pregunta por el factor que regula la producción de sentido para un conocimiento matemático, se convirtió en una pregunta que proporcionaba una articulación didáctica natural para los requerimientos. Desde el punto de vista epistemológico, la identificación de los diferentes sentidos que se han asignado a esta relación en los contextos matemáticos, permitió considerar una caracterización de la relación en el contexto euclidiano. Esta opción implicó para el requerimiento cognitivo la identificación del rol de la figura en la elaboración del conocimiento geométrico, y para el requerimiento comunicativo la consideración de las tramas argumentativas que sustentan cada uno de los sentidos.

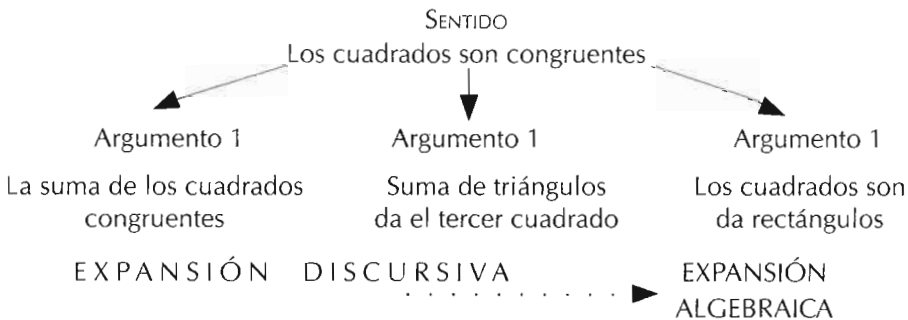
Un ejemplo interesante de este problema didáctico lo constituyó, en este proyecto, el uso del registro figural. Pensar en el papel de este registro para el

Lo anterior significa que, si bien el proceso argumentativo en general es débil, se pudieron identificar fases argumentativas fuertes y rasgos de validación, como en los momentos 3 y 4. En el momento 4, se consolida un *nosotros* que defiende una solución actuando discursivamente como una sola voz: se trabaja sobre una sola hoja; el discurso de cada interlocutor se torna en complementario del anterior, generando una única elaboración de texto (escrito a dos manos).

Las demás fases cumplen una función más explicativa, en tanto se orientan a hacer inteligible las soluciones y los procesos expuestos.

Por otra parte, en cuanto al desarrollo de una actitud argumentativa en los estudiantes, se manifiesta y se desarrolla paulatinamente la conciencia de "sujeto argumentador". Esto se observa en expresiones como: "¿cómo lo argumentamos?", "¿Cuál es el argumento?", "¿Cómo demuestra que eso es así?", "Necesitamos un argumento más fuerte", "Esta solución sí no nos la tumba nadie", "O sea, eso es lo que nos piden, nosotros argumentamos eso, sí o no?"

También se observó que la elaboración de la trama argumentativa pone en conflicto al sujeto argumentativo, "en la relación que elaboro, ¿qué se me exige?". Pregunta ésta que va orientando la producción de enunciados solución y, como producto, genera enunciados que van adquiriendo funciones y fuerza de argumentos y se van conectando de cierta manera. Así, la trama identificada en el desarrollo de la solución, por parte de la pareja analizada es:



El resultado de esta trama es un sentido no muy bien consolidado, que en el momento 3 sufre un debilitamiento, como se mostró arriba, frente a la petición de justificación. En particular, cuando se quiere validar el proceso se señala una falencia: falta asegurar que, efectivamente, el cuadrado se construye sobre la hipotenusa. Responder a esta falencia los lleva a pasar del tratamiento figural al conceptual. En este sentido, se observa cómo el proceso de elaboración discursiva y semiótica responde particularmente al propósito de justificar la

registro figural también puso en juego los elementos fundamentales para la elaboración de la relación: los cuadrados, las áreas y los triángulos rectángulos.

En la actividad No. 2 se propuso un conjunto de gráficas en las que no estaban explícitos los cuadrados que se construyen sobre los lados del triángulo rectángulo. En este caso, el bloqueo para la relación pitagórica fue mayor y de más resistencia para su movilidad.

Desde el punto de vista del desarrollo argumentativo, se pueda afirmar que la estructura de la interacción argumentativa (expresión-aclaración-cooperación-conclusión), estuvo determinada por los momentos propuestos para la tarea. En este sentido, la estructura argumentativa no emergió directamente del posicionamiento argumentativo de los estudiantes, pero sí estos momentos se consolidaron como los pasos propios de un proceso argumentativo para una solución.

Expresiones como las de E1: "Inicialmente tomé una versión... Eso es lo mío", y E2: "Es más o menos lo mismo... entonces ¿sí está de acuerdo?", tienen la función de expresar o exponer la solución, y manifiestan la posición individual, determinando posturas epistémicas frente a la solución.

Expresiones como las de E1: "A igual C, que no entiendo, pero puede ser como usted dice.", cumplen la función de llamado a la aclaración.

Y E2: "Tengo un nuevo cuadrado... bueno, ¿entonces sí está de acuerdo?", y de nuevo E1: "con su fórmula sí...", que funcionan como explicaciones al proceso realizado y de llamado al acuerdo.

Después de este tipo de interacciones se inicia una etapa de cooperación para la producción de la solución de pareja, pero a partir del acuerdo para la solución de E2. En este momento, en el plano de la producción argumentativa, se desvanecen definitivamente los roles de argumentador y contraargumentador que se pudieran dar en la pareja, desde la lógica de la interacción propuesta en la tarea: discutir las soluciones. Ocurre, entonces, un fenómeno interesante. La cooperación va configurando una sola voz, constituida por los dos estudiantes, como generadores de una solución de pareja; de un solo enunciado; de un argumento y de una posible trama para poner en juego ante el grupo general.

E1: "Bueno, entonces ¿cómo armamos la argumentación? Usamos esta figura de..."

E2: "Bueno, ahí estamos claros, pero cómo defendemos que éste es este mismo? ¿Cómo lo demostramos?"

Este cuestionamiento privilegia la relación pitagórica sobre la relación de congruencia de los cuadrados. Todo el proceso anterior permite considerar que:

a. El conjunto de gráficas propuesto y que se señala como una evidencia de la relación, no cumple esa función por la aprehensión que se hace de las figuras.

b. La aprehensión de las figuras le asigna un status teórico operativo a la relación pitagórica, que la sitúa más como premisa que como conclusión.

c. El papel que juega la figura en los componentes epistémico y lógico del sentido es fundamental. Puesto que la conducta abductiva exhibida por los estudiantes privilegia, en este caso, la igualdad de los cuadrados sobre la relación entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo.

En el efecto de las interacciones en un contexto argumentativo de la tarea

Mientras que en los momentos 1, 2 y 3 las interacciones permitieron consolidar las relaciones individuales, los momentos 4, 5 y 6 se convirtieron en desestabilizadores de la solución inicial. Dos situaciones de interacción marcaron la tensión sobre la solución inicial:

a. La petición de justificación (momento 3) solicitada por la profesora y los compañeros.

b. El reconocimiento de la ausencia de un argumento fuerte (momento 4).

El efecto de estas situaciones fue el debilitamiento de la solución de pareja y el posicionamiento antagónico de la solución de *Ellos* (momento 5).

Finalmente, la fuerza del antagonismo y el reconocimiento de esta fortaleza conlleva al abandono de la solución de pareja y a un posicionamiento débil para la solución defendida por el grupo argumentador. El reconocimiento de otra solución se marcó por dos actitudes: a) la de admitir haber realizado un paso no legítimo en la solución "no se puede involucrar en la prueba aquello que se va a probar" y, b) la de valorar la solución antagónica. Sin embargo, como efecto final de la tarea, sí se evidenció que todo el proceso facilitó la construcción de un sentido para la relación pitagórica, y este sentido es el de las áreas.

El desarrollo del propósito de la tarea

Aunque la figura bloqueó el proceso de identificación de la relación pitagórica como un status teórico de conclusión, facilitó considerar como unidades significantes y conceptuales: las áreas, el ángulo recto y los triángulos. Este

	<p>fundamental. “Sin los triángulos quedan dos cuadrados iguales a un tercer cuadrado” (1 pareja).</p> <p>2. Identificación de unidades significantes</p> <ul style="list-style-type: none"> • Los cuadrados (3 parejas). • Los cuadrados y los triángulos (4 parejas). • Sombreados y blancos (3 parejas). • El grosor de las líneas no fue identificado como unidad significante. <p>3. Acciones de tratamiento de registro.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Acciones de composición y descomposición: entre figuras o en el interior de una figura. • Acciones de traslación y rotación de figuras.
Procesos inferenciales	<p>Fundamentalmente se privilegió el uso de la abducción como forma de inferencia en el proceso de solución. Se identificaron los siguientes comportamientos:</p> <p>a) Tipo 1 Dato: dos cuadrados. Estrategia: comparación perceptual. Solución: cuadrados externos iguales.</p> <p>b) Tipo 2 Dato: dos rectángulos. Estrategia: medida de los cuatro lados. Solución: cuadrados iguales.</p> <p>c) Tipo 3 Dato: dos cuadrados compuestos por triángulos y cuadrados. Estrategia: relacionar los triángulos de las figuras y los cuadrados de las dos figuras. Solución: cuadrados externos iguales.</p> <p>d) Tipo 4 Datos: dos cuadrados, cuatro triángulos en el interior de cada cuadrado y cuadrados al interior de cada cuadrado. Estrategia: relacionar triángulos y asegurar igualdad de las partes sobrantes. Solución: dos cuadrados internos de una figura son iguales al cuadrado interno de la otra figura.</p>

La estrategia de separar triángulos manifestada por C1 en el momento 6, cuestiona y debilita el considerar los cuadrados externos como marcos fijos.

la pareja observada. C1 representa a los compañeros que intervienen en la etapa de nosotros ellos, o de plenaria, y P, representa profesor. En general, se obtuvieron 7 momentos de interacción en esta primera etapa. A continuación se describen sus resultados.

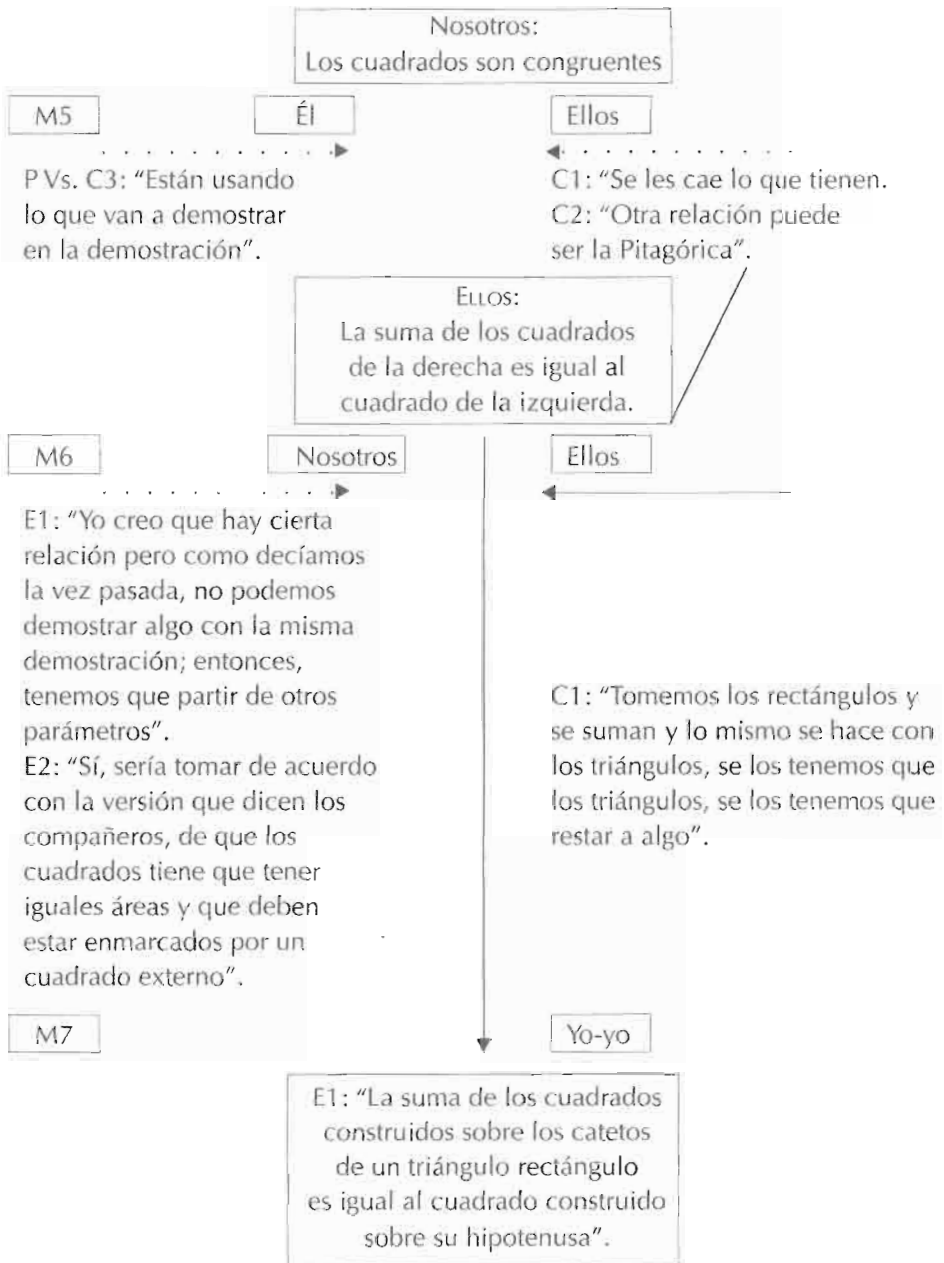
Según el esquema obtenido para la solución, se observa que la elaboración de una solución, en este caso, la determinación de una relación matemática, se estructuró en los momentos yo- yo, yo-tú, nosotros-ellos, yo-tú, nosotros-ellos y yo-yo. En estos momentos se analizan los siguientes aspectos para la comprensión del desarrollo de la solución:

El papel de la figura

Se observó que la entrada a la solución del problema se realizó por la figura, confirmándose su papel heurístico en el campo geométrico. En este caso la aprehensión de la figura fue determinante para bloquear como relación principal, la relación pitagórica. Este resultado se presenta en el siguiente cuadro.

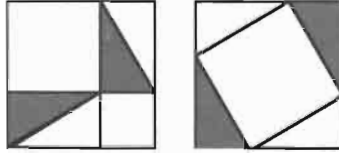
El papel de la figura en la formulación de la relación pitagórica

PROCESO COGNITIVO OBSERVADO	MANIFESTACIÓN DE LOS ESTUDIANTES
Procesos semánticos	Se manifestaron las siguientes relaciones: <ul style="list-style-type: none"> • Global: “La relación es geométrica” (1 pareja). • Específica no pitagórica: “Los dos cuadrados son congruentes” (6 parejas) • Específica pitagórica: “La hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los catetos al cuadrado” (1 pareja).
Procesos semióticos	1. Tipos de interpretación de signos con respecto al registro figural presentado: <ul style="list-style-type: none"> • Interpretación global. Cada figura se concibe como una unidad, “Hay dos cuadrados que tienen igual área” (3 parejas). • Interpretación configural de los cuadrados a los triángulos. Se concibe a los cuadrados como figuras fundamentales. “Hay dos cuadrados con triángulos colocados diferentes” (4 parejas). • Interpretación configural de los triángulos a los cuadrados. Se concibe al triángulo como la figura

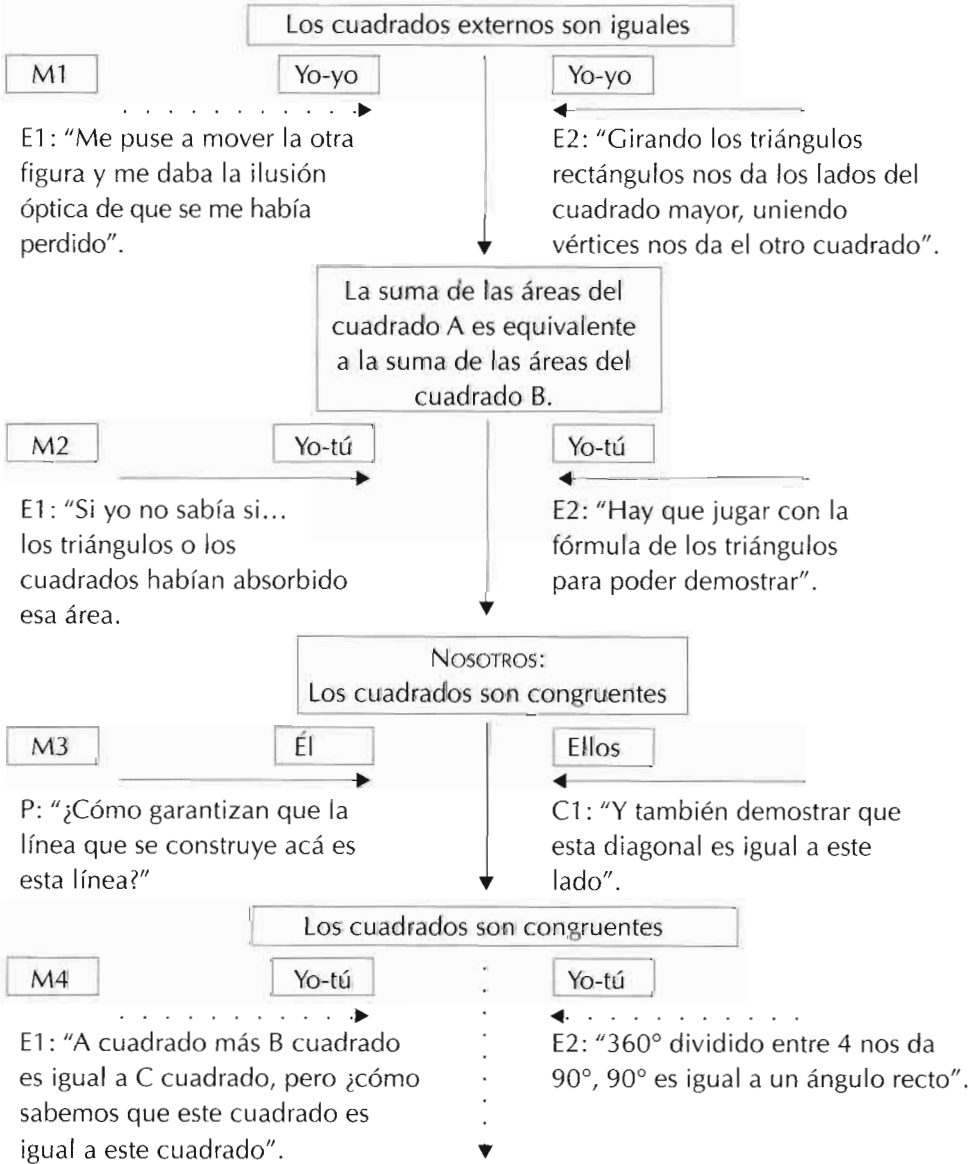


En el esquema anterior, las flechas verticales conectan los momentos y las horizontales presentan posiciones de los estudiantes con respecto a la solución. Las flechas punteadas indican debilidad en la posición. Las flechas continuas indican seguridad en la posición. E1 representa al estudiante 1 observado y E2 representa al estudiante 2 observado. Juntos, E1 y E2, conforman

Problema: ¿Cuál es la relación matemática que se muestra en la siguiente figura?



Trayectoria de la solución:



Se tomó una pareja para el seguimiento de su comportamiento de solución, en los distintos momentos que constituyeron la primera etapa; a saber:

Tarea N° 1	<i>Objetivo:</i> producción de un sentido para la relación pitagórica
Etapas N° 1	<i>Propósito:</i> elaboración de la Relación
MOMENTOS	<p><i>Tipos de interacción entre los estudiantes y el profesor</i></p> <p><i>Yo-yo</i> trabajo individual, para la producción de una primera solución, preparación de argumentos.</p> <p><i>Yo-tú</i> trabajo de pareja, para el estudio y debate de soluciones. Y para la elaboración de una solución de pareja.</p> <p><i>Nosotros-ellos</i> presentación y defensa de la solución de pareja ante el grupo general. Desarrollo de un proceso argumentativo para la consolidación de soluciones.</p> <p><i>Él-nosotros</i> aclaraciones explicitación de consistencias e inconsistencias en las soluciones presentadas e institucionalización de lo elaborado. Este momento está a cargo del profesor y pretende dar pautas para la legitimación de tramas conceptuales y argumentativas.</p>
ACTOS	<p><i>Actos de solución:</i> actos orientados por la intención de solucionar el problema.</p> <p><i>No solución</i> actos orientados por intenciones externas a la solución del problema.</p> <p>Los actos se clasificaron en argumentativos (tendientes a elaborar sentidos o apoyos para la solución), y actos no argumentativos (tendientes a realizar distintas intenciones discursivas diferentes a la de solucionar el problema.</p>

El análisis de los momentos de interacción se realizó empleando como dato el proceso discursivo registrado en audios y en videos. El resultado es el desarrollo de la solución en los distintos momentos, y el impacto de las interacciones en la consolidación de la relación.

El problema a solucionar es:

La secuencia didáctica definitiva

La estructura definitiva de secuencia de actividades diseñada con base en el proceso investigativo y particularmente, atendiendo a la operacionalización de los requerimientos didácticos desarrollados, es la siguiente:

SECUENCIA DIDÁCTICA DEFINITIVA			
ETAPA TAREA	1: FORMULACIÓN DE LA RELACIÓN	2: CONSOLIDACIÓN DE LA RELACIÓN	3: VALIDACIÓN DE LA RELACIÓN
1	<i>Propósito</i> elaborar un sentido de áreas para la relación pitagórica.	—————→	—————→
2		<i>Propósito</i> elaborar una forma argumentativa para el sentido de áreas en la relación pitagórica.	—————→
3			<i>Propósito</i> generalizar el sentido de áreas para la relación pitagórica.

El desarrollo de la secuencia anterior permitió la recolección de datos para el análisis del desarrollo de competencias argumentativas en geometría, en los estudiantes observados. A continuación se presenta tal análisis, como el segundo resultado presentado en este artículo.

Los requerimientos al servicio de la comprensión del desarrollo de la competencia argumentativa en geometría

El sentido de este análisis es comprender los procesos desarrollados por los estudiantes, en el marco de la realización de una tarea que pretendió potenciar el desarrollo de competencias argumentativas en geometría y la elaboración de un sentido para la Relación Pitagórica. Para este análisis se empleó el diseño de unidades y categorías de análisis propuestas para la fase de acción.

UNIDAD DE DATOS GLOBAL	UNIDADES DE ANÁLISIS	CATEGORÍAS DE ANÁLISIS
Tarea	<ul style="list-style-type: none"> • Etapas • Momentos • Actos 	<ul style="list-style-type: none"> • Sentido • Trama argumentativa • Trama de conexión lógica

de investigación-acción, para cada uno de los tres requerimientos identificados (cognitivo, comunicativo y epistemológico) y la identificación y caracterización de un cuarto requerimiento, el sociocultural del aula; III) el análisis del desarrollo de la competencia argumentativa en los estudiantes, a partir del desarrollo de la secuencia didáctica. La caracterización de los tres requerimientos identificados inicialmente se explicita en la publicación de los resultados de este proyecto, titulada “Requerimientos didácticos y competencia argumentativa en geometría”. A continuación se incluye la caracterización del cuarto requerimiento identificado, como efecto de la reflexión didáctica.

El requerimiento sociocultural del aula al servicio de la argumentación

El requerimiento sociocultural se refiere al componente didáctico de tipo axiológico que identifica y estructura principios de interacción y de regulación en el interior y entre los sistemas que constituyen el contexto de relaciones didácticas. En este sentido, es evidente que las normas y principios de interacción que operan en el interior de los sistemas involucrados en las relaciones didácticas, son inseparables de su explicación teórica y operan en la escenificación de los procesos comunicativos y cognitivos en el aula. Sin embargo, como resultado de la observación de los procesos de comunicación y de argumentación de lo matemático en el aula, se consideró fundamental explicitar y reflexionar separadamente lo concerniente al conjunto de principios y normas de interacción en cada sistema, dado que se constituye en un aspecto fundamental, tanto para la comprensión del funcionamiento de cada uno de ellos, como de la manera en que se influyen entre sí y los efectos que tienen en el diseño y desarrollo de las actividades de aula y el aprendizaje de los estudiantes.

Desde la reflexión de cada uno de los tres primeros requerimientos, se comprendió que los requerimientos socioculturales del aula impactan particularmente tres instancias de las relaciones didácticas: a las formas de acercamiento al saber puesto en juego (el saber geométrico), que genera las normas matemáticas; a las formas de uso social del saber puesto en juego, que genera las normas socio matemáticas (formas de proceder con ese saber, para ser efectivo socialmente); y al saber sobre la naturaleza y tipo de interacciones propuestas, las condiciones del grupo y su composición, la estructura de roles generada y los rituales de las relaciones entre estudiantes y entre estudiantes y profesor; saber que hace evidentes y pone en juego las normas socioculturales del aula.

a. *Un juego de roles*: para el profesor y para los estudiantes, en relación con el contenido. Entre el estudiante y el contenido se consideró que el estudiante está en situación de elaboración de sentido con respecto al contenido, de ahí que no esté restringido a una única respuesta. El profesor también está en situación de elaboración de sentido, pero más desde el punto de vista didáctico. Así, la elaboración de sentido entre estudiantes y profesor, con respecto al contenido es de tipo colectivo.

b. *Un contrato didáctico*: fundamentado en la conciencia de producción colectiva de conocimiento, hecho que implica la interacción con conocimiento ya elaborado y una actitud heurística colectiva con los procesos de solución de problemas.

Sobre la observación de los procesos

La acción didáctica que hace parte de la Fase de Acción se observó y estudió mediante la unidad de análisis *Tarea*, teniendo en cuenta que es el objeto didáctico que compromete todas las opciones y decisiones del diseño y que potencia acciones en los estudiantes para el desarrollo de competencias argumentativas en geometría. Por esta razón, las unidades de análisis diseñadas para el estudio de la tarea pretendieron atender a un análisis de procesos de interacción, que dieran cuenta de los procesos cognitivos y comunicativos de los estudiantes.

El proceso investigativo indagó, durante el desarrollo de la acción didáctica, las relaciones que se establecieron entre estas categorías, la forma en que se impactan mutuamente y cómo se convierten en un referente para la comprensión del desarrollo de competencias en los estudiantes. Este estudio se llevó a cabo empleando dos tipos de datos fundamentales: los resultados de las discusiones del grupo investigador y los registros en audio, en video y los escritos de los procesos de argumentación de soluciones a problemas geométricos, que realizaron los estudiantes durante el curso de la secuencia didáctica global. Los resultados de los análisis parciales permitieron modificaciones permanentes al diseño didáctico y la producción teórica de cada uno de los requerimientos, que es el resultado de la investigación.



ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

Como resultados finales de la investigación están: I) La secuencia didáctica definitiva; II) Un desarrollo teórico específico generado a partir del proceso



epistemológico-comunicativo-socio-cultural del aula, la relación que establece la jerarquía de las acciones y reglas de acción que orientan las tareas. Estas relaciones se constituyeron en el soporte de la estructura del diseño didáctico, considerándose en cada una los siguientes aspectos.

Desde lo epistemológico

Se optó por la relación pitagórica como una relación que expresa el sentido de áreas. Se optó también por la trama argumentativa fundamentada en la relación ángulo recto-teoría de las paralelas-igualdad de figuras por coincidencia y por cantidad de magnitud. Tomar esta opción epistemológica implicó que en la actividad de aula se comprometiera el uso de figuras y el trabajo sobre el ángulo recto y las relaciones de paralelismo.

Desde lo cognitivo

Se privilegió como proceso inferencial, al abductivo; como registro semiótico, al figural; como campo semántico particular, al geométrico euclidiano; como proceso de interacción social, al argumentativo; y como proceso didáctico, a la resolución de problemas que pide relaciones.

Desde lo comunicativo

Se considera la interacción argumentativa como el espacio comunicativo que exige: I) el reconocimiento de un tema polémico, en tanto que en el aula se están elaborando múltiples sentidos para la relación pitagórica; II) el reconocimiento de una situación argumentativa, en tanto está la necesidad de justificar el sentido elaborado ante un auditorio (el profesor) y los compañeros; III) la asunción de una actitud argumentativa que implica: estar dispuesto a estructurar posiciones individuales en torno al sentido, realizar tramas argumentativas que manifiesten la posición individual, prever a un auditorio y producir un discurso argumentativo a propósito de convencer o persuadir a ese auditorio, prever y realizar una actividad de valoración de argumentos contrarios y estar dispuesto a consensuar.

Desde la organización las interacciones o el aspecto sociocultural del aula

La estructura de relaciones profesor-contenido-estudiantes se reconoció como la estructura que da autonomía a los diseños de la actividad en el aula, por cuanto el tejido de relaciones entre los tres elementos está determinado por las condiciones de los contextos particulares del aula. Así, la relación entre estudiante-estudiante y profesor-estudiante, estuvo mediada por la estructura de la tarea: solución individual, solución de parejas, solución colectiva e institucionalización. En consecuencia, se determinaron los siguientes aspectos:

de la geometría euclidiana), sus formas particulares de significar y de comunicar. II) La dimensión discursiva del aula: las posiciones discursivas de profesor y de estudiante y sus relaciones de fuerza (que se explicitan mediante el discurso instruccional y el regulativo), que generan formas especiales y prototípicas de comunicar, como la exposición y la argumentación, entre otras.

En este sentido, el requerimiento comunicativo da razón del cómo de la interacción entre estudiantes-contenido y estudiantes-profesor y propicia el análisis de la interacción didáctica: su efectividad e impacto en el desarrollo de los procesos de elaboración de conocimientos y en el logro de propósitos de aprendizaje diseñados curricularmente.

Efectos de la consideración de la categoría diseño didáctico en la acción didáctica

El trabajo en el aula comprometió dos momentos de la fase: la de acción 1 o de diseño, y la de acción 2 o de implementación para la validación del diseño. Este proceso se realizó bajo una estructuración didáctica paulatina: elaboración de un diseño didáctico inicial fundamentado en los focos identificados teóricamente, implementación y observación del diseño y reestructuración y aplicación en la clase. El inicio del desarrollo de la fase de acción tuvo como presupuesto básico que el diseño didáctico se orientaba a la construcción de una situación argumentativa en matemáticas que propendiera por la realización efectiva de las relaciones iniciales determinadas en los requerimientos identificados. Como efecto de todo el proceso anterior, se consolidó un diseño basado en los siguientes criterios:

a. *Identificación del contexto escolar:* licenciatura en matemáticas de una institución pública. Se planteó una secuencia de 16 sesiones de clase de dos horas cada una y se proyectó un total de tres tareas.

b. *Identificación del objeto curricular:* la relación pitagórica y su contexto de áreas.

c. *Identificación de propósitos de aprendizaje para la asignatura:* I) elaborar sentido para la relación pitagórica desde el contexto euclidiano; II) elaborar tramas argumentativas para la relación pitagórica en el contexto euclidiano; III) desarrollar procesos inferenciales en el campo geométrico; IV) aproximar la comprensión de la relación pitagórica en el contexto poscartesiano.

d. *Identificación del impacto de los requerimientos en el diseño didáctico:* los requerimientos impactaron el diseño didáctico desde las siguientes relaciones: entre los requerimientos epistemológico-cognitivo, la relación que establece la jerarquía de los contenidos y entre los requerimientos



El requerimiento cognitivo

Es el componente didáctico que construye teóricamente un sujeto del aprendizaje. El desarrollo de las competencias geométricas es una exigencia didáctica, y en consecuencia debe ser un propósito fundamental para la enseñanza de la geometría. Esta exigencia didáctica obliga a considerar requerimientos fundamentales para el profesor, como la comprensión de los procesos cognitivos que se deben desarrollar y por consiguiente el diseño de situaciones de aprendizaje que diferencien y coordinen las diferentes clases de procesos de visualización con los razonamientos requeridos.

Según Duval (1998), los procesos cognitivos necesarios para el desarrollo de esas competencias son de tres tipos: de visualización, de construcción y de razonamiento. Según el autor, estos procesos cumplen funciones epistemológicas específicas. Así, los procesos de *visualización*, que consisten en la identificación de gestales y configuraciones en dos y tres dimensiones, están relacionados con los espacios de representación usados en las ilustraciones de los enunciados, en las exploraciones heurísticas de una situación compleja o en las verificaciones subjetivas. Los procesos de *construcción*, mediados por herramientas (regla, compás, transportador, software geométricos), permiten elaboraciones de configuraciones que pueden ser usadas como modelos en los que la acción sobre lo representativo y observable, llevan a relaciones entre los objetos matemáticos observados. Los procesos de *razonamiento*, se constituyen en procesos de “expansión discursiva” de las pruebas y de las explicaciones; es decir, son procesos de verbalización que implican la elaboración semántica y discursiva de los objetos geométricos, en estructuras generales de tema y rema (descripciones, narraciones, explicaciones, comparaciones o argumentaciones).

En el marco de las relaciones didácticas, el requerimiento cognitivo establece con mayor preeminencia la relación contenido-desarrollo de conocimiento matemático en los estudiantes, contenido-desarrollo de conocimiento didáctico en el profesor, dado que se ocupa del análisis de la comprensión del contenido y de sus factores asociados: seguimiento de procesos, identificación de obstáculos, diseño de criterios para la evaluación del desarrollo de competencias, entre otros.

El requerimiento comunicativo

Es el componente didáctico que estructura la interacción discursiva propuesta para el contexto del aula, en una situación particular de aprendizaje, a través del género discursivo pedagógico. De ahí que este requerimiento involucre:

- 1) La dimensión discursiva del campo del saber puesto en juego (por ejemplo,

estas categorías y el diseño de una secuencia didáctica inicial, se constituyó en el resultado de la primera fase de teorización descrita anteriormente.

Sobre la acción didáctica

En este apartado se presenta el efecto de la operacionalización de cada una de las categorías de partida en el diseño didáctico y en la acción en el aula.

Efectos de la consideración de la categoría requerimiento en la acción didáctica

Se identificaron, inicialmente, tres requerimientos didácticos básicos que se corresponden con tres aspectos involucrados en el contexto de las relaciones didácticas y que estructuran, de manera particular, el saber didáctico, a saber: requerimiento epistemológico, requerimiento cognitivo y requerimiento comunicativo.

El requerimiento epistemológico

Hay tres acciones didácticas que comprometen la presencia de este requerimiento en el desarrollo de competencias matemáticas, y específicamente en el de competencias argumentativas que involucren tales competencias matemáticas. En primer lugar, la pregunta por el sentido a elaborar para un conocimiento matemático es de carácter epistemológico, que busca obtener, por lo menos, un referente que oriente la acción vigilante del profesor en la articulación de campos conceptuales manifiestos en la diversidad de elaboraciones de sentido que se puedan realizar en el aula. En segundo lugar, la pregunta por lo que regula y justifica la aceptación de un enunciado como definición o como teorema y de un proceso como una descripción, una explicación o una argumentación que prueba o una argumentación que demuestra, permitirá regular y precisar en la elaboración colectiva de conocimiento, la calidad del conocimiento elaborado y los tipos de conexión que evidencian las estructuras consolidadas. Y en tercer lugar, la pregunta por los aspectos que determinan la importancia de un argumento particular en un contexto de elaboración de conocimiento específico, es una pregunta que exige del profesor una conciencia de la dependencia de la diversidad de tramas argumentativas, según juego de roles entre argumentos.

En el marco de las relaciones didácticas, por su naturaleza, el requerimiento epistemológico establece con mayor fuerza la relación contenido-profesor-contenido-estudiantes, dado que de esta relación surgen las formas de organización del contenido y el diseño de tareas y de formas de evaluación.



Los dos ciclos, que incluyeron las tres fases, tuvieron como finalidad la identificación de requerimientos y la estructuración y relación de tales requerimientos. Paralelamente se diseñó un ciclo adyacente o ciclo de regulación articulado con los procesos de socialización del proyecto. Este ciclo se desarrolló atendiendo a las necesidades de validación de conjeturas, estructuración de estrategias y discusión de posturas teóricas. En este último ciclo participaron, además de los investigadores y los estudiantes de la licenciatura, profesores, investigadores y estudiantes de las áreas de lenguaje y matemáticas de instituciones como: Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Fundación Universitaria Monserrate, Universidad Nacional de Colombia, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Tunja, Universidad de Pamplona, Universidad del Valle, Universidad del Tolima y Asociación Anillo de Matemáticas.

Sobre las categorías teóricas generales de la investigación

El hecho de tratarse de una investigación-acción en el aula implicó, necesariamente, considerar unas categorías de partida para el estudio, como las categorías conceptuales básicas que dieran razón de la estructuración de requerimientos y unas unidades de datos que permitieron observar la relación entre requerimientos y diseño didáctico, y entre requerimientos, diseño didáctico y desarrollo de competencias argumentativas en geometría. La siguiente es la descripción de las dos categorías consideradas inicialmente.

REQUERIMIENTO DIDÁCTICO	DISEÑO DIDÁCTICO
Referente teórico que da razón de un componente de la estructura de las relaciones didácticas y que brinda elementos para la estructuración de relaciones entre todos los componentes, a propósito de las relaciones didácticas.	Estructura de una secuencia didáctica establecida a través de un programa particular. Explicita opciones epistemológicas, comunicativas y cognitivas, en el contexto de las relaciones didácticas.

Estas dos categorías se articularon para caracterizar una acción en el aula orientada al desarrollo de competencias argumentativas. La elaboración de

A partir de la anterior conceptualización sobre la competencia argumentativa en matemáticas, se considerarán, *como indicadores gruesos de desarrollo de esta competencia*, los siguientes grupos de acciones fundamentales:

- La identificación, interpretación y producción de sentidos en textos matemáticos. Este grupo pone en juego prioritariamente los aspectos uno, dos y tres enumerados como subcompetencias de la competencia argumentativa en matemáticas.
- La interpretación y producción de tramas argumentativas en matemáticas. Este grupo involucra las cuatro subcompetencias enumeradas y exige un desarrollo de encadenamientos desde la lógica matemática.

Sobre las acciones metodológicas de la investigación

Se realizó un proceso de *investigación-acción* que produjo como resultado la estructuración de un constructo teórico elaborado con base en dos acciones fundamentales: a) las relaciones establecidas en las reflexiones y discusiones teóricas, en el interior del grupo de investigación y, b) los hallazgos obtenidos durante el diseño y aplicación de una propuesta didáctica que surgió como respuesta a la identificación de un estado inicial de desarrollo de competencia comunicativa en matemáticas⁴, del grupo de estudiantes observado.

Se eligió, dentro de los métodos de investigación cualitativa, la *investigación-acción*, por considerarla como una alternativa metodológica que permite la producción de resultados como efecto de la interacción continua entre procesos de reflexión, observación, diseño, puesta en escena, análisis y teorización de los eventos educativos. Con base en las anteriores consideraciones se llevó a cabo una acción investigativa que involucró un proceso de dos ciclos y tres momentos o fases fundamentales: 1) La elaboración de un marco referencial primario sobre los requerimientos, o primera fase de teorización. Este referente permitió el diseño didáctico general y el diseño de instrumentos de observación. 2) La puesta en juego de un diseño didáctico que propendió por el desarrollo de competencias argumentativas en geometría y, paulatinamente, la observación de los requerimientos. Este momento permitió los procesos de validación, regulación y evaluación del diseño e involucró las fases de diseño y la de acción; es decir, se convirtió en el espacio "aclarador" de la naturaleza y función de los requerimientos. 3) La reestructuración de los requerimientos, como efecto de los dos momentos anteriores, o vuelta a la fase de teorización. Así, se generó un ciclo investigativo del tipo:

⁴ Resultado del proyecto "El papel de la argumentación en las situaciones de validación del conocimiento matemático en el aula".

La anterior particularización de las competencias argumentativas en geometría permite la identificación de una estructura de competencias *argumentativas en matemáticas constituida por*:

1. El desarrollo de tramas conceptuales de tipo matemático. Este saber garantiza el dominio de referentes y de procesos propios del campo matemático, que permitan la toma de posición epistémica y epistemológica del sujeto frente al objeto de la argumentación; o la asignación de sentidos al conocimiento matemático. Es decir, el sujeto puede tomar, frente al saber matemático, una posición epistémica semántica (si tan sólo asigna valores de confiabilidad a un enunciado desde su experiencia empírica); una posición epistémica teórica (si asigna valores de confiabilidad desde una teoría que proporciona criterios de validación); o una postura epistémica lógica (en tanto conoce y desarrolla procesos operatorios regulados por criterios de consistencia propios de una teoría); Duval 1999. La presencia de las acciones anteriores son el efecto del desarrollo de una competencia epistemológica en matemáticas.

2. El desarrollo de estrategias de interpretación de textos matemáticos, que garantiza formas de operar con el conocimiento y el posicionamiento del sujeto frente al conocimiento. Este dominio le permite al individuo la discriminación de argumentos matemáticos y la realización de procesos de validación para la legitimación de saberes y de procesos; para el establecimiento de verdades o para la determinación de consistencias. La manifestación de estos aspectos es el efecto del desarrollo de las competencias cognitiva y discursiva.

3. El desarrollo de estructuras argumentativas bajo los criterios de verdad y consistencia, que garantizan la producción e interpretación de formas de organización discursiva y textual bajo la estructura justificativa, en los contextos oral y escrito. Este dominio permite al sujeto la toma de posición epistémica y social frente al saber matemático. Es decir que, además de una toma de posición frente al conocimiento, el sujeto habrá de asumir juegos de roles argumentativos y actuar en concordancia con ellos y desarrollar juegos de lenguaje adecuados para la argumentación. Los anteriores elementos conforman la competencia discursiva en matemáticas.

4. El desarrollo de estrategias para la contextualización y el uso de los procesos argumentativos, que garantizan un uso adecuado y pertinente de la argumentación como forma de interacción social. Este dominio exige que el sujeto desarrolle normas de interacción argumentativa, formas de evaluación de efectividad argumentativa y que ponga en escena juegos de lenguaje bajo el criterio de eficacia argumentativa. Estos aspectos constituyen la competencia estratégica.

los llamados que hace la reflexión didáctica: ¿cuáles son las condiciones de interacción en el aula?, ¿cuál es el objeto curricular a construir?, ¿cuáles son los procesos cognitivos involucrados en el aprendizaje de tal objeto? y, como efecto del proceso anterior, ¿qué normas y reglas se construyen para la interacción entre miembros de un grupo social, en función de la elaboración y aceptación de un conocimiento? La presente investigación se preguntó, particularmente, por los requerimientos específicos para el desarrollo de competencias argumentativas en geometría, en los estudiantes de primeros semestres de licenciatura en matemáticas.

Sobre la competencia argumentativa en geometría

Como resultado del proceso de teorización y de observación y análisis de los procesos argumentativos de los estudiantes, y de las reflexiones desarrolladas en la investigación, se consolidó un referente que teoriza sobre la competencia argumentativa en matemáticas y particularmente en geometría. De ahí que se precisen, en primera instancia, aspectos que determinan la competencia argumentativa en geometría, y posteriormente se generalicen factores asociados a la competencia argumentativa en matemáticas.

1. Como competencias geométricas básicas, que dan razón de un hacer geométrico, se identificaron:

- La construcción de imágenes mentales de configuraciones bidimensionales y tridimensionales.
- La anticipación a movimientos.
- La producción de razonamientos.

Las anteriores competencias se convierten en base de un saber hacer geométrico que prepara el terreno para el desarrollo de una competencia argumentativa en geometría, por cuanto propician:

- La toma de posición del sujeto frente al conocimiento, como efecto de la elaboración de un sentido geométrico; la asignación de un rol teórico a tal sentido (axioma, teorema, definición); la identificación de un status operatorio dentro de un proceso de razonamiento (hipótesis, premisas, conclusión, apoyos, etc.) y la discriminación de las reglas de aceptación de los procesos puestos en juego en la elaboración de sentido.

- La aprehensión operativa de las figuras.
- La producción de razonamientos inmersos en discursos naturales.
- La producción de razonamientos en discursos teóricos.

disciplinares, a propósito de un problema concreto: el desarrollo de competencia argumentativa en geometría.

Aspectos teóricos de base

Dos aspectos se constituyen en los tópicos teóricos que fundamentan la investigación: el primero se refiere a la caracterización y operacionalización de los denominados requerimientos didácticos, tanto desde el punto de vista de su función como referente para el diseño didáctico, como en su doble papel en el diseño investigativo: como orientador para la comprensión de los procesos didácticos y como producto teórico que explica tales procesos. El segundo, hace alusión a la caracterización de las competencias argumentativas en matemáticas, particularmente en geometría. A continuación se presenta la elaboración teórica realizada como punto de partida de la investigación.



MARCO TEÓRICO

¿Qué es un requerimiento didáctico? ¿Cuál es su función?

El punto de partida del presente estudio fue la consideración de la existencia de elementos estructurales que constituyen el marco referencial del saber propio de la didáctica, o el *referente orientador de tipo epistemológico*, para el diseño didáctico, en sus distintos componentes. Un elemento del referente orientador se constituye en requerimiento didáctico si cumple las siguientes condiciones: I) es un factor de obligada reflexión para el docente y para el investigador educativo, II) su existencia, como sus relaciones, son inherentes a las relaciones didácticas y dan razón del contexto escolar. III) En contextos particulares del proceso enseñanza-aprendizaje necesariamente adquiere una especificidad que se explicita en el diseño didáctico y que, a la vez, lo sustenta, para el desarrollo de los propósitos de aprendizaje.

En términos generales, existen requerimientos básicos en los campos específicos del saber escolar. Tales requerimientos adquieren matices particulares en concordancia con las condiciones impuestas por un tipo de saber, por una determinada población escolar y por unos propósitos curriculares puntuales.

Los requerimientos constituyen la base epistemológica del saber propio de la didáctica. En principio, la identificación de un requerimiento es efecto de

que estructuró un constructo teórico elaborado con base en dos acciones fundamentales: las relaciones establecidas en las reflexiones y discusiones teóricas, y los hallazgos obtenidos durante el diseño y aplicación de una propuesta didáctica que surgió como respuesta a la identificación de un estado inicial de desarrollo de competencia comunicativa en matemáticas³, del grupo de estudiantes observado.

Como resultado de la investigación se pretendió responder a preguntas particulares como:

1. ¿De qué naturaleza es la relación que se da entre los componentes epistemológico, comunicativo, cognitivo y sociocultural en la situación didáctica?
2. ¿Qué competencias matemáticas desarrolla en los estudiantes la práctica de la interacción argumentativa en situaciones de validación y de demostración de lo geométrico en el aula?
3. ¿Cuáles son las condiciones didácticas que garantizan el desarrollo de competencias argumentativas en geometría, en estudiantes de primeros semestres de licenciatura en matemáticas?

El macroproblema consideró que el desarrollo de competencias constituye uno de los aspectos fundamentales de la formación escolar. Además, es evidente que, si bien se ha identificado la necesidad de desarrollar competencias en los estudiantes, también es un hecho que aún no se consolida una noción específica de competencia matemática y tampoco se ha teorizado sobre las implicaciones didácticas para el desarrollo de competencias en los estudiantes.

¿Qué retos se planteó la investigación?

El propósito general de la investigación se planteó para establecer referentes teóricos que fundamenten el diseño de propuestas didácticas para el desarrollo de competencia argumentativa en geometría, en estudiantes de primer semestre de licenciatura en matemáticas. De ahí que los resultados de la investigación sean más de tipo teórico y se conviertan en “un referente didáctico” para el docente de matemáticas y en “un referente teórico” que vislumbra un desarrollo del lenguaje y de la argumentación, para el docente de lenguaje. Además, como resultado teórico, aporta a la teorización del saber didáctico de la matemática y del lenguaje, en tanto propone relaciones entre los dos campos

³ Resultado del proyecto “El papel de la argumentación en las situaciones de validación del conocimiento matemático en el aula”. Convenio Colciencias-Universidad del Valle. Realizado por el grupo Investigador. Vigencia 1999-2000.

CARACTERIZACIÓN DE LOS REQUERIMIENTOS DIDÁCTICOS PARA EL DESARROLLO DE COMPETENCIAS ARGUMENTATIVAS EN MATEMÁTICAS EN EL AULA*

*Olga Lucía León, área Matemáticas
Dora Inés Calderón área Lingüística¹*

Un problema... Un sentido para el proyecto

La investigación consideró fundamentalmente la existencia del problema que hemos dado en denominar “un estado generalizado de incompetencia comunicativa y matemática”, tanto en estudiantes como en profesores. Problema que se manifiesta, sobre todo, cuando unos y otros se enfrentan a situaciones que les exigen interpretar y producir: discursos argumentativos y soluciones para problemas matemáticos y validaciones de las mismas; actividades éstas que implican el desarrollo de formas de razonamiento más elaboradas que las que realizan cotidianamente en contextos no escolares.

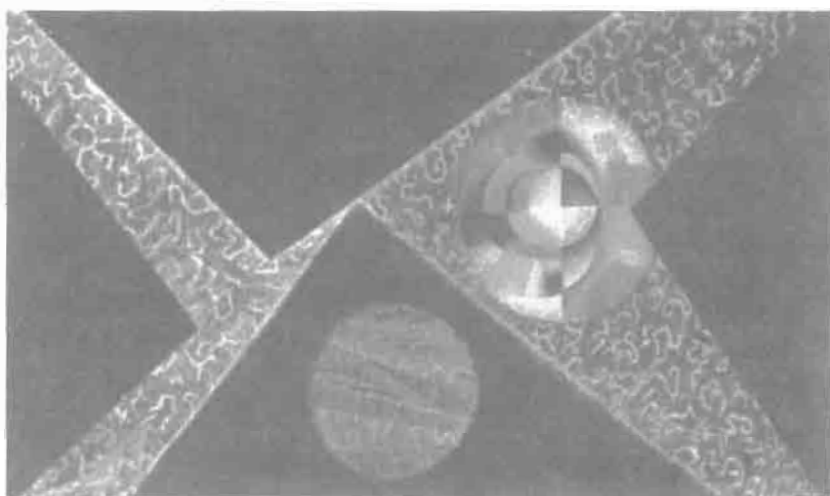
Frente a este problema, el grupo de investigación² consideró que desde la didáctica y la investigación educativa, era necesario generar una reflexión sobre las condiciones y exigencias teóricas y metodológicas que impone el propósito didáctico de desarrollar, en estudiantes de niveles iniciales de universidad, competencias argumentativas en matemáticas. Así, se propuso realizar un proceso de indagación, identificación y caracterización de los elementos que intervienen y que se ponen en juego en la construcción de situaciones didácticas particulares. Para ello se realizó un proceso de investigación-acción

* Esta investigación participó en la convocatoria focalizada de 1999. El informe final se encuentra en el Centro de Documentación del IDEP. También contó con el auspicio financiero de Colciencias-BID, a través de la financiación del proyecto “El papel de la argumentación en las situaciones de validación en el aula”

¹ Las investigadoras son estudiantes del Doctorado en Educación de la Universidad del Valle, en las áreas de Matemáticas y Lenguaje, respectivamente.

² Para la presente investigación, el grupo contó, durante los cinco primeros meses, con la colaboración de un coinvestigador en el campo de las matemáticas, el profesor Santiago González de la Universidad del Tolima y estudiante del Doctorado en Educación, en el área de Matemáticas.

INVESTIGACIONES E INNOVACIONES DEL IDEP



INVESTIGACIONES SOBRE LA ARGUMENTACIÓN

HARTNACK, Justus. *Teoría del conocimiento de Kant*. Ediciones Universales. Bogotá. 1993.

HESSEN, J. *Teoría del Conocimiento*. Ediciones Universales. Bogotá. 1993.

LANGFORD, Peter. *El desarrollo del pensamiento conceptual en la escuela secundaria*. Ediciones Paidós. México. 1989.

PIAGET, Jean. *Introducción a la Epistemología Genética*. Tomo I. Ediciones Paidós. México. 1987.

POGGIOLI, Lisete. *Formación de conceptos y categorías*. Universidad Pedagógica Experimental El Libertador. I.P.C. Venezuela. 1987.

QUESADA, Daniel. "Lógica de primer orden". En: *Lógica General*. Selección de Carlos Alchourron. Editorial Trotta S.A. Madrid. 1995.

SKEMP, Richard. *Psicología del aprendizaje de las Matemáticas*. Morata. Madrid. 1980.

TALIZINA, N. *Psicología de la enseñanza*. Editorial Progreso. Moscú. 1988.

VYGOTSKY, Lev S. *Pensamiento y Lenguaje*. Editorial La Pléyade. Buenos Aires. 1976.

WERTSCH, James. *Vygotsky y la formación social de la mente*. Ediciones Paidós. Barcelona. 1988.

Profundizar en la comprensión y diseño de los fundamentos matemáticos del proceso de elaboración de las categorías resultantes.

El proceso investigativo se puede constituir en uno de los componentes didácticos fundamentales para el desarrollo de los contenidos de diferentes áreas del conocimiento. Por ejemplo, se puede pretender la construcción de categorías lógicas en las ciencias naturales, en las ciencias sociales, en el lenguaje.

De igual manera, sería posible auscultar el desarrollo de la estrategia didáctica en la comparación de entes matemáticos, con la construcción de la categorías correspondientes; por ejemplo, comparar dos números de conjuntos numéricos diferentes; dos figuras geométricas; dos figuras cónicas; dos expresiones algebraicas.

Indagar acerca de la capacidad de transferir conocimiento que la estrategia desarrolla; es decir, examinar si como resultado de este tipo de procesos, se presentan cambios significativos en la organización categorial de los objetos de conocimiento en los diferentes cambios.

Auscultar la validez de la estrategia didáctica en la perspectiva de identificar lo que está dentro, fuera, y en la frontera de conjuntos de objetos comparados.

Establecer la validez de otras estrategias didácticas en la construcción de categorías lógicas.



BIBLIOGRAFÍA

ARISTÓTELES. *Tratado de lógica, el organón*. Ediciones Universales, Santa Fe de Bogotá. 1992.

ASOCIACIÓN ANILLO DE MATEMÁTICAS, AMA. *El desarrollo del pensamiento matemático en la Educación Básica*. Santa Fe de Bogotá. 1995.

DAVIDOV, Vasili. *La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico*. Editorial Progreso. Moscú. 1988.

DE GORTARI, Elí. *Lógica general*. Editorial Grijalbo. México. 1965.

DE ZUBIRÍA, Miguel y otro. *Biografía del pensamiento*. Cooperativa Editorial Magisterio. Santa Fe de Bogotá. 1996.

FERRATER MORA, José. *Diccionario de filosofía de bolsillo*. Editorial Alianza. Madrid. 1992.

aristotélica, pues el proceso cognitivo-afectivo que la estrategia genera, culmina en la elaboración de conceptos ubicados en ámbitos diferentes a la identificación empírica de propiedades. Además, el concepto mismo de categoría entra, de una manera natural, a formar parte del lenguaje empleado por los estudiantes para argumentar y contraargumentar en torno a las respuestas presentadas.

La validación en el ejercicio de comparación de objetos (concretos, representados o consultados previamente), a partir de la construcción de la proposición completa como una unidad de dos momentos; uno, el de atribuir propiedades a los objetos comparados y otro, el de proponer la *categoría* que relaciona los atributos de los objetos.

Las categorías cuya construcción se privilegió mediante la aplicación de la estrategia didáctica, fueron: cualidad, relación, cantidad, y en forma esporádica aparecieron categorías de sustancia, posición, lugar y tiempo.

Las distintas formas de reversa propuestas durante el desarrollo de los talleres permitieron la realización de descripciones más completas y relacionadas con cualidades de los objetos, no tan obvias o evidentes. Igual situación se presentó cuando la elaboración de la correspondiente categoría sugería la búsqueda de un nuevo atributo o predicado. Se notó un avance en la capacidad de describir, argumentar y sacar conclusiones, lo cual también fue observado por docentes de otras áreas.

El desarrollo de la estrategia contribuye a la formación de actitudes de consideración al punto de vista de los compañeros y de respeto por el uso de la palabra. En los momentos de socialización se observó una actitud de atención en los estudiantes, dirigida a comprender los argumentos de los demás integrantes del grupo. Esta actitud también se observa en la disposición de construir consenso.

Los resultados que se evidenciaron paulatinamente en el grupo de estudiantes, así como los elementos planteados durante las jornadas de socialización, despertaron interés en los docentes de cada institución, por conocer más a fondo el proyecto a fin de ver la posibilidad de incluirlo como parte de su plan de área.

La proyección del trabajo de investigación

Propiciar la construcción de categorías de cantidad, orientadas a la elaboración de la estructura lógica del concepto de número, aplicando la estrategia ya no a objetos particulares sino a colecciones de objetos, de modo que *número* aparezca como una de las cualidades de dichas colecciones.

- Ejemplo de la cuarta forma de reversa: basándose en las categorías encontradas en una actividad anterior se solicita buscar dos objetos que se parezcan o diferencien específicamente en una de esas categorías, y elaborar la proposición completa de comparación.

Lista de categorías obtenida al comparar dos muñecas:

<i>Accesorios del cabello</i>	<i>Color de los ojos</i>	<i>Posición</i>
<i>Largo del vestido</i>	<i>Forma de vestir</i>	<i>Existencia del calzado</i>
<i>Color del cabello</i>	<i>Largo del cabello</i>	<i>Altura</i>

– Se solicitó buscar dos alumnos del curso que se parezcan en *los accesorios del cabello* y elaborar la proposición de comparación.

Aparecieron proposiciones de esta forma: Sonia y María se parecen en *los accesorios de su cabello*, porque tanto Sonia como María usan diadema para sostenerse el cabello.

Buscar dos personas del salón que se diferencien en el *color de ojos* y elaborar la proposición de comparación.

Aparecieron proposiciones de esta forma:

Clara y Gloria se diferencian en el *color de los ojos* porque mientras Clara es de ojos azules, Gloria tiene ojos verdes.

- Ejemplo de la quinta forma de reversa: basándose en una lista de categorías obtenida de una actividad anterior, se solicita llenar la hoja de vida de un tercer objeto análogo, es decir, escribir las características específicas de un objeto, que estén relacionadas con estas categorías.

Dada la siguiente lista de categorías obtenidas al comparar dos artistas:

<i>Nacionalidad</i>	<i>Actividad artística</i>	<i>Edad</i>
<i>Estatura</i>	<i>Sexo</i>	<i>Estado Civil</i>
<i>Técnica utilizada</i>	<i>Número de hermanos</i>	<i>Grupo que acompañan</i>

Se solicitó llenar la hoja de vida a un nuevo artista, utilizando todas las categorías dadas.



CONCLUSIONES

Se concluye la validez de la estrategia didáctica “Juegos de diferencias y semejanzas” en la construcción de categorías lógicas, desde la perspectiva

- Ejemplo de la segunda forma de reversa: basándose en las categorías obtenidas al comparar dos elementos, comparar uno con un tercero análogo.

Algunas de las categorías obtenidas al comparar un modelo de carro de carreras Corvet y uno de carga Mac:

<i>Utilidad</i>	<i>Modelo</i>	<i>Clase de combustible que usa</i>
<i>Mecanismo</i>	<i>Comodidad</i>	<i>Identificación</i>
<i>Marca</i>	<i>Material</i>	<i>Tamaño</i>

Se propone: comparar un modelo de carro Renault con el carro de carreras anterior, Corvet, teniendo en cuenta las categorías que aparecieron.

Aparecieron proposiciones de esta forma:

El carro de carreras Corvet se diferencia del Renault en su *utilidad*, porque mientras el Corvet sirve para correr en una pista, el Renault sirve para movilizar personas.

Los dos carros se parecen en la *clase de combustible que usan*, porque tanto el Corvet como el Renault utilizan gasolina.

- Ejemplo de la Tercera forma de reversa: basándose en las categorías obtenidas al comparar dos elementos, escoger un objeto análogo como modelo y buscar otro que se parezca o se diferencie en una de las categorías identificadas inicialmente.

Algunas de categorías obtenidas al comparar un cisne y un elefante:

<i>Reino al que pertenecen</i>	<i>Color</i>	<i>Forma de la boca</i>
<i>Postura</i>	<i>Modo de comer</i>	<i>Hábitat</i>
<i>Cantidad de patas</i>	<i>Peso</i>	<i>Alimentación</i>

– Objeto análogo como modelo: perro.

Se pedía buscar un animal que se parezca al perro en el *número de patas* y elaborar la proposición de comparación.

Aparecieron proposiciones de esta forma: la vaca y el perro se parecen en el *número de patas* porque tanto la vaca como el perro tienen cuatro patas.

Se pedía buscar un animal que se diferenciara en el *hábitat* con el perro y elaborar la proposición de comparación.

Aparecieron proposiciones de esta forma: el león y el perro se diferencian en su *hábitat* porque mientras el perro puede vivir en cualquier parte, cerca del hombre, el león vive en la estepa.



b) El proceso lógico se lleva a cabo mediante el manejo de un operador, a través del cual los dos predicados se convierten en uno solo. Esto, más que un problema de escritura, es un problema de organización mental, pues la predicación de dos argumentos es una estructura mental de mayor elaboración que la predicación de una sola variable. De igual manera, la estructura lógica de la parte descriptiva (donde se maneja una variable), es diferente de la estructura lógica de la parte explicativa, que termina con la construcción de la categoría (y que supone la predicación de dos variables).

c) En ocasiones es posible definir un predicado de dos variables como una conjunción de dos predicados, o de dos variables. Ejemplo: tamaño para grande y pequeño.

d) La operación mental que permite llegar al concepto de 2 o de 3, es la de clasificación: a través de ella se organiza el mundo en *clases de equivalencia*, de modo que dada una colección, se puede afirmar si pertenece o no a la clase de equivalencia.

A través de la actividad mental que posibilita la construcción de *categorías* se forma una estructura cognitiva que posibilita la comprensión de los objetos del mundo organizados en clases de equivalencia, lo cual constituye uno de los componentes fundamentales del desarrollo del pensamiento lógico; la estructura lógica del proceso se plantea como un aporte a la comprensión del esquema conceptual que surge en relación con la construcción de categorías, pero que no se propone como un contenido para ser discutido con los estudiantes.

Modos de reversa propuestos dentro de la estrategia

El desarrollo del proyecto mostró que es posible propiciar cinco modelos diferentes de *reversa*.

- Ejemplo de la primera forma de reversa: a partir de las categorías construidas, describir un objeto análogo diferente a los empleados en actividades anteriores.

Ejemplo: al comparar un vaso y un pitillo aparecen las siguientes categorías: *color, forma, tamaño, material del que está hecho, utilidad, tipo de uso*. Se solicita describir un objeto análogo (por ejemplo una botella), teniendo en cuenta estas categorías.

Apareció una descripción como la siguiente: la botella es transparente; con adornos azules; cilíndrica; grande, de plástico, y sirve para guardar líquidos.

de relación como tamaño (grande, pequeño); longitud (largo, corto); textura (suave, áspero); grosor (grueso, delgado); altura (alto, bajo); amplitud (ancho, angosto), organiza los objetos del universo en jerarquías que constituyen *relaciones de orden* con las propiedades reflexiva, simétrica, transitiva.

En el caso de la categoría *tamaño*, los objetos quedan organizados en la jerarquía correspondiente a la relación de orden “ser más grande o igual a...” o también “ser equilargo o no con...”, que cumpliría: reflexiva (X equilargo con X), antisimétrica (si X es equilargo con Y entonces, Y no es equilargo con X), transitiva (si X es equilargo con Y, Y equilargo con Z, entonces X es equilargo con Z).

En algunas categorías de *cualidad*, por ejemplo *color*, aparece una categoría de *relación* cuando se cambia el instrumento de observación. Es así como, si se define color como longitud de onda, en el interior de cada uno de los taxones es posible organizar los objetos en jerarquías, pues se podría hablar de tonos fuertes y débiles de azul, o de verde, los cuales dependerían de la correspondiente longitud de onda.

Las categorías de relación pueden aparecer sin que a ellas se asocie una cantidad; es lo que sucede cuando la categoría *posición* se refiere, por ejemplo, a “un objeto colocado a la derecha y otro a la izquierda”.

Categorías de cantidad como patrones de organización

Aristóteles estableció la diferencia entre medir con números naturales y medir con números reales; a los primeros los llama *cantidades discretas* y a los segundos *cantidades continuas*. Cuando aparece una categoría de *cantidad* lo que se revela es la existencia de un patrón de medida o de conteo que puede estar asociado, a su vez, a una categoría de *cualidad*, o a una de *relación*. Por ejemplo, *edad* es una categoría de cantidad y de tiempo: 48 años es una cantidad temporal porque aparece el patrón de medida: años; de igual modo, 48 metros sería una cantidad de *longitud*. Edad sería, entonces, una categoría de *cualidad*, *cantidad*, *tiempo*, mientras que longitud lo sería de *cualidad*, *relación* y *cantidad*.

Interpretación lógica de las proposiciones de comparación

Las estructuras de las proposiciones de comparación construidas en desarrollo de la estrategia, presentan los siguientes elementos:

a) En la parte *descriptiva* de la proposición se usa un predicado para cada variable, en cambio, en la parte *explicativa* la categoría se puede manejar como predicado de dos variables.

Por tanto, la estrategia didáctica “Juego de diferencias y semejanzas” permitió superar la realización del pensamiento en *categorías de existencia presente* y ubicar su ámbito de ejecución en la reproducción del objeto idealizado y en la identificación de relaciones que reflejan la *universalidad de los objetos materiales*. El concepto de categoría, como constructo mental, se ubica así en el nivel de desarrollo de pensamiento que se pretendía y comenzó a formar parte significativa de la manera de pensar de los estudiantes que intervinieron en el desarrollo del proyecto.

Fundamentos matemáticos del proceso de elaboración de categorías

La estrategia didáctica “Juego de diferencias y semejanzas”, basada en la operación de comparar, suscita o genera fundamentalmente la construcción de categorías de cualidad, relación, cantidad. Veamos el contenido matemático (específicamente el lógico) del proceso de elaboración de *categorías*.

Categorías de cualidad: organización de los objetos de un universo en taxonomías

La selección de una cualidad de los objetos de un universo, genera o da lugar a la organización de ese universo en una *taxonomía*, o sea la organización de un universo en partes, sin que se traslapen la una a la otra, y de modo que este universo resulte de la unión de las partes. Lo que sucede con una categoría de cualidad, por ejemplo *color*, se estructura así: el mundo de los objetos queda dividido en *taxones*, cada uno de los cuales constituye una *clase* de equivalencia. Amarillo: clase de equivalencia a la que pertenecen los objetos de ese color.

Color: partición (universo descompuesto en partes disyuntas no vacías) que se obtiene mediante la relación de equivalencia *equicolor*, que cumple, por lo tanto, con las propiedades reflexiva (X equicolor con X), simétrica (si X es equicolor con Y entonces, Y es equicolor con X) y transitiva (si X es equicolor con Y , Y equicolor con Z , entonces X es equicolor con Z). En otros casos aparecerían relaciones como equiforma, equiutilidad, equimaterial que se comportarían en forma similar.

Cualidad es, entonces, una *taxonomía* que permite clasificar los objetos de un universo en *clases de equivalencia*, comparando los elementos de este universo a través de un instrumento determinado: la vista para el color.

Categorías de relación: organización de los objetos del universo en jerarquías

La selección de una categoría de relación supone la organización de los objetos del universo en una jerarquía que constituye una *relación de orden*. La categoría

son expresiones correspondientes a lenguajes de segundo orden, que superan la descripción de los objetos.

Relación entre el proceso descriptivo y construcción de la categoría

En un primer momento, la descripción incluyó un gran número de atributos de los objetos en observación, atributos que eran fácilmente perceptibles, por el medio que rodea a los estudiantes (el conejo es blanco, el helicóptero tiene hélices, el policía usa gorra); es decir, se manifestó el uso de categorías de nivel básico. Cuando se estableció la comparación se complementó la descripción inicial, pues aparecía la necesidad de acudir a atributos que no eran fácilmente perceptibles. En este estadio se emplearon categorías subordinadas que exigían un mayor nivel de inclusión y abstracción (el helicóptero y el carro transportan gente; el policía cuida gente y el payaso recrea a la gente).

En el momento de construir la categoría, se pasó a un nivel de abstracción más general pues se buscó la característica global que incluyó a los dos objetos observados, o a la relación que entre ellos se presentó (mientras el conejo es roedor, el elefante es rumiante, es decir, se diferencian en la forma de procesar el alimento. Tanto el helicóptero como el carro transportan gente, es decir, se parecen en su utilidad. Tanto el policía como el payaso le sirven a la gente, es decir, se parecen en su función social. La búsqueda de coherencia entre el atributo y la correspondiente categoría llevó al ejercicio de formas de derivación en el lenguaje, y se propusieron términos como alesidad para referirse a las alas de las aves y como inertidad para referirse a la condición de inerte.

La elaboración de las categorías mostró tres maneras diferentes de proceder dentro del grupo de estudiantes:

- a) La palabra que daba cuenta de la categoría era conocida y formaba parte del lenguaje común: Color, forma, número de patas.
- b) La palabra correspondiente no se encontraba dentro del propio léxico y se acudía a la ayuda del profesor o a la discusión colectiva: Potencia del motor.
- c) De todas maneras no se llegaba a la palabra requerida, pero se cumplía con la actividad mental de abstraer y generalizar.

La actividad mental descrita que se manifiesta en la descripción de los objetos propuestos y en la consiguiente construcción de *categorías* de semejanzas y diferencias sintetiza el propósito principal del proyecto en términos de "producir desarrollo de pensamiento teórico".

De *estado*: estado civil.

De *acción*: manera de desplazarse, forma de subsistencia, modo de hablar, manera de moverse, forma de obtener dinero, forma de actuar, forma de cubrirse el cuerpo.

De *pasión*: dependencia de alguien, creador.

Acerca de la completitud de las descripciones

En el desarrollo de los talleres de comparación se evidenció un mejoramiento en la descripción de los objetos respectivos, a través de los siguientes elementos: a) realización de la descripción cada vez de manera más acorde con las preguntas propuestas por el grupo; b) paso de frases cortas a proposiciones más completas; c) deseo de expresar en las descripciones todo el conocimiento que se tenía acerca de los objetos de comparación, ya fuera por la evocación personal de las características, o por los datos obtenidos en libros, enciclopedias, revistas y otros medios de comunicación.

La mayor completitud de una descripción permite la aparición de la mayoría de las categorías propuestas por Aristóteles. Esta situación se puede observar en la descripción, por ejemplo de un deporte: el baloncesto es un deporte (*sustancia*); el balón con que se juega es duro (*cualidad*); el balón pesa 270 gramos (*cantidad*); los jugadores van rápido por la cancha (*relación*); se inventó en Estados Unidos (*lugar*); cada tiempo dura veinte minutos (*tiempo*); se ganan puntos cuando se introduce un balón en la cesta (*acción*); el balón es lanzado por los jugadores (*pasión*); el tablero con la canasta está fijado en un extremo de la cancha (*posición*); el balón debe estar inflado para que rebote (*estado*).

Sintaxis de las expresiones empleadas

Dentro de las palabras utilizadas para proponer categorías se utilizaron nombres de objetos, como Maquillaje, calzado, ropa, vestuario, accesorios, cabello, peinado, zapatos, ojos, boca, dientes, piel... que no corresponden a categorías porque son características inherentes a los objetos. Son palabras correspondientes a lenguajes de primer orden.

Expresiones como tipo de maquillaje, existencia del calzado, clase de ropa, estilo del vestuario, composición del cuerpo, clase de accesorios, largo del cabello, tipo del peinado, estilo de los zapatos, color de ojos, forma de la boca, existencia de la dentadura, tipo de piel... se consideran categorías porque dan cuenta de la abstracción realizada por el alumno en la comparación, y

magnitud es algo que se puede dividir en partes continuas (Aristóteles. 1992, p. 130). La cantidad es discreta como el número y la palabra y es continua como longitud en un sentido, latitud en dos sentidos (superficie) y profundidad en tres sentidos (cuerpo).

La categoría de *sustancia*, como esencia, especie, naturaleza, género, reino; mostró poca frecuencia de aparición en el curso de los talleres; la razón de esta situación es la pretensión de que la esencia de los objetos es algo tan obvio o evidente, que no hay necesidad de referirse a ello. Por esto, el énfasis se puso en las cualidades, en los atributos o propiedades que era posible ubicar a partir de la observación de la apariencia externa de los objetos.

Cuando presenta el análisis de la categoría de sustancia, Aristóteles parte de las cosas y de la cosa real tal como la vemos y sentimos, distinguiendo tres elementos que él llama *sustancia*, *esencia* y *accidente*.

La *sustancia* le da dos significados, pero los usa indistintamente: uno, el sentido estricto, es el de la unidad que soporta todos los demás caracteres de la cosa; son notas distintivas o elementos conceptuales tales como tamaño, material, temperatura, contenido o capacidad; la razón de la cosa de la cual se predica y que yace debajo (Aristóteles, pp. 26-29). La sustancia es el correlato objetivo del sujeto en la proposición del sujeto en el juicio, pero todo lo que decimos de la sustancia es lo que Aristóteles llama *esencia*: la suma de las propiedades que podemos predicar de la sustancia. A dichas propiedades las clasifica en dos grupos: las que convienen al sujeto, a las cosas, y las otras que también convienen a las cosas y a la sustancia, pero que si alguno de ellos faltara, la sustancia seguiría siendo lo que es. Estos últimos son llamados por Aristóteles *accidentes*, porque el hecho de que el objeto los tenga o no los tenga, no entorpece para nada que sea lo que es; están adheridos a él de un cierto modo, ya que los accidentes no existen por sí solos sino siempre en otros objetos. Por esta razón los accidentes son mutables. En cambio, la sustancia se presenta como lo estable, lo permanente, la independencia y la permanencia.

Otras categorías:

De *posición*: posición, ubicación geográfica, lugar de actuación,

De *tiempo*: año en que fueron hechos, tiempo de fundado, fecha de nacimiento, duración.

De *lugar*: lugar de origen, localidad, ubicación geográfica, sitios recreativos, lugar de nacimiento, ubicación territorial, región natural a la que pertenece, lugares turísticos, situación geográfica, lugar de parqueo, localización del parqueo, lugar donde se mueven.

segunda clase de *cualidades* (cualidades dinámicas), por el contrario, se colocan los modos de los seres en movimiento, en tanto que están en movimiento, y las diferencias de los movimientos: la virtud y el vicio, el bien y el mal, sobre todo, reciben el nombre de cualidades que se dan en los seres animados, y entre éstos, principalmente en los que tienen voluntad (sensibles particulares).

Desde este punto de vista, los resultados permitieron observar que los tres aspectos de la *diferencia* manifestados por Aristóteles, se presentaron en el desarrollo de la estrategia didáctica.

Categorías de *relación*, como tamaño del vestido, tamaño de la boca, longitud del cabello, estatura, peso, talla, hábitat, textura, volumen, antigüedad, clima, forma de hablar, costo de vida, estrato socioeconómico, forma del suelo, accidente geográfico, actividad económica, altura sobre el nivel del mar, rapidez, capacidad, resistencia, utilidad, movilidad, formas de comunicación, formas de desplazamiento, estilo de traje.

Según la propuesta de Aristóteles, una cosa recibe el nombre de relativa cuando de una u otra manera su existencia está referida a algo que está fuera de él: “se llama *doble* lo que por su existir es doble de algo”. Existen otros relativos como hábito o posesión, disposición, percepción, conocimiento y actitud. Todos ellos se explican con referencia a algo distinto. Se habla de *relaciones* cuando la existencia de una cosa es de tal clase que predica de otros distintos, o bien de cualquier manera distinta con relación a algo distinto. Por ejemplo llamamos *grande* a una colina, refiriéndose a otra.

Categorías de *cantidad*, como número de patas, de ruedas, de extremidades, hilera de dientes, medidas, cantidad de habitantes, distancia terrenal, superficie, extensión, costo, capacidad de pasajeros, espacio que ocupa, volumen de su cabello, su valor por uso.

Las categorías de cantidad propuestas durante el proyecto estuvieron relacionadas más con propiedades o atributos de objetos individuales (edad, número de extremidades, medida de la longitud), que con colecciones de objetos, donde radicaría la esencia de la cantidad asociada al concepto de número.

Según Aristóteles, cantidad se dice de “lo que es divisible en dos o varios elementos integrantes, cada uno de los cuales es, por naturaleza, una cosa única y determinada”. Según ello, una multiplicidad es una *cantidad*, si es numerable, y una *magnitud* sí es mensurable. Se llama multiplicidad o pluralidad, a lo que es en potencia, divisible en partes no continuas (discretas);

Categorías de *cualidad*, como forma, textura, color, utilidad, material, presentación personal, color del cabello, forma de vestir, forma de maquillarse, color de la piel, largo de la cabellera, forma de la cara, adornos de su cabello, color de ojos, estado de ánimo, forma de vida, material del que está hecho, búsqueda de alimento, forma de alimentarse, estructura, nacionalidad, costumbres, tipo de servicio que presta, temperatura, nivel económico, estrato social, idioma, fundador.

Ésta fue la categoría que apareció con más frecuencia durante el desarrollo de la estrategia; se trata de los atributos de los objetos que se presentan de manera más evidente a los ojos de quienes pretenden hacer una descripción. Para Aristóteles, *cualidad* es aquello que nos obliga a decir de los seres que son de cierto modo; es la diferencia que distingue la esencia.

En el juego de diferencias y semejanzas, las categorías de cualidad son las que aparecen con mayor frecuencia, por ser las que están más relacionadas con niveles de pensamiento empírico. En este caso, de acuerdo con Aristóteles, la palabra *diferencia* tiene un sentido común, un sentido propio y un sentido que es aún más propio que los demás. Respecto al sentido común se dice que una cosa difiere de otra cuando presenta una alteración cualquiera en relación con ella misma o con una cosa diferente. En cuanto al sentido más propio se dice que una cosa difiere de otra cuando es distinta por una diferencia específica, por ejemplo, el hombre difiere del caballo por la cualidad de ser racional.

En el libro de *Metafísica*, Aristóteles define la cualidad de cuatro maneras:

1. Como la diferencia que distingue la esencia. Ejemplo: el hombre es un animal que tiene la cualidad de ser bípedo.
2. Como propiedad de los objetos inmóviles y de los seres matemáticos, de los números. Ejemplo: los números cuadrados, los que son imitación de la superficie.
3. como propiedades o atributos de las sustancias en movimiento. Ejemplo: calor, frío, blancura, negrura, pesadez, ligereza; se consideran todos los atributos que pueden revestir alternativamente los cuerpos en sus cambios.
4. Como todo lo que se dice respecto a la virtud y al vicio, y en general al bien y al mal.

Estas cuatro significaciones se reducen a dos: la *cualidad* (cualidades estáticas), como diferencia de la esencia (a la cual pertenece también la cualidad numérica); es realmente una diferencia entre esencias pero esencias inmóviles o consideradas en tanto que inmóviles (sensibles comunes). En la

- La seguridad y solvencia para expresar, en una sola proposición, la diferencia o semejanza.
- La calidad en la construcción de la categoría.

Aplicación de la estrategia

El trabajo de aula se desarrolló mediante la comparación de figuras de bloques lógicos, y de objetos muy cercanos a los estudiantes, como personajes de las tiras cómicas, juguetes, elementos de colección, láminas y temas referentes a las diferentes asignaturas.

Por ejemplo:

Dos personajes de cuentos infantiles	Dos frutas
Dos animales	Dos ciudades
Dos tipos de vivienda	Dos artistas
Dos carros	Dos tipos de música
Dos pinturas	Dos muñecas
Dos obras literarias	Dos medios de transporte

En la aplicación o desarrollo de los talleres se procedió de diversas formas, dependiendo de la naturaleza de los objetos de conocimientos propuestos. Esas formas fueron, fundamentalmente, las siguientes:

- Presentación de dos objetos tangibles, reales (como en el caso de dos muñecas, dos balones, dos carros...).
- Realización del taller a partir de la observación de dos objetos representados (un carro y un helicóptero, dos personajes de cuentos infantiles...).
- Desarrollo del taller basándose en la evocación del conocimiento que se posee de los objetos en cuestión (dos parques de recreación, dos barrios, dos personajes de la política, dos deportes...).



ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

Tipos de categorías que aparecen en el juego de semejanzas y diferencias

El proceso permitió observar, inicialmente, que el juego de diferencias y semejanzas propicia la construcción de categorías de los siguientes tipos, desde la perspectiva aristotélica:



- Establecer los acuerdos de grupo para la elaboración de las proposiciones, la exactitud y coherencia en la descripción de los objetos, las palabras “claves” que dan cuenta de la semejanza o diferencia, entre otros.
- Organización de los estudiantes en parejas para trabajar la estrategia (algunos preferían trabajar solos y esa posición se respetó).
- Explicación de la estrategia que se iba a llevar a cabo con el taller propuesto en el aula.
- Con la participación oral de los estudiantes se corroboró si se habían entendido las instrucciones dadas.
- Distribución del material como fotocopias, bloques lógicos, plantillas, marcadores, objetos, etc.
- Desarrollo del taller: se elaboró la descripción, comparación y la proposición completa que daba cuenta de la comparación.
- Socialización en cada grupo una vez terminado cada uno de los talleres, de las diferentes etapas del taller para compartir resultados, aclarar dudas y elaborar el listado de categorías para cada par de objetos o elementos comparados.
- Evaluación del taller: de la actividad propuesta y de la participación del grupo.

En el trabajo de aula el maestro asumió el rol de orientador del proceso y de moderador en las sesiones de discusión y síntesis.

Formas de recolección de la información

- Observación del trabajo de cada uno de los grupos de alumnos.
- Registro de los trabajos elaborados por los estudiantes como resultado de las acciones desarrolladas a lo largo del proceso.
- Diario de campo del maestro, donde se registró las diferentes situaciones que se presentaron durante la realización de distintas actividades, las dificultades, los avances, los logros, los estilos de pensamiento, las soluciones ingeniosas e inesperadas, las estrategias particulares.

Aspectos a tener en cuenta en el análisis de registros

- Tipos de preguntas que los estudiantes proponen para describir un objeto.
- Cuán completa es una descripción.
- La identificación de semejanzas y diferencias.

Describir separadamente cada objeto, contestando acerca de cada uno las preguntas acordadas previamente, y otras que se planteen.

b) Comparar los objetos propuestos.

Establecer *semejanzas* entre los objetos, seleccionando los atributos similares.

Establecer *diferencias*, seleccionando atributos opuestos o contrarios.

c) Construcción de proposiciones.

Elaborar una sola proposición que dé cuenta de dicha situación:

“Tanto el objeto A como el B son”, es decir, los dos objetos se parecen en

Elaborar una sola proposición que dé cuenta de esta situación de diferencia o contraste:

“Mientras que el objeto A es, el B es,”, es decir, los dos objetos se diferencian en

Observación: la forma de las proposiciones de comparación se acordó con los alumnos, luego de un proceso de diálogo y búsqueda de posibilidades. Por lo tanto, el análisis gramatical de dichas expresiones no constituyó interés especial para los objetivos de investigación. Dicho interés se ubicó, principalmente, en la naturaleza de las categorías elaboradas, desde el punto de vista de la lógica aristotélica.

d) Elaboración listado de categorías.

Elaborar el *listado de categorías* que permite dar cuenta, hablar, referirse a cada uno de los objetos o a los dos simultáneamente.

e) Repetir esta actividad en niveles distintos de complejidad.

Elementos cercanos al ambiente estudiantil (útiles escolares, elementos del aula...).

Elementos de su vida cotidiana (juguetes, deportes, parques, personajes de la política o la farándula, medios de transporte...).

Conceptos que tengan significado en algunas de las asignaturas del currículo (animales, ríos, obras literarias, acontecimientos históricos, deportes...).

Ejecución de la estrategia en el aula

Los talleres realizados mantuvieron una misma secuencia en su ejecución:

- Evocar lo desarrollado en los talleres anteriores como motivación y refuerzo.

reflejan la universalidad o la esencia del movimiento del objeto material” (Davidov. 1998, p. 122). Su contenido específico es, entonces, la relación objetiva de lo universal y lo singular (lo integral y lo diferente); no incluye algo que sea igual en cada objeto de la clase, sino que descubre las interrelaciones de objetos aislados dentro del todo, es decir, dentro del sistema de su formación. Así pues, el conocimiento es una unidad de lo sensorial y lo racional, de lo empírico y lo teórico.

C: un último aspecto del referente conceptual es *acerca del juego de diferencias y semejanzas*. El juego de los bloques lógicos, que forma parte de la propuesta de desarrollo curricular para grado sexto, elaborada por la Asociación Anillo de Matemáticas (AMA), plantea posibilidades didácticas amplias relacionadas con los juegos de clasificación, diferencias y semejanzas, correspondencia, árboles lógicos, etc.

En particular, los juegos de semejanzas y diferencias inducen en los alumnos la construcción e interiorización de las categorías *color, tamaño, forma y textura*. El juego dinamiza los procesos a partir de los cuales se supera la etapa descriptiva, y se emplean de manera natural las categorías halladas, para dar cuenta de semejanzas y diferencias entre las fichas: los estudiantes cambian espontáneamente la expresión “las fichas se diferencian porque una es *lisa* y la otra *rugosa*”, por la expresión “las fichas se diferencian en su *textura*”.

Organización de la estrategia

Descripción de la estrategia

a) Proceso descriptivo inicial.

En este primer momento de la estrategia, el proceso se orientó de la siguiente manera:

- Concertar con los alumnos el tipo de preguntas que se pueden contestar al describir un objeto: ¿Cómo es el objeto? ¿De quién es? ¿Qué características tiene? ¿Para qué sirve? ¿Cuánto costó? ¿Qué dimensiones tiene? ¿Dónde está? ¿De qué material está hecho? ¿Qué cantidad hay? ¿De que objeto estamos hablando? ¿Qué cualidades posee? Cuando lo comparamos con otros, ¿qué podemos decir? ¿Qué posición tiene con relación a algunos elementos del salón?...

- Proponer dos objetos que tengan entre sí cierto grado de analogía (por ejemplo: un lápiz y un cuaderno; Bogotá y Melgar; un cafeto y un roble; el río Magdalena y el Orinoco...).

Según este planteamiento, los objetos de la naturaleza se convierten en instrumentos para su transformación, sólo sobre la base del conocimiento de sus propiedades, como conexiones internas que permiten cambiar esas propiedades de acuerdo con las necesidades concretas y una finalidad específica. Tal transformación de los objetos, sobre la base del conocimiento de sus conexiones internas, permite superar o trascender su inmediatez y ponerlos en interacción con otros sistemas de objetos, en donde adquieren movimiento y una existencia mediatizada por dichas conexiones internas, esenciales. El movimiento de los sistemas de objetos se reproducen en la actividad práctica, gracias a la cual se separan y fijan “sólo las condiciones decisivas, verdaderamente indispensables, de reproducción de una u otra forma de movimiento de los objetos”.

El pensamiento empírico se puede caracterizar, entonces, como:

- Forma transformada y expresada verbalmente de la actividad de los órganos de los sentidos, enlazada con la vida real.
- Generalización de la experiencia en los juicios y su utilización en los razonamientos.
- Derivado directo de la actividad objetual-sensorial.
- Conocimiento de lo inmediato en la realidad.
- Estado del pensamiento en que cada objeto o cosa aparece como entidad autónoma.

Por tanto, la actividad objetual-práctica es un proceso de reproducción de las formas universales de las cosas en que tiene lugar el experimento objetual-sensorial, enlace hacia el experimento mental o pensamiento teórico, momento éste en el que se evidencian las siguientes situaciones:

- Se pone al descubierto la esencia del objeto del conocimiento.
- La “cosa dada” se vuelve objeto de posteriores transformaciones mentales.
- Se forma un sistema de enlaces mentales en el que cabe dicha “cosa”.
- La “cosa” aparece como medio de manifestación de otra dentro de cierto todo.

Mientras que el pensamiento empírico se realiza a través de categorías de existencia presente, en forma de discriminación de propiedades de los objetos y sus relaciones y como manifestación de la inmediatez o carácter externo, el pensamiento teórico es una “actividad mental por medio de la cual se reproduce el objeto idealizado y el sistema de sus relaciones, que en su unidad

- Planeación, ejecución y evaluación de las actividades que llevaron a la construcción de categorías en diferentes campos del conocimiento (ciencias, lenguaje, sociales, educación física), y aplicación de la estrategia didáctica prevista.
- Recolección, organización y sistematización de la información obtenida en el trabajo de aula.
- Reuniones semanales del grupo de investigación.
- Diligenciamiento de relatorías de las actividades de aula realizadas por cada uno de los integrantes del grupo, en las cuales se consignaron: registros individuales significativos, comportamientos del grupo frente a la actividad y opiniones del grupo de investigación para reorganizar la actividad en un futuro.
- Reorganización de actividades propuestas inicialmente según los resultados obtenidos hasta ese momento.
- Análisis de la información para una futura validación o no, de la estrategia didáctica.
- Jornadas de socialización con los docentes de las instituciones sede del proyecto.
- Elaboración de informes sobre el desarrollo del proyecto de investigación.

Referentes conceptuales

a) Uno de los referentes teóricos básicos fue *la concepción aristotélica de categoría*.

Cuando Aristóteles habló de *la estructura del ser*, la consideró al mismo tiempo estructura del pensar (García Morente, p. 93); propuso las *categorías* como directivas del pensamiento lógico o como aspectos reales, aunque generales de todo ser; éstas son: sustancia, cualidad, cantidad, relación, lugar, tiempo, pasión, acción, posición y estado.

Mirando las categorías en su aspecto *lógico*, aparecen los distintos puntos de vista desde los cuales es posible situarse para decir de un ser lo que es, con lo que aparecen un cierto número de modos, maneras de predicar del ser, maneras de atribuir al sujeto un predicado.

b) Otro de los referentes teóricos es *el contenido del pensamiento teórico*.

Para la escuela soviética (Davidov, 1988), la base de todo el conocimiento humano, incluido el conocimiento teórico, es la actividad objetiva práctica-productiva.

de desarrollo del pensamiento, ubicados en un nivel empírico (y que se expresan en un lenguaje fundamentalmente descriptivo) y acceder a expresiones de desarrollo de pensamiento teórico, una de las cuales es la construcción de *categorías lógicas*.



MARCO TEÓRICO

Problema

La pregunta investigativa propuesta fue: *¿El proceso de describir y comparar objetos favorece la construcción de categorías lógicas como expresión del desarrollo del pensamiento lógico?*

Los objetivos generales

- a) Avanzar en la comprensión de la naturaleza de los procesos que los estudiantes llevan a cabo durante su desarrollo cognitivo y afectivo.
- b) Validar estrategias didácticas diseñadas para propiciar el desarrollo del pensamiento.

El enfoque metodológico

El proceso llevado a cabo en esta investigación se cumplió con un enfoque fundamentalmente cualitativo, pues el aula se asumió como un espacio de reflexión y profundización en torno a las acciones, los desarrollos y las elaboraciones que se lograron en el trabajo escolar, como resultado de la aplicación de la estrategia didáctica "Juego de Semejanzas y Diferencias". Y se utilizaron elementos de la investigación etnográfica que posibilitaron ahondar en la comprensión de la naturaleza de los significados que los estudiantes construyen. Algunos de dichos elementos son: registro de observación; observaciones de las diferentes actitudes; comportamientos y reacciones durante la realización de la actividad; análisis de las realizaciones verbales de los diferentes talleres; interpretación del proceso.

Etapas del proceso

- Revisión bibliográfica acerca de diferentes enfoques sobre el concepto de categoría, y teorías pedagógicas y psicológicas relativas al desarrollo del pensamiento teórico.

LAS CATEGORÍAS LÓGICAS COMO EXPRESIÓN DEL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO TEÓRICO*

Una estrategia didáctica para estudiantes de grados sexto y séptimo

Filena Eva Jiménez de Rodríguez

Miembro de la Asociación Anillo de Matemáticas (AMA)

El proyecto de investigación fue desarrollado entre julio de 1997 y octubre de 1998, por cinco profesores de matemáticas al servicio del Distrito¹, con ciento sesenta y seis estudiantes de los grados sexto, séptimo y octavo de educación básica, pertenecientes a los colegios Distrital Nestor Forero Alcalá, jornada mañana (localidad 10); Cooperativo de Integración Social COINSO, jornada nocturna (localidad 1); y Centro de Enseñanza Diversificada CEDID San Pablo, jornada mañana (localidad 7); ubicados en Bogotá D.C.

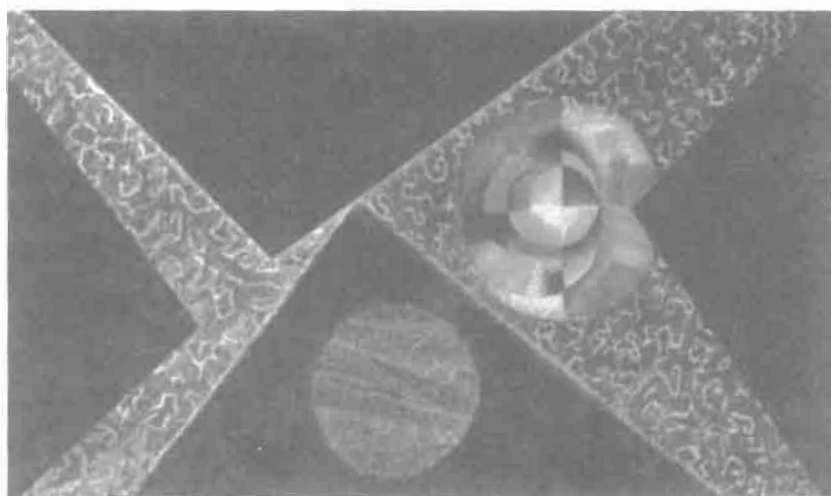
Estos profesores pertenecen a la Asociación Anillo de Matemáticas (AMA), la cual está incursionando en la investigación educativa, buscando nuevas maneras de hacer matemáticas escolares en el aula. La asociación AMA es, fundamentalmente, un espacio de autoformación docente al cual se han vinculado maestros de diferentes niveles, que sienten la necesidad de renovar sus prácticas pedagógicas en relación con su propia identidad profesional y con el desarrollo intelectual y motivacional de sus alumnos, partiendo del reconocimiento de su propia práctica, que se convierte así en objeto de reflexión permanente y posibilita el surgimiento de modelos alternativos para la labor pedagógica.

La investigación pretendió dar cuenta de la forma como el desarrollo del pensamiento del escolar se pone de manifiesto a través de la expresión, en el lenguaje, de formas más elaboradas de asimilación y comprensión de los objetos del conocimiento. La búsqueda de nuevas opciones didácticas ha permitido construir una estrategia que puede contribuir a superar los estadios

* El texto completo de la innovación "Las categorías lógicas como expresión del desarrollo del pensamiento teórico" se encuentran en el Centro de Documentación del IDEP.

¹ Investigadores: José Vija, Clara Bejarano, Rosa Vargas, Filena Jiménez; asesora: Marina Ortiz.

INVESTIGACIONES E INNOVACIONES DEL IDEP



**INVESTIGACIÓN SOBRE CONSTRUCCIÓN
DE PENSAMIENTO TEÓRICO**



BIBLIOGRAFÍA

- BUSTAMANTE, Guillermo; PÉREZ Mauricio. *La evaluación escolar: resultados o procesos*. Bogotá. Cooperativa Editorial Magisterio. 1996.
- CASTAÑO, Jorge. *Elementos para formular una propuesta alternativa de evaluación de procesos pedagógicos en la básica primaria*. Bogotá. Colegio Champagnat. 1993.
- _____. *Evaluación de conocimientos matemáticos en grado cero*. CONACED (Mimeog.). Bogotá. 1996.
- _____. y FORERO, Amparo. *Evaluación del conocimiento matemático de preescolar a segundo*. PUJ-IDEP-Colegio Champagnat. 1996.
- COOK, T.D.; REICHARD, Ch. S. *Métodos cualitativos y cuantitativos en evaluación educativa*. Morata. Madrid. 1995.
- ESCOBEDO, Hernan. "Los indicadores de logro no son objetivos comportamentales". En: *Educación y cultura*. FECODE. N° 30. Bogotá. 1996.
- ELIOT W. Eisner. *Procesos cognitivos y curriculum*. Martínez Roca. Barcelona. 1987.
- FERNÁNDEZ, M. *Evaluación y cambio educativo*. Morata. Madrid. 1988.
- GIMENO, Sacristán. *La pedagogía por objetivos: obsesión por la eficacia*. Morata. Madrid. 1995.
- LEÓN PEREIRA, Teresa. *Indicadores. Un mirador para la educación*. Norma. Bogotá. 1997.
- MCCORNICK; M., James. *Evaluación del curriculum en los centros escolares*. Morata. Madrid. 1996.
- MUGNY, Gabriel; PÉREZ, Juan. *Psicología social del desarrollo cognitivo*. Anthropos. Barcelona. 1988.
- NEWMAN, D. y otros. *La zona de la construcción del aprendizaje*. Morata. Madrid. 1991.
- STENHOUSE, L. *Investigación y desarrollo del curriculum*. Morata. Madrid. 1987.
- PÉREZ GÓMEZ, A.I.; McDONAL, B.; SACRISTÁN, Gimeno. *La evaluación: teoría y práctica*. Cooperativa Laboratorio Educativo. Venezuela. 1985.
- ROGOFF, Bárbara. *Aprendices del pensamiento. El desarrollo cognitivo en el contexto social*. Paidós. Barcelona. 1993.

La apreciación que se hace el profesor de su alumno es muy importante, pero a veces es difusa e imprecisa. Por esto, la entrevista y las pruebas escritas le sirven para precisarla.

La prueba escrita a veces “despista”. Los niños pueden fracasar por muchas razones en una pregunta, a pesar de poseer el pensamiento para resolverla correctamente. Por eso, la apreciación del profesor sirve de control para relativizar la información de la prueba escrita.

La entrevista permite escoger información precisa de lo que logra hacer un niño, y de la forma como lo hace. Mediante la entrevista, el maestro conoce los procedimientos que siguen los niños, revelándole el verdadero nivel que han logrado. Las pruebas escritas no muestran con precisión todo lo que hace un niño para resolver una situación.

Aunque la entrevista proporciona información en profundidad, tiene el inconveniente de no poderse aplicar a un buen número de niños. De ahí la necesidad de combinar adecuadamente estas formas de recoger información.



CONCLUSIONES

Como fruto final de la investigación, se obtuvo:

- Un modelo válido para la evaluación del proceso de construcción del conocimiento matemático en los niños de preescolar a segundo, que sirva de referencia para el diseño de procesos de evaluación en otras instituciones.
- Socialización de este modelo a través de una publicación, que dé cuenta de los resultados de la investigación y la realización de eventos académicos.
- Una versión final de los componentes del modelo para la evaluación del proceso de construcción del sistema conceptual numérico en los niños de preescolar a segundo, válido con la muestra seleccionada para tal fin.
- Socialización de este modelo a través de algunos espacios académicos y de publicación sobre el tema: Revista *Debates*. PUJ, Corporación para el Desarrollo de la Educación Básica-MEN, Revista *Alegría de Soñar* FES-MEN.
- La consolidación de equipos docentes investigadores en las instituciones en la que se desarrolló el proyecto.

Organización de los tiempos. ¿Cómo se organizan los tiempos para las situaciones planeadas, las acciones son fragmentadas, se mantiene la continuidad? ¿Cómo se articula con otros saberes, cuál es el nivel de decisión de los alumnos con relación a ese aspecto?

Materiales y recursos. Se proponen materiales y ayudas didácticas innovadoras y creativas. Estos materiales están vinculados a los contextos y al mundo de los niños. ¿Qué tipo de demandas lógicas le hace a los niños? ¿Quiénes los elaboran? Y si ¿los textos que se abordan son de fácil manejo, comunicables, y si están adecuados a los niveles de desarrollo de los niños?

Sobre los procedimientos para recoger información

Si la evaluación se entiende como el estudio de un proceso para conocerlo y comprenderlo, con el fin de potenciarlo tanto como sea posible, es necesario que éste se haga de manera continua e involucre a los diferentes sujetos que en él participan.

De ahí la importancia de obtener información en diferentes momentos y por distintos procedimientos. Sin embargo, en la práctica es imposible responder a la necesidad de continuidad. Para hacerse a un proceso es necesario realizar cortes, en los cuales se recoja información que permita describir estados parciales de éste. La comparación de los estados parciales permite reconstruir el proceso, al establecer los cambios que se producen de un momento a otro.

Por eso se recomienda al maestro que haga uno o dos cortes al año en el que aplique pruebas escritas lo suficientemente estructuradas, que registre esta información en planillas adecuadamente diseñadas con el fin de ir configurando un cuadro sobre el desempeño de sus alumnos.

Hay tres formas complementarias de obtener información sobre el desempeño del alumno:

Observación del profesor. A través del contacto permanente que el maestro establece con el alumno. Es útil llevar un cuaderno de registros.

Entrevistas. El maestro planea una situación que el niño debe resolver, para observarlo y hacerle preguntas que le ayuden a precisar qué hace y cómo lo hace.

Pruebas escritas. Pruebas que el profesor diseña para recoger información sobre el desempeño individual y grupal. Se aplican a varios alumnos a la vez.

disciplina en la escuela asegura la preservación y reproducción de formas culturales.

Afectos

Los procesos afectivos se ponen en juego en el momento de conocer, en las relaciones que se establecen con los objetos y sujetos. Sin embargo, es poco lo que los teóricos han profundizado sobre el tema. Esto se ha convertido en una excusa para el aprender o no aprender.

Organización espacial

Los espacios están cargados de significación, hay espacios asignados para la realización de ciertas actividades, y a los sujetos no les está permitido su acceso. Como en el plano del aula la disposición de los objetos y sujetos, el manejo de distancias y relaciones de los sujetos en un espacio, etc.

Sobre las condiciones pedagógicas

Se busca comprender cuáles son las condiciones que favorecen u obstaculizan el aprendizaje de los alumnos. Estas condiciones están inscritas dentro de:

Lo institucional

Aspectos organizativos, administrativos, pedagógicos y culturales.

El aula

Desarrollo del currículo. En el interior de la propuesta se propone desarrollar en el aula situaciones significativas que posibiliten la construcción de significados y sentido por parte de los niños, que movilicen sus procesos lógicos a la vez que sus intereses y afectos. Para hacer el análisis se propone, entonces, que los docentes lleven registro de las situaciones creadas, diferenciando en ellas aspectos relacionados con:

Tipos de situación. Situaciones abiertas o cerradas.

Contenidos que se abordan a través de ellas. ¿Qué demandas lógicas le hacen a los alumnos? ¿Qué esquemas se desarrollan? ¿Sus contenidos están ligados a la experiencia inmediata y a los contextos, o son contenidos abstractos que incluyen la reflexión sobre la acción?

Metodología. ¿Qué métodos se privilegian: predomina el trabajo individual o grupal? ¿Se desarrollan plenarios que permitan la contrastación colectiva y la circulación de los saberes?

Lectura y escritura de números

El niño lee y escribe números de hasta tres cifras.

Sobre los procesos interactivos

Incluye las interacciones que se establecen entre los sujetos del proceso que llamaremos sociales, y las que se establecen con el objeto de conocimiento.

La construcción del conocimiento es un proceso individual y social, los sujetos se apropian de la realidad a través de la interacción que establecen con el adulto y con los padres, mediadas por el lenguaje, el afecto y atravesadas por el poder, y se manifiesta a través de la disciplina que se hace visible en el manejo de los espacios, los tiempos y el movimiento.

Lenguaje

A través del lenguaje los sujetos se apropian de las significaciones y simbolizaciones de la cultura determinada; a los sujetos, al estar inmersos, les corresponde descifrar e interpretar los códigos verbales y no verbales y las reglas que rigen el lenguaje, así interiorizan formas de pensar, actuar y sentir de la cultura en la que están inmersos.

Pautas de interacción

La acción individual encierra actos motivados por intereses instrumentales, y también por un sistema de valores adquirido en un contexto social. Que contribuyen al significado que el individuo confiere a su acción. Así, un individuo podría seguir reglas motivado por la idea de una recompensa y por el miedo a un castigo, o por el contrario, por la necesidad de dar significado a su vida.

Ejercicio del poder

El poder como plantea Foucault, es un asunto de gobierno. El gobierno no sólo referido a las estructuras políticas administrativas de los estados, sino a la dirección de los grupos, al modo de incidir sobre la acción de otros.

Otra modalidad del ejercicio del poder está dada por la forma como se distribuyen los saberes, el control que se hace sobre ellos y sobre quién se cree poseedor de los mismos.

Manejo de la disciplina

Es una modalidad del ejercicio del poder que organiza a los individuos en un espacio (aulas, celdas, oficinas) y en cada lugar se discriminan rangos. La

Cálculo de resultados

El niño ejecuta las operaciones de adición y sustracción mediante el proceso de descomposición.

Estimación de resultados

El niño muestra resultados de adiciones y sustracciones.

Las competencias relativas al manejo de las operaciones multiplicativas suponen que el niño posee un pensamiento multiplicativo incipiente, es decir, que posee la capacidad de comprender problemas multiplicativos pero los aborda como problemas de adiciones repetitivas.

Indicadores para observar la construcción de la competencia

Comprensión y resolución de problemas aditivos

El niño comprende y resuelve, mediante procesos aditivos, problemas multiplicativos simples del tipo de correspondencia múltiple.

Y por último, las competencias relativas al manejo del sistema decimal de numeración, que suponen que el niño posee un pensamiento que, al operar con los números, descompone los numerales que los representa de forma aditiva y de forma aditivo-multiplicativa.

Indicadores para observar la construcción de la competencia

Descomposición de unidades superiores a unidades de primer orden y viceversa

Dado un numeral, el niño lo descompone como adiciones de unidades de primer orden.

Ejemplo: $345 \Rightarrow 300 + 40 + 5$ y

$345 \Rightarrow 3 \times 100 + 4 \times 10 + 5 \times 1$

Y dadas unidades de diferentes órdenes, el niño las compone en una totalidad de unos.

Ejemplo: $345 \Rightarrow 300 + 40 + 5$ y

$345 \Rightarrow 3 \times 100 + 4 \times 10 + 5 \times 1$

Completar series

Sobre una sucesión de unos, el niño hace particiones de dieces y cientos.

Las competencias relativas al manejo de las relaciones de equivalencia suponen que el niño opera entre dos o más relaciones de igualdad, bien sea aplicadas a conjuntos o números y que se apoya en la igualdad numérica para dar cuenta de la igualdad de extensión de dos.

Indicadores para observar la construcción de la competencia

Transitividad de la igualdad

El niño resuelve problemas que suponen un pensamiento transitivo de la relación de igualdad aplicada a números o conjuntos.

Igualdad y relación biunívoca

El niño resuelve problemas que implican anticipar la posibilidad de la relación término a término entre dos conjuntos, a partir de la igualdad de sus cardinales, y viceversa.

Las competencias relativas al manejo de las operaciones aditivas suponen que el niño tiene un pensamiento aditivo que le permite establecer coordinaciones intuitivas entre la composición de las partes y la descomposición del todo. Para abordar distintos tipos de problemas que involucran la adición parte y todo opera entre dos o más relaciones de igualdad, bien sea aplicada a conjuntos o números y que se apoya en la igualdad numérica para dar cuenta de la igualdad de extensión de dos.

Indicadores para observar la construcción de la competencia

Comprensión y resolución de problemas aditivos simples

El niño comprende y resuelve problemas aditivos simples, con evento y sin evento. Ofrece soluciones intuitivas en los problemas de complemento a derecha y recomposición.

Comprensión y resolución de problemas aditivos compuestos

El niño comprende y resuelve problemas aditivos compuestos directos con evento y sin evento, y directos (doble composición, doble descomposición y de composición y descomposición).

Formulación de problemas

El niño inventa problemas que requieren realizar una adición (suma) o una sustracción (resta).

Indicadores para observar la construcción de la competencia

Construcción de series

El niño resuelve problemas relativos a series compuestas de una colección de mínimo siete números (o de conjuntos), según algunas de las relaciones “mayor que” o “menor que” (más o menos cantidad de elementos). Utiliza esta capacidad para ordenar objetos según estas relaciones, aplicada a alguna magnitud que permita comparar estos objetos, y de la cual se conoce el valor de la magnitud de cada uno.

Correspondencia entre series

El niño pone en correspondencia, directa o inversa, dos o más series de mínimo siete números, construidas según las relaciones “mayor que” y “menor que”, asignando a cada rango de una de las series el rango correspondiente a otra. Utiliza esta capacidad para ordenar objetos según estas relaciones, aplicada a alguna magnitud que permita comparar estos objetos, y de la cual se conoce el valor de la magnitud para cada uno.

Selección del mayor o del menor

El niño resuelve problemas que requieren encontrar el mayor o el menor de una colección de mínimo siete números. Utiliza esta capacidad para resolver problemas de este tipo aplicados a magnitudes, siempre que se conozca el valor de las magnitudes.

Con relación a las competencias relativas al manejo de las relaciones de orden multiplicativo, supone que el niño establece de forma intuitiva las relaciones de “el doble de” y “la mitad de” entre dos números y dos magnitudes, cuando resuelve los problemas a nivel numérico lo hace mediante procesos aditivos, y cuando lo hace entre magnitudes se apoya en acciones realmente ejecutadas.

Indicadores para observar la construcción de la competencia

Cálculo del doble

Resuelve, mediante la adición, problemas que suponen calcular el doble de un número, bien sea referido a conjuntos o a magnitudes.

Cálculo de la mitad

Resuelve, mediante la adición, problemas que suponen calcular la mitad de un número, bien sea referido a conjuntos o a magnitudes.

PENSAMIENTO RELACIONAL	PENSAMIENTO OPERACIONAL	PENSAMIENTO NOTACIONAL Y ENUNCIATIVO
<p>forma comprensiva las relaciones “múltiplo de” y “divisor de”. Además de tener la capacidad de identificar los divisores o múltiplos de un número, se trata de poder operar con estas relaciones, es decir, poseer un pensamiento que maneje la transitividad y la composición de las relaciones directa e inversa.</p>	<p>los distintos tipos de problemas multiplicativos simples y compuestos.</p>	
<p><i>De equivalencia</i> Hace referencia a ese pensamiento que maneja la igualdad entre números naturales.</p>	<p><i>Potenciativa</i> Hace referencia a ese pensamiento que permite comprender y resolver problemas elementos de potenciación.</p>	

Con base en la descripción dada del sistema conceptual de los números naturales se pueden definir las competencias cognitivas que se consideren deseables y posibles de alcanzar al finalizar segundo de primaria. Con base en el conocimiento que se tenga de la génesis de los conceptos involucrados en la construcción de tales competencias, se pueden definir los niveles que se pueden ir alcanzando en cada grado.

El anterior cuadro muestra las competencias cognitivas específicas que deben ayudarse a construir en un niño de básica primaria. A partir de éste, el profesor podrá definir los logros, que en el campo estrictamente cognitivo considera deseable y posible.

Las competencias deseables y posibles que se pueden lograr al finalizar segundo grado con relación al manejo de las relaciones de orden aditivo, se explican teniendo en cuenta que el niño da muestra de operar con dos o mas proposiciones de la forma “mayor que” y “menor que”, para analizar un hecho o establecer una conclusión. En otras palabras, el niño da muestras de poseer un pensamiento transitivo y de composición de las relaciones directa e inversa.

EL SISTEMA DE LOS NÚMEROS NATURALES		
RELACIONES	OPERACIONES	NOTACIÓN Y ENUNCIACIÓN
<p><i>De orden aditivo</i> mayor que menor que</p>	<p><i>Aditivas</i> adición (o suma) sustracción (o resta)</p>	<p>conteo lectura escritura</p>
<p><i>De orden multiplicativo</i> multiplo de divisor de</p>	<p><i>Multiplicativas</i> multiplicación división</p>	<p>sistema decimal de numeración</p>
<p><i>De equivalencia</i> Ser igual a</p>	<p><i>Potenciativa</i> Potenciación</p>	

SISTEMA CONCEPTUAL DE LOS NÚMEROS NATURALES		
PENSAMIENTO RELACIONAL	PENSAMIENTO OPERACIONAL	PENSAMIENTO NOTACIONAL Y ENUNCIATIVO
<p><i>De orden aditivo</i> Hace referencia a ese pensamiento que permite manejar de forma comprensiva las relaciones "mayor que" y "menor que". Además de tener la capacidad de identificar el mayor o menor entre dos naturales, se trata de poder operar con estas relaciones, es decir, poseer un pensamiento que maneje la transitividad y la composición de las relaciones directa e inversa.</p>	<p><i>Aditivas</i> Hace referencia a ese pensamiento que permite comprender y resolver los distintos tipos de problemas aditivos, simples y compuestos.</p>	<p>Hace referencia a ese pensamiento que permite comprender y manejar los principios que rigen ese sistema. De notación y enunciación de los números.</p>
<p><i>De orden multiplicativo</i> Hace referencia a ese pensamiento que permite manejar de</p>	<p><i>Multiplicativas</i> Hace referencia a ese pensamiento que permite comprender y resolver</p>	

1. Los procesos cognitivos (generales y específicos. Éstos hacen referencia a los procesos de pensamiento que se generan para aprehender los sistemas conceptuales propios del conocimiento matemático).

2. Los procesos interactivos. Hacen referencia al mundo subjetivo del niño y están presentes en la totalidad de las relaciones que establece con el mundo.

3. Los procesos pedagógicos. Hacen referencia a las condiciones que se propician en la escuela, más específicamente en el aula, para apoyar el aprendizaje de los alumnos.

Sobre los procesos cognitivos

Sistema conceptual de los números naturales

Hace referencia a ese sistema de herramientas –que existen en el intelecto de los niños que les permite comprender y resolver problemas susceptibles de ser definidos en el conjunto de los números naturales–. En cambio, cuando se habla del *sistema de los números naturales*, se hace referencia al constructo teórico propio de la disciplina matemática.

Entre estos dos sistemas, el psicológico (sistema conceptual numérico) y el disciplinar (sistema de los números naturales), existen relaciones estrechas. El niño tiene que saber que se hace referencia a la disciplina matemática, cuando se habla, por ejemplo, de la adición, sustracción o múltiplos y divisores, a expresiones propias de ésta. Debe conocer, además, el sistema de símbolos que se utiliza, manejar su sintaxis, pero no le basta tener éstas herramientas para comprender y resolver problemas que exijan un manejo inteligente de estas ideas. Se puede afirmar, además, que si el estudiante no posee un sistema conceptual referido a los números naturales sólidamente consolidado, no podrá aprender comprensivamente las ideas del sistema disciplinar.

El determinar con la mayor precisión posible el *sistema de los números naturales* en el plano de la disciplina, ayuda a precisar el *sistema conceptual* que tiene que ser evaluado.

El siguiente cuadro muestra las relaciones y operaciones que se pueden considerar conformando el sistema numérico de los naturales que resulta adecuado a un nivel de básica primaria.

Una vez definido el sistema de los números naturales a nivel disciplinar, se está en condiciones de definir el sistema conceptual correspondiente, lo que permitirá precisar los aspectos específicos del pensamiento que deberán ser construidos para que el niño domine tal sistema disciplinar.

Seguramente es fácil establecer acuerdos entre posturas educativas diferentes con relación a la idea de que los procesos de desarrollo de los individuos no responden de manera exclusiva a la influencia de la escuela; y si esto es así, cabe la pregunta: entonces ¿qué tan lícito es asignar a la escuela la tarea de evaluar el proceso de desarrollo de los alumnos?, que al parecer, es un supuesto básico ligado a la propuesta de evaluación de logros, y además, ¿qué es lo que la escuela debe evaluar en un campo específico del conocimiento?

Pérez M., escribe: "Si estamos de acuerdo con que es pertinente organizar el currículo y los logros al rededor de competencias, el siguiente paso será pensar a través de qué procesos se contribuye al fortalecimiento de dichas competencias. Se trata de redimensionar el papel de los contenidos dentro de las prácticas curriculares, en el sentido de convertirlos en núcleos o nodos, a través de los cuales avanzamos en el desarrollo de las competencias y procesos".

De acuerdo con lo anterior, la respuesta a las preguntas formuladas deberían contestarse afirmando que la escuela tiene la responsabilidad de evaluar, en el campo de la adquisición de los conocimientos específicos, el proceso de construcción que de ese conocimiento se da en cada alumno, y de las condiciones pedagógicas que propicia para ello.

Pero ¿cómo precisar este proceso de construcción en cada campo disciplinar? Este proceso se puede pensar como constituido por unos subprocesos: los subprocesos generales y específicos del pensamiento, los subprocesos interactivos propios de la condición social del hombre, y en particular de la construcción del conocimiento. Estos procesos no se dan en abstracto: se despliegan en el marco de las condiciones pedagógicas que se propician en el aula.

En lo referente a los procesos generales y específicos del pensamiento se hace necesaria la génesis de los conceptos. En el caso específico del conocimiento matemático se hace necesario conocer los procesos que estimula. De igual forma, en el campo de los procesos interactivos se hace necesario definir categorías que permitan evaluar lo que se da en el aula, y la forma como un niño en particular se desempeña.



ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

Al evaluar el proceso de construcción del conocimiento matemático por parte del niño, se hace necesario evaluar tres subprocesos que lo constituyen:



Esta interacción está orientada por metas abiertas y flexibles, y se inscribe en el espacio de la producción cultural, entendido como el sistema de símbolos y signos en el que los individuos interactúan y se constituyen como sujetos.

Desde una perspectiva como ésta, se trata de ofrecer las mejores condiciones posibles para movilizar el desarrollo del niño, bajo unos horizontes que se conciben y se hacen posibles como fruto de la negociación social.

En este sentido, Baena (1987) propone un desplazamiento del objeto de la educación, señalando que éste no es el alumno, o el desarrollo del alumno, como generalmente podría admitirse, sino el conocimiento.

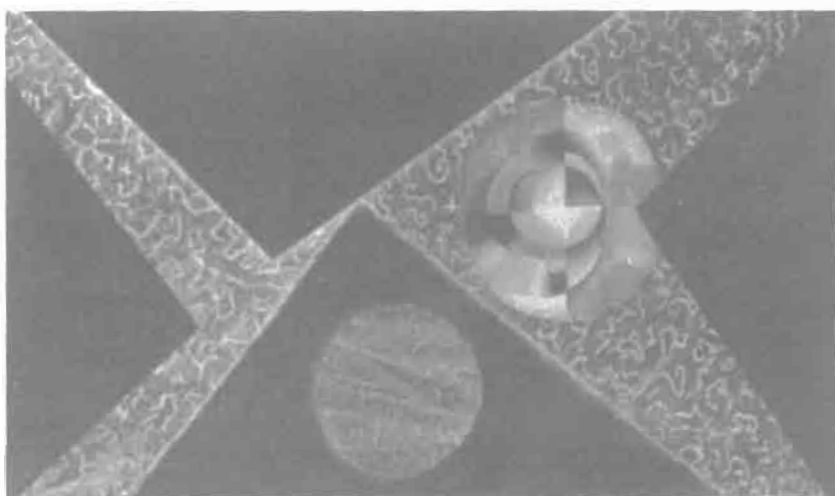
Por otra parte, Ordoñez afirma que se trata de posibilitar la construcción de sentidos, mediante el diálogo con los códigos de la cultura, para ampliar los horizontes de significación. Además, niega que alguien posea una verdad indiscutible sobre el rumbo que deba tomar la acción de un grupo humano, y rechaza la uniformidad en la forma como una definición unilateral de los planes de acción afecta y se adecua a las subjetividades participantes en ellos.

La evaluación desde esta perspectiva, necesariamente ha de estar orientada a posibilitar a los actores escolares la comprensión de los procesos que ellos ayudan a desarrollar, con miras a construir nuevos sentidos de sus acciones y participar en la producción cultural.

En la literatura sobre evaluación en educación existe prácticamente un acuerdo básico en la actualidad: el objeto de la evaluación no se agota en el alumno, también son objeto de evaluación los logros de los alumnos en cuanto a su proceso de formación y los factores asociables a los mismos, el proceso curricular y el desempeño profesional de los docentes y directivos docentes, esto con referencia a los logros de los alumnos. "En este sentido, son objeto de la evaluación los procesos y los resultados del desarrollo de los alumnos", como lo afirma un documento publicado por el MEN.

Si se admite la educación como un acto de construcción de sentido por parte de los actores escolares, por qué no descentrar la mirada del ámbito estrictamente individual y ponerla además en el grupo escolar, en el colectivo en el que transcurre la vida social del individuo en la escuela. No se trata de eliminar la mirada que se hace del individuo, sino de responder coherentemente a la idea de que el sujeto se hace con otros. ¿Por qué entonces, no promulgar modelos evaluativos que muestren indicadores de logros con relación a la consolidación de los grupos, al grado de convivencia, al grado de participación, a los mecanismos de toma de decisiones, a la capacidad de argumentación, de análisis que se gana en un grupo, al interés, a la motivación de un grupo?

INVESTIGACIONES E INNOVACIONES DEL IDEP



INVESTIGACIÓN SOBRE CONSTRUCCIÓN DE CONCEPTOS EN EL AULA

CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE ÁREA EN ESTUDIANTES DE QUINTO Y SÉPTIMO GRADO*

María Agustina García
Carmen Elisa Saavedra
Doris Garzón

La escuela tiene la responsabilidad de racionalizar el mundo cotidiano y preparar al individuo para mejorarlo. El cambio que se debe dar en las puertas del siglo XXI no es cuestión puramente visual ni auditiva, sino que tiene el carácter de formal, aunque no en todos los casos es tangible, pero sí sufrible en todos. Para hacer esto se requiere moverse en el mundo científico; no es cuestión mecánica ni artesanal. La escuela debe preparar al individuo para moverse en el mundo cotidiano y en el científico. Los trabajos de este ámbito requieren dar cuenta de estos ires y venires en los dos mundos.

En la escuela, el concepto de área y los sistemas de medida para hallar el área se han visto como iguales. Este trabajo aborda de manera estricta el concepto de área, con una perspectiva netamente de trabajo escolar. Esto es, pensar en qué es el concepto de área sin tener en cuenta sistemas de medición ni expresiones algebraicas, es mirar antes de los sistemas de medición que hay, qué llevó al hombre a crear sistemas de medida, porque en los textos de Matemáticas el cálculo de áreas se enfoca en determinado tipo de figuras.

La creación y manejo de sistemas de medida y expresiones algebraicas puede ser tema de otro trabajo.

La *Educación Matemática* tiene una tarea especial: crear condiciones didácticas y pedagógicas para que el avance en el conocimiento de la humanidad esté, con la mayor claridad, al alcance de todos los estudiantes. Sin embargo, es imposible abordar completamente la amplia cantidad de temas que el hombre ha desarrollado, restándole importancia a la mecanización. Entonces ¿qué hacer? La tarea se vuelve más específica: es encontrar la forma de enseñar la lógica del concepto a abordar. En este trabajo la tarea es saber cuáles son las bases que desarrollan la estructura del pensamiento en la medición, y proponer los momentos y el orden lógico de éstos para medir el área de una región cualquiera, empleando diferentes patrones.

* El informe final de esta investigación se encuentra en el Centro de Documentación del IDEP.

Los siguientes son aspectos que vale la pena aclarar desde un comienzo:

- El hombre estructura su pensamiento basado en las acciones que le sean permitidas hacer en el momento adecuado.
- El docente dirige el trabajo; la actividad sin una clara dirección pierde su sentido y puede aparecer como simple o extremadamente compleja.
- El hombre aprende más en grupo: es en la discusión con pares en donde estudiantes que manejan el mismo nivel de representación, por más que sea de cuestiones muy cotidianas, avanzan sobre el conocimiento de una temática determinada. El trabajo del docente es propiciar las condiciones para que el individuo busque nuevas formas de argumentar en estas socializaciones.
- La escritura se convierte en una herramienta para compartir los avances, por ello se presentan análisis sobre este aspecto.

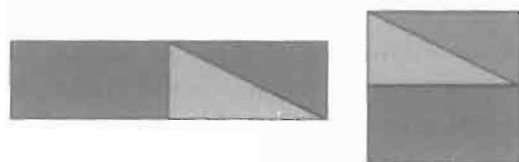
La primera parte de este trabajo contiene algunos de los resultados de la aplicación de una prueba inicial. En la segunda parte se presenta una visión del proyecto; luego, se describen actividades conducentes a la concepción de la superficie, más adelante se aborda la representación de la superficie; en seguida se presentan y analizan las actividades para determinar el área como la medida de la superficie.

En este documento se muestra un resumen de las actividades y los análisis que se llevaron a cabo para la construcción del concepto de área.

Prueba inicial

Se aplicó una prueba inicial con base en un trabajo realizado por Hutton (1978)¹ con la cual el autor deseaba establecer, en estudiantes de once años con una capacidad de aprendizaje normal, cuál era el manejo de la conservación del área.

Figura N° 1



La prueba se basó en una realizada por Piaget e Inhelder en 1957, que consistía en comparar el área de las figuras para determinar la claridad en la conservación de esta.

A continuación se describe la prueba aplicada:

Propósitos

- Conocer el significado de las figuras para los estudiantes.

- Explorar en los estudiantes los preconceptos² de área y de perímetro.
- Indagar acerca de la conservación de área³.

Materiales: dos paquetes con fichas elaboradas en cartulina, los paquetes se diferencian solamente en que uno contiene fichas blancas o de un solo color, y el otro fichas multicolor como aparecen en la figura #2. Equipo de filmación. Hojas en blanco.

Las preguntas son

- a) ¿Cuál gráfica es más grande?



Figura N° 2

Formas en que respondieron

Los estudiantes de séptimo grado:

TIPOS DE RESPUESTA	PORCENTAJE
A. Son iguales.	36%
B. Una es más grande que la otra. Discriminado:	64%
• La una es más grande que la otra aunque sean hechas con las mismas fichas.	13%
• Una ocupa más espacio que la otra.	21%
• Lo refiere a las cualidades ancho, alto.	25%
• No dan razones.	5%

Tabla 1

² “Son las nociones asignadas por los niños a los primeros signos verbales cuyo uso adquiere. El carácter propio de esos esquemas consiste en mantenerse a mitad de camino entre la generalidad del concepto y la individualidad de los elementos que lo componen”. (Piaget. 1960, p. 152).

“Todos ingresan al salón con conceptos previos, a éstos se les llama infraestructura conceptual” (Subiría, p. 79).

³ “La conservación constituye una condición necesaria para todas las actividades racionales”. “Una vez construida la conservación, se basa sencillamente en la identidad” (Subiría, p. 79).

Respuestas de los estudiantes de quinto grado:

TIPOS DE RESPUESTA	PORCENTAJE
A. Son de igual tamaño. Discriminado así:	40%
• Porque sí.	15%
• Porque las dos son del mismo tamaño.	25%
B. Son de diferente tamaño. Discriminado:	60%
• Porque una de las cartulinas tiene un centímetro más que el otro.	57%
• El rectángulo tiene más ángulos.	3%

Tabla 2

Al analizar las respuestas se categoriza en dos grupos, como sigue:

1. Son de igual tamaño

La igualdad se observa bajo tres aspectos: la forma, por el espacio ocupado, por las partes que se usan para hacer el todo.

Justifican la igualdad de la siguiente manera, entre otras:

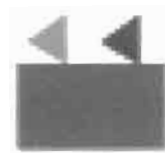
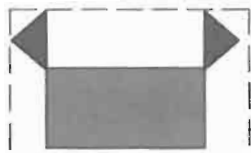
- “Las dos son iguales porque la forma es igual”.
- “Las dos figuras son iguales porque ambas están ocupando el mismo espacio”.
- “Son de igual tamaño porque abarcan el mismo espacio”.
- “Yo creo que ambas figuras son iguales porque cada ficha es igual a la otra”.

Los estudiantes están pensando en el objeto que están representando, aunque tienen conciencia sobre que las fichas que utilizan para armar las figuras son de igual tamaño. Al observar lo filmado en clase, las indicaciones con su cuerpo permiten pensar en esto. No hay discriminación de cada una de las fichas para compararlas en forma explícita, se efectúa la comparación aunque no en detalle, no hay pensamiento relacional. Las fichas son sólo herramientas, no elementos que ameriten estudio especial por parte de los estudiantes. Lo que tiene importancia es el objeto que con ellas se construye. Es interesante observar cómo los niños ven totalidades y el énfasis que ponen en la forma y el espacio que ocupa la figura.

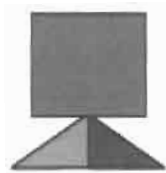
2. Son de diferente tamaño

Algunas de las respuestas presentadas son:

1- "La forma de unos cuernos porque abarca más espacio".



2- "Hay algo que le da ventaja. El rectángulo de arriba le da ventaja a la T".

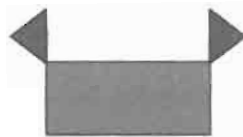


Cuernos de toro



El barco

3- "La figura más grande es la a) porque contiene más longitud".



a)



b)

Figura Nº 3

En los casos 1 y 2 las figuras se consideran cerradas. Ese espacio se respeta, ahí *no cabe* otro objeto. En el caso 3 la referencia pareciera estar dada por el perímetro.

Las observaciones de los estudiantes están referidas al objeto y no a la figura que lo representa. Esta afirmación se basa en la forma como los estudiantes mueven su cuerpo para indicar que es algo que tiene volumen; alzar las manos para comunicar su idea a los compañeros con los que están trabajando y la forma como nominan en la hoja de respuestas nos permite decir que, para los estudiantes, el centro de estudio es el objeto tridimensional y temporal, no la figura. A diferencia de la categorización anterior, las fichas como tales tienen importancia por la forma en que se coloquen. Cuando

hacen el gráfico sobre la hoja no son fieles a la forma de las fichas entregadas, sino al objeto que querían representar.

b). ¿Cuál tiene más área?

Las respuestas a esta pregunta tienen porcentajes parecidos a la pregunta anterior. Un ejemplo de la justificación de su respuesta, es:

Una de las gráficas tiene mayor área que la otra:

Figura 1

Figura 2

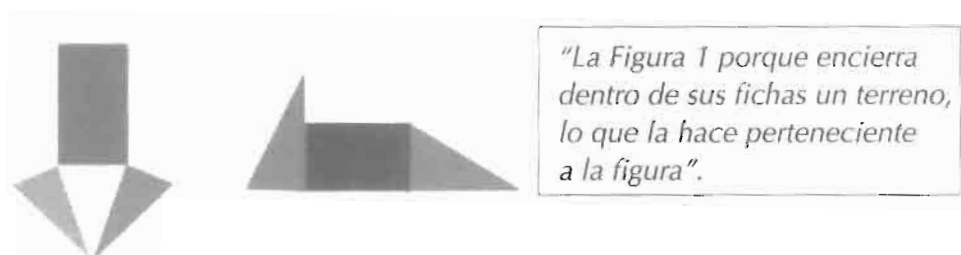


Figura Nº 4

Cuando estos estudiantes responden la primera pregunta, dicen que las figuras son iguales. Cuando comparan el área consideran la figura conformada por las fichas y la región limitada por los bordes de éstas. En la Figura 1 no hay huecos, miran el plano ocupado o encerrado por las fichas, no las fichas.

- "La (1) es más grande que la otra porque ocupa mayor espacio". La respuesta se refiere al objeto en la realidad, y no a la figura que lo representa.
- "La una es más grande y la otra es más ancha, tiene mayor longitud". El área es considerada con respecto a una dimensión de la figura.
- "La una es mayor que la otra".



Figura Nº 5

3 ¿Cuál tiene más perímetro?

TIPO DE RESPUESTAS	PORCENTAJE
A. No entiendo la pregunta.	36,36 %
B. La una tiene mayor perímetro que la otra.	45,45 %
• Hacen referencia a lo ancho o alto.	30,30 %
• La posición hace que se vea así.	6,66 %
• No dan razones.	8,49 %
C. Si el área es la misma, el perímetro también.	18,19 %

Tabla 3

La respuesta de los estudiantes de quinto grado respecto al perímetro es unánime: no sabemos.

Respecto a la figura

TIPO DE RESPUESTAS	PORCENTAJE
1. No dan nombre.	7,69
Dan nombre.	92,31
2. No hacen gráfico.	0,85
3. Nominan en la respuesta pero no en la figura.	6,83
4. Se refieren a la figura por nombres de objetos: casa, barco.	67,54
5. Se refieren como: la Figura 1, Figura 2, Figura a, Figura b.	17,09

Tabla 4

Consideraciones generales

Los términos *área* y *perímetro* no son reconocidos por la mayoría de estudiantes. Se asocian con una medida sin tener claro con relación a cuál, y sin hacer referencia a la cantidad. Por tanto, estos conceptos no se consideran como objeto de estudio y por ende, la conservación del área no se presenta.

El tamaño de la figura se explica haciendo uso del cuerpo. Las formas como justifican sus respuestas están dadas por el movimiento de sus manos más que por la palabra; se hace referencia al cuerpo que se representó, no a

la figura con forma de un cuerpo determinado que tienen sobre la tapa del pupitre.

Antes de abordar el concepto de *área* se requiere la identificación de la característica de los cuerpos que está asociada con ella, hablamos aquí de, *la superficie*. Éste es el punto inicial para la construcción del concepto de *área*, sin ello estamos hablando en vano. La prueba no está diseñada para determinar las aproximaciones que tiene el estudiante a la frontera de un cuerpo. Se requiere hacer una indagación sobre la forma como los estudiantes la están percibiendo.

La figura no es objeto de estudio por parte de los estudiantes, por ello es necesario el diseño de actividades que lleven a la figura a ser un elemento de estudio. Si la figura no tiene significado, los análisis que se hagan desde ella pueden ser perdidos. Se espera empezar los trabajos sobre *área* y *perímetro* a partir de la figura.

El concepto de *perímetro* es casi desconocido.

No hay gran diferencia entre las respuestas obtenidas en 5º y 7º en la primera pregunta.

Visión del trabajo

El análisis realizado marca la forma de encauzar el trabajo, tanto desde la didáctica como desde la matemática misma.

1. El trabajo escolar se divide en dos, puesto que el entorno de los estudiantes de quinto grado es diferente al de los de séptimo. A pesar de ver avances en estos últimos respecto a las matemáticas en este tema, no podemos abordar los conceptos de la misma manera. La edad y las vivencias de todo tipo definen una forma diferente de acceder al conocimiento.

2. Las actividades planteadas apuntan a la construcción de los diferentes niveles de acercamiento al concepto, niveles que permanecen en los dos grados (5º y 7º).

3. Cada actividad brinda al estudiante el descubrimiento de una relación nueva, una nueva manera de hablar del objeto y la pregunta que se hace en cada actividad posibilita colocar al estudiante en el plano de desarrollo conceptual. Es importante anotar que no se han dejado al libre albedrío las disquisiciones que hacen los estudiantes, sino que es el maestro el que direcciona el "descubrimiento" con la pregunta que formula y con la unificación de las conclusiones a las que llega el grupo.

4. Se presenta un análisis desde la parte de las matemáticas como desde lo didáctico, sin perder la perspectiva que nos da el análisis para encontrar unas etapas que desde esta propuesta muestren la construcción del concepto de área en la *matemática escolar*. Por todo esto, esperamos, como resultado del proyecto, dar forma a una ESTRATEGIA DIDÁCTICA que posibilite la construcción del concepto de ÁREA.

La planeación de las actividades busca que al término de cada una se realice una socialización del trabajo adelantado, que tiene el carácter de apoyo puesto que se permite la discusión entre pares y se brinda la posibilidad de aportar algo, en la medida que se plantean las discusiones; la socialización da para que la discusión tenga el nivel que los estudiantes puedan comprender y no el del maestro. Esto debe llevar a generar actividades científicas positivas en los estudiantes.



MARCO TEÓRICO

Niveles de representación y construcción de conceptos

Los conceptos de área y perímetro se pueden construir por niveles de representación. Cada nivel debe convertirse en un objeto de estudio. Vale la pena aclarar que se está entendiendo como objeto de estudio, porque éste será el elemento que a trabajar a través de la estrategia didáctica que se construirá.

Un objeto de estudio es aquel elemento que para el estudiante termina siendo SUJETO en sus observaciones; debe tener características que lo definan como tal:

1. El objeto debe tener permanencia, debe tener independencia sensorial para el individuo que lo estudia. Sabe de su existencia aunque no lo toque. Los “cuernos de toro” no están en el salón, pero el niño sabe que puede hablar de ellos, que sus compañeros saben que existen, que los pueden encontrar en su mundo.

2. La persona debe tener la capacidad de describir el objeto de estudio. Hasta el momento es lo que hace que para el estudiante el objeto sea real y no apariencia. Puede decir cuáles son sus elementos y cuáles no, dónde termina el objeto.

La función de la escolaridad en matemáticas es crear los objetos de estudio en los estudiantes. Éstos son los *objetos matemáticos*. Es crear el interés por

estudiar ese nuevo objeto, que en cada nivel se transforma, que puede partir de lo inmediato. Lo perceptual pasa por momentos como el del reconocimiento como tal, ese reconocimiento se da porque le está dando información de algún tipo a la persona, cualificación de la información que pueda dar y escritura de ésta que no es más que una forma de representar el objeto. Escritura que tiene nominación, gráficas y de nuevo nominaciones que lo acercan cada vez más a aquellos objetos que no tienen ni tiempo ni espacio, pero que se modifican y se recrean en la mente del ser humano para dar nuevas explicaciones de la realidad.

La tarea que está por realizarse en el aula consiste en que por cada nivel de representación se destaquen estos dos elementos: una independencia de la percepción inmediata, es decir la permanencia del objeto, y la descripción del objeto.

¿Cómo se concibe la superficie de los objetos?

En dónde hay superficie

Como resultado de esta estrategia con los estudiantes de 5º y 7º grado, la primera vez que aparece la palabra superficie, por ejemplo, es para indicar el lugar brillante de la hoja de un árbol; la parte donde le da el sol, o la parte superior de un objeto.

Los argumentos de los estudiantes para considerar sólo una parte como la superficie está referida a que les “dé la luz”, “que quede hacia arriba”, “que sirva de soporte al cuerpo”. Esto se debe a que los bordes de las hojas son muy delgados y el niño termina despreciándolos, o bien diciendo que no tiene superficie porque no sirve para sostener el objeto. Lo que existe para el estudiante debe ser útil, por ello en los primeros momentos no les importan estos lugares.

La posición del objeto juega un papel importante. Asumir que las caras laterales también forman parte de la superficie es más demorado. Se repitió el ejercicio con una piedra muy irregular y con un pitillo. Se hizo en varios grupos y las respuestas fueron similares.

Con objetos en los que se ha hecho énfasis en un primer momento priman las caras planas, se pasa a objetos redondos: se pide hacer referencia a la superficie de este último tipo de cuerpos. En forma unánime manifiestan que “no tienen superficie” y la justificación es “porque son redondos”, cuando se les cuestiona sobre su respuesta, callan; luego “son redondos”; probablemente porque la extensión plana que queda en los puntos más altos y en donde descansa, es lo suficientemente pequeña para no ser tenida en cuenta.

ETAPAS DE LA CONCEPCIÓN DE LA SUPERFICIE

	SINTAXIS	SEMÁNTICA	PRAGMÁTICA	JUSTIFICACIÓN
1			La idea de superficie no se manifiesta en los estudiantes.	No se piensa, ni les impresiona
2	Se indica.	Brilla, fácil de tocar. Los objetos redondos no tiene superficie.	La ubican en las partes amplias de forma plana de los cuerpos, y que estén en la parte superior.	En la parte donde la da el sol. Los lugares redondos no tienen espacios claramente definidos.
3	Se indica.	Aunque no brille, ni esté en la parte superior, existe.	Voltean el cuerpo y ven que también tiene superficie en otras partes.	Es lo amplio porque sirve para sostenerse.
4	Se le indica con su nombre.	Imaginan que pueden transformarla. Está en el objeto y se observa bajo ciertas reglas.	La ubican en cuerpos redondos, arrugados.	Se podría convertir en una superficie plana.
5	La superficie dice hasta donde va el cuerpo.	La superficie se califica.	Amplían los lugares en que se ve la superficie.	La entienden como algo que permite saber dónde termina un objeto.
6	La superficie es "la piel de los cuerpos".	La superficie está en los objetos, de ella se puede hablar.	A la superficie se le asignan atributos.	Hay clases de superficie.
7	La superficie es un objeto que puede estudiarse.	Establecen relaciones entre las superficies de los objetos.	La superficie de la batería es más fuerte que la de las maracas.	Está ligada a su experiencia en el uso de los objetos en los que se ven la superficie.

La superficie está definida por lo que se maneja en lo cotidiano, la superficie necesita tener “cierta” extensión para que sea aceptada como tal. El trayecto para que los estudiantes de 5º grado vean la superficie en todas las caras del objeto es un poco largo, se requiere realizar unas dos actividades para que la superficie de los cuerpos sea reconocida en su totalidad, sin que sea estrictamente para reconocerla sino más bien incluirla en otra que permita la ampliación de los lugares donde puedan ver la superficie. Se trabaja con otros cuerpos como un vaso, una piedra, una hoja de papel.

Tanto en los estudiantes de 5º como en los de 7º el primer momento de la concepción de la idea de superficie está identificado inicialmente en objetos con caras planas extensas, luego en objetos con formas redondeadas y por último en objetos con caras de poca extensión. En un segundo momento se refieren a la superficie señalándola en el objeto, atribuyendo la superficie como cualidad del objeto y calificando la cualidad superficie, es decir, que esta cualidad pasa de ser predicado a ser sujeto del cual se va a predicar. Por esto el estudiante describe la superficie hablando del color, forma, tamaño, material y funcionalidad. Los estudiantes de 7º grado incluyen la superficie como una cualidad de los cuerpos, después de realizar una actividad que permite fijar la atención en la frontera de éstos, identificándola en cuerpos macizos o huecos. Para ellos es más sencillo reconocer la superficie en cuerpos con caras planas, pero se percibe cierto grado de dificultad, no con la misma intensidad que en los niños de diez años, al identificarla en los objetos redondos. El concepto de superficie está unido al objeto que el estudiante conoce, lo cual implica que se refiere a lo tangible, a que se debe poder tocar o romper. Las expresiones usadas por los estudiantes de 5º y 7º grado son muy parecidas.

La representación de la superficie

En la construcción del concepto de área hay un paso entre la descripción oral de la superficie y la asignación de la cantidad que determina cuál es su medida. Este paso es la descripción bajo una gráfica. Esta nueva forma de describir implica la creación de un nuevo lenguaje. Necesitamos pasar de un dominio oral al dominio de la escritura. La figura permite mirar, leer el atributo una y otra vez sin ambigüedad, empezar a pasarlo a un objeto netamente mental. Se necesita definir qué se entiende por figura.

Pasar de los señalamientos de la superficie del objeto a observarla sin el objeto, equivale a pasar de la oralidad a la escritura, como bien dice Olson: “La magia de la escritura proviene no tanto del hecho de que sirva como



nuevo dispositivo mnemónico, como ayuda para la memoria, sino más bien de su importante función epistemológica. La escritura no sólo nos ayuda a recordar lo pensado y lo dicho; también nos invita el ver lo pensado y lo dicho de una manera diferente” (Olson. 1994, p. 16). La magia de la figura no sólo nos dice si es de forma alargada, o si es de color café o suave, sino que deja de ser bonita y se convierte en objeto de estudio de la matemática. La superficie no es plana ni curva. Toda superficie plana tiene fronteras diferentes.

La figura lleva a perfeccionar una definición y a dar argumentaciones lógicas a sus acciones. Esto es un paso más en el desarrollo formal del conocimiento. Así, la verdad sobre las observaciones se basa en los acuerdos de cómo se representan los atributos de los cuerpos, en nuestro caso la superficie (Russell. 1983, cap. XIX). La autoridad aparece independiente del docente o del texto, la autoridad es la representación lógica de una cualidad del objeto. Aquí no se persuade sino que se convence. Se reemplaza la lógica de la discusión por la lógica de la indagación. Ong dice con relación a la escritura y que aquí es tangible, “No es el arte del discurso sino el arte del pensamiento” (Ong. 1982, p. 129). Esto mismo es atribuible al esfuerzo que se hace para llevar la superficie a una gráfica. Es llevarla a ser ella misma, sin estar atada a un cuerpo. Esto es crear un nuevo objeto de estudio: la figura que representa la frontera de un cuerpo. Se requiere hablar de la superficie sobre el papel, no se niega el objeto, sino que se le da importancia a la figura.

Por lo general en el aula se asume que todos los estudiantes representan los atributos de los objetos de la misma forma, y cada una de las formas como se grafica la cualidad nos dice como lo está viendo la persona, nos da una indicación de su avance.

Una de las actividades encaminadas a la representación de la superficie, está propuesta para representar la superficie de un vaso.

Conviene considerar las diferentes formas de representación que surgen en la actividad planteada. Entre las más relevantes, tenemos:

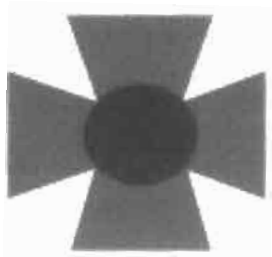
Figura N° 6



Figura N° 7



Figura N° 8



a)



b)

En el último gráfico el vaso se corta en forma horizontal respecto a la base de éste. La parte superior se muestra en la Figura b y la inferior en la Figura a. Es interesante que al representar la superficie se utilicen las partes como apoyo para calcar. El detalle de construir un vaso “más pequeño” que quepa en la hoja, no es otra cosa que buscar seguridad en lo que está representando. La actividad de calcar no es trivial ni intrascendente porque media la decisión sobre la forma en que ubica el objeto, con las partes a y b que desea tener en cuenta para representar la superficie, busca una forma de reversa que lo lleve al objeto original (1998, pp. 26 a 29).

El apoyo que da la socialización es grande, permite que opten por las gráficas clásicas en matemáticas, la discusión hace que le vean las bondades que más adelante facilitarán el trabajo.

Otro aspecto en que se va ganando es la conservación de la superficie sobre la gráfica. Esto se da cuando ellos manifiestan querer copiar las otras representaciones que han hecho sus compañeros. Esta conservación no es sino una forma de presentación de la reversibilidad (Freeze. 1983, p. 186). Es una clara evidencia de conservación de la superficie en el objeto y en la representación que hace de ella. Ellos son los que validan cuáles tienen “problemas” y cuáles no. A medida que se avanza en la representación de la superficie de los diferentes cuerpos se va viendo el uso intuitivo de la proporcionalidad en el gráfico y se va dejando el calcado.

En la actividad anterior el estudiante tenía libertad para representar la superficie de un cuerpo, con la presente actividad se busca dar validez a una representación de una superficie realizada por una persona externa al grupo. Las gráficas no son hechas a gusto de los estudiantes sino que se define una forma de verla, y tratamos de validarla; lo que de entrada restringe la forma de ver el problema.



ETAPAS DE LA CONCEPCIÓN DE LA SUPERFICIE



	SINTAXIS	SEMÁNTICA	PRAGMÁTICA	JUSTIFICACIÓN
1		La frontera se entiende como conjunto de puntos, no necesitan hablar de su espesor.	Los cuerpos tienen frontera sin importar si son huecos o macizos, abiertos o cerrados.	Siempre sabemos en dónde terminan los objetos.
2	Se indica sin importar el color ni la textura.	Mantiene el dibujo en perspectiva, señalan los lugares donde existe superficie del objeto. 	La superficie es reconocida en objetos cercanos al estudiante.	La superficie está por todas partes.
3	El gráfico expresa el atributo: superficie por ejemplo en un vaso. 	Se acepta la diversidad de representaciones como válidas mirando las diferentes formas de desbaratar el objeto.	Sin desbaratar el objeto, "calcan" su superficie.	Las partes de gráfica se justifican como vistas del cuerpo sin desbaratarlo.
4	Las gráficas cobran sentido. Son sujeto. Se reconstruyen sin perder la cualidad que están respetando.	Al comienzo hablan de que algunas de las partes de las gráficas están en desorden, terminan aceptando una segunda gráfica de la representación de la superficie como algo que tiene otra organización.	Reconocen varias representaciones de la misma superficie.	Las diferentes gráficas se aceptan como representaciones de una misma superficie porque hay conservación en ella.

Figura Nº 9



Figura Nº 10

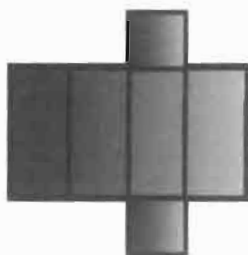


Figura Nº 11



Se plantea una relación entre el objeto y una representación de la superficie del cuerpo. Se analiza con los estudiantes cómo se transforma una de ellas cuando movemos una de sus partes, y sin embargo no ha variado lo que se representa con ella: la superficie del objeto.

Cuando se les propone a comparar las figuras 9 y 11 afirman que las dos son iguales: “es la misma superficie, sólo que están en desorden”. Al pedir que aclaren por qué están en desorden, lo hacen por señalamientos: “Este pedazo ahora está a este otro lado”. Se aprovecha el ambiente para sugerir colocar nombres a las partes con el propósito de hablar de ellas. De inmediato numeran las partes de la Figura 10, se detienen a pensar qué se debería hacer en la Figura 11, y nominan con letras sus partes. Éste es un paso más en el desarrollo de la competencia comunicativa que conlleva al desarrollo del pensamiento matemático. En estos momentos es necesario apoyar la redacción y presentación de las respuestas. Esta tarea debe ser la constante preocupación de la matemática escolar, esta actividad permite pasar a un nuevo nivel de representación.

Para el estudiante, hasta el momento el borde de la figura no amerita atención. Es algo que está ahí sin ser detallada. Es bueno aclarar que cuando cambia la organización de la gráfica, cambia su borde. Por ello poco se detienen a pensar en esto.

El área, la medida de la superficie

La medición es una función de una cualidad o atributo de los números reales positivos (Halmos. 1950, cap. III). El problema está en saber: ¿Cuál atributo? ¿Cómo se ve el atributo? ¿Cómo se define la función? ¿Cómo se expresa el conjunto de números sobre el cual está definida la función? ¿Cómo se comportan los elementos que forman el dominio de dicha función? Estas son preguntas que preceden a la construcción del concepto de área y perímetro.



El trabajo escolar debe llegar a la comprensión de estas reglas básicas para poder adjudicar el número a la frontera de un cuerpo y a la frontera de una figura. Sin ello, las operaciones algebraicas y aun aritméticas que se acostumbra plantear en clase para los problemas de medición, carecen de total sentido. Sin embargo, alcanzar la conciencia de estas reglas exige que haya un trabajo anterior, que consiste en el reconocimiento de las fronteras tanto de cuerpos como de figuras.

Para iniciar la medida de la superficie se hace uso de las gráficas de una de las actividades realizadas, pero se aclara que se omiten las líneas que demarcaban las aristas de los cuerpos.

Se trató de ver la figura en sí misma, sin los cortes internos que quedan al hacer la representación de la superficie por vistas; no hay rastro del cuerpo del cual se representa la superficie y a los estudiantes solamente se les recuerda el trabajo anterior y se dedican a mirar estrictamente la figura.

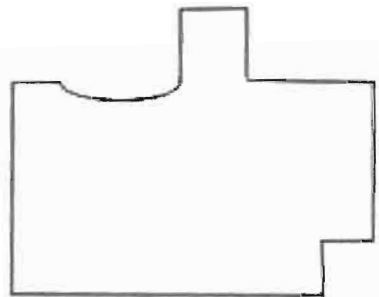
Se les propone la comparación de parejas de figuras en tres momentos; uno de ellos lo referenciamos aquí:

Se pide la comparación cuando en las gráficas priman los bordes rectos y el tamaño de las superficies representadas es visualmente diferente.

Figura N° 12



Figura N° 13



- Los estudiantes invierten tiempo en la decoración de la hoja en la que trabajan.

- Si bien es cierto que no le colocan detalles que la conviertan en un objeto tridimensional, sí la resaltan con colores. Además, se observa que ante la sugerencia de marcar el borde todos lo hacen en forma clara, pero no se refieren a él en todo el trabajo.

- Sólo tres de los estudiantes del grupo no nominan las gráficas. Un estudiante, para hablar de la gráfica, lo hace refiriéndose a la figura por el color que usó para pintarla. Las otras dos personas hacen referencia a la primera y segunda

gráfica y suponen que el profesor sabe cuáles son. Ninguno le pone nombre de objetos sino que las nominan así 1, 2 o bien por Figura N° 12, Figura N° 13.

- Fácilmente establecen cuál de las dos es la que representa mayor superficie. Lo interesante es ver la forma como justifican sus respuestas. Véase Tabla 5.

1.-	Es más ancha, más grande.	9,375
2.-	Largo y ancho de la figura.	15,625
3.-	La una es más angosta o ancha.	9,375
4.-	Por los lados o caras.	9,375
5.-	A simple vista.	3,125
6.-	Por la forma y el tamaño.	15,625
7.-	Porque tiene más superficie, o hace referencia al espacio.	37,5

Tabla 5

Obsérvese que aquí existen dos formas de acercarse al concepto de área de la superficie representada: las respuestas clasificadas como 1- 2- 3 hablan de las relaciones ancho y alto; esto define la forma de ver la magnitud, las respuestas 4- 5- 6- 7 están pegadas a la forma de la figura. Por otro lado, se tiene que el porcentaje que responde a simple vista: 3,1%, es bastante bajo comparado con el 37,5% referido a que tiene mayor superficie o al espacio. Esto nos lleva a pensar que se abre la perspectiva para ordenar por tamaño y determinar las características de las gráficas que permitan expresar su área.

En forma intuitiva, siempre se busca la igualdad. “La cantidad es todo lo susceptible de igualdad cuantitativa con algo”⁴. Éste es el punto de partida para la asignación de la cantidad a la superficie.

Se realizaron actividades encaminadas a construir el concepto de patrón, a cubrir gráficas que representen superficies con patrones de diferente forma y la organización para su conteo.

⁴ Russell Bertrand. “Un doble decímetro es una cantidad: su longitud es una magnitud” ...“la clase de términos que pueden ser iguales reciben el nombre de cantidades y la clase de los que pueden ser mayores o menos se llaman magnitudes” (Russell. 1983, p. 195).



CONCLUSIONES

Tal como se planteó en lo que entendemos como tarea de *la educación matemática*, hay varios aspectos que se deben considerar:

Aspectos económicos

El rubro dedicado a educación no es alto y se puede ver desperdiciado por lo repetido de los temas y la imposibilidad de avanzar a situaciones más elevadas, quedándonos en lo perceptual e inmediato. El trabajo muestra cómo se logra avanzar en la construcción de objetos de conocimiento cada vez más formales, menos tangibles y más universales, que son objetos del mundo matemático. Así la inversión logra dar dividendos.

Aspectos sociales

Uno de los problemas que aqueja a la sociedad es la agresividad, la escuela juega un papel importante, porque es allí donde se validan estos comportamientos, aunque sea en forma velada. Desde el comienzo del trabajo se propuso crear condiciones para desarrollar las actividades en equipo, en otras palabras, desarrollar una ecología comportamental, y un ambiente relacional a las que se hace alusión en la *estrategia didáctica* que ha guiado el trabajo.

Se puede decir que un trabajo enfocado de esta forma ayuda a desmontar la violencia, a educar personas más seguras, bondadosas y tolerantes; apoya el desarrollo de la autoestima y el respeto por la opinión del otro.

Aspectos académicos

Se llega a determinar una base para la construcción del concepto de área, base que hasta donde se conoce no había sido discutida en el aula: la superficie de los objetos.

Este trabajo permite ver la figura como una posible representación de la superficie, le brinda capacidad para crear representaciones de superficie y amplía la capacidad de transformación. Este cambio en la forma de existir la superficie permite ver su conservación sobre la gráfica. Aunque algunos autores hablan aquí de conservación de área nosotros preferimos hablar de conservación de la superficie, porque el estudiante no ha calculado áreas sino que ha representado superficies.

ETAPAS DE LA MEDIDA DE SUPERFICIE

	SINTAXIS	SEMÁNTICA	PRAGMÁTICA	JUSTIFICACIÓN
1	Se establece relación de orden por la magnitud de la superficie.	La superficie representada es la que determina cuál es mayor. Aún hay relación directa con el objeto.	La superficie de un cuerpo se estudia bajo una gráfica.	Como tiene mayor superficie entonces es mayor.
2	La magnitud de la gráfica la definen el largo y el ancho de ésta.	<ul style="list-style-type: none"> - La una contiene a la otra. - Se realizan cortes en las gráficas que permitan comparar. - Las regiones construidas deben ser "iguales". 	La gráfica tiene sentido en sí misma. No se necesita hablar del cuerpo que sirve para representar su superficie.	Establecen relaciones de comparación entre partes que reconstruyen en la gráfica.
3	La relación de orden respecto a la magnitud de las gráficas se hacen bajo una cantidad.	Las relaciones de orden entre gráficas se expresan con la cantidad pero se respaldan con las gráficas.	Se busca organizar los patrones sobre la superficie mejorando el cubrimiento y el conteo.	Los patrones "causan" en la gráficas, si a una le cabe más que a la otra es porque es más grande.
4	No se requiere establecer relaciones de orden para determinar la magnitud de la gráfica.	El patrón se idealiza; su función y propiedades se clasifican.	Toda superficie es susceptible de ser tapizada con un patrón.	Se transforman partes de la gráficas para ajustarles un patrón.
5	La magnitud de la gráfica es una cantidad llamada ÁREA.	La cantidad habla del número de veces que la gráfica contiene un patrón. 23  18.	Busca utilizar el conteo creando rectángulos sobre la gráfica.	Hablar de la magnitud de la superficie de un cuerpo es hablar de la magnitud de la gráfica.

El último gran paso en la construcción del concepto de área lo da la creación de relaciones de orden definidas por la magnitud de las gráficas, que se conservan bajo el uso de diferentes patrones y la asignación de una cantidad de acuerdo con el patrón usado. A este momento lo llamamos *conservación del área*.

Un aspecto a resaltar en el desarrollo del trabajo es que el niño se centra en un solo aspecto nuevo para él. El estudiante le dedica buen tiempo a mirar dónde hay superficie. Querer avanzar y mantener su interés sin que sea él quien marque la pauta, resulta pérdida de tiempo. De la misma forma apareció, entre otras, la primera actividad de tapizado. Se esperaba que tapizara, que estableciera relaciones de orden basándose en los patrones, pero se dedicó a realizar y perfeccionar su tapizado, y luego sí se interesó por la relación de orden.



BIBLIOGRAFÍA

Ama construcción de sistemas lógicos y numéricos. Impresión Novoprint Ltda. Santa Fe de Bogotá D.C., julio. 1998.

FREEZE, Paul. *La inteligencia*. Ediciones Paidós. España. 1983.

HALMOS, Paul. *Measure theory*. D. Van Nostrand Company, Inc. Princeton. Capítulo III. 1950.

OLSON, David R. *El mundo sobre el papel*. Gedisa Editorial. Barcelona. 1994.

ONG, W. *Oralidad y escritura*. Editorial Gredos. España. 1982.

RUSSELL, B. *Los principios de la matemática*. Espasa Calpe. Madrid. Capítulo XIX. 1983.

SISTEMATIZACIÓN DE UNA EXPERIENCIA DE MATEMÁTICAS CONTEMPORÁNEA EN EL AULA*

Investigador: Ricardo Castañeda Tinoco

Asesor: Dino de Jesús Segura

Formas alternativas en la enseñanza de las matemáticas enriquecidas con las matemáticas contemporáneas

En la actualidad se sigue enseñando en la escuela la aritmética de hace 300 años, el álgebra de hace 1000 años y el cálculo de hace 500 años. Las matemáticas contemporáneas son presentadas ¡cuando se presentan!, como apéndices al margen, curiosidades sin ningún valor y, en muchos casos, sin ninguna relación con la matemática tradicional. Muchas veces, estas matemáticas no se presentan por desconocimiento o porque se consideran demasiado complejas para estudiarse en secundaria. Sin embargo, la realidad es que en ellas se esconde todo un universo de bellas figuras y una serie de conceptos e ideas que pueden ayudar al estudiante a estimular las *vivencias de conocimiento en matemáticas*. En este punto es donde se ubica el proyecto "Sistematización de una experiencia de matemáticas contemporánea en el aula"¹ como una alternativa de hacer matemáticas desde la contemporaneidad, en donde el azar, el caos, la iteración, los sistemas dinámicos, los fractales, las teselaciones, la programación y utilización de los ordenadores se convierten en el centro de la actividad. Además, las matemáticas tradicionales aparecen como particulares, el manejo de algoritmos es una circunstancia que se da en el desarrollo de la optimización de algunos procesos. Lo importante en estas formas de trabajo es llegar a entender conceptos, algunos de vital importancia en los nuevos desarrollos de la ciencia y la tecnología.

El proyecto trata de responder a la necesidad de encontrar nuevas formas de trabajo en la enseñanza de las matemáticas que se adecúe a la evolución y a los

* Esta investigación participó en el convenio 05-96. El informe final se encuentra en el Centro de Documentación del IDEP.

¹ Los diferentes laboratorios y talleres se realizaron en la Escuela Pedagógica Experimental (E.P.E), en los años 1994-1996, en los grados 8º a 11º, con grupos de 23 alumnos, de ambos sexos, con edades entre los 15 y 18 años. La E.P.E es un colegio privado ubicado en el kilómetro 4.5 vía La Calera.

nuevos paradigmas orientados en esta disciplina. Uno de estos nuevos paradigmas gira en torno al concepto de demostración matemática. Los ordenadores están cambiando la utilización de algoritmos. Un ejemplo es el de la *conjetura de los cuatro colores* que afirma que cualquier mapa planar se puede colorear con cuatro colores, de manera que dos regiones contiguas tengan colores diferentes. Esta demostración fue desarrollada en 1976 por Kenneth Appel y Wolfgang Haken. La descripción que hacen estos dos investigadores resulta interesante porque revela cómo su interacción con el programa del ordenador, les enseñó de forma extraña asuntos sobre el problema que no habían previsto. El ordenador asumió el papel de un colaborador casi humano, más que el de una simple calculadora; según sus palabras fue una extensión de su intuición que les permitió más caos de los que normalmente ellos podrían examinar.

La enseñanza de las matemáticas debe responder a los cambios que se generan en ella. Necesita de cambios drásticos, de nuevas ideas y concepciones que respondan a los diferentes avances tecnológicos. La nueva enseñanza de las matemáticas debe dejar los ejercicios con papel y lápiz y en el estudio de las matemáticas contemporáneas utilizar más tiempo la ayuda de los ordenadores; esta simbiosis puede facilitar el desarrollo de significado de muchos conceptos.

La sencillez de esta se encuentra en muchas de las ideas de las matemáticas contemporáneas: sistemas dinámicos, fractales, caos determinista, teselaciones, etc., permite que el estudiante efectúe una "aventura matemática" por estas nuevas temáticas que son importantes en matemáticas, física, economía, biología, climatología, etc.

El proyecto pretende es que el estudiante se adentre en este nuevo universo y lo pueda acometer con elementos de uso común: hojas de papel, lápiz, regla, calculadora graficadora o un ordenador sencillo. Esto es una ventaja para el investigador y para los alumnos y, contradice tajantemente lo que afirman algunos especialistas quienes aseguran que estas temáticas, por su complejidad, requieren de una complicada estructura de conocimientos anterior de acuerdo con la imagen de secuencialidad que caracteriza a la matemática tradicional.

El concepto de matemáticas experimentales empieza a tomar un nuevo y aventurado interés. Los ordenadores se utilizan para explorar el reino de la verdad matemática en forma sistemática y al azar.

Con la existencia de programas de manipulación simbólica como *Derive*, *Mathematica*, *Matcad*, *Matlab*, etc., es posible adelantar investigaciones en matemáticas complejas.



Sistemas dinámicos y el surgimiento del caos

Yo quiero... insistir en que a la gente debería siempre presentársele la ecuación $y=kx(1-x)$ muy al comienzo de su formación matemática. Esta ecuación puede estudiarse fenomenológicamente por iteración, bien con una calculadora, o a mano. En su estudio no se requiere elementos tan conceptualmente elevados como los del cálculo diferencial y, sin embargo, enriquecería mucho la intuición del alumno en lo relativo a los sistemas no-lineales.

ROBERT M. MAY (BIÓLOGO).

En la actualidad existe un creciente interés por el estudio sobre el vínculo de las redes informáticas (redes neuronales, autómatas celulares, robótica) y los sistemas fisiológicos. Esto ha permitido el desarrollo de un nuevo campo de las matemáticas que se conoce como *Dinámica Topológica*. Esta rama de las matemáticas tiene como fin fundamental la descripción de los sistemas con el paso del tiempo. Este estudio ha mostrado que los sistemas gobernados por leyes físicas pueden sufrir transiciones a formas altamente irregulares de conducta que se conocen ahora como *Caos*. Aunque la conducta "caótica" parece aleatoria, está regulada por condiciones deterministas. A esto se le ha denominado *Caos determinista*. En este contexto el "caos" puede ser entendido como orden dentro del desorden.

La forma de proceder para obtener un sistemas dinámico de un fenómeno es descrito por Charles Simón (1987).

1. Identificar variables que describan el fenómeno de la manera más completa posible, de forma que el conocimiento de las mismas, en un cierto instante de tiempo, defina suficientemente fiel el estado del fenómeno observado. Es posible que en muchos fenómenos se pueda llegar a esto.

2. Efectuar mediciones de estas variables. De nuevo se pueden encontrar dificultades insalvables, pero se tendrá un buen repertorio de problemas con los que será posible llegar a este punto.

3. Al estudiar cómo se comportan esas variables a lo largo del tiempo se puede intentar encontrar fórmulas que expresen la variación instantánea de esas variables.

Si hay éxito en los tres apartados anteriores, se habrá elaborado un modelo matemático (determinista y continuo) del fenómeno estudiado. A un modelo



matemático se le denomina también ley física, por ejemplo: la ley de la gravitación de Newton, las ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo, las leyes de la cinética química. Todas éstas leyes no son sino una aproximación más o menos útil, dependiendo del contexto.

La labor de la dinámica topológica es tomar el modelo matemático e intentar sacar consecuencias lógicas del modelo y luego compararlas con la observación directa. Por fortuna, en muchos ejemplos, los experimentos realizados concuerdan con las conclusiones obtenidas usando razonamientos matemáticos (en muchos casos con las conclusiones obtenidas mediante simulación numérica).

Una de las conclusiones más importantes que se genera con el trabajo de los sistemas dinámicos es que “En cierto modo la predecibilidad y la imposibilidad de predecir caben juntas en el mismo conjunto de ecuaciones”. Esto sugiere que, dependiendo de las condiciones iniciales, ecuaciones simples pueden producir números que no parecen tener una pauta. Si bien es cierto que las ecuaciones expresan por lo general, relaciones de causa-efecto, los resultados numéricos hacen *pronosticar* que los sistemas modelados pueden mostrar comportamientos caóticos. Este tipo de ecuaciones evidencian la dependencia de estas a las condiciones iniciales. La existencia del caos implica nuevos límites fundamentales sobre la predicción. Además, el caos determinista sugiere que fenómenos durante mucho tiempo considerados como aleatorios, son en cierto sentido más previsibles de lo que se pensaba. En este sentido la afirmación de Laplace en su *Ensayo filosófico sobre las probabilidades* al señalar que: “Un ser inteligente que en un instante conociera todas las fuerzas que animan la naturaleza y las posiciones de los seres que la forman, y que fuera lo suficientemente inmenso como para poder analizar dichos datos, podría condensar en una fórmula el movimiento de los objetos más grandes del universo y de los átomos más ligeros: nada sería incierto para dicho ser; y tanto el pasado como el futuro estarían presentes ante sus ojos”, no tiene hoy validez. La predicción no es necesariamente una buena prueba para la teoría. La solución clásica de verificar una teoría es hacer predicciones y verificarlas con los datos experimentales. Pero si los datos son “caóticos”, las predicciones a largo plazo resultan imposibles, y esto es importante al juzgar una teoría.

Después de esta introducción, se podría decir que un sistema dinámico es alguna situación sometida a cambio; por ejemplo, un movimiento tan ordenado como el de un planeta o tan errático como las fluctuaciones de las acciones de la bolsa de Nueva York. El objetivo es, en últimas, prever el comportamiento de un sistema dinámico.

Matemáticamente, el concepto de sistema dinámico, está ligado con lo que se conoce como composición. El proceso de composición de funciones es básico en matemáticas y uno sobre los cuales se estudia la iteración y se construye el caos. Se puede visualizar la composición de la función g con la función f como se muestra en la Figura 1.

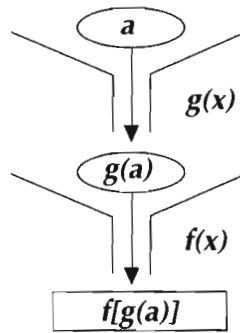


Figura 1

La “maquina” $g(x)$ procesa el material a para producir $g(a)$, luego la “maquina” $f(x)$ procesa el material $g(a)$, para obtener el producto $f[g(a)]$.

La iteración de una función f , es el proceso en el cual f se compone con ella misma repetidamente; véase Figura 2. El producto se vuelve a pasar a través de $f(x)$.

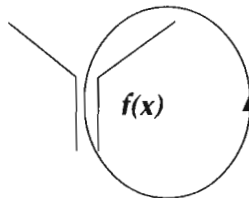


Figura 2

Si x_0 es el valor inicial (semilla de iteración), se obtendría la siguiente sucesión de valores:

$$x_1 = f(x_0)$$

$$x_2 = f(x_1)$$

$$x_3 = f(x_2)$$

Esta secuencia es llamada órbita de x_0 . Nótese que los términos de la secuencia tienen que ver con iteraciones (repeticiones) sucesivas de f . Para identificar las repeticiones, se escribe:

$$f^2(x_0)=f(f(x_0)), f^3(x_0)=f(f(f(x_0)))$$

y así, el $(n+1)$ término de la órbita de x_0 , es: $x_n = f_n(x_0)$; nótese que n indica el número de veces que f es aplicado a x_0 .

Ejemplo 1:

$$x_0 = 10$$

$$x_1 = \sqrt{10} = 3,16$$

$$x_2 = \sqrt{3,16} = 1,78$$

$$x_3 = \sqrt{1,78} = 1,33$$

Si siguiendo esta forma se puede observar que al seguir realizando la iteración, ésta se acerca o tiende a 1.

Ejemplo 2:

Con una calculadora en modo radiales, analiza la órbita de $x_0=10$, para iteraciones de la órbita de la función $f(x)=2\sin(x)$.

$$x_0 = 10$$

$$x_1 = 2\sin(x_0) \cong 1,683$$

$$x_2 = 2\sin(x_1) \cong 1,987$$

$$x_3 = 2\sin(x_2) \cong 1,828$$

⋮
⋮
⋮

siguiendo esta secuencia se encontrará que ésta tiende a un valor límite aproximado de 1,895.

Después de esta introducción, es posible realizar algunos talleres para hacer un seguimiento del trabajo que realizan los estudiantes en algunos tópicos como: composición de funciones, funciones iteradas, etc. Estos talleres permiten observar la imagen que tienen los estudiantes sobre el concepto de función y composición de funciones.

A continuación, se describen algunos talleres para adelantar este trabajo. Durante el desarrollo de los mismos se pueden encontrar variantes para mejorarlos, no se pretende que sean inalterables, incluso el profesor puede establecer cambios para adecuarlos a su trabajo.

Composición e iteración de funciones

Actividad 1:

Nº DE ALUMNOS:	100
GRADOS ESCOLARES:	8º a 11º
TIEMPO:	2 horas
MATERIALES:	Calculadora, lápiz y papel
PRERREQUISITOS:	Manejo de funciones, noción de álgebra y manejo de calculadora

Planteamiento de la actividad

La actividad pretende ser una forma alternativa para presentar los temas de composición e iteración de funciones, diferentes al tratamiento algebraico que se ofrece en el texto escolar.

Temas con que se relacionó la actividad

- Composición e iteración de funciones
- Recursividad
- Manejo de calculadora
- Sucesiones, límites, convergencia, divergencia.

Comentarios

• El taller fue una forma agradable de presentar la iteración y composición de funciones de alumnos.

Si los alumnos manejan la sustitución algebraica para encontrar la compuesta de dos funciones $f(g(x))$, o $(f \circ g)(x)$; por ejemplo, si $f(x)=x^2$ y $g(x)=\text{sen}(x)$, entonces $f(g(x))=(\text{sen}(x))^2$, se pueden realizar laboratorios en donde los estudiantes grafiquen cada una de las funciones y la compuesta a izquierda y a derecha para que hagan hipótesis sobre lo que hace la función compuesta a cada una de las funciones.

Los ejercicios de iteración con calculadora son una manera alternativa de presentar los conceptos de límite, sucesiones, etc.

• Esta actividad se realizó con estudiantes después de presentar el concepto de función como una máquina que opera sobre una serie de valores y los

transforma. En esta aproximación no se habló con los estudiantes sobre dominio, recorrido, función inyectiva, biyectiva, etc., que por lo general se presentan en los libros de texto.

- Con la actividad los estudiantes “descubren” algunas propiedades de la composición de funciones:

- a. La mayoría de ellos observa que dado un valor de x cualquiera no es cierto que $f(g(x))$ sea igual a $g(f(x))$, salvo en algunos casos.

- b. En los casos en que esto sucede es porque la función $f(x)$ “desbarata” lo que la función $g(x)$ hace y lo contrario. Esta operación da como resultado siempre x .

- A la pregunta, dada la función $f(x)$ cómo es posible encontrar una función $g(x)$ que “desbarate” lo que hace la función $f(x)$, para que al componer $f(g(x))$ sea igual a $g(f(x))$. Algunas respuestas fueron:

1. Si la regla o función está dada con x teniendo como potencia 1 y sumándole una constante cualquiera, o sea, $f(x)=x+c$, la regla $g(x)$ se encuentra dejando la misma x y restando el valor de c ; o sea, $g(x)=x-c$.

2. Si x está multiplicada por algún número, es decir, $f(x)=k * x$, la función $g(x)$ se encuentra dejando la misma x pero dividiendo todas las expresiones de k .

3. Para ecuaciones generales de segundo grado, $f(x)=ax^2+bx+c$, o cúbicas no se logró construir un algoritmo que permitiera encontrar la función $g(x)$.

- En el trabajo de iteración de funciones surgieron preguntas, por ejemplo, ¿por qué al iterar algunas funciones con un valor inicial dado, dicho proceso converge a un valor determinado, y para otros valores iniciales con la misma función la iteración no converge a ningún valor? Algunos estudiantes afirmaron que esta situación dependía de la función que se utilizara y otros que dependía del valor que se utilizara para iterar la función.

1. Use la entrada y determine la salida en cada una de las composiciones que se muestran en la Figura 3.

2. Con diagramas como los de la Figura 3, determine el valor de $f(g(x))$, para cada par de funciones. Utilice como valor de entrada, $x=1$.

a. $g(x)=x+3$

b. $g(x)=x^2$

c. $g(x)=2x+5$

$f(x)=x^2$

$f(x)=x+3$

$f(x)=0,5(x-5)$

3. Con las funciones del ejercicio 2, utilice cada caso como valor inicial $x=-1$, y determine el valor de la función compuesta por cada uno de los casos.

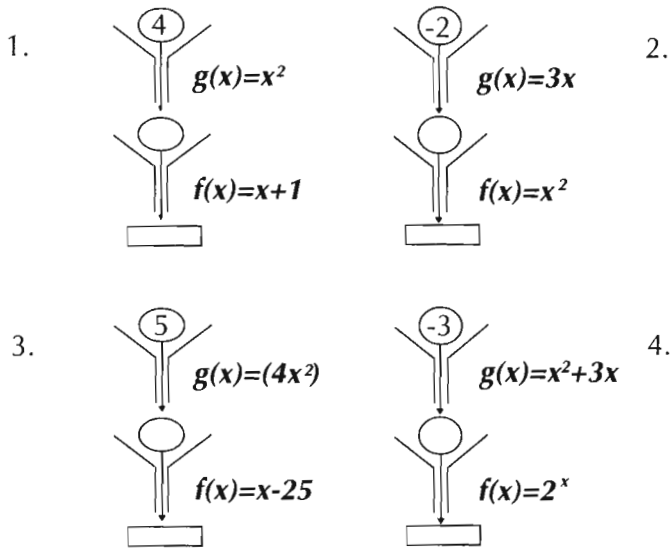


Figura 3

- a. $g(f(x))$ b. $g(g(x))$ c. $f(f(x))$ d. $f(g(x))$

4. En las ecuaciones $f(x)=x+1$ y $g(x)=x^2$, exprese cada una de las composiciones siguientes en términos de un valor inicial a.

- a. $f(g(a))$ b. $g(f(a))$ c. $g(g(a))$ d. $f(f(a))$

5. Con el argumento inicial x_0 , suponga que en cada uno $f(x)=\sqrt{x}$, utilice una calculadora y redondee a tres dígitos y escriba los diez primeros términos de la iteración para cada una de las respectivas semillas.

$x = 1795$

$x = 0,23$

$x = 0,85$

$x_0 =$

$x_0 =$

$x_0 =$

$x_1 =$

$x_1 =$

$x_1 =$

$x_2 =$

$x_2 =$

$x_2 =$

$x_3 =$

$x_3 =$

$x_3 =$

$x_4 =$

$x_4 =$

$x_4 =$

$x_5 =$

$x_5 =$

$x_5 =$

6. Con una calculadora itere la función $f(x)=x^2$. Comience la iteración con el valor x_0 y realice la iteración diez veces.

- a. $x_0=1$ b. $x_0=5$ c. $x_0=0,3$ d. $x_0=-3$

describa el comportamiento de iteradas de la función anterior, cuando el argumento inicial es:

- a. $x_0 \geq 1$ b. $0 < x_0 < 1$
 c. $-1 < x_0 < 1$ d. $x_0 < -1$

7. Encuentre para cada una de las siguientes situaciones la función que produce la sucesión:

$4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow \dots$ $f(x) =$

$1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 16 \rightarrow \dots$ $f(x) =$

$-6 \rightarrow -1 \rightarrow 4 \rightarrow 9 \rightarrow 14 \rightarrow \dots$ $f(x) =$

La iteración de funciones puede producir sucesiones de iteradas de forma aritmética o geométrica. Se dice que una sucesión es aritmética si sus términos son de la forma $a, a+d, 2d, a+3d, \dots$, donde a es el término y d es la diferencia entre los sucesivos términos.

Una sucesión es geométrica si es de la forma: a, ar, ar^2, ar^3, \dots , donde a es el primer término, y r la relación entre los sucesivos términos. Identifique si las sucesiones anteriores son aritméticas o geométricas.

Composición e iteración gráfica

La composición de funciones es básica en el estudio de la iteración y del caos. Se puede explorar este proceso utilizando las gráficas de las funciones en cuestión. En el ejercicio 1, se mostró la evaluación de una función mediante una "máquina" con entradas y salidas.

Cuando se tiene la gráfica de la función, para que este proceso sea similar se puede ejecutar el siguiente algoritmo.

a. (Evaluar). Dibuje el segmento vertical con extremo en el valor de entrada a en el eje x y el otro extremo en la gráfica de la función. Marque este punto como A . este punto tiene ordenada $f(a)$.

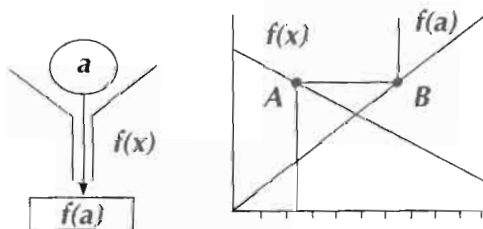


Figura 4

b. (Transferir). Dibuje el segmento horizontal con el extremo en A y el otro extremo en la diagonal ($f(x)=x$), marque este punto como B . Este punto tiene abscisa $f(a)$, sus coordenadas son: $(f(a), f(a))$.

c. (Reflejar). A partir de B , trace una semirecta vertical en la dirección positiva del eje y . La abscisa de este punto es: $f(z)$, véase Figura 4.

8. Aplique el proceso anterior a las figuras gráficas:

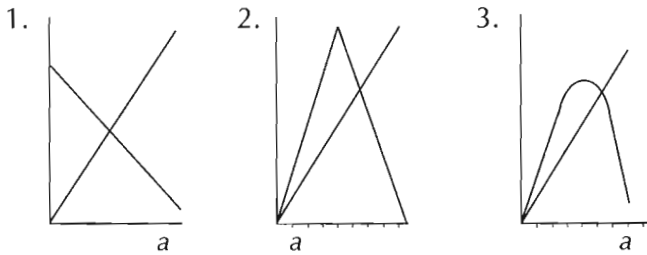


Figura 5

La composición de funciones se ha presentado en el ejercicio 1 por medio de dos “maquinas”. Para hallar la composición, se puede hacer de manera análoga, si se va a encontrar la función compuesta $f(g(a))$, se coloca la gráfica de la segunda función encima de la primera.

El proceso de evaluación se desarrolla hacia arriba. Es decir, para un valor de entrada a , se encuentra $g(a)$, con la gráfica inferior; la salida $f(g(a))$ se obtendrá en la gráfica superior, donde la entrada es $g(a)$, véase Figura 6.

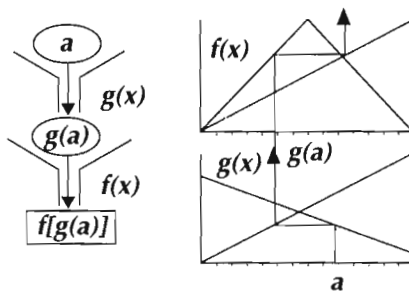
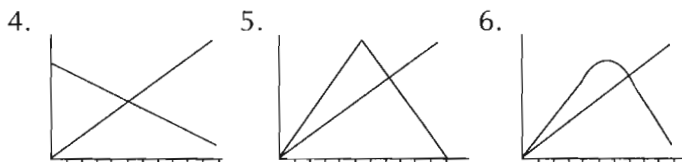


Figura 6

11. Efectue la composición gráfica de funciones con los diagramas de la Figura 7.



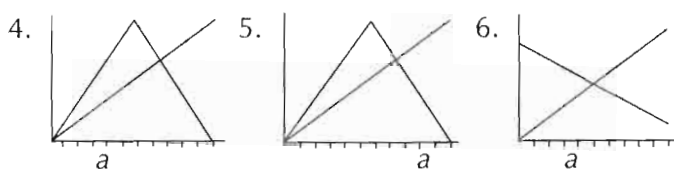


Figura 7

Iteración gráfica de funciones cuadráticas

Actividad 1:

Nº DE ALUMNOS:	100
GRADOS ESCOLARES:	8º a 11º
TIEMPO:	1 mes
MATERIALES:	hoja de trabajo y programa <i>Mathematica</i>
PRERREQUISITOS:	Manejo de funciones, nociones de álgebra y manejo de programa <i>Mathematica</i>

Temas con que se relacionó la actividad

- Composición e iteración de funciones.
- Recursividad
- Sistemas dinámicos
- Sucesiones, límites, convergencia, divergencia, puntos fijos, puntos periódicos.
- Caos determinista.

Comentarios

- Este taller muestra a los alumnos que la iteración de funciones en apariencia sencilla puede producir resultados completamente inesperados.
- Las gráficas que se muestran en la actividad no hacen parte del taller sino que fueron desarrolladas por los estudiantes con el programa *Mathematica*.
- La iteración gráfica permite visualizar aspectos importantes que al ser trabajados de manera numérica serían más difíciles de detectar.
- Conclusiones de los estudiantes. Para la iteración de $f(x)=x^2+c$

- a. Todas la órbitas tienden a infinito para $c > 1/4$.
- b. Para $c=1/4$ existe un punto fijo en $1/2$, este punto fijo es neutral.
- c. Para $c < 1/4$ la función tiene dos puntos fijos ($P+yP-$), $P+$ es siempre un punto fijo repulsor.
- d. En $c=2$ la iteración gráfica es muy difícil de seguir “parece seguir todos los caminos”.

Planteamiento de la actividad

Las funciones cuadráticas producen una amplia variedad de comportamientos en la iteración gráfica.

Las características especiales se encuentran alrededor de los puntos fijos, que pueden servir de atractores o repulsores. En esta actividad se investigará el comportamiento de las funciones cuadráticas, presentadas en dos formas diferentes:

$f(x)=ax(1-x)$ y $f(x)=x^2-c$. En la geometría se dice que la función cuadrática tiene forma de parábola. En álgebra la función cuadrática se escribe en términos de los parámetros: p, q, r de las siguiente manera: $f(x)px^2+qx+r$, cuando $p=-a, q=a$ y $r=0$; la función cuadrática puede ser expresada de la forma $f(x)=ax(1-x)$. El taller que se presenta explora estas expresiones. Las parábolas de esta forma interceptan el eje x en $(0,0)$ y en $(1,0)$. Estas parábolas sufren una elevación en dirección de y , cuando el parámetro a se incrementa. En cada caso, el patrón de iteración gráfica depende del valor del parámetro a .

Cuando $1 \leq a \leq 4$, todos los puntos en $0 \leq x_0 \leq 1$ hacen que la función permanezca en los límites de la iteración. Lo más interesante de la dinámica en la iteración gráfica ocurre en este intervalo. Todos los puntos por fuera de este intervalo i , escapan en al iteración hacia $-\infty$. Otros resultados ocurren cuando $a < 1$ o cuando $a > 4$.

1. Describa el desarrollo de la iteración para función $f(x)=0,5x(1-x)$, con un valor inicial $x_0=0,7$. ¿Cuál es aproximadamente el atractor?

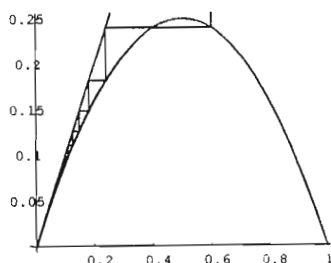


Figura 8

2. El desarrollo de la iteración para todos los puntos del intervalo $1 < x_0 < 2$, muestra en esencia ¿la misma forma?, ¿qué pasa cuando se itera con $-1 < x_0 < 0$ y $0 < x_0 < 1$?

3. Efectúe la iteración de función $f(x)=5x(1-x)$, para $x=0,9$. Describa el desarrollo de la iteración para varios términos. ¿Cuando se itera para valores $0 \leq x_0 \leq 1$, convergen a un atractor o escapa a $-\infty$?

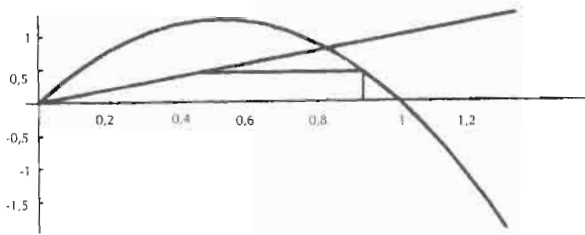


Figura 9

4. Encuentre un punto en $0 \leq x_0 \leq 1$, tal que su órbita no escape con $f(x)=5x(1-x)$

Considere la forma general de la función cuadrática dada por $f(x)=px^2+qx+r$, donde $p=1$, $q=0$, $r=0$, luego la función se transforma en $f(x)=x^2+c$. Todas las parábolas de esta forma tienen vértices sobre el eje x en $(0,c)$. Cuando el parámetro c se incrementa, la parábola se incrementa hacia arriba.

5. Sea $f(x)=x^2-0,65$, describa el desarrollo de la iteración gráfica cuando se inicia con un valor de $0,1$. ¿Es la iteración de la parábola con la diagonal un atractor para esta iteración?

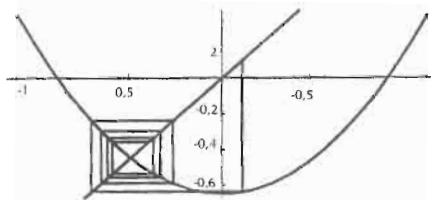


Figura 10

6. ¿Qué otros intervalos con un valor inicial x_0 , espera usted que en el desarrollo de la iteración tengan el mismo punto fijo atractor? Estudie el significado de la caja cuadrada que rodea al punto fijo. Escriba su iteración.

7. Sea $f(x)=x^2-1$, describa la iteración para $x_0=0,5$. ¿Cuál es el atractor y cómo es la aproximación?

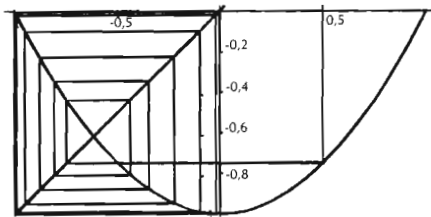


Figura 10

8. Para otros valores de x_0 se puede esperar que en el desarrollo de la iteración se tenga el mismo atractor ?

9. Sea $f(x)=x^2+0,35$, describa la iteración gráfica para un valor inicial de $x_0=0,3$, hay atractores, repulsores en la iteración, puede explicar su respuesta.

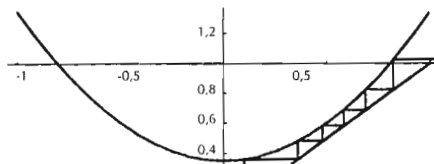


Figura 12

10. Efectúe la iteración numérica para cada uno de los valores de c , en la ecuación $f(x)=x^2+c$, utilice 6 decimales; $c=0,40$; $0,35$; $0,30$; $0,25$; $x_0=0,2$.

Describa sus observaciones después de efectuar 20 iteraciones para cada una de las constantes c . Después de efectuar estos cálculos observe la iteración gráfica para cada uno de los casos.

Explique el comportamiento de la iteración del sistema, teniendo en cuenta los resultados numéricos e iteraciones gráficas.

¿Puede hacer alguna hipótesis con respecto a la constante c , que permita saber si la iteración tiene algún atractor o repulsor ?

$c=0,40$

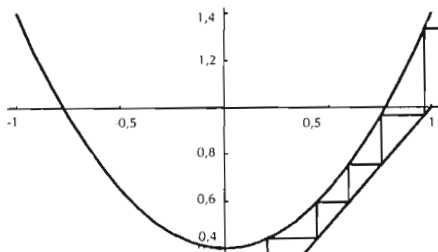


Figura 13

$c=0,35$

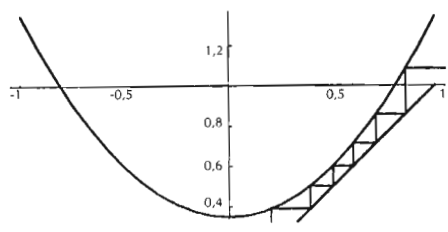


Figura 14

$c=0,30$

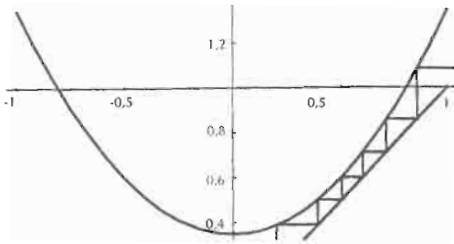


Figura 15

$c=0,25$

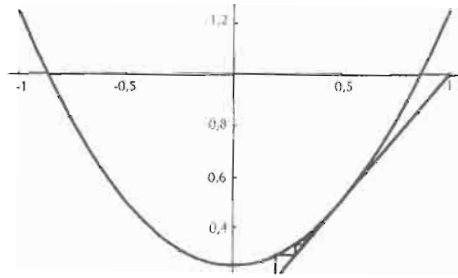


Figura 16

11. Efectue los mismos pasos del laboratorio 10, pero utilizando los siguientes valores para c : $c=-0,6$; $c=-0,7$; $c=-0,8$; $c=-0,9$; utilizando como valor inicial $x_0=0,3$.

$c=-0,6$

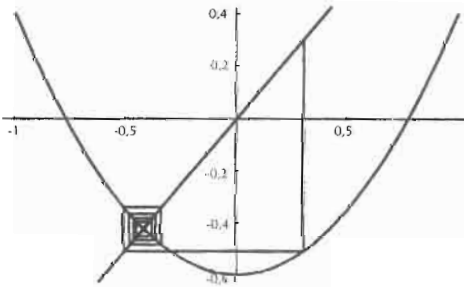


Figura 17

$c=-0,7$

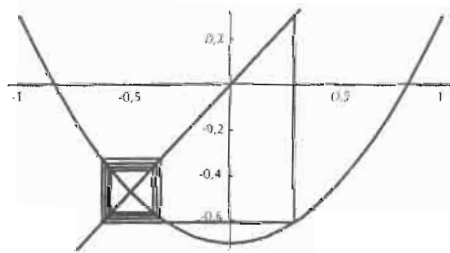


Figura 18

$c=-0,8$

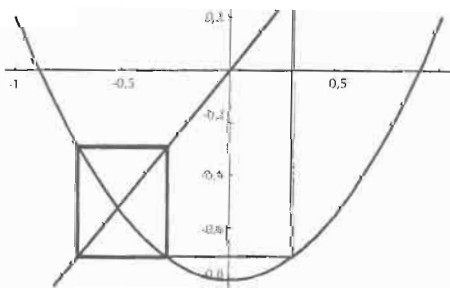
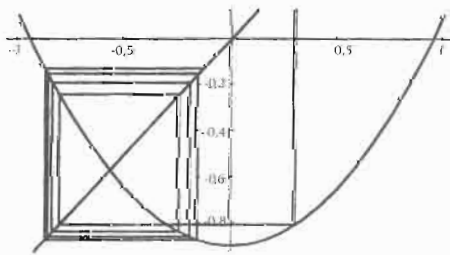


Figura 19

$c=-0,9$



12. Estudie con una calculadora el caso de $c=-2$, para cualquier $0 < x_0 < 1$, describa el comportamiento de la iteración (utilice 6 dígitos). ¿Es diferente de

los casos donde c es negativo? ¿Por qué? Observe la iteración gráfica que muestra la Figura 21, ¿qué puede decir de ella?

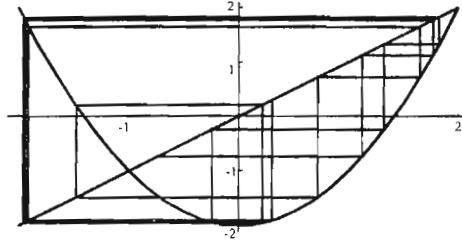


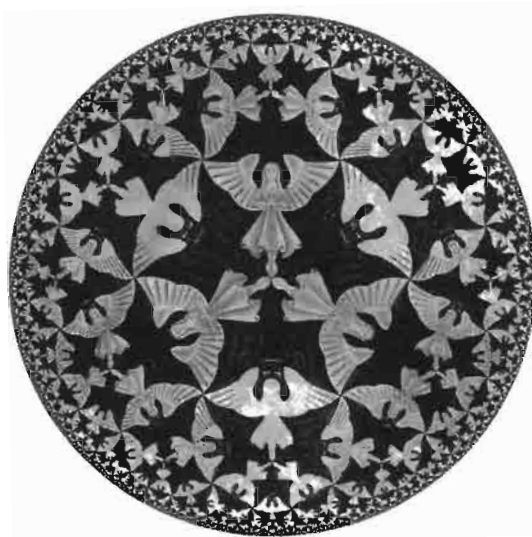
Figura 21

Teselaciones

Muchas de las paredes y pavimentos de la Alambra de Granada, cubierta de brillantes mosaicos policromados, nos prueban que los moros fueron maestros en el arte de recubrir un plano con figuras similares entrelazadas, ajustadas entre sí, sin dejar hueco alguno. ¡Lástima que su religión les haya prohibido hacer imágenes!

M.C.ÉSCHER.

Se dice que una figura geométrica tesela cuando es posible superponerla o acoplarla entre sí sin dejar huecos o fisuras, de manera que sea posible recubrir el plano. Estas formas particulares de recubrir el plano eran conocidas por los antiguos como un elemento en la decoración.



Uno de los representantes modernos más conocidos en este arte, fue el pintor holandés M.C.Escher, cuya obra se caracterizó por su gran contenido matemático. En un artículo de 1959, Escher expresó lo que lo motivaba a representar el infinito a través de sus teselaciones.

Nos resulta imposible imaginar que, más allá de las estrellas más lejanas que vemos en el firmamento, el espacio se acaba, que tiene un límite más allá del cual no hay nada. El término vacío todavía nos dice algo, puesto que un espacio determinado puede estar vacío, por lo menos en nuestra imaginación; pero no estamos en condiciones de imaginar algo que estuviese vacío en el sentido de que el espacio deje de existir. Por esta razón, desde que el hombre existe sobre la tierra, desde que está de pie, sentado o acostado, desde que corre, navega, anda a caballo y vuela, nos aferramos a la idea de un más allá, de un purgatorio, de un cielo y un infierno, de una transmigración y un nirvana, todos los lugares de infinita extensión en el espacio o estados de infinita duración en el tiempo.

Después de su visita a la Alambra, Escher, tras largas sesiones de trabajo inventó un método para partir regularmente la superficie plana, que sería admirado por cristalógrafos y matemáticos.

Uno de los temas sobre los que más trabajó Escher fue sobre la participación periódica de una superficie. Sin embargo, como él mismo confesó:

Con la conciencia tranquila creo poder alegrarme de la perfección de la que doy testimonio, yo no la he inventado, yo ni siquiera la he descubierto. Las leyes matemáticas no son ni creaciones ni invenciones del hombre, son sencillamente, y existen en total independencia del espíritu humano.

Durante muchos años Escher estuvo estudiando el problema de la partición de un plano, era tal la obsesión que sentía por este tema que regresó a la Alambra y se dedicó a copiar muchas de estas teselaciones. Abordó muchos tratados de geometría, en cuya parte teórico-formal no encontró gran ayuda, sólo la representación geométrica de los teoremas le sirvieron para aclarar el problema.

Para analizar un poco más en detalle el problema, consideremos la siguiente figura (Figura 22).

Como se observa, el plano está recubierto por triángulos equiláteros. Para seguir más en detalle la siguiente explicación, es posible calcar uno de los triángulos que aparecen en la figura, y seguir cada una de las siguientes transformaciones (isometrías) que se realizan para recubrir el plano. La primera y la

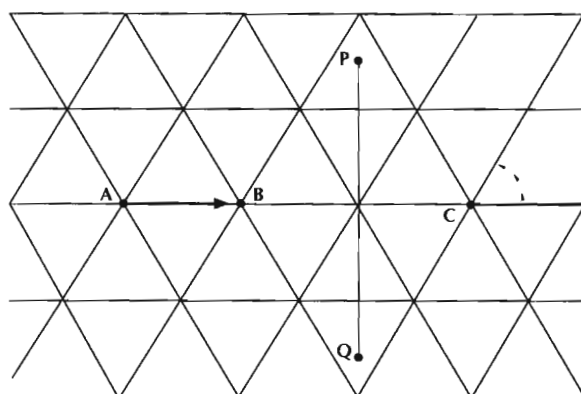


Figura 22

más fácil de las transformaciones que se puede realizar para recubrir el plano es una traslación, la cual se realiza moviendo el triángulo desde el punto A hasta el punto B. Otra forma de rellenar el plano es realizar una rotación desde el punto C, haciendo un triángulo de 60 grados, de esta manera es posible hacer coincidir el triángulo consigo misma.

Se nota que existen figuras que sólo aceptan traslaciones o rotaciones, todo esto tiene que ver con la simetría de la figura en cuestión.

La intención, ahora, es mostrar cómo es posible encontrar diferentes alternativas de trabajar la geometría con los estudiantes mediante el desarrollo de teselaciones, donde la exploración permite al estudiante observar que la belleza de las matemáticas puede ir más allá del trabajo en la solución de algoritmos y cálculos numéricos.

El trabajo con teselaciones permite combinar matemáticas y arte, y que los estudiantes desarrollen su creatividad artística además de ser un buen ejercicio sobre el sentido espacial.

Una introducción que resulta de gran ayuda en el desarrollo de este trabajo, es mostrar diferentes teselaciones, ya que esto permite una mejor disposición en la clase para el desarrollo del trabajo.

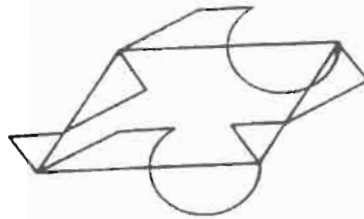
El manejo de figuras geométricas (triángulos, exágonos, cuadrados, rectángulos) puede llegar a aclarar el concepto de teselación.

Después de un trabajo introductorio con los polígonos regulares, los estudiantes observan que las teselaciones logradas no tienen la belleza de las de Escher, en este momento, se puede introducir una de las técnicas que permite la realización de dichas teselaciones.

La técnica del mordisco

Los polígonos regulares que se utilizan para efectuar mosaicos, se pueden transformar de manera que los mosaicos que se generen muestren diferentes grados de irregularidad. Usando la técnica que se conoce como *mordisco*, es posible crear mosaicos de mayor complejidad.

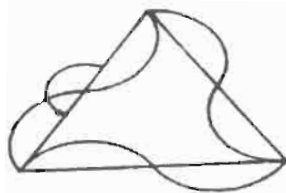
Una de las primeras transformaciones que se puede utilizar es la *traslación*. Como se darán cuenta los estudiantes (después de efectuar algún trabajo), este tipo de transformación sólo se puede efectuar a los polígonos que tienen sus lados opuestos respectivamente paralelos y congruentes. La técnica consiste en cortar en uno de los lados del polígono algún tipo de figura y trasladarla al lado opuesto, aunque la transformación es sencilla, se pueden lograr bellos efectos como lo muestra la siguiente figura.



Como se observa, el corte se puede hacer en dos lados, siempre que el *mordisco* cortado se traslade al lado opuesto. Cuando se haya trasladado el *mordisco* y encajen perfectamente los lados rectos y las esquinas, se puede pegar el lado con cinta o pegante para que su reproducción sea más fácil.

Rotaciones: este tipo de transformación sólo puede realizarse a los polígonos, triángulos, paralelogramos y hexágonos que tengan lados adyacentes congruentes. Esta técnica es más complicada que la anterior, pero también presenta una gran variedad de mosaicos que pueden ser realizados. Estas rotaciones pueden presentar dos variedades:

a. *Giro a partir de un lado:* cuando se efectúa un corte a uno de los lados de un triángulo o un cuadrilátero, se tiene que añadir el mismo lado mediante un giro de 180 grados, véase la siguiente figura.



b. *Giro de un vértice*: al efectuar un corte a uno de los lados, se añade al otro lado mediante un giro de 60 o 120 grados, con centro en el vértice común de los lados. Los vértices que son centro de un giro, no pueden ser consecutivos. Los giros tienen que ser de 90 grados cuando los centros pertenecen a un triángulo cuadrilátero o pentágono, véase la siguiente figura.



La combinación de todas las técnicas en forma simultánea permite crear teselaciones mucho más complicadas.



CONCLUSIONES

El trabajo realizado con los estudiantes utilizando el ordenador como herramienta en la realización de los laboratorios de matemáticas mostró que despertó el interés en la mayoría de ellos. Aunque al principio del trabajo se presentó resistencia por la lectura (en inglés algunas veces) de los manuales de Mathematica, la actitud fue cambiando cuando se dieron cuenta que el programa podía realizar una serie de operaciones (factorización, cálculos complejos, límites, gráficas, etc.) que en la mayoría de los casos son operaciones rutinarias que causan problemas a los alumnos. Después de esta motivación el trabajo se aceleró de tal forma que, algunos estudiantes, utilizaban las horas de descanso para dominar el programa.

El desarrollo del trabajo mostró que en la planeación de los laboratorios se debe tener presente que no tiene sentido efectuar talleres en los que se les pida a los estudiantes que copien una respuesta que da el programa, ya que esta clase de trabajo no aporta mucho. En los talleres hay que recalcar que uno de los objetivos principales es lograr que los estudiantes tengan vivencias de conocimiento, que no se trata de dar una orden al computador para que este realice una factorización, por ejemplo, sino realizar un taller para que el estudiante a través de una búsqueda pueda encontrar o visualizar que existe una relación entre los coeficientes y la factorización. Es necesario mostrarles que las respuestas del ordenador no poseen valor si no se les da un significado.

Es necesario que después de la realización de un laboratorio, se creen espacios para que los estudiantes socialicen y argumenten sus diferentes conclusiones; estos debates enriquecen mucho la actividad, puesto que en este espacio es donde el trabajo con el ordenador adquiere sentido.

Una de las dificultades alrededor de este punto tuvo que ver con los pocos equipos (ocho), con que contaba la escuela, que tenían los requerimientos de hardware que el programa necesitaba, por esta razón, era necesario que trabajaran tres personas por ordenador y, en algunos casos cuatro, esto mostró que dos de los estudiantes trabajan y los otros eran espectadores de la actividad.

Otra faceta que mostró el trabajo con experimentos matemáticos, es que si bien se diseñan una serie de laboratorios sobre algunos tópicos de matemáticas contemporáneas, cuando se realizan estos talleres, en la gran mayoría de los casos, los estudiantes realizan preguntas que involucran otra serie de temas que no estaban contemplados en la actividad. Esto hace que la clase sea dinámica y diferente a la clase tradicional.

La presentación de temas como fractales, sistemas dinámicos, caos determinista, etc., que son considerados complicados para ser presentados a los estudiantes, se tuvieron en cuenta para el trabajo de muchos temas del currículo (límites, convergencias, divergencias, perímetro, área, etc.).

El hecho de realizar actividades como la del juego del caos, permite que los estudiantes se hagan preguntas tales como: ¿por qué es posible que sucesos azarosos generen estructuras ordenadas?, ¿por qué la iteración de una ecuación para unos valores tiene un comportamiento determinista y para otros caótico?, ¿cómo es posible que una figura geométrica posea un perímetro finito y encierre un área infinita? Esto, por sí sólo, es ya una ganancia en la clase de matemáticas.

Las actividades sobre el juego del caos y fractales, no se exploraron como se podría haber hecho; uno de los factores fue la falta de tiempo y otro el desconocimiento de formas para profundizar de manera sencilla el estudio de estos temas con los estudiantes. Por ejemplo, en el juego del caos, las preguntas y la actitud de asombro de los estudiantes no se aprovecharon para afrontar el problema de la dimensión de la figura obtenida, utilizando *recubrimientos por caja*.

En general, el trabajo sobre tópicos de matemáticas contemporáneas y la utilización del ordenador para efectuar laboratorios matemáticos, fue una experiencia enriquecedora para los alumnos como para el maestro. Quedan muchas cosas por hacer alrededor de esta experiencia, es necesario que se ponga en práctica por parte de otros maestros para que así se puedan recoger

y verificar diferentes puntos de vista e ir mejorando la presentación de estos temas de la educación media. Además de ir incorporando el ordenador como una herramienta en la clase de matemáticas.

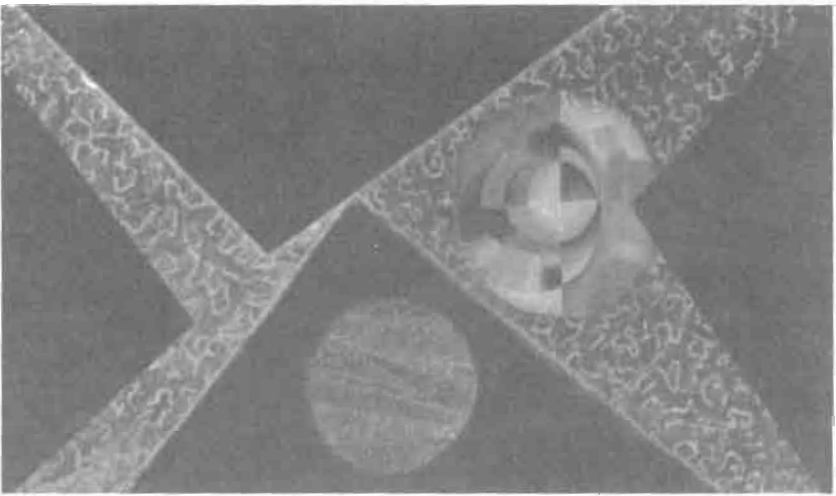
Este proceso necesita, sin embargo, maestros que estén dispuestos a jugársela por un cambio de actitud en la enseñanza de las matemáticas.



BIBLIOGRAFÍA

- BARSNEY, M. *Fractals Everywhere*. Boston Academy Press. 1988.
- BENOIT MANDELBROT. *Los objetos fractales*. Editorial TusQuest. 1984.
- J. BRIGGS. *Espejo y reflejo*. Editorial Gedisa. 1990.
- HEINZ, Otto - HARTMUT, Jurgens. *Fractals for the classroom*. Editorial Springer-Verlag. 1991.
- Stewart, Ian. "Juega Dios a los dados". En: *La nueva matemáticas del caos*". Editorial grijalbo. 1991.
- CRUTCHFIELD, James y otros. "Caos". En: *Investigación y ciencia*. Marzo 1998.
- COES, Loring. "Building Fractal Modem with Maniputatives". En: *The mathematics teacher*. Vol. 86. Nº 8, november 1993.
- GUZMÁN, Miguel y MARTÍN Miguel Ángel. *Estructuras fractales y sus aplicaciones*. Editorial Labor. 1993.
- GÓMEZ, Pedro. *Matemáticas básica*. "una empresa docente". Universidad de los Andes.
- PETERSON, Ivars. *El turista matemático*. Aliansa Editorial. 1992.
- DAVES, Philp - HERSH, Reuben. "El sueño de Descartes". En: *El mundo según las matemáticas*. Editorial Labor. 1989.
- THOM, René. *Parábolas y catástrofes*. Editorial TusQuets. 1993.
- DEVANEY, Robert. *A first course in chaotic dynamical system*. Editorial Addison-Wesley. 1991.
- WOLFRAM, Stephen. *Mathematica A system for athematics with Mathematica*. Editorial Addison-Wesley. 1991.
- WEGNER, Tim - TYLER, Bert. *El mundo de los fractales*. Editorial Anaya. 1993.

INVESTIGACIONES E INNOVACIONES DEL IDEP



INVESTIGACIÓN SOBRE EL DESARROLLO DE PROCESOS

EL JUEGO DE LA TRIPLETA COMO HERRAMIENTA PEDAGÓGICA PARA CONTRIBUIR AL DESARROLLO DE ALGUNOS PROCESOS DE PENSAMIENTO MATEMÁTICO*

Investigadoras: Esperanza Garzón González¹

Gloria Patricia Reyes Salcedo²

Asesor: Jorge Rodríguez Bejarano³

El resumen que se presenta a continuación, corresponde a una experiencia teórico práctica, cuya intencionalidad fue desarrollar y afinar una propuesta pedagógica, orientada a contribuir al desarrollo de algunos procesos de pensamiento matemático, introduciendo en la clase de matemáticas el juego de las tripletas: numérica, de área y de relaciones, con el propósito de hacer de esta, un espacio pedagógico que proporcione clases activas, motivantes, ricas en experiencias, posibilidades, y facilitadoras del desarrollo de algunos procesos de pensamiento matemático a través de la interacción social, afectiva, comunicativa y lúdica, entre estudiantes y maestros.

La primera pregunta que nos formulamos al hablar de una clase de matemáticas, es si ésta es una experiencia gratificante para los niños.

Según observaciones realizadas como docentes del área de matemáticas, se puede afirmar que la escuela en general, y la enseñanza de las matemáticas en particular, no contribuyen al desarrollo de procesos de pensamiento matemático con intencionalidad explícita, como el análisis, la argumentación, o la búsqueda de diversos caminos para resolver diferentes situaciones problema. Tampoco impulsa el desarrollo de dispositivos de aprendizaje como observación, atención, concentración, memoria visual y memoria auditiva, lo mismo que la agilidad mental.

* El informe final de esta investigación se encuentra en el Centro de Documentación del IDEP.

¹ Esperanza Garzón González, profesora de matemáticas del colegio Gimnasio la Montaña, investigadora.

² Gloria Patricia Reyes Salcedo, profesora de matemáticas del Centro Educativo Distrital Alejandro Obregón (jornada de la tarde), investigadora.

³ Jorge Rodríguez Bejarano, director de posgrado de Matemáticas de la Universidad Distrital, asesor.

El desarrollo de algoritmos, la repetición memorística de definiciones y procedimientos, no son producto de la construcción por parte del estudiante sino una transmisión por parte del docente, que ha centrado sus esfuerzos en el desarrollo de los mismos. Sin embargo, hay que tener en cuenta que cualquier disciplina exige el dominio de estos procesos y habilidades, pero en la mayoría de los casos se hacen sin comprender ni reconocer la verdadera experiencia del escolar, dándole mayor importancia al contenido que al desarrollo del proceso o la habilidad.

Uno de los objetivos básicos de la educación matemática consiste en facilitar el camino para que el estudiante encuentre en esta disciplina un poderoso instrumento que le permita representar, analizar, explicar y anticipar hechos y eventos. Teniendo en cuenta lo anterior, la educación matemática debe proporcionar a los estudiantes:

- a. Contextos de aprendizaje adecuados para que éstos construyan sus conocimientos matemáticos en interacción con sus compañeros y con el docente.
- b. Situaciones problema que le den la oportunidad de experimentar, conjeturar, refutar, comprobar, generalizar resultados e inventar nuevos problemas.

Sin embargo, se puede decir que los docentes de matemáticas desarrollan uno de los aspectos más importantes que, a través de la matemática, los estudiantes deberían aprender: *el pensar*. No basta con proporcionar saber, también es necesario que ellos utilicen con flexibilidad ese saber que han asimilado.

La enseñanza se debe orientar hacia la búsqueda de la comprensión conceptual, presentando al estudiante un campo amplio de aproximaciones, técnicas y estrategias, con el fin de enfrentarlo con seguridad al análisis, la percepción de relaciones y estructuras, y también la argumentación en cualquier tipo de situación problemática.

Si un estudiante va adquiriendo un buen nivel de comunicación y puede utilizar el lenguaje de la matemática en su vida cotidiana, en su desarrollo cognitivo y de habilidades analíticas con capacidad para razonar y precisión en sus presentaciones orales y escritas, se puede afirmar que a través de la enseñanza se logra ganar capacidad de análisis y coherencia en la argumentación.

Aún hoy existe un panorama inconexo entre las posturas teóricas y la enseñanza de la matemática, como por ejemplo:

Para el constructivismo social, la matemática es “aquel conjunto de objetos que se construyen socialmente a través de la interacción del individuo con el

mundo real, en su proceso de producción de condiciones de vida y también de la posterior socialización de las construcciones subjetivas por medio de negociaciones sociales sobre tales construcciones” (Piaget. 1970; Vigotsky. 1962-1979; Luria. 1980, referenciados por Valero. 1994, p. 8), al igual que en la escuela los estudiantes construyen su conocimiento sobre preconceptos. Pero esto exige involucrarlos en actividades que favorezcan el desarrollo de procesos de pensamiento matemático, facilitando el acceso a la dinámica de las matemáticas y convirtiéndola así en una actividad inherentemente social.



MARCO TEÓRICO

¿Cómo construye conocimiento el estudiante? Ésta es una de las principales preocupaciones de los pedagogos, y para lograr responderla han buscado diversas formas de llegar al conocimiento, variadas maneras de enseñar, han incursionado en los contenidos curriculares y han reflexionado acerca de las técnicas e instrumentos, y han puesto sus ojos en la tarea de comprender qué o quién es el centro del aprendizaje.

En este tiempo se han presentado diversas teorías educacionales: *la educación tradicional* suponía que dicho centro estaba en los contenidos y en su coherencia; *la tecnología educativa* declaraba que eran los instrumentos o técnicas; y *la escuela activa* ponía y pone, como centro del aprendizaje, al estudiante, el cual accede al conocimiento por medio de la “actividad”, de la acción expresa del sujeto sobre el objeto a través de la manipulación. Sin embargo, dichas teorías han resultado incompletas.

Maestros y estudiantes reconocen que la experiencia de aprendizaje continúa siendo de simple transmisión de conocimientos, de alguien que sabe a alguien que no sabe. Debido a esto, se pone en relevancia un conocimiento que no sólo es frágil, ya que se olvida con facilidad, sino también inerte, porque al estudiante no se lo impulsa ni se le posibilita el que lo aplique a otros contextos.

Este reconocimiento ha llevado a que la mirada se ubique en otro punto de referencia, en aquél donde el aprendizaje es el centro, donde el conocimiento se construye a partir de la acción. Desde esta dialógica el docente cumple una función específica respecto del conocimiento del estudiante: en lugar de transmitirlo mecánicamente, parte de las experiencias, expectativas e intereses de los educandos, planea con cuidado su tarea, propone actividades sólidas y significativas, ubica el nivel de comprensión de sus alumnos, propone

una amplia gama de métodos posibles de aprendizaje, involucrando a aquello que incluso se puedan dar entre sus estudiantes, y crea las condiciones de saber que incluyen, además, situaciones problemas y temas en el campo respectivo.

Las matemáticas se consideran como parte del conocimiento humano global y de la cultura, con su especificidad, asequibles, útiles y formativas, ya que todas las personas capaces de aprender conceptos y procedimientos matemáticos dentro de una amplia gama de niveles de representación, pero sobre la base de modelos y patrones de su realidad sociocultural. Es así como el docente deja de ser sólo “entrenador” que prepara en fórmulas y en algoritmos, para ser un “constructor” de secuencias de aprendizaje que le facilitan al alumno ascender en la escala de los niveles de pensamiento: concreto, conceptual, simbólico, en un recorrido experimentado, protagonizado y autogestionado.

Desde esta perspectiva, se considera que el estudiante ya no es un receptor pasivo o solucinador mecánico de ejercicios, sino alguien que debe construir su propio conocimiento, “al enfrentarse a situaciones matemáticas en las que sus formas de conocimiento se pongan en juego y le generen conflictos porque no funcionan bien o no son suficientes para resolver la situación” (Gómez, 1995, pp. 25 a 34).

Algunos criterios generales:

- *Desarrollo del hábito del pensar matemático*: entendido como un pensamiento caracterizado por la búsqueda de regularidades, de patrones de resolución de problemas, en el que se involucran procesos como particularizar, generalizar, conjeturar y argumentar.

- *La formación matemática*: incluye básicamente la configuración y consolidación de sus sistemas conceptuales, que se agrupan como mínimo en cuatro grandes modos de pensamiento: lógico, estocástico, espacial y numérico.

- *El carácter altamente comunicativo de las matemáticas* viene dado por lo simbólico, numérico, escrito, oral, gráfico, implica que la comunicación es un objetivo básico de la enseñanza; la relación entre el lenguaje y el pensamiento es su eje, ya que el lenguaje no sólo expresa el conocimiento, sino las formas como se abordan el contexto, la coherencia del discurso, los argumentos y el desarrollo de procesos de pensamiento matemático.

- *La intención de la enseñanza no es formar matemáticos sino estudiantes con “potencia y disposición matemática”*: la potencia matemática implica la capacidad del estudiante para explorar, formular hipótesis, razonar lógicamente y resolver problemas por medio del uso de herramientas matemáticas; la



disposición matemática denota poseer confianza en usar las matemáticas, mostrar flexibilidad para explorar ideas matemáticas, y probar métodos alternos de solución (Corbalán. 1994, p. 14).

Se sabe que la matemática es una actividad humana en continua evolución, no una colección de resultados acabados, fríos, fosilizados, sino que es dinámica y posible de ir construyendo en el aula y en la que el estudiante se debe considerar decididamente como el actor principal de la obra de su aprendizaje. Sin embargo, en la mayoría de los casos no es posible encontrarlo en la práctica escolar, ya que todo se queda en un sueño que no se llega a plasmar en la realidad escolar por razones de diferente orden, que van desde las pretensiones de las instituciones, que generalmente están alejadas de las necesidades de los educandos, hasta los recursos humanos y didácticos, que no aparecen en el escenario de las acciones.

El juego como herramienta pedagógica

El juego puede colaborar en el desarrollo de la comprensión de partes enteras de las matemáticas, de sus conceptos. Sirve como recurso para lograr una enseñanza más rica, activa, creativa, participativa. Sirve también para afianzar de manera lúdica los conceptos y algoritmos. Contribuye a desarrollar las habilidades de manejo espacial: proporciona una nueva actitud de parte del educando al intentar abordar y resolver los problemas no solamente en los casos matemáticos sino también en las situaciones vitales. Enfrenta al alumno con lo nuevo, y lo coloca ante la búsqueda de alternativas viables y lógicas para resolver cada nueva situación, pues él debe construir nuevas formas de proceder y relacionar elementos con variedad de posibilidades, y valorarlos. Esto permite desarrollar algunas de sus habilidades: recursividad, vivacidad, flexibilidad y también le permite ver el todo como relación, y en función de sus partes. Pablo del Río, en el texto de Corbalán (1994, p. 34), dice al respecto: “Los juegos constituyen uno de los desafíos centrales de la educación del futuro”.

Los juegos constituyen un poderoso instrumento para desarrollar el idioma matemático, para hacer matemáticas, para interiorizar los procesos propios del pensar matemático. Además, por sí mismos son atractivos, apetece jugarlos y ello ayuda a que no haya necesidad de empujar a los estudiantes para que comiencen, lo hacen voluntariamente.

Gardner dice al respecto: “Un buen rompecabezas matemático, una paradoja o un truco de apariencia mágica puede excitar mucho más la

imaginación de los niños que las aplicaciones prácticas, sobre todo cuando estas aplicaciones se encuentran lejanas de la experiencia vivida por ellos. Y si el juego se elige y prepara con “cuidado”, puede llevarlo insensiblemente hasta las ideas matemáticas de importancia”.

Según sean las pretensiones del docente, puede utilizar juegos de conocimiento o de estrategia. Los primeros constituyen un recurso, para una enseñanza más rica, más activa, más creativa y más participativa de los mismos temas matemáticos habituales. Los segundos ponen el acento en el pensar, por ello es importante utilizarlos de manera generalizada en las clases de matemáticas, pues sirven para desarrollar e iniciar la realización de ejemplos prácticos y atractivos, las destrezas específicas para la resolución de problemas, y los modos típicos del pensar matemático. Sin embargo son, por parte de los docentes, los que ofrecen más resistencias a ser implementados. En cambio, son los más apetecidos por los estudiantes, por su gran versatilidad.

Por otra parte, es importante anotar que el éxito de introducir el juego en clase de matemáticas depende de la intencionalidad expresa del docente que lo está implementando, de su convencimiento respecto a la importancia del papel del juego en la contribución al desarrollo de procesos de pensamiento matemático. También cuenta la forma como el juego sea introducido, ya que debe despertar emoción, ganas de ser jugado, alegría, satisfacción, atractivo en sí mismo. Por ello es conveniente que sea novedoso, de pocas reglas, y éstas muy claras.

Es básico detectar el momento oportuno para ser implementado, pues todo ello contribuye a que el alumno se sienta en un clima pedagógico de libertad para expresarse en todo momento; un ambiente favorable que le garantice enfrentarse a los nuevos retos, apoyando el desarrollo del pensamiento lógico y matemático en las formas algorítmica, operativa, analítica, sintética, regresiva y argumentativa.

En cuanto a lo algorítmico, el juego facilita la comprensión de caminos diversos para llegar a un mismo resultado, permite lograr mayor conciencia acerca de la manera procedimental, lógica y coherente con que los alumnos se enfrenten a variadas situaciones problema.

El juego como herramienta pedagógica, particularmente el juego de la triplete, implementado y analizado en esta experiencia, conjuga tanto los de conocimiento como los de estrategia, ya que permite proceder de manera diversa, de adaptarla a las necesidades educativas dentro de la clase de matemáticas entre las que se cuentan: conceptos matemáticos y geométricos,

algoritmos, propiedades de las operaciones y secuencias. Igualmente propicia un cambio de actitud en el estudiante, pues abre un abanico de posibilidades que descansan sobre el desarrollo del pensamiento matemático, amplio y acorde con sus capacidades, pero cabría anotar lo más importante, *logra la magia de recuperar el interés del estudiante por el saber matemático.*

Algunos procesos del pensamiento matemático

Es conveniente tener claridad sobre qué procesos matemáticos se quieren desarrollar o apoyar con el juego, y desde qué perspectiva se están observando, para que desde esta manera el docente planee y desarrolle en el aula las actividades lúdicas pertinentes.

Los procesos que se han seleccionado para la experiencia corresponden a los que a continuación se describen brevemente:

Pensamiento numérico

Corresponde a la capacidad de establecer relaciones para formar estructuras numéricas e interpretarlas, proponer nuevas estructuras, lenguajes simbólicos y sistemas formales, a la búsqueda permanente de regularidades, de relaciones numéricas que surgen a partir de la reflexión, de las conjeturas de la confrontación, y de las diversas formas de resolver situaciones problema planteadas. Un pensamiento que se expresa en el lenguaje de las matemáticas y tiene asidero en la estructura numérica.

Pensamiento espacial

Este pensamiento está referido a la percepción, intuitiva o racional, del entorno propio y de los objetos que hay en él. El desarrollo de este pensamiento, que está asociado con la interpretación del mundo físico, permite desarrollar interés matemático y mejorar estructuras conceptuales y destrezas numéricas.

Pensamiento lógico

Considerado como la capacidad para utilizar las matemáticas con autonomía, para resolver situaciones problema, para plantear hipótesis, establecer conjeturas, someterlas a prueba y tomar decisiones.

Se considera como el desarrollo de las disposiciones hacia la interpretación, comprensión y apropiación de estructuras y relaciones matemáticas. Entre las capacidades que podemos desarrollar para potenciar un pensamiento lógico, tenemos: Análisis y síntesis, reversibilidad, justificación, razonamiento y agilidad mental.

PENSAMIENTO NUMÉRICO	PENSAMIENTO ESPACIAL	PENSAMIENTO LÓGICO
<p>CORRESPONDENCIA</p> <ul style="list-style-type: none"> • Establece representaciones mentales de las relaciones entre número y cantidad elementos. • Identifica las características particulares asociadas a las relaciones y/o operaciones 	<p>COMPOSICIÓN Y DESCOMPOSICIÓN</p> <ul style="list-style-type: none"> • Identifica y relaciona las partes que componen de una totalidad. • Encuentra regularidades que le permiten realizar nuevas composiciones o construcciones con sólo variar algunas partes de la totalidad 	<p>JUSTIFICACIÓN</p> <ul style="list-style-type: none"> • Frente a una situación problema planteada, explica las razones por la cuales una solución es viable o posible.
<p>DESARROLLO DE ALGORITMOS</p> <ul style="list-style-type: none"> • Comprende el mecanismo interno de las operaciones, de tal forma que procede correctamente utilizando diversas estrategias. • Descubre regularidades en las relaciones u operaciones aritméticas o geométricas. • Relaciona, procesa y opera información rápidamente. 	<p>PORCIONALIDAD Y MEDIDA</p> <ul style="list-style-type: none"> • Establece relaciones de medida en y entre figuras de igual y diferente tamaño y forma, expresándolas numéricamente. • Reproduce composiciones y construcciones en tamaños distintos manteniendo estructura y forma. 	<p>ANÁLISIS Y SÍNTESIS</p> <ul style="list-style-type: none"> • Identifica los elementos que intervienen en una situación problema planteada y descubre múltiples criterios de relación. <p>REVERSIBILIDAD</p> <ul style="list-style-type: none"> • Reconstruye el todo o totalidad a partir de sus partes y descompone en sus elementos consecutivos.
<p>INTERPRETACIÓN Y TRANSFERENCIA DE LENGUAJES MATEMÁTICOS</p> <ul style="list-style-type: none"> • Relaciona y comprende información presentada en diferentes formas para dar soluciones a situaciones planteadas. • Transfiere información a diferentes contextos. 		<p>RAZONAMIENTO</p> <ul style="list-style-type: none"> • A partir de reflexión, construye argumentos y contraargumentos en forma organizada, frente a soluciones o situaciones planteadas o desarrolladas. <p>AGILIDAD MENTAL</p> <p>Conecta y opera información rápidamente.</p>



ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

El juego de la triplete implementado en esta experiencia combina la estrategia y el conocimiento de manera simultánea. Se desarrollaron tres modalidades de tripletes: numérica de operaciones básicas combinadas, para la construcción y cálculo de áreas, y de relaciones matemáticas o geométricas.

Con cada una de las modalidades se implementaron también algunas actividades llamadas de entrenamiento, con el propósito de preparar al estudiante no sólo en la dinámica del juego sino, además, como apoyo en el desarrollo de los dispositivos de aprendizaje y procesos de pensamiento matemático.

Para desarrollar esta experiencia se plantearon los siguientes objetivos:

- General:

Contribuir al desarrollo de algunos procesos de pensamiento matemático, lógico, numérico y espacial en los estudiantes de sexto grado del Centro Educativo Distrital Alejandro Obregón, a través de la introducción en la clase de matemáticas del juego de la triplete (numérica, de áreas y de relaciones) como herramienta pedagógica.

- Específico:

Contribuir a la reflexión sobre cómo mejorar algunos dispositivos de aprendizaje (atención, concentración, agilidad mental, memoria visual y auditiva).

Triplete numérica o de operaciones básicas combinadas

Objetivos del juego

- Propiciar la búsqueda de diferentes formas de operar utilizando simultáneamente operaciones básicas.
- Mejorar el cálculo mental en el desarrollo de operaciones básicas combinadas.
- Descubrir a través del desarrollo de operaciones con naturales las propiedades: asociativa, conmutativa, clausurativa y modulativa.
- Afianzar las relaciones numéricas: múltiplos y divisores.
- Propiciar la reversibilidad entre las operaciones adición-sustracción, Producto-cociente.

Material utilizado

- Un tablero cuadrado formado por 7 fichas cuadradas de 4 cm de lado, colocadas al azar. Las 49 fichas corresponden a:

6 fichas numeradas con el 1	5 fichas numeradas con el 5
6 fichas numeradas con el 2	5 fichas numeradas con el 6
6 fichas numeradas con el 3	5 fichas numeradas con el 7
6 fichas numeradas con el 4	5 fichas numeradas con el 8
	5 fichas numeradas con el 9

- 100 fichas cuadradas de 2 cm de lado, numeradas del 1 al 100
- 100 fichas de reconocimiento con carita feliz (sirve para la acumulación de puntos).

- Una bolsa plástica para las 100 figuras numeradas
- Una hoja para recolección de información.

Descripción del juego

Los estudiantes se organizan frente al tablero, de tal forma que todos alcancen a observarlo desde el sitio en que se encuentra. El monitor saca de una bolsa una ficha de las numeradas del 1 al 100, llamadas fichas solución, y en voz alta dice el número que ha sido seleccionado y lo muestra a todos los estudiantes. Éstos buscan en el tablero tres números que se encuentren en posición consecutiva, de tal forma que al realizar operaciones combinadas con ellos se obtenga el resultado que ha sido solicitado en la ficha solución. Las operaciones se pueden realizar sin importar el orden entre los números.

Si un estudiante encuentra una o más tripletas levanta la mano e indica al monitor su participación. Este toma nota de los participantes, esperando 30 segundos para cada intervención. Si el estudiante tiene una respuesta acertada se le entrega una ficha de reconocimiento, y esta tripleta, de la forma como se construyó, no puede volver a ser presentada. El que esté desatento y participa, pierde en el transcurso del juego una de las fichas de reconocimiento que haya ganado, y si no ha ganado ninguna, la perderá cuando la gane. Haciendo uso de su turno, un estudiante puede presentar más de una tripleta.

Al finalizar, cada estudiante cuenta el número de fichas ganadas y se las entrega al monitor. Éste anota en el formato de recolección de información y selecciona al estudiante ganador.

La solución a una tripleta puede tener las siguientes variaciones:

- Los dos primeros números sumados y el tercero restado.
- Los dos primeros números multiplicados y el tercero sumado.
- Los dos primeros números multiplicados y el tercero restado.
- Los tres números sumados.
- Los tres números restados.
- Los dos primeros números multiplicados y el tercero divide.
- Los tres números multiplicados entre sí.
- Los tres números divididos entre sí.
- Los números primero y tercero sumados y restado el segundo.
- Los números primero y tercero sumados y multiplicado el segundo.
- Los números primero y tercero sumados y el segundo divide.
- Los números primero y tercero restados y multiplicado el segundo.
- Los números primero y tercero restados y divide el segundo.
- Cualquier operación que haga el estudiante pero correcta.

Si la ficha solución fuese 40 las posibilidades sobre el tablero podrían ser:

En forma de ele

- $(6 \times 6) + 4 = 40$
- $(6 \times 7) - 2 = 40$
- $(5 + 5) \times 4 = 40$
- $(8 \times 4) + 8 = 40$

1	1	5	3	8	7	7
9	6	6	2	9	6	1
2	3	4	6	3	3	4
5	7	2	9	1	9	8
3	2	1	5	8	4	7
9	5	4	2	4	8	3
4	5	2	6	7	8	1

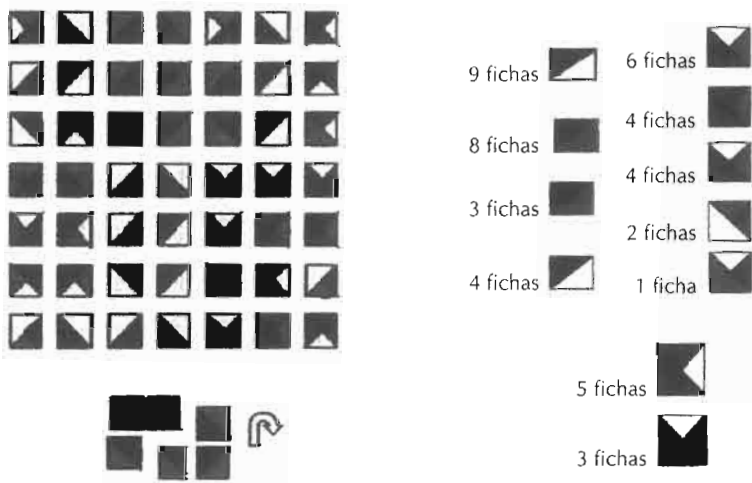
En forma lineal

- $(4 \times 6) + 1 = 25$
- $(7 \times 4) - 3 = 25$
- $(6 \times 3) + 7 = 25$
- $(8 \times 4) - 7 = 25$
- $(5 \times 4) - 5 = 25$

1	1	5	3	8	7	7
9	6	6	2	9	6	1
2	3	4	6	3	3	4
5	7	2	9	1	9	8
3	2	1	5	8	4	7
9	5	4	2	4	8	3
4	5	2	6	7	8	1

Tripleta para la construcción y cálculo de áreas

Este juego consiste en buscar una tripeleta (un arreglo de tres fichas dispuestas espacialmente en forma consecutiva), de tal forma que al ensamblar varias tripeletas iguales se obtenga un modelo previamente presentado. Utilizando las 49 fichas es posible armar modelos de 16 tripeletas cada uno, colocadas en un tablero de 7 fichas por cada lado.



Objetivos del juego

- Agrupar unidades de juego de tres fichas (tripeleta) de distinto diseño y armar el modelo presentado.
- Calcular el área correspondiente al modelo armado utilizando las triangulaciones del modelo, que pueden ser expresadas con números fraccionarios (unidad, medio, cuarto).
- Diseñar nuevos modelos a partir de unidades de tripeleta inventados por ellos.
- Lograr el cálculo de áreas de forma mental utilizando unidades geométricas para justificar y argumentar sus respuestas.
- Realizar operaciones básicas en las cuales intervenga números fraccionarios y decimales.
- Adquirir mayor agilidad mental, memoria visual, atención, concentración.

Material utilizado

- 5 monedas diferentes: caballos, rombos, diagonales, zig-zag.

- 49 fichas con los diseños presentados anteriormente.
- 100 fichas de reconocimiento.

Descripción del juego

Al terminar la construcción del modelo cada jugador calculará mentalmente el área correspondiente en unidades de ficha a una o cada color, o a partes del modelo presentado, o a todo el modelo, según se acuerde con anterioridad, y levantará la mano para que el monitor le asigne el turno correspondiente para la presentación de sus justificaciones y razonamientos. Luego pasará el modelo al plano gráfico y calculará nuevamente el área, pero esta vez la expresará en forma escrita con los procedimientos utilizados y las unidades en que la calcula.

Posteriormente se presentará un nuevo modelo, y se procede con la misma mecánica hasta agotar los modelos del monitor.

La actividad culmina con la construcción de nuevos modelos propuestos por los estudiantes, los cuales se presentan en el plano gráfico, con las unidades de tripleta utilizadas y los cálculos de área correspondientes.

Tripleta de relaciones matemáticas y geométricas

Este juego combina la estrategia y el conocimiento, ya que para resolver cada tripleta el estudiante no sólo debe tener la habilidad para encontrar tripletas, sino también para encontrar relaciones conceptuales existentes entre las representaciones que aparecen en las tres fichas que conforman la tripleta. Esta modalidad se diferencia de las anteriores en que no es necesario que las tres fichas que la conforman estén dispuestas en forma consecutiva, pues pueden ocupar diversas posiciones sobre el tablero.

Objetivos del juego

- Contribuir al desarrollo de procesos de seriación, reversibilidad, desarrollo de algoritmos, análisis, síntesis y argumentación.
- Ampliar conceptos matemáticos y geométricos a través de los diferentes formas de representación (definición, gráfica, simbólica).
- Contrastar y enriquecer el conocimiento del estudiante a través de los diferentes puntos de vista dados para resolver situaciones matemáticas planteadas.
- Verificar a través de las relaciones que se establecen entre las fichas de la tripleta el grado de avance o dificultad de los conocimientos matemáticos.

Material utilizado

- 49 fichas cuadradas de 20 cm de lado, que construyen la triplete de relaciones sobre el tablero llamadas fichas de triplete.
- 16 fichas cuadradas de 10 cm de lado, en las cuales aparecen los temas de juego con las diferentes formas de representación llamadas fichas de tema.
- 100 fichas de reconocimiento.
- Bolsa plástica para fichas tema.

Descripción del juego

A partir de la ficha tema se establecen relaciones entre tres fichas del tablero que estén relacionadas entre sí, y además con el tema seleccionado. De esta forma se procede con todas las fichas del tema. Para un tema es posible encontrar más de una triplete que las relacione. La validez de ésta depende de la capacidad de argumentar del estudiante y de la sustentación de la relación escogida.

Actividades de entrenamiento desarrolladas en cada triplete :

TRIPLETA NUMÉRICA DE OPERACIONES BÁSICAS COMBINADAS	TRIPLETA PARA LA CONSTRUCCIÓN Y CÁLCULO DE ÁREAS	TRIPLETA DE RELACIONES MATEMÁTICAS Y GEOMÉTRICAS
<p>Las actividades de entrenamiento para esta triplete fueron:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Pase los números • Mirando mirando • Triplete sencilla de suma y resta 	<p>Las actividades de entrenamiento para esta triplete fueron:</p> <p>Juguemos con el tangram</p> <ul style="list-style-type: none"> • Exploración de material • Simulación • Negrilla • Bordes • Animación 	<p>Las actividades de entrenamiento para esta triplete fueron:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Yuxtaposición • Construcciones con dominó • Absurdos • Tiras cómicas • Construyendo relaciones de equivalencia • Pirámides numéricas • Juguemos con las formas circulares • Experimentos con lógica.



CONCLUSIONES

Una vez finalizado el análisis de los resultados obtenidos a partir de la experiencia, se puede afirmar que:

Los objetivos planteados para la experiencia se cumplieron satisfactoriamente.

Las actividades de entrenamiento tanto para las trietas numéricas, de áreas y relaciones, no sólo dinamizaron el trabajo pedagógico en el aula sino que sirvieron de manera real para desarrollar en los estudiantes los procesos de pensamiento matemático que se querían beneficiar, ya que fueron novedosos, variados y permitieron la creación de un ambiente pedagógico adecuado para la reconstrucción y el fortalecimiento de ideas, conceptos y actitudes fuentes del saber matemático.

La implementación de la experiencia se realizó en espacios amenos, dinámicos, participativos, en el cual se lograron relaciones armoniosas entre los participantes, relación que generó una actitud positiva frente a las actividades matemáticas. Esto condujo a un ambiente abierto y receptivo, lográndose de esta manera, en forma progresiva, un cambio de actitud de alumnos y docentes en cuanto a la forma de trabajo matemático en el aula.

Es importante poder destacar cada una de las contribuciones que se lograron con el juego de la trieta: en cuanto a la trieta numérica de operaciones básicas combinadas, fue fácilmente observable la contribución de los procesos de desarrollo de los algoritmos ya que los estudiantes realizaron cálculos numéricos en donde intervenían simultáneamente operaciones básicas utilizando diversidad de procedimientos algorítmicos, todos ellos viables, y así obtener respuesta a preguntas expresamente planteadas, explicitando no sólo el proceso para lograrlo paso a paso, sino también la utilización de las propiedades como estrategias de resolución.

La contribución a la agilidad mental fue también bastante notoria, logrando conectar información rápidamente y en forma correcta, retener información a nivel auditivo y visual en tiempos un poco más prolongados. Con la trieta de áreas se lograron conexiones entre conceptos geométricos básicos, se adquirió la posibilidad de realizar mayor cantidad de relaciones a nivel espacial, se lograron generalizaciones sobre área y perímetro de cualquier figura a través de procesos de triangulación y, sobre todo, se logró conectar significativamente el manejo de las fracciones en el cálculo de áreas.

Con la triplete de relación se logró sintetizar la información recibida, ya que permanentemente realizaban conexiones entre conceptos utilizando variedad de formas de representación, identificando los elementos intervinientes y las relaciones existentes. Esto permitió ir desarrollando progresivamente un manejo adecuado de la información y un procesamiento más completo de la misma.

El maestro que escucha y se escucha en la clase, y no es el protagonista, puede ubicar con mayor precisión y claridad el estado de conocimiento de cada uno de los estudiantes, el nivel de comprensión individual y grupal, el manejo conceptual y concreto, lo mismo que el progreso de sus estudiantes. Una observación cuidadosa puede detectar aciertos y limitaciones de cada uno de ellos.

Se descubrió que el juego es una excelente herramienta pedagógica que involucra e interesa a la totalidad de los estudiantes, ya que les ofrece un reto permanente de superación, los obliga a dar soluciones efectivas y concretas frente a situaciones presentadas, y esto logró capacitarlos para resolver mucho mejor situaciones problema vitales y matemáticas.

La utilización permanente de material didáctico determinó parte del éxito en cada una de las actividades, ya que sirvió de apoyo para reflexionar sobre sus propias acciones y razonamientos, y se ganó no sólo en concreción sino en aclaración de ideas y argumentos.

Por último, planear cuidadosamente una actividad y orientarla hacia un fin específico, poniendo el material adecuado, las preguntas pertinentes, los apoyos necesarios por parte del maestro, constituyó una estrategia metodológica eficiente en el momento de valorar resultados.



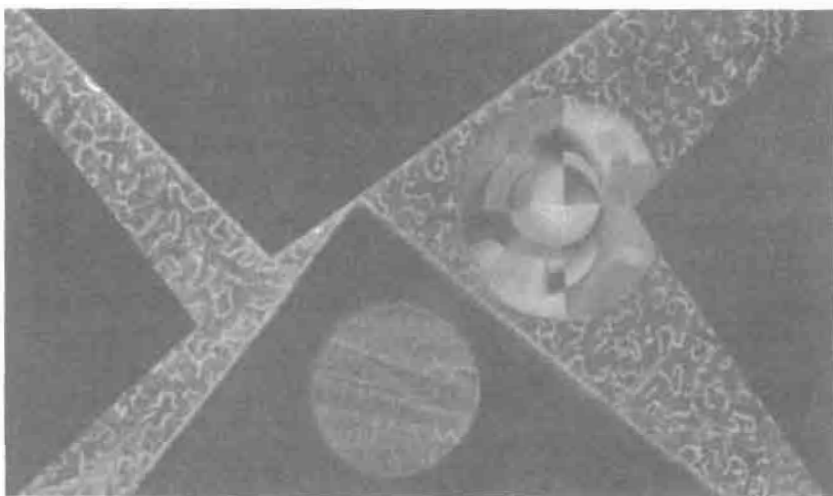
BIBLIOGRAFÍA

Piaget (1970), Vigotsky (1962-1979), Luria (1980), referenciados por VALERO, Paola. En: *Educación Matemática y construcción de la democracia*. Boletín Club Emma, No 6, agosto 1994.

GÓMEZ, Pedro. "Riesgos de la innovación curricular en matemáticas". En: *Revista Colombiana de Ciencia y Tecnología*. Vol. 14. Nº 4. Santa Fe de Bogotá. Colciencias, octubre 1995.

CORBALÁN, Frenando. *Juegos matemáticos para secundaria y bachillerato*. Editorial Síntesis S.A. Madrid. 1994.

INVESTIGACIONES E INNOVACIONES DEL IDEP



INVESTIGACIÓN SOBRE CONCEPCIONES DE LOS DOCENTES

COMPRESIÓN DE ALGUNOS CONCEPTOS ARITMÉTICOS EN PROFESORES DE PRIMARIA*

*Martha Bonilla Estévez
Neila Sánchez Heredia, Martha Vidal A.
Universidad Distrital Francisco José de Caldas*

En este trabajo se presenta el resumen de la investigación en la que se pretendía conocer y comprender el conocimiento pedagógico de un grupo de profesores de primaria acerca de las nociones sobre las operaciones aritméticas y los algoritmos utilizados, y poder usar los resultados obtenidos como referentes para organizar algunos programas de formación.

La aparición de nuevas propuestas curriculares así como la divulgación de los resultados de investigaciones en Educación Matemática han puesto de relieve la importancia de lograr cambios significativos en el conocimiento de los profesores de matemáticas. En particular, a los profesores de primaria (que enseñan matemáticas) se les exigen ciertas competencias y habilidades cognitivas y procedimentales para las cuales nunca fueron formados.

Desde nuestra posición de formadores entendemos que toda práctica educativa es una consecuencia de la forma en que cada profesor interpreta el hecho educativo y de las concepciones que guían su acción. Así mismo, toda actividad de formación se orienta por unos principios teóricos particulares, principalmente en unas concepciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de un contenido específico. En el caso de las matemáticas, y tal como lo señala Blanco (1996) muchos profesores las conciben como un conjunto de reglas que deben ser transmitidas como algo ya dado, preestablecido, y que deben ser memorizadas al igual que las situaciones en las cuales deben ser aplicadas. Esta visión es contraria a los nuevos retos de la enseñanza matemática y es por ello que se deben diseñar programas de formación que favorezcan el cambio conceptual sobre la naturaleza del conocimiento matemático, su enseñanza y su aprendizaje.

* La investigación "Comprensión de algunos conceptos aritméticos en profesores de primaria", se realizó durante el periodo 1997-1998, y fue auspiciada por la Universidad Distrital Francisco José de Caldas y el Instituto para la Investigación Educativa y el Desarrollo Pedagógico, IDEP. El informe final se encuentra en el Centro de Documentación del IDEP.

Surgen varios interrogantes: ¿qué deben conocer los profesores de primaria acerca de las matemáticas, su enseñanza y su aprendizaje?, ¿cómo conseguir que efectivamente se vayan generando cambios en los procesos de aprender a enseñar matemáticas?, ¿cómo evaluar la efectividad del proceso? Así mismo, ¿qué saben los profesores acerca de los conocimientos matemáticos que tratan en el aula?, ¿cuál es su comprensión de los conceptos matemáticos que enseñan? Todos estos interrogantes, y por supuesto muchos más, se pueden constituir en puntos de partida para posibles investigaciones, necesarias a la hora de diseñar proyectos de formación del profesorado.

Los problemas que orientaron la indagación fueron:

Problema 1: Las nociones sobre las cuatro operaciones aritméticas y sus algoritmos ocupan gran parte de la enseñanza básica primaria y se pueden considerar como un núcleo fuerte en la iniciación a la formación del pensamiento matemático en el niño. A partir de nuestra experiencia y de otras investigaciones es posible concluir que algunas concepciones de los maestros se constituyen en un obstáculo para propiciar el desarrollo del pensamiento matemático en los niños. Por ello nuestro problema es: ¿cómo caracterizan los profesores de primaria los conceptos de las operaciones aritméticas y sus correspondientes algoritmos?

Problema 2: a la hora de dotar de significado a situaciones en las que se presenten problemas de tipo aditivo y multiplicativo y sus correspondientes operaciones inversas, los profesores utilizan diversos argumentos de tipo matemático o didáctico que justifican sus respuestas. Lo mismo sucede en los momentos de explicar las razones por las cuales se usa un procedimiento matemático para resolver un problema determinado. Por ello, nos parece importante explorar en nuestra investigación: ¿cuáles son los modelos de problemas de tipo aditivo o de resta, multiplicación o división que utilizan los profesores de primaria, al analizar situaciones en las que una de estas operaciones se use como modelo matemático?, ¿qué argumentos utilizan los profesores a la hora de explicar las razones que los llevan a enseñar unos ciertos algoritmos de una cierta manera?

Derivados de los problemas planteados, también fueron objetivos del estudio:

Objetivo 1: caracterizar las concepciones del grupo de profesores que interviene en este estudio, acerca de las operaciones aritméticas: suma, resta, multiplicación y división.

Objetivo 2: describir los tipos de argumentos que utilizan para justificar los procedimientos algorítmicos involucrados en las cuatro operaciones aritméticas.



Objetivo 3: analizar las relaciones entre la comprensión de diferentes aspectos relativos a las nociones aritméticas en cuestión, y el uso de los modos de representación que se pueden utilizar.

Objetivo 4: A partir de los resultados del trabajo construir una propuesta de programa de formación para profesores de primaria, en la cual se incluyan las comprensiones encontradas como casos a ser analizados por los participantes.

Metodología empleada

El estudio se desarrolló con un grupo de 62 profesores del Distrito Capital, en su mayoría ubicados en las escuelas de la localidad 8ª. La totalidad de profesores ha ejercido la profesión docente por un tiempo mayor a 5 años. La preparación académica corresponde a los niveles de normalista, estudiantes y/o licenciados en educación básica primaria, y sólo 4 dijeron tener estudios de posgrado. También se pudo apreciar que la totalidad de los profesores habían realizado cursos de perfeccionamiento docente.

Los instrumentos de investigación planteados fueron un cuestionario y una entrevista semiestructurada. El cuestionario se diseñó en dos partes, una relacionada con los problemas aritméticos elementales, y la otra con los algoritmos de las cuatro operaciones, tal como se describe a continuación:

Una de las actividades que realiza un profesor es la elaboración de problemas relacionados con las operaciones aritméticas que enseña, para ser colocados como tareas escolares. Tomando como referencia su práctica en ese aspecto, elabore, para cada una de las relaciones numéricas que se presentan a continuación, tres problemas diferentes y explique las razones por las cuales cree que son diferentes.

$$9 + 7 = 16$$

1.a.

1.b.

1.c.

Explique las razones:

$$6 \times 3 = 18$$

1.a.

1.b.

1.c.

Explique las razones:

En la primera parte se utilizó un cuestionario con el que se deseaba obtener el conocimiento de los profesores de las diferentes estructuras semánticas de los problemas aritméticos escolares PAES, que se pueden asociar con una operación dada. Se les presentó la operación aritmética completa, para no direccionar hacia cierto tipo de problemas determinados por el lugar de la incógnita, a la vez que se mantuvieron los números menores de 20 para que fueran tipos de problemas trabajados por todos los profesores.

En lo relativo a la Parte II, el cuestionario se estructuró usando aquellos casos que pretenden ser situaciones de aula en las que el profesor debe tomar una decisión de enseñanza. En cada caso se presenta una operación, en la que se pone de manifiesto el error del estudiante:

Caso 1

José tiene 8 años, está en segundo grado, aprendiendo a sumar. Ha hecho el siguiente ejercicio:

$$\begin{array}{r} 699 \\ + 301 \\ \hline \end{array}$$

escribiendo en su hoja, en pasos sucesivos lo siguiente:

a) $\begin{array}{r} 699 \\ + 301 \\ \hline 10 \end{array}$	b) $\begin{array}{r} 699 \\ + 301 \\ \hline 910 \end{array}$	c) $\begin{array}{r} 699 \\ + 301 \\ \hline 9910 \end{array}$
---	--	---

1. ¿Cuál fue la causa de que José hiciera la operación así?
2. ¿Cómo enseñaría esa suma a José?

Esta parte se estructuró de acuerdo a dos tipos de cuestiones: *Análisis clínico e intervención en el aula*; a este respecto se utiliza el error para situar al profesor en una situación de identificación del mismo, y luego se le pide que haga una intervención en el aula, es decir que diseñe una secuencia de enseñanza para corregir el error encontrado.

Con los anteriores ítems se identificó la comprensión conceptual que los profesores tienen de los diferentes algoritmos de las operaciones aritméticas, con los números naturales a través del análisis de los errores que comenten los alumnos. Un objetivo común a los cuatro casos consistió en obtener información sobre el papel que desempeñan dos ideas conceptuales del sistema de numeración: valor posicional y agrupamiento, en dotar de significado a los algoritmos (información conceptual).

En el *caso de la suma*, se obtuvo información acerca de la comprensión del profesor frente a una situación en la que el alumno no maneja el agrupamiento. Para el *caso de la resta*, se buscó información sobre el manejo del valor posicional y la descomposición de unidades superiores a inferiores. En el *caso de la multiplicación*, se obtuvo información sobre el valor posicional y la conversión de unidades. Y para el *caso de la división*, se obtuvo información sobre el valor posicional.



MARCO TEÓRICO

Esquema analítico

Para el diseño de las categorías de análisis se utilizaron los siguientes criterios:

PARTE I: Para clasificar las respuestas de los profesores se usó la estructura semántica de los problemas propuestos y los modelos de las situaciones.

En el proceso de análisis se consideró relevante utilizar diferentes variables en la descripción de las categorías, como el lugar de la incógnita y los diferentes papeles en la situación que desempeñaban los números proporcionados en la expresión aritmética.

Para los problemas vinculados con la expresión aditiva se emplearon las categorías semánticas de los problemas aritméticos escolares PAES establecidos en la literatura, y en particular se utilizó la clasificación propuesta por Nesher. Para los problemas vinculados con la expresión multiplicativa se utilizaron las clasificaciones propuestas por Greer, incorporando las que elaboraron Vergnaud y Schwartz.

Las categorías definitivas fueron las siguientes:

CATEGORÍAS ADITIVO	CATEGORÍAS MULTIPLICATIVO
S1 Combinación	M11 Isomorfismo de medida (Veces) $1 \times E = E$
S21 Cambio aumentar	M12 Isomorfismo de medida (Cada uno) $1 \times E = E$
S22 Cambio disminuir	M21 Isomorfismo de medida (Veces) $E \times 1 = E$
S3 Comparación	M22 Isomorfismo de medida (Cada uno) $E \times 1 = E$
S4 Numérico	M3 Producto de medidas $M_1 \times M_2 = M_3$
S5 Gráfico	M4 Numérico
S6 No lo hizo	M5 Gráfico
S7 Especial	M6 No lo hizo
	M7 Especial

Al tomar como eje de caracterización el lugar que ocupa la incógnita dentro del problema, se construyeron las siguientes categorías:

- | | | |
|-----|-------------|------------------|
| I 1 | $a + b = ?$ | $a \times b = ?$ |
| I 2 | $a + ? = c$ | $a \times ? = c$ |
| I 3 | $? + b = c$ | $? \times b = c$ |

Con relación a la caracterización de las razones por las cuales los profesores consideran a los problemas como diferentes, se procedió de manera inductiva, generando la siguiente categorización:

PARA LA ESTRUCTURA ADITIVA	PARA LA ESTRUCTURA MULTIPLICATIVA
R1 Mira de uno en uno e identifica lo que hay que hacer para resolverlo	R1 Mira de uno en uno e identifica lo que hay que hacer para resolverlo
R2 Por ser diferente el enunciado	R2 Por ser diferente el enunciado
R3 Por los objetos	R3 Por las sumas reiteradas
R4 Por el lugar de la incógnita	R4 Por el lugar de la incógnita
R5 Por las operaciones y los enunciados involucrados	R5 Por las operaciones y los enunciados involucrados
R6 No clasificable	R6 No clasificable
R7 No hay razones	R7 No hay razones

PARTE II: las explicaciones dadas por los profesores para el análisis de los errores de los niños y de las propuestas de enseñanza realizadas se analizaron de manera inductiva, para crear un sistema de categorías que diera cuenta del uso que los profesores hacían de los conceptos vinculados con el sistema de numeración decimal (agrupamiento, valor posicional, cantidad) y estableciendo relaciones entre el conocimiento procedimental y el conceptual.

La descripción inicial de las respuestas fueron categorizadas en grupos que muestran las características de la comprensión de los profesores de las nociones relativas al sistema de numeración decimal, y las conexiones entre lo conceptual y lo procedimental.

Las categorías elaboradas fueron las siguientes:

DESCRIPCIÓN DE LAS CATEGORÍAS

- C1 No da explicaciones o no sabe.
- C2 La explicación presentada es confusa y los criterios de análisis expuestos no están claros.



- C3 Justificaciones apoyadas en criterios sintácticos (mecánicos).
- C4 Se utilizan explicaciones basadas en el reconocimiento del agrupamiento (unidades, decenas, centenas) sin que expliquen el uso dentro del algoritmo.
- C5 Se utilizan explicaciones basadas en el conocimiento del valor posicional (las casillas) sin que expliquen el uso dentro del algoritmo.
- C6 Se presenta una explicación que involucra valor posicional y teoría de agrupamiento, sin que ello demuestre comprensión de o sobre lo conceptual.

Entrevista

Proceso de elaboración: se realizaron dos (2) entrevistas usando la técnica de entrevista semiestructurada. En la primera, el objetivo consistió en buscar más comprensión de lo expuesto por el profesor desde lo escrito (en las razones o argumentos usados para diferenciar los problemas propuestos), así como indagar por el conocimiento del profesor en relación con los aspectos tratados, presentándole para ello otros tipos de problemas semejantes a los realizados por él, o problemas que aunque no fueron elaborados por él le sirvieran para tener más elementos de contrastación a la hora de dar diferencias.

La segunda entrevista tenía como objetivo buscar la *comprensión* que el sujeto tiene frente a los conceptos, sobre las operaciones aritméticas y los algoritmos presentados.

Para determinar algunas de las concepciones que tienen los maestros acerca de la aritmética básica, el método de "entrevista clínica" como técnica de investigación nos permitió establecer secuencias significativas de análisis a través de la misma planificación de las entrevistas, puesto que desde el principio de la recolección de la información se establecieron unos "elementos" –*contenido esperado*– que posteriormente, de manera consciente o inconsciente, se tiende a confirmar, tal como se ha observado en investigaciones como la de Erickson, 1986. Esto significa que parte de las estrategias utilizadas en las entrevistas buscan confirmar algún tipo de teoría inducida, o un determinado enfoque o modelo sobre el cual se pretende indagar.

Un propósito fundamental del trabajo consistió en estudiar el uso que hacen los profesores de los conceptos en cuestión, para explicar tanto las diferencias entre los problemas como las reglas involucradas en los algoritmos. Para ello

se utilizó el “análisis de contenido”, relacionando las respuestas con los datos obtenidos.

Algunos resultados

Análisis descriptivo: para realizar un análisis global de los enunciados de los problemas elaborados por los profesores se usaron los siguientes criterios:

1. Identificación del tipo de problema enunciado aritmético elaborado.
2. Identificación de la estructura semántica del problema verbal formulado.
3. Identificación de la estructura sintáctica del problema enunciado.
4. Evaluación de la precisión y la coherencia del enunciado.
5. Análisis de la correspondencia entre el enunciado elaborado y la estructura de la relación planteada.

- Criterio 1: características de los problemas aritméticos enunciados. Para este apartado se tuvo en cuenta que los profesores produjeran problemas de tipo verbal (247 problemas) en el cual se expresa una situación más o menos cercana a la descripción de un suceso de la vida real, o un problema de tipo numérico (41) en el cual se solicita al resolutor que realice un cálculo numérico entre las cantidades propuestas. Por otro lado, la categoría gráfico (14) corresponde al tipo de problemas que presenta una representación y solicita que mediante ella se encuentre la respuesta a la pregunta planteada.

- Criterio 2: la tabla 2 muestra el número total de los problemas elaborados de acuerdo con cada estructura analizada y con la clasificación realizada.

CATEGORÍAS ADITIVAS	TOTAL	CATEGORÍAS MULTIPLICATIVAS	TOTAL
Combinación	75 (55,55%)	Veces	12 (10,72%)
Cambio Aumentar	41 (30,37%)	Cada uno	94 (83,93%)
Cambio Disminuir	9 (6,66%)	Producto de medidas	6 (5,35%)
Comparación	10 (7,4%)		
TOTAL	135		112

Tabla 2

- **Criterio 3: Análisis de la sintaxis.** Para este apartado se tomaron no sólo problemas de enunciado verbal sino también gráfico y numérico; en el caso en que los profesores elaboraron problemas.

La mayoría de los profesores elaboraron problemas en los que se preguntaron por la incógnita I1, correspondiente al total de la operación. Esta situación pudo deberse a que la forma de presentar la sentencia canónica los haya inclinado a elaborar ese tipo de problemas, o a que en los tipos de problemas no incluyen los correspondientes a la sustracción (en el caso aditivo) y a la división (en el caso multiplicativo). Ello es importante en cuanto nos permite conjeturar acerca de la conceptualización que poseen los profesores sobre estructura aditiva o estructura multiplicativa, y es por ello que este aspecto será objeto de un análisis en las entrevistas.

- **Criterio 4: Análisis de la precisión y coherencia.**

Como enunciados imprecisos podemos presentar los siguientes ejemplos:

- En el enunciado hace falta la relación multiplicativa:

“Si doy 6 frutas a 3 niñas. ¿Cuántas frutas son?”

- En el enunciado hace falta la congruencia de las partes:

“Reparto en 6 cajas 18 huevos. ¿Cuántos huevos corresponden a cada caja?”

- En el enunciado hace falta una de las partes del todo:

“Luis Leonardo en un balde tiene 16 bolsas de leche; debe repartirlas entre la fila de José y la fila de Paola. ¿Cuántas bolsas reparte en cada fila?”

- Un enunciado incoherente propuesto por un profesor, fue :

“Por medio de varias canicas buscar una operación que no sea la multiplicación ni la suma y le dé el mismo resultado”.

Este tipo de problemas no se encontró en muchos casos pero se incluyó porque en la estructura multiplicativa la expresión de relación multiplicativa o la congruencia de las partes son muy importantes para obtener la estructura deseada.

- **Criterio 5:** de los problemas en los cuales no hay correspondencia entre el enunciado planteado y la relación que se pretende modelar encontramos ejemplos como los siguientes:

Para modelar $6 \times 3 = 18$

- 18 niños entran a estudiar y se retiran 6 a la mitad de año. ¿Cuántos niños quedan?

– ¿Cuánto le hace falta a $6 + 3$ para llegar a 18?

Para modelar $9 + 7 = 16$

– Tengo 16 bombones para repartirlos entre 9 niñas y 7 niños. ¿Cuántos bombones le corresponden a cada uno?

– Tengo 16 colombinas para repartir entre 9 niñas. ¿Cuántas colombinas le corresponden a cada una?

Como conclusiones parciales de este apartado podemos observar lo siguiente: la mayoría de los profesores redactó un problema verbal con lo que se infiere que ellos reconocen la tarea de producir problemas como elaborar “historias” o “tratar de proponer problemas relacionados de alguna manera con la vida cotidiana de los alumnos”, que es lo que nosotros denominamos problemas con enunciado de tipo verbal. Como un hecho atípico se encontraron profesores que pueden producir hasta dos enunciados verbales y luego producen enunciados numéricos o gráficos.

La preferencia que se encontró para los problemas de estructura aditiva fue la correspondiente a los problemas de combinación, y para los de estructura multiplicativa la de isomorfismo de medida en su subcategoría de cada uno; las demás categorías se presentan con menor frecuencia.

Una de las cuestiones que también se desprende de este análisis es la relativa a las categorías que aparecen con menor frecuencia. Ellas corresponden, para la estructura aditiva, las de cambio disminuir y comparación, para la estructura multiplicativa, las de veces, de producto de medidas y de expresión cuotitiva. Estas ausencias nos permiten señalar que en el programa de formación es necesario incluir el análisis de las categorías olvidadas o no tenidas en cuenta a la hora de elaborar problemas.

Al considerar la estructura sintáctica, se encontró que la mayoría de los profesores enuncia problemas preguntando por el total; pensamos que la causa de esto estaría en que las sentencias aritméticas planteadas poseen un orden intrínseco que ellos respetan a la hora de enunciar los problemas. Al realizar un análisis desde los conceptos seleccionados para esta investigación (estructura aditiva y estructura multiplicativa) podremos asegurar que la mayoría de los profesores no comprende la resta como una parte de la estructura aditiva, ni la división como parte de la estructura multiplicativa. Ello nos lleva a proponer que el cambio de la posición de la incógnita sea uno de los aspectos a tener en cuenta para la estructuración de las temáticas del programa de formación.



También se debe incluir, a fin de posibilitar la comprensión de la construcción de la estructura aditiva y/o multiplicativa, la relación existente de la suma con la resta y de la multiplicación con la división en la medida en que son partes de dos campos conceptuales “considerados como conjuntos de problemas que comportan operaciones aritméticas y nociones de tipo aditivo (tales como adición, sustracción, diferencia, intervalo, traslación) o de tipo multiplicativo (como multiplicación, división, fracción, razón, semejanza)” (Vergnaud. 1983, p. 482) .

Las razones expuestas

En lo relativo a la caracterización de las razones expuestas por los profesores, podemos observar que las de tipo 1 se presentan con mayor frecuencia (23,7% y 20,34%) tanto en la estructura aditiva como en la multiplicativa. Para la estructura aditiva le siguen en frecuencia las razones expuestas desde la diferencia “radica en los enunciados”, seguido de las razones “por el lugar de la incógnita”. Para lo multiplicativo aparecen con mayor frecuencia las de “el enunciado”, seguida de “no clasificable”.



ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

Las cuatro operaciones

Para caracterizar las concepciones sobre las cuatro operaciones y los modos de representación usados por los profesores para dotar de significado a dichas operaciones, con relación a estos supuestos se realizaron las indagaciones correspondientes y encontramos que, tal como lo afirma Fischbein, los profesores usan los modos “primitivos” de conceptualización que se describen en las siguientes unidades de información.

La naturaleza de las operaciones aritméticas se identifica a través de la siguiente idea primitiva:

Las operaciones aritméticas son relaciones estáticas que relacionan elementos simultáneos de la realidad. Esta idea primitiva se expresa en cada una de las operaciones aritméticas, y para ejemplificar este tipo de análisis presentamos dos casos:

La suma: caso de Yudy

Sumar es unir y el modo de representación asociado es un conjunto, con dos subconjuntos disyuntos, para hallar el total la estrategia se basa en el conteo de elementos que componen un conjunto.

- Problema de comparación:

“Hay 9 lápices rojos; si hay 7 lápices amarillos más que rojos, ¿cuántos lápices amarillos hay en total?”

Explica: “Se suman los 9 colores rojos y los 7 amarillos”, para representarlo dibuja un conjunto con los 9 colores rojos y le añade los otros 7 y al final cuenta el total de colores.

Yudy usa el modelo de unir conjuntos, sin interesarle que en los problemas de cambio haya una cantidad inicial que se transforma, y que además la acción se hace sobre los dos colores. En los problemas de comparación igualmente al considerarlo como relativo a una unión de conjuntos disyuntos, pierde una clase, la de los lápices rojos, quedándose así sin una de las cantidades a comparar.

La división: caso Manuel

El modelo explícito de división es el de reparto, usando para su representación un grupo que representa el todo y por repartición se dan los elementos del conjunto a cada uno de los subconjuntos a formar. Para este caso, usa estrategias basadas en el conteo (entregando de a uno) y en pocas ocasiones quitando grupos de mayor cantidad (de a 2 o de a 3, etc.).

- Ante el problema: “Hay un grupo de 6 niños y entre todos juntan 18 pesos. ¿Cuánto ahorra cada niño, si se supone que cada uno aporta lo mismo?”

- Para resolverlo, Manuela dice: “Hay que aplicar la división. Si se supone que dan lo mismo, tomo los 18 y le doy uno a cada niño y me quedan 12, vuelvo y le reparto uno a cada niño y quedan 6 para darle uno a cada niño, o sea que a cada niño le doy tres”.

Para representarlo, dibuja a los 6 niños y va dibujando un billete debajo de cada uno, hasta que “se le acaban los billetes”.

Tanto para los problemas de tipo multiplicativo como para los de división, el modo de razonar (sumas repetidas o reparto repetitivo) permite que los profesores desconozcan la función de las cantidades (intensivas o extensivas) dentro de los problemas. Por ello, la cantidad intensiva es considerada como el número de veces que se suma un grupo y hacen las sumas correspondientes

sobre la cantidad extensiva. Para la división, el asumir estrategias de tipo de resta les permite olvidar las medidas involucradas en las cantidades y hacer repartos en grupos de “a tantos”.

Los algoritmos

Para la entrevistas de tipo II se tomaron como base las repuestas dadas en cuanto referían a los conceptos involucrados en el sistema de numeración decimal, los cuales se encuentran implícitos en los algoritmos de la suma, la resta, la multiplicación y la división.

Luego de realizar el análisis descriptivo de las repuestas obtenidas, para cada uno de los casos presentados (suma, resta, multiplicación, división) se determinaron, de acuerdo con el tipo de respuestas obtenidas, varios niveles para reagrupar a los profesores. Dichos niveles fueron:

- N1 Todas las explicaciones se basan en razonamientos de tipo sintáctico.
- N2 En alguna de las explicaciones usa en concepto de agrupamiento.
- N3 En alguna de las explicaciones usa en concepto de valor posicional.
- N4 En alguna de las explicaciones usa en conceptos de agrupamiento y valor posicional.

Sólo se entrevistaron tres profesores que estaban clasificados en N1, N2 y N3 (seleccionados al azar).

Del análisis de contenido, usando las repuestas dadas a la parte II del cuestionario, se puede deducir que existen dos formas predominantes de razonamiento entre los profesores del estudio. Éstos son los razonamientos centrados en lo sintáctico y aquellos que muestran una vinculación no muy elaborada –pero sí presente– entre lo conceptual y lo procedimental.

Explicaciones basadas en razonamientos sintácticos

Caso Ana

Con relación al valor posicional o relativo de las cifras se menciona lo que denominamos casillas, que en nuestro medio corresponden a gráficos como el siguiente:

CENTENAS	DECENAS	UNIDADES
2	5	4



para señalar que hay 2 centenas, 5 decenas y 4 unidades. Este tipo de razonamiento se encuentra en explicaciones como las siguientes:

“En cuanto a la posición es el sitio que ocupa cada número, la ubicación en forma vertical uno debajo del otro, de acuerdo con la cantidad de dígitos. En las casillas se pone un número, cuando se tiene 10 se pone un 0 y se pasa el 1 a la casilla de las decenas... y lo mismo si se pasa de 99, se pasa un 1 a la casilla de las centenas... cuando uno va a ubicar un número en las casillas se les dice que solamente un número puede ir en cada casilla”.

En lo concerniente al *agrupamiento* se usa la conformación de grupos para darle los nombres a las casillas y para encontrar las unidades, decenas y centenas en cada número:

“Generalmente uno trabaja con el niño que las unidades son hasta 9, cuando se completa un 10 se coloca 1 en las decenas. Cuando ya tenemos por ejemplo el número 99, ¿cuántos grupos de 10 podemos hacer? 9, pero cuando por ejemplo tenemos 100 ¿entonces qué pasa?, no podemos colocar el 100 o sea hay dos casillas pero ahí hay 3 números, ¿entonces qué hacemos?, explicamos que las centenas son grupos de 100 elementos, entonces ¿qué pasa?, ¿cuántos grupos de 100 hay? Hay un solo grupo de 100 y lo completamos entonces con los dos ceros... esos ceros serían que hay 10 decenas, o sea una centena son 100 unidades, ahora si vamos a hacer con los 100 elementos grupos de a 10 ¿cuántos grupos podemos hacer?, salen 10 grupos de a 10, y si vamos a contar uno por uno, ¿cuántos unidades hay?, pues hay 100”.

A pesar de que parece entender la teoría de agrupamiento en lo relativo a la composición y descomposición de unidades de orden superior en unidades de orden inferior, o viceversa, este conocimiento no se pone de manifiesto. Cuando explica por qué en cada casilla sólo va un número, dice:

“Bueno así... o sea.. por lo menos es lo que a mí me enseñaron”.

Un hecho importante de resaltar es *el valor asignado al cero*, en cuanto el cero es un dígito importante en todo sistema de valor posicional, y por lo tanto en la escritura decimal de los números. Así, puede verse que el valor que Ana asigna al cero cuando se refiere a los ceros en el número 7.004, dice:

“El cero no tiene nada, pero como está en la casilla de las centenas el cero es un grupo de 100, el cero ocupa el grupo de 100... el cero le prestó al otro...”

Este tipo de explicación muestra la confusión al asignarle al cero valor dentro de las casillas, según la posición que ocupe, pero al mismo tiempo reconoce que el cero no tiene valor. Ana manifiesta su desconocimiento sobre el valor del cero como numeral que ocupa un lugar en una cifra (representada en el sistema decimal) que significa la ausencia de unidades de ese orden.

Analizado las explicaciones del algoritmo de la suma en lo relativo al uso que hace de estos conceptos (valor posicional y agrupamiento) es consistente con el tipo de conceptos expresados, cuando al explicar el error del niño, dice :

“Primero la ubicación pues el niño sí la hizo o sea tiene en cuenta la posición del número o sea uno debajo del otro, unidades, decenas y centenas, ... el niño suma bien $9+1$ da 10, pero al colocar el número el niño no sabe que ahí no se pueden colocar dos números en la misma casilla. Entonces es cuando yo... le digo: ¿cuántas decenas hay?, hay una decena y se coloca el cero y la decena en la casilla de decenas...”

Al dar explicaciones para el algoritmo de la multiplicación en lo que respecta a la explicación del desarrollo de la multiplicación, muestra conocer las reglas sin que para ello use el valor posicional y el producto de las diferentes unidades de orden involucradas en los números.

“Empezamos a multiplicar por las unidades, o sea porque primero se va a trabajar con las unidades y se ubica en la parte de las unidades, luego con las decenas y se ubica en la parte de las decenas o sea en el segundo lugar de las casillas, o sea ¿por qué se empieza por las unidades?, la razón no se la puedo dar...”

En relación con la teoría del agrupamiento implícita en el algoritmo de la multiplicación, en lo que se refiere a la multiplicación de un número de dos cifras por otro de tres (como es el ejemplo que se puso), es manifiesto el poco uso de dicha teoría.

Al explicar el algoritmo de la división, pierde el valor posicional y todo lo convierte a unidades.

E: Este 70 son centenas y el 23 son unidades, luego cuando tienes que 23 entre 70 da 1 y queda 1, ese uno que queda ¿qué son unidades, decenas, centenas?

A: Como 23×3 son 69 y $70 - 69$ son 6 decenas y me sobra 1, entonces ese 1 es unidad.

E: Estos 12 ¿qué son?

A: Unidades

E: ¿Siempre se convierten en unidades?

A: Sí

Podemos concluir que en este caso se presenta un razonamiento de tipo sintáctico en la medida en que sus razonamientos se basan en criterios desvinculados de los conceptos involucrados, con lo cual se presenta un conocimiento de tipo memorístico y repetitivo de unas reglas que “funcionan”. Sus explicaciones son de tipo “intuitivo” o provienen de la experiencia no reflexiva en el sentido de que tanto su enseñanza como su aprendizaje han sido “así”.

“Es que así es, porque así me lo enseñaron”.

Explicaciones basadas en razonamientos en los cuales se vincula el conocimiento conceptual con el procedimental, de tal manera que los conceptos matemáticos de valor posicional y agrupamiento entran a explicar los algoritmos.

Caso Lucy

En lo que se refiere al valor posicional, Lucy manifiesta su conocimiento y uso de este concepto cuando reconoce que existen unidades de diferente orden.

“El sistema de numeración siempre se ha formado de derecha a izquierda, siempre de menor a mayor... los niños saben que es imposible que 18 sea al contrario (81). Ellos dicen: “Por ahí no empieza” y “eso no es así”...

Para la *teoría del agrupamiento*, Lucy refleja un conocimiento de lo que significan las relaciones entre las unidades de diferente orden, aunque no manifiesta conocer los procedimientos multiplicativos que existen en la construcción de los números; no hace referencia a la base 10 ni a las potencias de dicha base.

“Cuando se habla de unidades, decenas y centenas los niños generalmente empiezan por 10 unidades que son iguales a una decena... cuando pasan a unir 10 decenas se forma una centena y ellos van ubicando en la tabla de las casillas unidades, decenas y centenas”.

También hace referencia al desagrupamiento, hablando para ello de la “reversa”.

“... Se cambia una decena en 10 unidades...”

Para la *explicación del uso del cero* como parte integrante de un número, manifiesta su conocimiento acerca del valor del cero cuando inicia una cifra como diferente al valor del cero, cuando es el valor de unidades intermedias de un número dado.

“E: En 004 ¿cuánto vale el 0?

L: El cero a la izquierda no vale nada.

E: ¿Y en 7004?

L: Ahí sí vale el cero, porque no está a la izquierda de ninguna cantidad sino en medio. Entonces ahí el cero tiene un valor”.

En relación con las explicaciones sobre el algoritmo de la suma, Lucy, conociendo la teoría del agrupamiento en lo relativo a los valores que toman las unidades de orden superior, la utiliza para saber cómo se conforma una decena, pero su razonamiento conceptual incluye cuestiones de tipo mecánico, como el uso de las “casillas”, para indicar la posición de los numerales que conforman el número que resulta de la suma:

“... Le diría que $9 + 1 = 10$, y que 10 unidades = 1 decena, y lo colocaría dentro de la casilla... Para esta explicación utilizaría el ábaco para cambiar las 10 unidades por una decena, y así sucesivamente...”

En las explicaciones sobre la resta, Lucy manifiesta un claro conocimiento de los desagrupamientos entre las unidades (sucesivas) de orden superior a orden inferior (en grupos de 10) y lo pone en juego cuando habla de prestar.

“Conseguimos prestado de alguien, las decenas no tienen, cero, las centenas tampoco entonces el 7 mil presta una unidad, nos presta 10 centenas. Ésta presta una a las decenas y quedan 9 centenas y las 10 decenas prestan una decena a las unidades y quedan 9 decenas entonces la decena que son 10 unidades más 4 son 14”.

En la explicación sobre la multiplicación y la razón por la cual se “corre” una cifra a la izquierda, Lucy manifiesta claramente una posición ambigua frente al uso de lo conceptual en relación con el producto entre unidades de diferente orden, porque aunque sabe por qué se corre una cifra a la izquierda, sin embargo lo justifica desde su aprendizaje.

“... Generalmente al niño se le dice que debe correr un lugar hacia la izquierda... es lo que uno aprendió y todavía se maneja... porque éste es el resultado de las decenas. Se coloca iniciando debajo de las decenas... es como multiplicar por 50 unidades y no es necesario colocar el 0”.

(Este comentario hace relación a los números 36 200 en la multiplicación, colocamos el cero en negrilla para indicar el cero al cual ella se refiere como no necesario).

$$\begin{array}{r}
 7 2 4 \\
 5 3 \\
 \hline
 2 1 7 2 \\
 \hline
 36 2 0 \mathbf{0}
 \end{array}$$

En cuanto a la división, Lucy muestra el escaso uso de los conceptos y se traslada a un razonamiento de tipo procedimental, en donde se le pierde el valor de las unidades de orden superior y las conversiones entre ellas.

L: "... Si se toman 23 como unidades, también se toman 70 como unidades".

E: "O sea que 70 centenas ¿dejan de ser centenas para convertirse en 70 unidades?"

L: "Pues sí... en esto no había pensado, no me había hecho esa pregunta, no sabría decir... en este momento sí se convierten en unidades simples para realizar la división, porque es una división más grande..."

Con relación al cero del cociente muestra su conocimiento de que ese debe ser una decena:

"Tiene que ser otro valor, o sea pienso que depende del resultado, debe ser como una decena".

Al terminar la división dice:

"¡El cero aquí es de decenas!"

Como una conclusión parcial de este apartado podríamos decir que los profesores del estudio manifiestan un tipo de razonamiento muy proclive a la ausencia del conocimiento de los conceptos de valor posicional, teoría de agrupamiento y sistema de numeración, a la vez que las explicaciones sobre los algoritmos demuestran el desconocimiento de "por qué funcionan". Parece ser que, algunos con mayor éxito que otros, usan los conceptos mencionados sin que parezca explícito su reconocimiento de la existencia de ellos como conceptos matemáticos importantes.



CONCLUSIONES

Sin pretender generalizar respecto a la población de profesores de la básica primaria, este trabajo sí permite conocer algunas tendencias y características del conocimiento de contenido pedagógico que los mismos poseen, conocimiento que puede ser usado para prever elementos básicos a tener en cuenta a la hora de diseñar los programas de formación permanente. De cualquier forma, ampliar nuestro conocimiento sobre las características de las concepciones que el grupo de profesores posee sobre los temas abordados



constituye, para nosotros, como formadores de profesores, un objetivo importante que motiva el desarrollo de este tipo de investigaciones.

En lo relativo al tipo de problemas planteados por los profesores, es notoria la mayor capacidad para elaborarlos (en relación con la variedad de los contenidos de los mismos) de tipo aditivo y multiplicativo. Siendo también muy relevante que la inmensa mayoría de los profesores planteó problemas con enunciados coherentes, lo que desde nuestro punto de vista constituye una fortaleza de ellos ya que nos muestra que su concepción de problema se relaciona con situaciones que representan “hechos reales” y no simplemente con tipos de ejercicios sin sentido ni significado.

Cabe anotar también, que la variedad de problemas que los profesores pueden resolver no se corresponde con su capacidad para dar razones referentes a las diferencias presentes en cada uno de ellos. Esto nos permite asegurar que es necesario incluir en un programa de formación este tipo de conocimiento, acerca de las diferentes clasificaciones y análisis de los problemas, puesto que creemos que eleva la capacidad de razonamiento pedagógico y didáctico del profesor, a la vez que le permite entender los elementos conceptuales involucrados en el pensamiento numérico.

Tal como se muestra en el análisis realizado, los profesores plantean problemas en los que la incógnita varía de posición, y algunos de ellos muestran un conocimiento que relaciona la adición con la sustracción y la multiplicación con la división. También en esto existe una baja comprensión de lo que constituye la red conceptual que abarca lo que se denomina estructura aditiva y estructura multiplicativa, aunque algunos profesores parecen identificar las operaciones suma y resta (multiplicación y división), como componentes de una misma estructura cognitiva, siendo probable que las creencias arraigadas acerca de la relación inversa entre las operaciones aritméticas, producto de la enseñanza actual de las matemáticas formales, no les posibilite el análisis y el uso sobre las relaciones cognitivas de las estructuras mencionadas.

En la parte relativa al conocimiento de los algoritmos, también es muy notoria la baja comprensión conceptual explicitada por los profesores del estudio. Aunque se manejen los procesos involucrados, las explicaciones acerca de los conocimientos matemáticos involucrados en ellos es casi nula. Por esto concluimos que es un tipo de conocimiento que debe estar en un programa de formación, porque al ser temas que involucran el trabajo de los niños de primaria durante casi toda la escolaridad, es necesario que el profesor conozca los conceptos involucrados –valor posicional y agrupamiento– y sus relaciones con lo que constituye el pensamiento aditivo y multiplicativo, en



relación con que nuestro sistema de numeración involucra razonamientos de tipo aditivo (al descomponer el valor del número en unidades simples o de un mismo orden) y razonamientos de tipo multiplicativo (cuando con unidades de un tipo hace unidades de un orden siguiente o para desagrupar). De la misma manera, al explicar la escritura polinómica se involucran tanto razonamientos de tipo aditivo como multiplicativo, al tener en cuenta la base y sus potencias para describir los órdenes y las relaciones entre ellos.

Con relación al primer objetivo, “Caracterizar las concepciones del grupo de profesores que intervienen en este estudio, acerca de las operaciones aritméticas: suma, resta, multiplicación y división”, hemos encontrado que las ideas subyacentes a las explicaciones dadas corresponden a lo que denominamos razonamiento de tipo estático (relaciones entre elementos simultáneos de la realidad) en la medida en que para su conceptualización utilizan el modelo de conjuntos disyuntos. A continuación se hace una breve descripción de estos conceptos para cada una de las operaciones:

La suma es *unir* y la resta *quitar*, correspondiente con un modelo de representación que utiliza un conjunto total compuesto de dos subconjuntos disyuntos. Las estrategias de solución están basadas en el conteo que puede corresponder a las operaciones de unión (diferencia) de conjuntos.

La multiplicación se corresponde con la idea de *suma repetida* de sumandos iguales y la división con la idea de *reparto* de una cantidad que representa un todo que será dividido en partes iguales. Las estrategias de solución se sustentan en esquemas de conteo actuando sobre colecciones totales o sobre algunas de sus partes. Por ejemplo, se toma cada conjunto como un todo a contar, o como un todo previamente contado, información que al reunirlos puede o no tenerse en cuenta dado que, muchas veces, proceden por conteo a partir de uno, para desde allí realizar las uniones de conjuntos y hacer la suma total. Lo mismo sucede con la división, se usa la estrategia de resta, de grupos de un mismo número de elementos, y luego por conteo (quitar) se soluciona el problema.

Unido a estas concepciones encontramos que las estrategias de enseñanza usadas corresponden a las secuencias en las que las operaciones se conciben, para aprender a restar es necesario saber sumar; para presentar el producto como sumas reiteradas es indispensable tener un buen manejo de la suma; para aprender a dividir es necesario saber restar. En procesos más avanzados se presenta la multiplicación usando las tablas y los algoritmos de división que incluyen las operaciones suma, resta y multiplicación. Esta forma de actuación didáctica es uno de los aspectos que se espera cuestionar en un programa de formación que pretenda que los maestros construyan referentes



teóricos (matemáticos y didácticos) explícitos, que orienten su labor profesional.

En cuanto al objetivo 2, “Describir los tipos de argumentos que utilizan para justificar los procedimientos algorítmicos involucrados en las cuatro operaciones aritméticas”, podemos decir que la mayoría de los profesores presenta un desconocimiento de los conceptos de valor posicional y agrupamiento, lo que hace que sus explicaciones se basen en razonamientos de tipo sintáctico, convierten en un buen mecanismo para “enseñar” los algoritmos de las cuatro operaciones, pero a su vez, desde nuestro punto de vista, son un obstáculo para que ellos asuman nuevas perspectivas de enseñanza en la cual la construcción de lo conceptual y lo significativo se conviertan, a nivel de primaria en los propósitos de la enseñanza de las matemáticas escolares.

El objetivo 3, “Analizar las relaciones entre la comprensión de diferentes aspectos relativos a las nociones aritméticas en cuestión y el uso de los modos de representación que pueden utilizar”, como ya lo dijimos en el apartado correspondiente al objetivo 1, las representaciones utilizadas son muy escasas y esto es, desde lo que concebimos como el conocimiento de contenido pedagógico, uno de los conocimientos que los profesores deben poseer, puesto que para elaborar secuencias de enseñanza que pretendan un aprendizaje significativo, los diferentes modos de representar conceptos se constituyen en herramientas útiles y necesarias para dotar de significado a los conceptos estudiados. En particular, para los conceptos abordados en este trabajo se requiere que el profesor comprenda las diferentes clasificaciones de los problemas aritméticos elementales, en la medida en que le permite abordar diferentes situaciones que, al ser analizadas desde el contexto, dan sentido a los números que aparecen en ellas. En cuanto a los algoritmos podemos decir que el uso de otros modos de conceptualización le permitirá usar, por ejemplo, instrumentos didácticos como el ábaco o las regletas que posibilitan la construcción de los diferentes sistemas de numeración, en particular el sistema de numeración decimal.



BIBLIOGRAFÍA

BLANCO, L. (1996). “Aprender a enseñar matemáticas: Tipos de Conocimiento”. En J. GIMÉNEZ, S. LLINARES y V. SÁNCHEZ (Eds.) *El Proceso de Llegar a ser un profesor de Primaria. Cuestiones desde la educación matemática*. Colección Mathema. Comares. Granada.

CARPENTER T, FENNEMA E. , PETERSON P y CAREY D. (1988). "Theachers pedagogical content knowledge of estudents problem solving in elementary arithmetic". in: Journal for Research *Mathematics Education*.

CASTRO E. , RICO, L. y CASTRO, E. (1995). *Estructuras aritméticas elementales y su modelización*. una empresa docente - Grupo Editorial Iberoamérica. Bogotá.

DICKSON, L. BROWN, M y GIBSON, O.(1991) *El aprendizaje de las matemáticas*. Labor. M.E.C. Madrid.

GREER, B. "Mulltiplication and division as models of situations". En Grouws, D. (1992) (Eds.) *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. Macmillan.

LLINARES, S. y SÁNCHEZ, V. (Eds.) *Teoría y práctica en educación matemática*. Alfar. Madrid.

LLINARES, S. (1991). "La naturaleza de la comprensión de las nociones matemáticas. Variable en la formación de profesores de matemáticas". En C. Marcelo y otros (Eds). *El estudio de casos en la formación del profesorado y la investigación didáctica*. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Sevilla.

LLINARES, S. (1993). "Aprender a enseñar matemáticas. Conocimiento de contenido pedagógico y entornos de aprendizaje". En: L. Montero y J.M.Vez (eds.) *Las didácticas específicas en la formación del profesorado*. Tórculo Ediciones. Santiago.

LLINARES, S. , SÁNCHEZ, V. y GARCÍA, M. (1994). "Conocimiento de contenido pedagógico del profesor. Tareas y modos de representación para las fracciones". *Revista de Educación* No. 304. Centro de Publicaciones del Ministerio de Educación y Ciencia. Madrid.

LLINARES, S. "Conocimiento profesional del profesor de matemáticas: conocimiento, creencias y contexto en relación a la noción de función". Mimeo. Conferencia presentada en el IV Encontro de Investigaçao em Educaçao Matemática. Luso, Portugal, 27-29 de abril de 1995.

LLINARES, S. (1996). "Contextos y aprender a enseñar matemáticas: El caso de los estudiantes para profesores de primaria". En: J. GIMÉNEZ, S. LLINARES y V. SÁNCHEZ (Eds.) *El Proceso de llegar a ser un profesor de Primaria. Cuestiones desde la educación matemática*. Colección Mathema. Comares. Granada.

LLINARES, S y SÁNCHEZ, V. (1996). "Comprensión de las nociones matemáticas y modos de representación. El caso de los números racionales en estudiantes para profesores de primaria". En: J. GIMÉNEZ, S. LLINARES y V. SÁNCHEZ (Eds.) *El*

Proceso de llegar a ser un profesor de Primaria. Cuestiones desde la educación matemática. Colección Mathema. Comares. Granada.

National Council of Teachers of Mathematics (1989). Professionals standards for teaching mathematics. NCTM. Reston.

PUIG, L. y Cerdán, F. (1995). *Problemas aritméticos escolares.* Editorial Síntesis. Madrid.

VERGNAUD, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad.* México. Trillas.

ENSEÑANZA CONSTRUCTIVISTA, CONOCIMIENTO DIDÁCTICO DEL PROFESOR Y ANÁLISIS DIDÁCTICO EN MATEMÁTICAS*

El caso de la función cuadrática

Pedro Gómez
Cristina Carulla¹

Si el profesor de matemáticas asume una posición constructivista del aprendizaje, entonces se enfrenta a varios interrogantes: ¿cómo debe ser mi enseñanza?; ¿qué conocimientos debo tener para poder diseñar, llevar a la práctica y evaluar actividades de clase?; ¿qué tipos de análisis debo hacer para lograrlo? En este capítulo abordamos algunos de estos interrogantes al reflexionar sobre el conocimiento didáctico del profesor de matemáticas y mostrar el papel del análisis didáctico en el diseño, puesta en práctica y evaluación de actividades de clase. En particular, profundizamos en el papel que pueden jugar las nociones de estructura conceptual, sistema de representación y mapa conceptual como herramientas conceptuales y metodológicas para la práctica docente del profesor de matemáticas.

Los profesores de matemáticas nos enfrentamos diariamente a problemas complejos dentro de nuestra aula de clase. Estos problemas parecen ser problemas de enseñanza o de contenido. Pero, en realidad, casi siempre son de aprendizaje. Nos referimos a los problemas relacionados con lograr que nuestros estudiantes construyan, de la mejor manera posible, su conocimiento matemático. En algunos casos, nos cuesta trabajo comprender por qué algunos de nuestros estudiantes no pueden avanzar en la construcción de su conocimiento. Y en muchas ocasiones (con o sin razón) tendemos a culpar a los estudiantes de esta situación, al afirmar que vienen mal preparados o que no tienen la actitud apropiada hacia las matemáticas. Pero, ¿qué podemos hacer nosotros, como profesores de matemáticas, para apoyar a nuestros estudiantes para que avancen en su formación matemática?

Un primer paso consiste en convencernos a nosotros mismos de que el centro de nuestra preocupación debe ser el aprendizaje. Lo que nos debe preocupar

* Esta investigación participó en la convocatoria 01-98. El informe final se encuentra en el Centro de Documentación del IDEP.

¹ Universidad de los Andes, "una empresa docente" pgomez@valnet.es – mcarulla@uniandes.edu.co

es la calidad de la formación matemática que nuestros estudiantes están logrando gracias a nosotros. Y, para poder preocuparnos por el aprendizaje, debemos intentar comprender, en la medida de nuestras posibilidades, la problemática de la comprensión en matemáticas. ¿Qué significa comprender matemáticas? Ésta es una pregunta muy compleja que podríamos responder de manera sencilla: comprender matemáticas significa ser capaz de resolver problemas en los que las matemáticas están involucradas. De esta manera, podemos reformular nuestro problema al preguntarnos ¿por qué nuestros estudiantes no son capaces de resolver un problema dado?

Existe una respuesta sencilla a esta pregunta: un estudiante no puede resolver un problema porque el conocimiento que tiene no es “suficiente” para permiti-tírselo. Usamos aquí un significado amplio del término “conocimiento”. No obstante, nuestra tesis consiste en que buena parte de los problemas que nosotros, como profesores de matemáticas, enfrentamos en nuestra aula de clase, tienen que ver con nuestra capacidad para conocer y comprender el conocimiento matemático de nuestros estudiantes. Esta capacidad nos debe permitir comprender por qué nuestros estudiantes no son capaces de resolver un problema. Adicionalmente, ella nos debe dar luces para diseñar las estrategias con las cuales podremos apoyar a nuestros estudiantes para que ellos avancen en la construcción de su conocimiento matemático y puedan llegar a resolver los problemas que antes eran insolubles para ellos.

La comprensión en matemáticas depende directamente de las matemáticas mismas. Aunque hay facetas de la formación matemática del estudiante y de sus actitudes hacia las matemáticas que pueden ser comunes a otras áreas del conocimiento, nos preocupamos aquí por aquellos aspectos de la comprensión en matemáticas que están directamente relacionados con las matemáticas mismas. Por esa razón, consideramos que el desarrollo de nuestra capacidad para comprender el conocimiento matemático de nuestros estudiantes depende de nuestra comprensión y nuestro conocimiento de las matemáticas escolares. En otras palabras, consideramos que, para poder resolver los problemas a los que nos enfrentamos en el aula de clase, debemos conocer en detalle la estructura y las principales características del conocimiento matemático que esperamos que nuestros estudiantes construyan. Aunque, al ser profesores de matemáticas, podemos considerar que conocemos suficientemente el tema que enseñamos, es posible que esto no sea cierto. Podemos ser buenos matemáticos, en el sentido de conocer algunos temas con profundidad desde la perspectiva del saber matemático. Pero, ¿conocemos estos temas desde la perspectiva de las matemáticas de la escuela y de nuestros estudiantes?



Las preguntas anteriores y nuestras propias respuestas nos han llevado a identificar diferentes elementos de la realidad escolar, y en particular del trabajo en el salón de clase de matemáticas. Pensamos que existe una complejidad en medio de la cual el profesor de matemáticas vive y de la cual no es consciente. Realizamos un proyecto de investigación con el cual pretendíamos contrastar una hipótesis que surgió a lo largo de la realización de varios programas de formación permanente de profesores. Nosotros percibimos en estos programas que, cuando los profesores se enfrentan al problema de analizar un concepto matemático desde la perspectiva del análisis didáctico (análisis de contenido, análisis de instrucción y análisis cognitivo) con la ayuda de los sistemas de representación como eje organizador y los mapas conceptuales como herramienta de representación, entonces los profesores se hacen paulatinamente más conscientes de la complejidad del contenido matemático y de la problemática de su enseñanza y aprendizaje.

En el estudio se exploraron las concepciones de algunos profesores de matemáticas de secundaria acerca de la función cuadrática con base en una serie de mapas conceptuales que ellos, organizados por grupos, produjeron con motivo de un esquema de interacción que involucró tres tipos de análisis: de contenido, de instrucción y cognitivo. Los sistemas de representación fueron el eje organizador de estos mapas conceptuales que fueron codificados con base en una serie de atributos que pretendían identificar aquello que el profesor reconoce como esencial del objeto, el tipo de representaciones que él utiliza para abordar el objeto y el conjunto de situaciones, fenómenos y problemas que él asocia con el objeto. El análisis de los resultados se hizo con base en una caracterización de los mapas conceptuales y muestra que la utilización de los sistemas de representación, los mapas conceptuales y el análisis didáctico, junto con un esquema de trabajo en grupo, en el que se interactúa con investigadores y en el que se contrastan las producciones socialmente, puede afectar las visiones de los profesores sobre el contenido matemático.

En este capítulo reflexionamos sobre la importancia de las nociones de estructura conceptual, sistema de representación y mapa conceptual como componentes del conocimiento didáctico del profesor de matemáticas y como herramientas para la formación permanente de docentes y la investigación. El proyecto de investigación nos permitió ahondar aún más en el conocimiento de las mismas, y lo que presentaremos es una elaboración teórica que surgió durante y después de la realización de la investigación. Creemos que estas herramientas pueden aportar a una mayor comprensión de las matemáticas escolares y a la construcción de estrategias para abordar los



problemas de aprendizaje a los que el maestro se enfrenta en la clase de matemáticas.

El documento comienza con una descripción de la investigación sobre el conocimiento del profesor y de la preocupación sobre cómo debería ser la enseñanza si se construyera sobre una visión constructivista del aprendizaje. Se discute el modelo de Simon (1995) en este sentido y se propone uno nuevo, que lo extiende. Se describe este nuevo modelo con base en la noción de análisis didáctico y se profundiza en dos aspectos centrales de la misma: la estructura conceptual y los sistemas de representación. Tomando como ejemplo el concepto de función cuadrática se muestra la manera como estas nociones, junto con la idea de mapa conceptual, permiten describir la estructura conceptual del concepto matemático con el propósito de diseñar actividades de clase.

Investigación sobre conocimiento del profesor y enseñanza constructivista

La investigación sobre el conocimiento del profesor y su relación con la enseñanza de las matemáticas² ha pasado por tres fases (Ball, 1991; Cooney, 1994). En la primera, llamada “de la enseñanza eficiente”, se buscó identificar, con base en las opiniones de los alumnos, las características de los buenos profesores. Se identificaron principalmente las relacionadas con su personalidad. Al tratar de validar estos resultados con el rendimiento de los estudiantes, se entró en una segunda fase, en la que se buscó relacionar las características del profesor con el aprendizaje de sus alumnos y se encontró, entre otras cosas, que el conocimiento matemático del profesor (medido, por ejemplo, con el número de cursos que ha tomado o títulos que ha obtenido) no es un buen indicador del rendimiento de los alumnos. En la tercera fase, llamada “del pensamiento del profesor”, se parte del supuesto de que lo que el profesor hace en el aula depende de lo que él sabe y piensa. La reflexión se libera entonces de las ideas anteriores que enfatizaban el conocimiento puramente matemático conjuntamente con el conocimiento de algunos aspectos generales de pedagogía.

Cooney (1994) reconoce esta situación y se hace dos preguntas: “¿Qué tipos de conocimientos necesitan los profesores para ser eficientes? ¿Qué tipos de experiencias deben vivir los profesores para construir ese conocimiento?” (p. 608); promueve la formación de profesores como un campo de indagación

² Lo que se presenta en los siguientes dos apartados es una adaptación de Gómez (2001).

sistemática que se está basando en la importancia de la cognición, el contexto y el paradigma constructivista; considera que se estaban produciendo numerosos relatos de teorías locales de profesores, pero no se estaba pasando de lo local a lo general. “¿Qué perspectivas teóricas nos pueden permitir comprender las experiencias que viven los profesores? ¿Qué perspectivas teóricas nos pueden permitir desarrollar programas de investigación y desarrollo que empujen nuestros esfuerzos hacia adelante?” (pp. 627-628). Por otro lado, al preguntarse acerca de los tipos de experiencias que los profesores deben vivir para construir ese conocimiento necesario para ser eficientes, y al reconocer la importancia del paradigma constructivista, Cooney pone de relieve la necesidad de ver al profesor como un agente cognitivo y la necesidad de conceptualizar los procesos mediante los cuales el profesor construye su conocimiento.

Éstos son los dos puntos que recoge Simon (1995): la enseñanza basada en los principios constructivistas y el profesor como agente cognitivo. El propósito de Simon es el de “contribuir al diálogo acerca de cómo sería la enseñanza si se construyera sobre una visión constructivista del desarrollo del conocimiento” (p. 115). De hecho, Simon propone, en términos de Steffe y d’Ambrosio (1995), un modelo de enseñanza con esas características. En este modelo, la enseñanza, desde la perspectiva del profesor, está guiada por la trayectoria hipotética de aprendizaje que consiste en la predicción que el profesor tiene acerca del camino por el cual puede proceder el aprendizaje. “Una trayectoria hipotética de aprendizaje le da al profesor criterios para seleccionar un diseño instruccional particular; por lo tanto, yo tomo mis decisiones de enseñanza basado en mi mejor conjetura acerca de cómo va a proceder el aprendizaje” (p. 135). La trayectoria hipotética de aprendizaje tiene tres componentes, relacionados entre sí: la visión que el profesor tiene del objetivo de aprendizaje, la planificación del profesor para las actividades de aprendizaje y las hipótesis del profesor acerca del proceso de aprendizaje. El objetivo de aprendizaje es la guía que le permite al profesor decidirse por unas actividades de aprendizaje. Esa decisión la toma teniendo en cuenta también sus hipótesis acerca del proceso de aprendizaje. Y estas actividades afectan, a su vez, sus hipótesis sobre el proceso.

El centro de la propuesta consiste en sugerir que éste es un proceso dinámico y cíclico. La trayectoria hipotética de aprendizaje no es algo que se determine con anterioridad a la realización de la clase y que permanezca estático durante ésta. Por el contrario, la trayectoria hipotética de aprendizaje estará en permanente evolución a lo largo de la clase, porque la puesta en práctica de las actividades y la permanente evaluación del conocimiento de los alumnos llevará al profesor a revisar dinámicamente la trayectoria hipotética de aprendizaje.

El profesor diseña y revisa la trayectoria hipotética de aprendizaje con base en la evaluación de los conocimientos de los alumnos y utilizando su conocimiento. Es aquí donde entra en juego el conocimiento del profesor, con la aclaración adicional, teniendo en cuenta que se supone que el profesor es un agente cognitivo y que el conocimiento del profesor también evoluciona con motivo de la experiencia que está viviendo en el aula. Esto se debe a que, en muchas ocasiones, lo que sucede en el aula es diferente de lo que el profesor esperaba, generando una perturbación que lo obliga a reformular sus hipótesis y su conocimiento.

Steffe y d'Ambrosio (1995), al extender el modelo de Simon, resaltan la importancia de tener en cuenta las acciones de los alumnos como indicativos de su conocimiento y de poner en relieve ese conocimiento matemático. Por lo tanto, el profesor no solamente realiza un seguimiento de estas acciones, sino que también hace conjeturas sobre las acciones que los alumnos podrían ejecutar con ciertas actividades (o situaciones, en términos de Steffe y d'Ambrosio). Estas dos autoras detallan, un poco más, dos de los elementos del modelo de Simon: las hipótesis sobre cómo procede el aprendizaje y el proceso de evaluación de los conocimientos de los alumnos. Ellas utilizan el término "zona de construcción potencial" para referirse "a las hipótesis del profesor acerca de lo que el alumno puede aprender, dado su modelo sobre los conocimientos que tiene el alumno" (p. 154).

Simon intenta identificar los tipos de conocimientos del profesor que se ponen en juego en este proceso dinámico. Menciona los siguientes: conocimiento de las matemáticas, de las actividades matemáticas y las representaciones, hipótesis sobre el conocimiento de los estudiantes, teorías de los profesores sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje, y del aprendizaje de los estudiantes sobre un tema específico. Según este autor, éstos son los conocimientos que se ponen en juego cuando, con base en la evaluación del conocimiento de los estudiantes, el profesor reformula la trayectoria hipotética de aprendizaje. Aunque pretende definir una estructura de la relación entre estos conocimientos y los componentes de la trayectoria hipotética de aprendizaje, esto no se logra puesto que sugiere que todos los tipos de conocimiento, excepto aquél sobre las actividades matemáticas y sus representaciones, afectan los tres componentes de la trayectoria hipotética de aprendizaje.

En resumen, las principales características del modelo son las siguientes. El pensamiento de los estudiantes juega un papel central. El conocimiento del profesor evoluciona permanentemente. La planificación para la enseñanza



incluye la generación de una trayectoria hipotética de aprendizaje. El cambio continuo en el conocimiento del profesor crea un cambio continuo en la trayectoria hipotética de aprendizaje. Los tipos de conocimiento del profesor y su papel en el diseño de la trayectoria hipotética de aprendizaje se presentan de manera general.

Análisis didáctico y conocimiento didáctico del profesor de matemáticas

A continuación queremos, partiendo de la propuesta de Simon, profundizar en algunos de los aspectos del modelo, con el propósito de identificar los análisis que el profesor debería hacer para diseñar actividades que partan de una perspectiva constructivista del aprendizaje y los conocimientos que el profesor pone en juego cuando realiza esos análisis. Queremos reformular la noción de trayectoria hipotética de aprendizaje y mostrar, con mayor detalle, el carácter cíclico y sistémico del modelo.

Suponemos, entonces, que un aspecto central de la enseñanza de las matemáticas consiste en el diseño, puesta en práctica y evaluación de las actividades por medio de las cuales los alumnos construyen su conocimiento matemático en un ambiente de interacción social. Pensaremos aquí en el proceso ideal de diseño, puesta en práctica y evaluación de una hora de clase o de una actividad que tendrá lugar dentro de una sesión de clase. Por lo tanto, esa actividad forma parte de una estructura curricular más amplia que tiene ya determinados unos propósitos que se desean lograr. A partir de esos propósitos y teniendo en cuenta el estado cognitivo de los alumnos, el profesor debe determinar uno o más objetivos para la actividad. El estado cognitivo de los alumnos es la percepción que el profesor tiene y la descripción que él hace del conocimiento, las dificultades y los errores de los alumnos con respecto a los propósitos que se están buscando dentro de la estructura curricular de la cual forma parte la actividad. Simultáneamente con la definición de los objetivos, el profesor identifica un contenido matemático que también estará determinado, al menos parcialmente, por esta estructura curricular. El contenido, los objetivos y el estado cognitivo de los alumnos componen la información de partida para el diseño de la actividad. El diseño, puesta en práctica y evaluación de la actividad requiere de una serie de análisis que agrupamos en cuatro categorías y que, en conjunto, denominamos de manera genérica como análisis didáctico.

Análisis cognitivo. Con este análisis se buscan identificar y describir las dificultades que los alumnos pueden enfrentar y los errores que los alumnos pueden llegar a cometer al realizar las tareas que componen la actividad.

Análisis de contenido. Con este análisis el profesor busca producir una descripción estructurada y sistemática del contenido matemático desde la perspectiva didáctica. Para ello, él debe construir la estructura conceptual de este contenido, en la que sea posible identificar los conceptos y procedimientos involucrados, junto con los sistemas de representación que permiten referirse a esos conceptos y procedimientos. Adicionalmente, el profesor debe realizar un análisis fenomenológico que le permita identificar los fenómenos naturales, sociales y matemáticos que pueden ser modelizados por subestructuras matemáticas contenidas en la estructura anterior.

Análisis de instrucción. En este análisis el profesor produce y evalúa (a la luz de los análisis anteriores) diseños de las actividades que realizarán los alumnos.

Análisis de actuación. Éste es el análisis que el profesor hace de las actuaciones recientes de los alumnos y que le permite determinar su estado cognitivo.

La realización de estos análisis es un proceso dinámico, cíclico y sistémico. La información que se produce en uno de los análisis permite reformular otros análisis y los resultados de esta reformulación pueden afectar el análisis original. Los tres primeros análisis interactúan dinámicamente entre sí, teniendo como hilo conductor a la estructura conceptual. El análisis de actuación produce información que será utilizada posteriormente en un nuevo ciclo del proceso. No obstante, todos los análisis deben tener en cuenta la especificidad del contenido matemático. Por lo tanto, el profesor debe tener como guía la estructura conceptual de este contenido y el papel de los sistemas de representación dentro de esa estructura. Esta estructura conceptual se irá reformulando a medida que se avance en los demás análisis.

Al realizar estos análisis, el profesor obtendrá los siguientes resultados: una o más actividades para llevar a la práctica en la clase; una justificación de esas actividades con respecto al estado cognitivo de los alumnos, al contenido y a los objetivos; y una previsión de las posibles actuaciones de los alumnos cuando la actividad se lleve a la práctica.

Vemos entonces que el diseño y puesta en práctica de actividades de enseñanza dentro de la perspectiva constructivista del aprendizaje es un proceso complejo, dinámico y cíclico. La Figura 1 muestra sus principales componentes.

Decimos que el *conocimiento didáctico* es el conocimiento de la didáctica de la matemática que el profesor pone en juego cuando diseña, lleva a la práctica y evalúa actividades de enseñanza. Éste es el conocimiento que el profesor pone en juego cuando realiza el análisis didáctico. Es de *carácter general*, en lo que se refiere a las características de las herramientas conceptuales utilizadas;

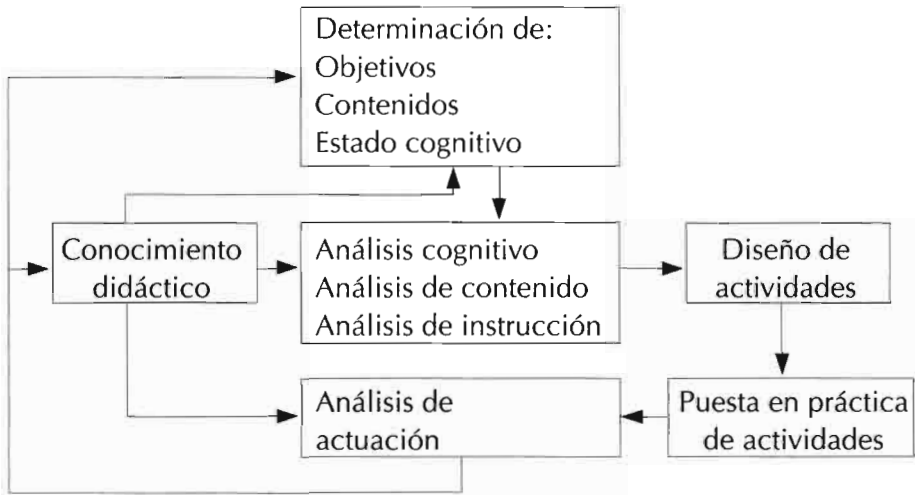


Figura 1. Diseño de actividades, análisis didáctico y conocimiento didáctico

y es de *carácter particular* en cuanto a la utilización de esas herramientas para una estructura matemática específica.

Organizadores del currículo: el caso del análisis de contenido

En el apartado anterior hemos identificado algunos de los conocimientos de la didáctica de la matemática que el profesor pone en juego cuando diseña actividades. Las nociones de la didáctica de la matemática a las que se refieren esos conocimientos han sido denominadas *organizadores del currículo* por Rico et al. (1997) quienes las consideran como “aquellos conocimientos que adoptamos como componentes fundamentales para articular el diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas” (p. 45). Los organizadores del currículo que estos autores proponen son los siguientes: errores y dificultades y problemas u obstáculos de aprendizaje; diversidad de representaciones y modelización; fenomenología de los conocimientos implicados; diversidad de materiales y recursos para la enseñanza; y evolución histórica de cada campo. Consideramos que la presentación que Rico et al. hacen de estas herramientas teóricas y conceptuales carece de una estructura suficientemente detallada que permita ver la relación entre las diversas herramientas y el papel que ellas juegan en el diseño de las unidades didácticas. Adicionalmente, hemos sugerido la importancia del análisis de contenido basado en los sistemas de representación en la utilización de estas herramientas (Gómez, 2000). Con base en la idea de análisis didáctico propuesta en el apartado anterior,

queremos ahora presentar con algún detalle nuestra elaboración sobre el análisis de contenido y, en particular, sobre las nociones de estructura conceptual y sistema de representación. Queremos mostrar la relación de este análisis con los otros análisis (cognitivo, de instrucción y de actuación) y presentar una elaboración de los organizadores del currículo que, en algunos casos, reformula lo propuesto por Rico et al. (1997) y, en otros, lo extiende.

Estructura conceptual y mapas conceptuales

El análisis de contenido tiene como fin la descripción detallada de la estructura matemática del contenido matemático, que le permite al profesor dar cuenta de las relaciones existentes entre hechos, conceptos, estructuras conceptuales, destrezas, razonamientos y estrategias. La estructura conceptual es la descripción de estos elementos y relaciones. Dado que todo discurso matemático se realiza en uno o más sistemas de representación (Duval, 1998), la descripción de la estructura conceptual se debe hacer con base en el análisis de las diversas maneras como se pueden representar esos conceptos y procedimientos, y las relaciones entre ellos. Y dado el carácter estructural de este organizador, los mapas conceptuales son una herramienta ideal para su descripción.

Mapas conceptuales

Los mapas conceptuales son una técnica para representar visualmente la estructura de la información. Es decir, los mapas conceptuales son un sistema de representación cuyas normas son relativamente sencillas (Lanzing, 1998): “Los conceptos se representan por nodos a los que se les da una etiqueta por medio de una palabra o una frase corta que indica el concepto. Las relaciones se representan por líneas (enlaces) que conectan los nodos” (p. 2).

Aunque esta técnica de representación ha sido utilizada desde la edad media, se considera que Joseph D. Novak, de la Universidad de Cornell, fue el pionero en la utilización de los mapas conceptuales en la educación. Él desarrolló esta técnica para determinar cómo ocurren los cambios en la comprensión conceptual de los estudiantes (Novak, 1990, p.937, citado en McGowen, 1998, p. 38). Los mapas conceptuales se han utilizado de manera sistemática en la educación, particularmente como herramienta para describir el currículo y como herramienta de la instrucción.

Existe una técnica, relacionada con los mapas conceptuales, llamada “mapas mentales”. Esta técnica, desarrollada por Buzan, requiere que los mapas

conceptuales tengan una jerarquía: “un mapa mental consiste en una palabra o concepto central, alrededor del cual se dibujan de 5 a 10 ideas principales que se relacionan con esa palabra. Este proceso se puede después repetir para cada una de las palabras hijas, tantas veces como se quiera” (Buzan, 1995, citado por Lanzing, p. 4). Williams (1998) llama a estos mapas los “mapas araña”.

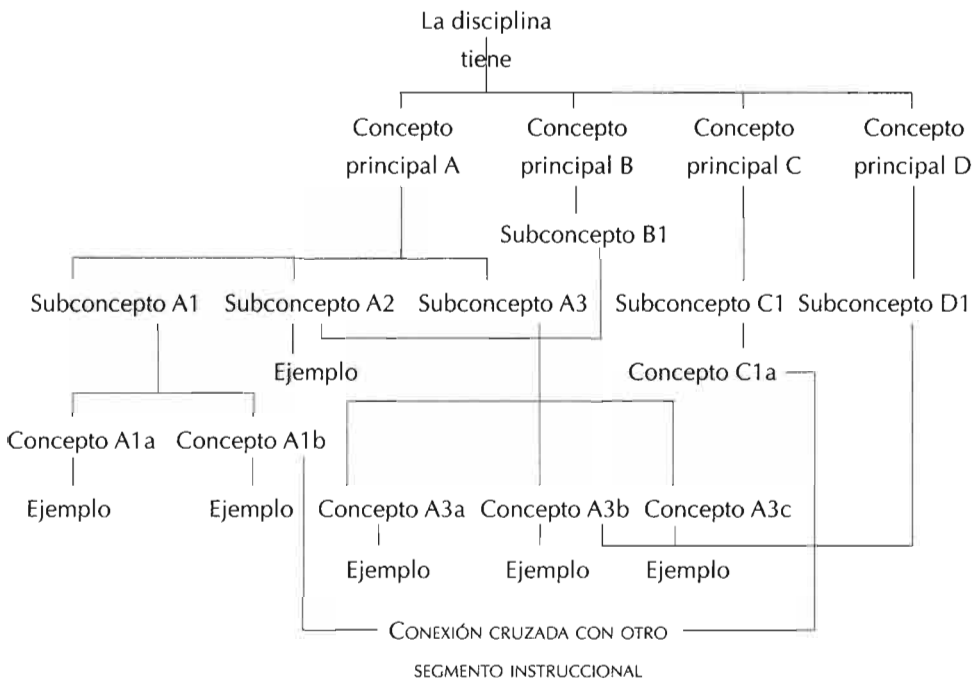


Figura 2. Ejemplo de un mapa conceptual

La Figura 2 muestra parte de un ejemplo de Novak (1988) de un “mapa conceptual para planificar un programa de instrucción. En un plan de estudios completo se incluirían también conceptos subordinados y conexiones cruzadas adicionales, además de ejemplos concretos de conceptos” (p. 103). En este caso, vemos que éste es un mapa tipo “araña” puesto que presenta una jerarquía partiendo de un concepto inicial, “la disciplina”.

Como sistema de representación, los mapas conceptuales tienen dos ventajas importantes:

- Permiten descripciones no lineales del objeto.
- Al tener un carácter gráfico, permiten observar la estructura de la información.

Mapas conceptuales y estructura conceptual en matemáticas

Las dos cualidades que acabamos de mencionar son muy importantes para la descripción de objetos matemáticos y su correspondiente discurso matemático. La estructura del contenido matemático no es lineal. Por un lado, todo concepto se encuentra relacionado con otros conceptos y, en general, todo procedimiento está relacionado con uno o más conceptos y procedimientos adicionales. Por otro lado, y como veremos más adelante, una representación de un concepto (u objeto) puede estar relacionada con otras representaciones de ese mismo u otros conceptos (u objetos). Por consiguiente, hay una estructura que representa la manera como los conceptos, los procedimientos y las representaciones se relacionan unos con otros. Aunque éstas son características bien conocidas de los objetos matemáticos y su correspondiente discurso, este último se hace, en general, dentro de un texto. Esto implica, por un lado, que la descripción tiene que ser lineal, y por el otro, que no es posible ver "gráficamente" la estructura del discurso. Hay que deducirla de la lectura del texto. En consecuencia, en contraposición con la descripción textual, los mapas conceptuales resultan muy potentes para la descripción de la estructura conceptual, y como veremos más adelante, cuando se conjugan con la noción de sistema de representación, esta potencia se multiplica.

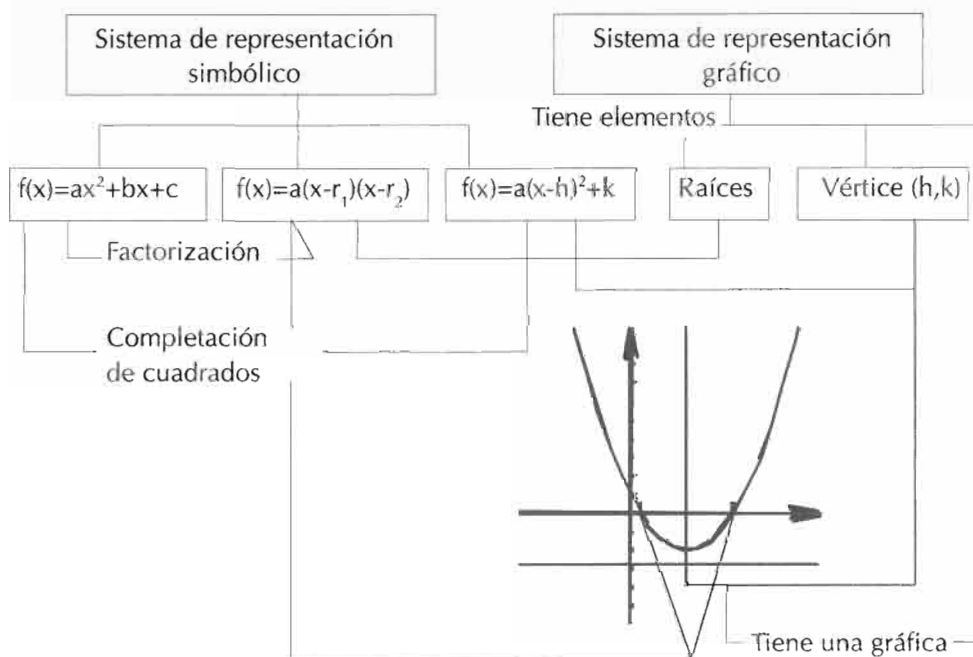


Figura 3. Mapa conceptual en matemáticas

La Figura 3 muestra una porción de un mapa conceptual para la función cuadrática. En ella se aprecia la identificación de elementos en dos sistemas de representación y la relación de estos elementos con otros elementos del mismo sistema de representación o con representaciones del mismo elemento en otros sistemas de representación.

Características de los mapas conceptuales en matemáticas

Cuando se utilizan para describir contenido matemático, los mapas conceptuales pueden tener unas características que dependen, al menos parcialmente, de ese contenido y que caracterizan la estructura conceptual del mismo. Introducimos aquí las nociones de familia, submapa y nivel.

En el caso de la descripción de un concepto matemático por medio de mapas conceptuales, los mapas serán de tipo “araña”, dado que siempre habrá una idea inicial: el concepto mismo. Esto implica que se puede introducir el concepto de *familia* dentro de un mapa o submapa y que, dentro de la estructura jerárquica que se construye, existe un sentido natural de la mayoría de las conexiones. Éstas van de padres a hijos (véase Figura 5).

Un mapa conceptual con contenido matemático permite identificar *submapas*. Estos son porciones del mapa global en las que se desarrolla una parcela particular y fácilmente identificable del contenido en cuestión.

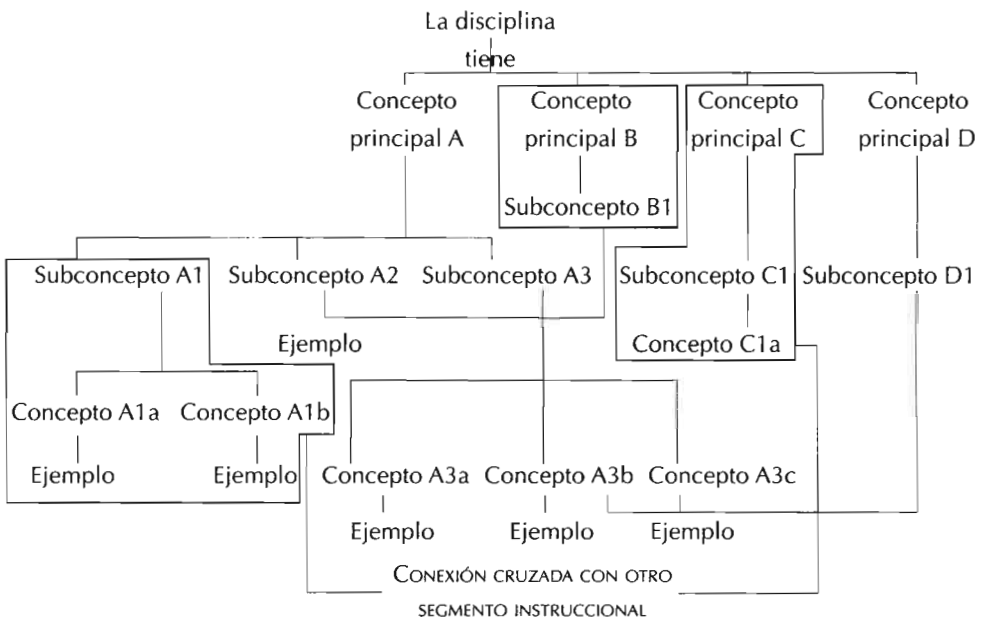


Figura 4. Ejemplos de submapas

La Figura 4 presenta el mapa del comienzo de este apartado. En él hemos resaltado algunos posibles submapas.

Estos submapas pueden tener una *estructura*. La noción de estructura se puede caracterizar con base en el número de niveles del mapa o submapa. En el ejemplo de la Figura 5, observamos un mapa con dos niveles y otro con cuatro. Resulta evidente que el número de niveles de un submapa da una indicación de la complejidad de la descripción que se pretende hacer con él.

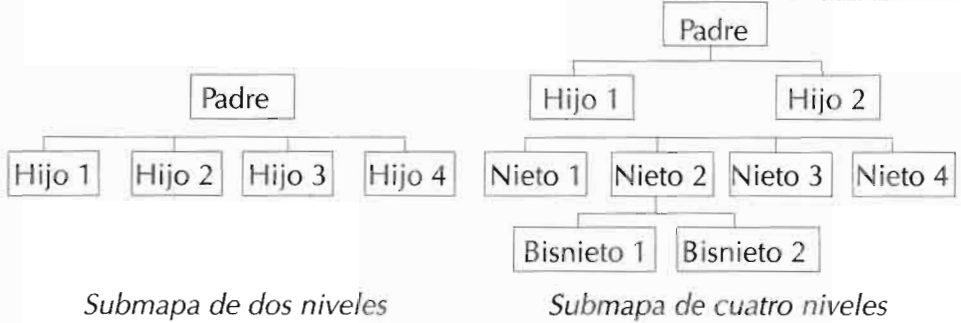


Figura 5. Estructuras de submapas

Relaciones (conexiones)

Los mapas conceptuales también se pueden caracterizar de acuerdo con el tipo de conexiones que presentan. Las conexiones *básicas* son aquellas que definen la jerarquía de familia de las ramas de un mapa o un submapa. Estas conexiones básicas caracterizan la estructura lineal de las ramas y la relación de familia expuesta en la Figura 5. Las conexiones *internas* son las que establecen relaciones entre dos elementos diferentes pertenecientes a un mismo submapa por fuera de la relación jerárquica de familia. Las *externas* son aquellas que establecen relaciones entre representaciones de un mismo elemento en diferentes submapas.

Las conexiones (tanto internas, como externas) pueden ser *implícitas* o *explícitas*. Las conexiones explícitas se expresan con líneas que explícitamente establecen la conexión entre dos elementos. Las conexiones implícitas se expresan dentro de la caja de un mismo elemento al referirse a otro elemento. Las conexiones pueden ser *puntuales* o *generales*. Las conexiones generales van de un elemento o grupo a otro grupo de elementos. Las conexiones puntuales van de un elemento a otro elemento.

La Figura 6 presenta, para el mapa presentado anteriormente, ejemplos de los diferentes tipos de conexiones (relaciones). En este caso, vemos un mapa que *no* es de tipo “araña” y por lo tanto, en el que es evidente la existencia de dos submapas principales.

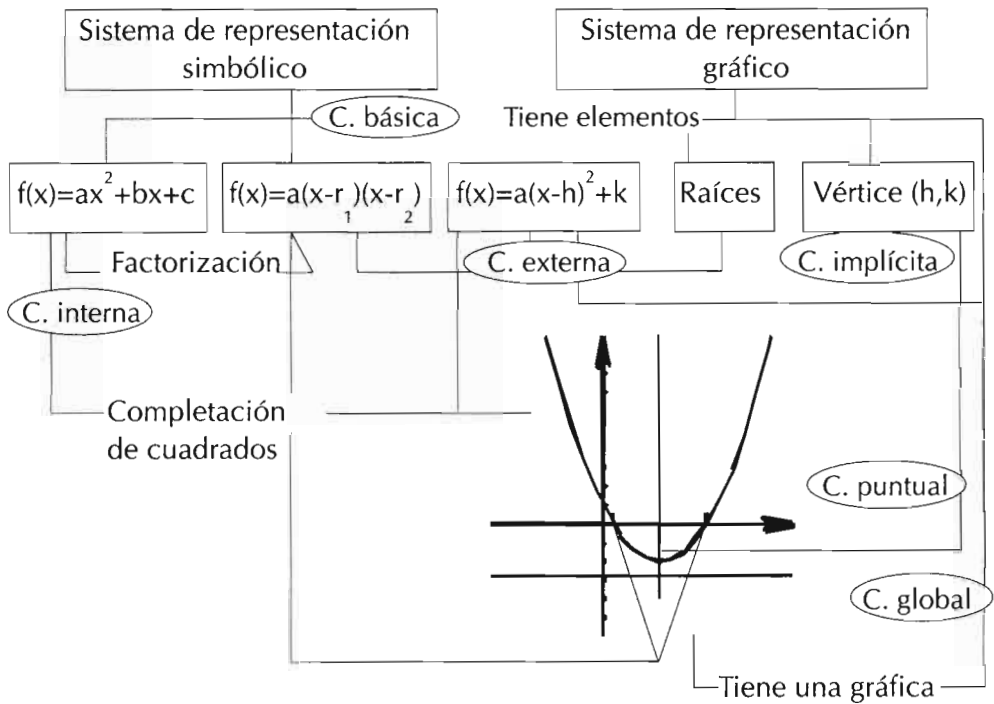


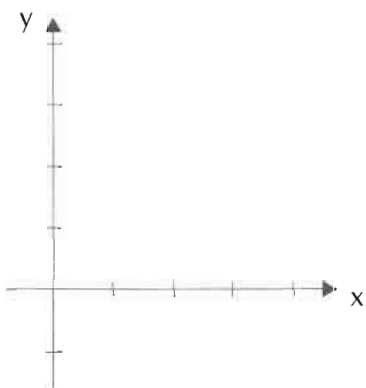
Figura 6. Ejemplos de conexiones

Sistemas de representación

La discusión sobre los sistemas de representación en la educación matemática puede llevar a una serie de paradojas (Rico, 2000). Algunas de estas paradojas tienen que ver con el status ontológico de los objetos matemáticos y con la dualidad entre las representaciones internas y externas. Con respecto a la existencia de los objetos matemáticos, suponemos, siguiendo a Sfard (2000) y Dörfler (2000), que ellos no existen por fuera del discurso matemático. Sin embargo, “la sensación de los participantes [en el discurso] de que los objetos existen, es una condición necesaria para el uso eficiente de los significantes” (Sfard, 2000, p. 91). Por lo tanto, aunque los objetos matemáticos no existen por fuera del discurso, quienes participan en él se comportan como si existieran. Para Cobb, Yackel y McClain (2000) la dualidad entre representaciones internas y externas desaparece: símbolo y significado se construyen dinámicamente. Lo importante es la actividad de simbolización en la que el sujeto se hace capaz de actuar socialmente compartiendo significados. El significado para un sistema de símbolos se construye en la medida en que se llegan a acuerdos sociales sobre la manera como se manejan los símbolos. Estas aclaraciones

nos permiten regresar ahora a la noción de sistema de representación, y resaltan el papel de esta noción en las actividades de profesor y alumnos en el aula y en la construcción del conocimiento matemático.

Un mismo objeto matemático se puede representar en diferentes sistemas de representación. Por ejemplo, en el caso de las funciones, éstas se pueden representar en el sistema de representación simbólico ($f(x) = x^2 - 4x + 3$), en el sistema de representación gráfico (véase Figura 7) y en el sistema de representación tabular (véase Figura 8), entre otros.



x	y
-1	8
0	3
1	0
2	-1
3	0
4	3
5	8
6	1

Figura 7. Representación gráfica

Figura 8. Representación tabular

En el caso del ejemplo del comienzo de esta sección, cada una de las representaciones de ese objeto matemático (una función cuadrática específica) resaltan algunos aspectos particulares del objeto en cuestión. Como nosotros no podemos “ver” el objeto, debemos buscar conocer todas sus características. Para ello, resulta importante estudiar sus diversas representaciones.

A manera de metáfora, podemos imaginarnos que el objeto que estudiamos es la cara de una persona desconocida que se encuentra en otro lugar. Para conocerla, podemos tener diversas representaciones. Por ejemplo, una foto a color, una foto en blanco y negro, una imagen de computador enviada por Internet, un dibujo hecho por un artista y la descripción verbal de un amigo. Es posible que cada una de estas representaciones nos dé información importante sobre lo que queremos conocer y que estas informaciones se complementen. Dado que todas estas representaciones son de una misma persona, ellas tienen muchas cosas en común. En cada una de las representaciones podremos identificar el hecho de que la persona tiene el cabello oscuro o los ojos claros. En otras palabras, podremos identificar relaciones entre elementos pertenecientes a diversas representaciones.

El hecho de que se represente un mismo objeto de diferentes maneras, da lugar a esta relación natural entre elementos pertenecientes a cada una de las representaciones. Como es un único objeto y cada representación tiende a resaltar facetas particulares de ese objeto, podemos establecer relaciones entre los elementos que componen las representaciones. Aunque en el caso de la metáfora de la cara de una persona esto parece evidente, en el caso de las representaciones de un objeto matemático, este punto es muy importante desde la perspectiva didáctica. En el caso del objeto matemático que presentamos al comienzo de esta sección, podemos, por ejemplo, establecer una conexión entre el término “3” de la representación simbólica, el corte de la gráfica con el eje y , y el valor en la segunda columna de la fila que en la primera tiene el término “0”. Estos tres elementos, pertenecientes a tres representaciones diferentes, se encuentran relacionados porque representan una misma faceta del objeto en cuestión.

Definición de sistemas de representación

El término “sistema de representación” tiene diferentes significados en la educación matemática. De hecho, un grupo de investigadores pertenecientes al PME⁴ ha trabajado en el tema y producido una categorización de estos significados (Goldin y Janvier. 1998, pp. 1-2).

Buscamos utilizar los sistemas de representación para *representar* diferentes facetas de un objeto matemático y trabajamos con los sistemas de representación bajo el supuesto de que se ciñen a un conjunto de reglas que se encuentran condicionadas por las matemáticas, en general, y por el objeto matemático específico, en particular. Por estas razones, consideramos que la definición de Kaput (1992) sobre sistema de notación se adapta a nuestras necesidades. De acuerdo con esta definición (p. 523)⁵,

un sistema de notación es un sistema de reglas para

I. identificar o crear caracteres;

⁴ Las siglas PME representan “Psychology of Mathematics Education”. Éste es una comunidad de investigadores en educación matemática que se reúne anualmente y que organiza, entre otras actividades, grupos de trabajo en diversos temas.

⁵ Complementamos esta definición de Kaput con la primera de las definiciones de Goldin y Janvier, definición que identifica “una situación física externa estructurada, o un conjunto de situaciones estructuradas en un ambiente físico, que pueden ser descritas matemáticamente o se pueden interpretar en el sentido de involucrar ideas matemáticas” (p. 1). Esta definición permite introducir, como parte de las características de un objeto matemático, al conjunto de fenómenos reales cuyo análisis puede requerir de modelos matemáticos que involucren dicho objeto. Por esa razón, en los mapas conceptuales que describen un objeto matemático es importante incluir un submapa, que hemos llamado “aplicaciones”.

II. operar en ellos y

III. determinar relaciones entre ellos (especialmente relaciones de equivalencia).

Esta definición de sistema de representación no es exclusiva de las matemáticas. Por ejemplo, si miramos la definición que dimos de mapa conceptual, podemos percibir que éste es un sistema de representación. La definición de Lanzing (1998) que afirma que en un mapa conceptual “los conceptos se representan por nodos a los que se les da una etiqueta por medio de una palabra o una frase corta que indica el concepto. Las relaciones se representan por líneas (enlaces) que conectan los nodos”, se adapta a las condiciones de Kaput para un sistema de representación.

Sistemas de representación y actividades matemáticas

La definición de sistema de representación que acabamos de proponer es muy potente cuando se utiliza en matemáticas. Gracias a ella, Kaput puede describir las actividades matemáticas que tienen lugar en las matemáticas escolares. Él propone que estas actividades matemáticas se pueden clasificar en cuatro categorías:

1) transformaciones sintácticamente restringidas dentro de un sistema particular, con o sin referencia a otros significados externos;

2) traducciones entre sistemas de notación, incluyendo la coordinación de acciones a través de sistemas de notación;

3) construcción y verificación de modelos matemáticos, lo que es equivalente a la traducción entre aspectos de una situación y conjuntos de notaciones; y

4) la consolidación o cristalización de relaciones y procesos en objetos conceptuales o “entidades cognitivas” que pueden ser usadas en relaciones y procesos de un orden más alto de organización.

La primera actividad, las transformaciones sintácticas dentro de un sistema de representación, se refiere a la manipulación de una o más representaciones dentro de un mismo sistema de representación para efectos de transformarlas en otras representaciones (en general, equivalentes). Éste es el caso, por ejemplo, de la utilización del procedimiento de completación de cuadrados para transformar la forma simbólica $f(x) = x^2 - 4x + 3$ en la forma equivalente $f(x) = (x-2)^2 - 1$. O también, continuando dentro del sistema de representación simbólico, el caso de utilizar la fórmula cuadrática para transformar la

expresión simbólica $x^2 - 4x + 3 = 0$ en la expresión equivalente $x = 1, x = 3$. También es el caso, dentro del sistema de representación gráfico, de utilizar traslaciones para obtener la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 4x + 3$ a partir de la gráfica de la función $f(x) = x^2$.

La segunda actividad tiene que ver con la relación de uno o más elementos pertenecientes a un sistema de representación, con otros elementos de otro sistema de representación. Es el caso de la relación del término "3" de la expresión simbólica $f(x) = x^2 - 4x + 3$, con el punto de corte de la gráfica con el eje y , y con el valor en la segunda columna de la fila que en la primera tiene el término "0". También es el caso de la relación entre los términos "2" y "1" de la expresión simbólica $f(x) = (x-2)^2 - 1$, con las coordenadas del vértice de la parábola representada en el sistema de representación gráfico y con la fila de la tabla cuyo valor en la primera columna es "2". Un ejemplo adicional de esta actividad, es la traducción de los términos "1" y "3" de la expresión simbólica $f(x) = (x - 1)(x - 3)$ –que es equivalente a las dos anteriores– con los cortes de la gráfica con el eje x , y con las filas de la tabla cuyo valor en la segunda columna es "0".

La tercera actividad, la de modelaje, se refiere al proceso de representar, dentro de un sistema de representación matemático, una situación que no está descrita en estos términos. Tomemos el ejemplo del problema clásico de hallar las medidas de un lote rectangular de tal forma que, teniendo un perímetro fijo (e.g., 40), se obtenga la mayor área posible. Para realizar esta actividad, se hace necesario expresar la condición sobre el perímetro en una expresión simbólica del tipo $2x + 2y = 40$ y, con base en esta relación, expresar el área del lote como función de una de las medidas del mismo: $A(x) = x(20 - x)$. De esta forma se ha representado en un modelo matemático la situación original, donde el problema consiste en hallar el valor de x para el cual $A(x)$ es máximo. La resolución de este problema, dentro del contexto matemático, requiere, entonces, de la aplicación de las dos primeras actividades matemáticas. Hay que transformar sintácticamente la expresión en $A(x) = -x^2 + 20x$, y después en $A(x) = -(x - 10)^2 + 100$. Con esta expresión, en el sistema de representación simbólico, se pueden traducir dos de sus elementos (10 y 100) al sistema de representación gráfico para hallar que el punto máximo de la gráfica se encuentra en su vértice (10,100) y regresar a la situación original para responder la pregunta afirmando que el lote debe ser un cuadrado de lado 10 y que tiene área máxima de 100.

La cuarta actividad, la "materialización", es de carácter esencialmente cognitivo y no la vamos a considerar aquí.

Estructura conceptual, sistemas de representación y mapas conceptuales en matemáticas

En el apartado anterior pretendimos mostrar la potencia de la noción de sistema de representación como medio para representar la estructura conceptual de un concepto matemático y para identificar las actividades matemáticas que son específicas de ese concepto. No obstante, los sistemas de representación se pueden mirar como un elemento organizador de esta información. En este apartado buscamos mostrar cómo los mapas conceptuales se pueden convertir en un medio de representación adecuado de esta información. El primer punto que hay que resolver consiste en decidir cuál es la naturaleza de los elementos y de las relaciones que definen el mapa conceptual en cuestión. Podríamos hablar de conceptos y procedimientos y de relaciones entre ellos.

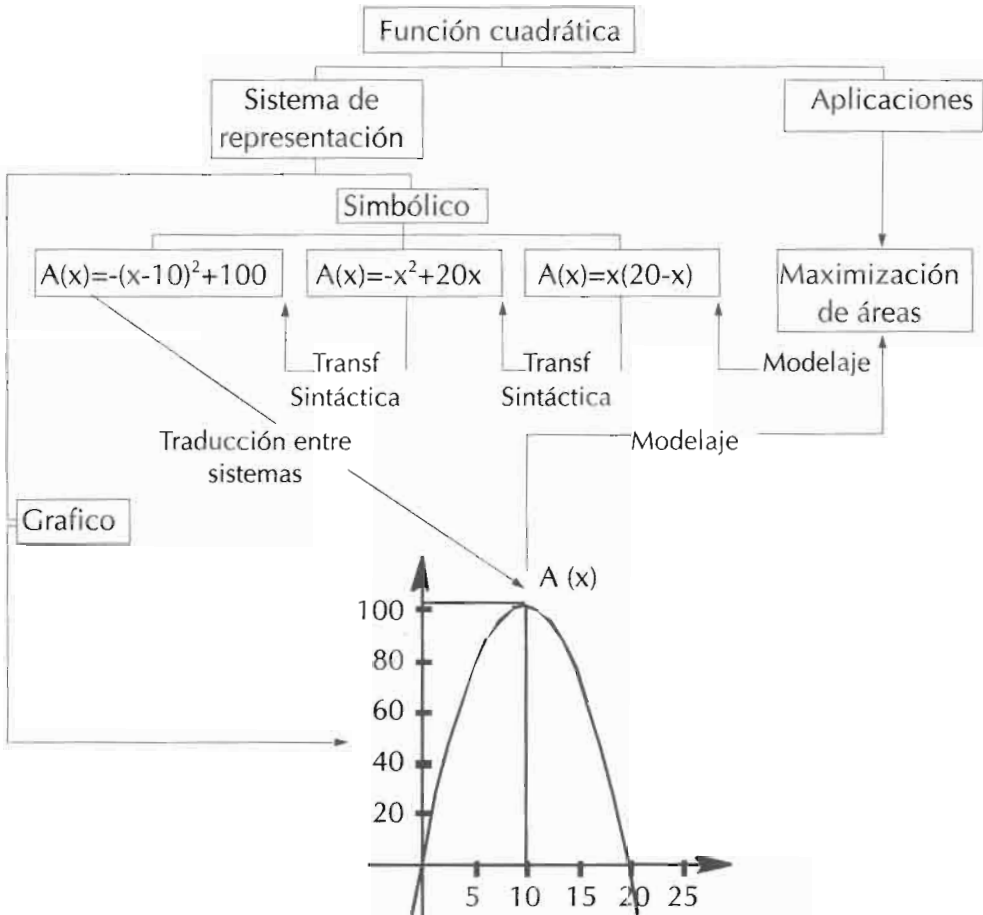


Figura 9. Mapa conceptual para el problema de área

También podríamos identificar las características o facetas del objeto y las relaciones entre ellos. Como se ve, éstas son diferentes aproximaciones a un mismo problema. Lo que resulta evidente es que los sistemas de representación son el eje organizador de la información que queremos representar. La Figura 9 muestra un mapa conceptual para el problema del área del lote que consideramos en el apartado anterior.

La noción de sistema de representación permite organizar la representación de un objeto matemático en un mapa conceptual. Cada sistema de representación es un submapa. La descripción de los fenómenos o situaciones cuyo análisis requiere de la utilización de un modelo que involucra al objeto es otro submapa, que denominamos “aplicaciones”. Cuando el objeto matemático se representa en un mapa conceptual, se identifican dos tipos de objetos en la gráfica: elementos y relaciones (o conexiones). Las relaciones pueden ser de diferentes tipos. En otras palabras, un elemento puede estar relacionado:

- a. con otros elementos dentro de la forma particular o dentro del sistema de representación en el que se encuentran;
- b. con una representación de ese mismo elemento en otro sistema de representación;
- c. con un fenómeno que lo involucra; o
- d. con dos elementos interconectados para los cuales sirve de puente.

Vemos entonces que los sistemas de representación y los mapas conceptuales ofrecen una perspectiva para caracterizar las actividades matemáticas escolares. En un mapa conceptual podemos, de acuerdo con la enumeración anterior, identificar cada una de las actividades matemáticas descritas por Kaput. La relación o conexión de elementos dentro de un mismo sistema de representación (a) corresponde a las transformaciones sintácticas (1). Estas transformaciones sintácticas permiten hacer la conexión entre dos o más elementos pertenecientes a un mismo sistema de representación. La relación entre dos representaciones de un mismo elemento en dos sistemas de representación (b) se refiere a la traducción entre sistemas de representación (2). La relación de un elemento con un fenómeno (elemento del sistema de representación de aplicaciones, (c) tiene que ver con la construcción de modelos (3). Finalmente, “la consolidación o cristalización de relaciones y procesos en objetos conceptuales o ‘entidades cognitivas’ que pueden ser usadas en relaciones y procesos de un orden más alto de organización” (4) se puede identificar en un mapa conceptual al analizar el lugar que ocupan los procedimientos dentro de la estructura (d). Éstos pueden ser el objeto mismo



de la descripción o conexiones que establecen relaciones entre dos elementos del mapa.

En la Figura 9 hemos identificado conexiones que corresponden a los tres primeros tipos de actividades matemáticas propuestas por Kaput. Es importante resaltar que lo que hemos presentado en este mapa conceptual es tan sólo una porción de lo que podría ser el mapa conceptual de la función cuadrática o de una función cuadrática particular como la que se considera para este problema. El mapa conceptual de la Figura 9 presenta únicamente el *modelo matemático* correspondiente al problema. Este modelo parte del submapa llamado *aplicaciones*, en el que hemos identificado uno de los múltiples tipos de fenómenos que pueden ser modelados por la función cuadrática. El proceso de modelaje pasa por unas etapas que no están representadas en el mapa y que tienen que ver con la formulación matemática del perímetro y la expresión del área del lote como producto de sus dos dimensiones, para llegar a expresar esta área en función de una de las dimensiones. El mapa nos muestra que la resolución del problema, una vez modelado, requiere de la aplicación de las dos primeras actividades matemáticas. Es necesario transformar sintácticamente la expresión inicial en una expresión intermedia para llegar a la expresión simbólica que identifica el vértice. En seguida, se hace una traducción entre el sistema de representación simbólico y el gráfico para identificar el vértice como el punto máximo de la función y resolver el problema dentro de las representaciones matemáticas. Finalmente, se realiza el proceso inverso de modelaje para obtener la solución al problema original.

Resolución de problemas y descripción de tareas

La descripción de la estructura conceptual del contenido matemático en términos de los sistemas de representación, del análisis fenomenológico y del modelaje permite construir una caracterización del tipo de actividades que es posible realizar para esa estructura matemática, cuando ésta se utiliza como organizador de fenómenos (matemáticos y no matemáticos). Desde esta perspectiva, en el discurso matemático del aula el alumno realiza dos tipos de actividades: la identificación o construcción del modelo y la resolución del problema a partir del modelo dentro de los sistemas de representación. Para la primera actividad es posible clasificar las tareas de acuerdo con la evidencia de la estructura matemática en la descripción que se hace del fenómeno dentro de la actividad:

- La estructura matemática (modelo) se encuentra explícita en la descripción del fenómeno, excepto que no está expresada en lenguaje matemático. Es el



caso de problemas de caída libre en los que se menciona que el fenómeno sigue la ley de la gravedad.

- La identificación del modelo depende esencialmente del conocimiento que el alumno tenga de la estructura matemática involucrada. Por ejemplo, la manera de expresar el perímetro y el área de un rectángulo en función de sus dimensiones, para hallar el rectángulo que, con un perímetro dado, tenga mayor área.

- La estructura matemática proviene de las leyes naturales que regulan el fenómeno. Es el caso, por ejemplo, de tareas que se refieren a fenómenos de movimiento parabólico.

- Se requiere de exploración y experimentación para la identificación del modelo. Éste es el caso de la carrera de caballos diseñada por Skovsmose (2000) en que las nociones de probabilidad surgen con motivo de la actuación de los alumnos en una simulación de una carrera de caballos utilizando dados.

- El problema no está descrito en la tarea. El alumno tiene que estudiar y analizar una realidad para, primero, definir con claridad el problema y, después, modelizarlo. Éstos son problemas del tipo “proyecto” (Skovsmose, 2000).

- El fenómeno no tiene una estructura predeterminada y parte del problema consiste en evaluar diferentes estructuras posibles. Son el tipo de actividades que Lesh (1997) denomina de obtención de estructuras. Este autor da el ejemplo del debate sobre un sistema imparcial, para combinar notas de un examen.

Una vez identificado el modelo, la resolución del problema tiene lugar dentro de los sistemas de representación. Es posible clasificar las tareas con base en las operaciones que se ejecutan dentro de los sistemas de representación para su solución. Tenemos entonces tareas en las que:

- El trabajo se restringe a un único sistema de representación y la resolución requiere de la aplicación de uno o más procedimientos de transformación sintáctica. Por ejemplo, hallar la forma expandida de $f(x) = (x-2)^2 - 1$.

- Hay que trabajar en más de un sistema de representación (traducciones), pero el problema está definido en un sistema de representación específico. Por ejemplo, hallar el mínimo de la función $f(x) = (x-2)^2 - 1$.

- Hay que trabajar en más de un sistema de representación, pero no se favorece ninguno de ellos y el foco de la actividad es el objeto matemático. Éstos son problemas, por ejemplo, en los que se tiene información parcial acerca de un objeto matemático (una función) en diversos sistemas de

representación y se requiere identificar y describir el objeto en esos sistemas de representación. Nosotros denominamos a estos problemas de “construcción de objeto” (Gómez, P., Mesa, V.M., Carulla, C., Gómez, C., y Valero, P., 1996).

- Se exploran las características del objeto matemático en un sistema de representación (por ejemplo, el simbólico) al estudiarlo en otro sistema de representación (el gráfico). Éste es el caso de analizar el papel gráfico de los parámetros de la expresión simbólica $f(x) = a(x - h)^2 + k$, cuando se consideran familias de funciones en las que dos parámetros varían y el tercero permanece constante.



CONCLUSIONES

La investigación sobre la formación inicial y el conocimiento del profesor de matemáticas de secundaria ha pasado por varias etapas. Hemos identificado la reflexión de Cooney (1994) y la propuesta de Simon (1995) como puntos importantes de esta producción investigativa. Al considerar al profesor como agente cognitivo y al resaltar la importancia de la enseñanza de las matemáticas basada en principios constructivistas, estos autores abren la posibilidad de formas alternativas de considerar el papel del profesor en la enseñanza y el tipo de conocimientos que se requieren para desarrollar esa enseñanza. El modelo de Simon es una propuesta dentro de estos parámetros. En este capítulo hemos querido profundizar y elaborar el modelo de Simon y reflexionar sobre el conocimiento y la actuación del profesor de matemáticas.

Partimos del supuesto de que la enseñanza de las matemáticas surge del diseño, puesta en práctica y evaluación de actividades en las que los alumnos construyen el conocimiento matemático en un ambiente de interacción social. Para realizar esta enseñanza, sugerimos que el profesor debe realizar un análisis didáctico con cuatro componentes: el análisis de contenido, el análisis cognitivo, el análisis de instrucción y el análisis de actuación.

Al realizar estos análisis, el profesor pone en juego una serie de conocimientos que, en conjunto, hemos denominado conocimiento didáctico. Éste está compuesto por unas herramientas teóricas y conceptuales que Rico et al. (1997) denominan organizadores del currículo. Hemos desarrollado con algún detalle aquellos organizadores del currículo que son necesarios para el análisis de contenido y hemos mostrado algunas de las relaciones entre los diversos análisis y organizadores del currículo. Al estructurar y elaborar los organizadores



del currículo como piezas que conforman el análisis didáctico, hemos buscado mostrar el carácter dinámico, cíclico y sistémico de este proceso y justificar la elección de estos organizadores del currículo como las piezas centrales del conocimiento didáctico del profesor de matemáticas.

Hemos hecho una descripción de lo que consideramos que idealmente debería hacer el profesor al preparar, realizar y evaluar su clase. Es evidente que esta situación ideal es muy distante de la situación real de una gran proporción de profesores en ejercicio. Esta propuesta pretende, en palabras de Simon (1995), “contribuir al diálogo acerca de cómo sería la enseñanza si se construyera sobre una visión constructivista del desarrollo del conocimiento” (p. 115). Por otro lado, la propuesta no considera en detalle lo que sucede en el aula cuando se ponen en práctica las actividades de instrucción, al no tener como propósito describir la manera como alumnos y profesor construyen conjuntamente significados con motivo de estas actividades.



BIBLIOGRAFÍA

BALL, D. “Research on teaching mathematics: Making subject matter knowledge part of the equation”. En: J. Brophy (Ed.), *Advances in research on teaching. Vol. 2. Teacher’s knowledge of subject matter as it relates to their teaching practice. A research annual*. Greenwich. CT. Jai Press. 1991.

BUZAN, T. *The mind map book*. Londres. BBC Books. 1995.

COBB, P. From representations to symbolizing: Introductory comments on semiotics and mathematical learning. En: P. COBB, E. YACKEL & K. MCCLAIN (Eds.), *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms. Perspectives on discourse, tools, and instructional design*. Hillsdale. Lawrence Erlbaum Associates. 2000.

COONEY, T.J. Research and teacher education: In search of common ground. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25 (6). 1994.

DÖRFLER, W. Means for meaning. En: P. COBB, E. YACKEL & K. MCCLAIN (Eds.), *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms. Perspectives on discourse, tools, and instructional design*. Hillsdale. Lawrence Erlbaum Associates. 2000.

DUVAL, R. Signe et objet (I): trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre représentation et objet. *Annales de Didactique et des Sciences Cognitives*, 6. 1998.

GOLDIN, G. A., & JANVIER, C. Representations and the psychology of mathematics education. *Journal of Mathematical Behavior*, 17 (1). 1998.

GÓMEZ, P. "Conocimiento didáctico del profesor y organizadores del currículo en matemáticas". En: F. J. PERALES, A. L. GARCÍA, E. RIVERA, J. BERNAL, F. MAESO, J. MUROS, L. RICO, & J. ROLDÁN (Eds.), *Congreso nacional de didácticas específicas. Las didácticas de las áreas curriculares en el siglo XXI*. Vol. 2. Granada. Grupo Editorial Universitario. 2001.

GÓMEZ, P. "Los organizadores del currículo en matemáticas". *Revista EMA*, 5 (3). 2000.

GÓMEZ, P., MESA, V.M., CARULLA, C., GÓMEZ, C., y VALERO, P. (Eds.). *Situaciones problemáticas de precálculo. El estudio de funciones a través de la exploración con calculadoras gráficas*. México. una empresa docente y Grupo Editorial Iberoamérica. 1996.

KAPUT, J.J. "Technology and Mathematics Education". En: D. A. GROUWS (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York. Macmillan. 1992.

LANZING, J. W. A. Everything you always wanted to know about... Concept Mapping. <http://utto212.to.utwente.nl/lanzing/EVERYT~1.HTM>, Holanda. 1998.

LESH, R. Matematización: la necesidad "real" de la fluidez en las representaciones. *Enseñanza de las ciencias*. 15 (3). 1997.

MCGOWEN, M. *Cognitive units, concept images, and cognitive collages: An examination of the processes of knowledge construction*. Documento no publicado. Warwick. University of Warwick. 1998.

NOVAK, *Aprendiendo a aprender*. Barcelona. Martínez Roca. 1988.

NOVAK, J.D. Concept mapping: A useful tool for science education. *Journal of Research in Science Teaching*, 27 (10). 1990.

RICO, L. *Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática*. Documento no publicado. Granada. Universidad de Granada. 2000.

RICO, L. (Coord.), CASTRO, E., CASTRO, E., CORIAT, M., MARÍN, A., PUIG, L., SIERRA, M., y SOCAS, M. *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. Barcelona. Ice - Horsori. 1997.

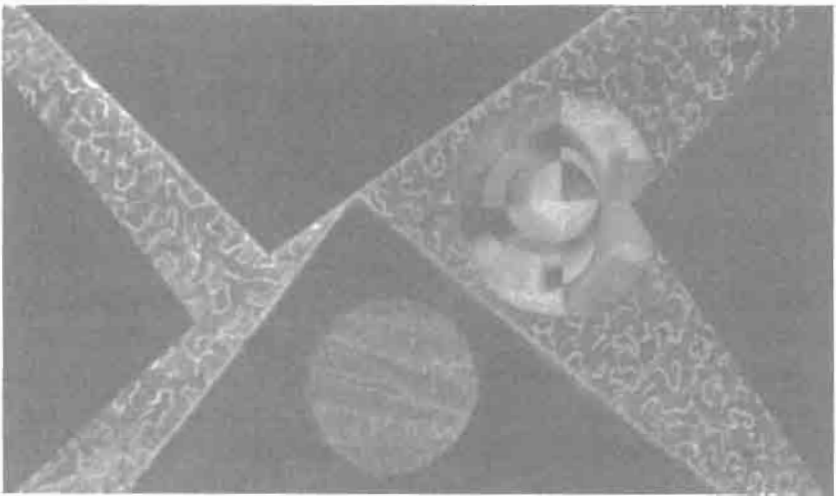
SIMON, M. Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26 (2). 1995.

SFARD, A. "Symbolizing mathematical reality into being –or how mathematical discourse and mathematical objects create each other". En: P. COBB, E. YACKEL & K. McCLAIN (Eds.), *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms. Perspectives on discourse, tools, and instructional design*. Hillsdale. Lawrence Erlbaum Associates. 2000.

SKOVSMOSE, O. "Escenarios de investigación". *Revista EMA*, 6 (1). 2000.

STEFFE, L. P., & D'AMBROSIO, B.S. Toward a working model of constructivist teaching: A reaction to Simon. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26 (2) n. 1995.

INVESTIGACIONES E INNOVACIONES DEL IDEP



INVESTIGACIÓN SOBRE CURRÍCULO

UNA EXPERIENCIA DE INNOVACIÓN EN EL PRECÁLCULO DE LA EDUCACIÓN MEDIA, MEDIADA POR UNA INNOVACIÓN UNIVERSITARIA

*Cristina Carulla,
Edgar Guacaneme,
Patricia Perry¹*

En este artículo se da cuenta de algunos detalles relativos a una experiencia de trabajo conjunto entre diez profesores de matemáticas provenientes de tres colegios² del Distrito Capital y algunos miembros de “una empresa docente”, entre los que nos contamos los autores del presente texto.

El proyecto, titulado “ICEP. Innovación curricular en precálculo para la educación media”, fue financiado por el IDEP en el marco de la convocatoria de 1999 para “transferencia de innovaciones” y se llevó a cabo entre los años 1999 y 2000. Desde la perspectiva de “una empresa docente”, tuvo inicialmente el propósito fundamental de explorar la posibilidad de transferir, en el contexto de la educación media del sector oficial, algunos elementos de una innovación curricular³ vivida años atrás en un curso de precálculo que se desarrollaba en la Universidad de los Andes para estudiantes de ingeniería. Desde la perspectiva de los profesores y de las instituciones⁴ escolares a las que ellos pertenecían, el proyecto tuvo el propósito de abrir un espacio para la reflexión y la acción informada de los profesores sobre el currículo de matemáticas de grado décimo que tenían a su cargo en sus colegios.

¹ (“Una empresa docente” Universidad de los Andes). Aunque nuestros nombres aparecen en orden alfabético, queremos reconocer que nuestra contribución a la escritura del documento ha sido equivalente.

² Centro Educativo Distrital Miguel Antonio Caro (Jornada Mañana), Colegio Distrital La Amistad (Jornada Tarde), y Centro Educativo Distrital Brasilia Usme (Jornada Tarde).

³ Esta innovación curricular fue producto de un programa de investigación adelantado en 1995 con el propósito de explorar los efectos de la utilización de la calculadora graficadora en el curso ya mencionado. El uso de la tecnología portátil implicó, entre otros, cambio en la manera de llevar a cabo las clases, en el tipo de tareas que se proponían a los estudiantes como parte de su aprendizaje, en la manera de concebir el aprendizaje de los estudiantes y en consecuencia, en la forma de evaluarlos.

⁴ El trabajo realizado por los profesores en este proyecto se puede ver como un desarrollo institucional en el sentido de que tal trabajo fue permitido, avalado y apoyado de diversas maneras por los respectivos colegios a los que pertenecían y estaban representando durante la experiencia.

Al pensar en el significado de “transferir la innovación generada en la Universidad, a los colegios” nos venía a la mente la acepción más corriente del término “transferir”: llevar, pasar el producto de un lugar a otro (para que allí lo utilizaran). Aunque la innovación que se llevó a cabo en la Universidad dejó resultados tangibles, un libro de texto, un diseño curricular escrito en el que se pueden encontrar muchos detalles que permiten imaginar cómo sucedían las cosas en la clase, y por consiguiente se habría podido pensar en transferir a los colegios dichos materiales, en nuestra opinión la esencia de la innovación reside más en el proceso personal y social de construcción de significado y experiencia que busca unos resultados o conduce a ellos, que en los resultados mismos. Puesto que no vemos posible pasar o extender procesos de conocimiento, comprensión, construcción de significado, motivación, etc., de un sujeto a otro, entonces no vimos posible la transferencia de la innovación.

Más bien, sí vimos y seguimos viendo posible una acción de mediar el proceso que los profesores estaban dispuestos a llevar a cabo, influyéndolo deliberadamente con el conocimiento y la experiencia que obtuvimos al hacer nosotros nuestra propia innovación. Así, en este proyecto, “mediar la innovación en los colegios con la innovación de la Universidad” significó crear circunstancias que consideramos propicias para que los profesores pudieran tener una vivencia lo más “similar” posible a la vivida por quienes hicieron la innovación inicial. Naturalmente éramos y somos conscientes del carácter muy relativo que hay en la “similaridad” a la que estábamos apuntando. Sin embargo, lo que queríamos fundamentalmente era que los profesores pudieran encontrar un sentido y un significado propio para las diferentes tareas, prácticas y relaciones en las que los involucrábamos, y eso los llevara a iniciar cambios en algunos aspectos del currículo de matemáticas de grado décimo.

La mediación estuvo caracterizada de manera importante por la participación y la colaboración en el desarrollo de las diferentes tareas que se debían llevar a cabo. Para el efecto, se constituyó un grupo de catorce personas que se reunía sistemáticamente durante hora y media cada semana; el grupo estaba conformado por los diez profesores participantes y el grupo coordinador del proyecto. En tales reuniones se discutían los lineamientos generales del currículo para el grado décimo, aspectos relacionados con la didáctica de los temas que se estaban abordando y aspectos relativos a la innovación de la Universidad, se exponían también las dificultades y problemas encontrados durante las clases con los estudiantes con el fin de recibir los comentarios y sugerencias de los demás miembros del grupo, etc. Por su parte, los profesores de cada institución conformaron un grupo de trabajo con el fin de planear

conjuntamente lo que iban a realizar en sus clases. De esa manera, lo que cada maestro hizo en su clase fue una serie de actividades producto de lo que usualmente hace, de lo que le aportó el trabajo en el equipo del proyecto y de las decisiones tomadas en el grupo de trabajo de cada institución.

Como uno de los resultados del proceso de mediación adelantado en este proyecto, en el curso de cada profesor participante se concretó un currículo implementado que tiene algunos vestigios de la innovación de la Universidad y que, en todo caso, habrá que considerarlo como la versión primera de una innovación curricular que, de continuar su curso sistemáticamente, podría requerir de no menos de cuatro años para consolidarse.

Después de haber expuesto en esta sección una visión panorámica del proyecto, en la siguiente sección se presenta una breve descripción de la experiencia innovativa en la Universidad de los Andes, destacando de tal experiencia los ejes teóricos que sirvieron de guía en la construcción del diseño curricular en los colegios. En seguida se exponen detalles de la experiencia de innovación en los colegios participantes: se incluye una diferenciación de los contextos en los que se dieron las dos innovaciones –el universitario y el escolar; se describen las etapas de desarrollo del proyecto y se alude al registro sistemático de la experiencia de innovación. En la siguiente sección se discuten brevemente logros y dificultades evidenciados durante la mediación.



MARCO TEÓRICO

Como ya se dijo, la innovación que describiremos se generó en el marco de un proyecto de investigación. El equipo de investigación estaba conformado por cinco personas que jugaban dos roles diferentes: ser investigador de alguna temática relacionada con el problema de indagación y ser profesor de una sección del curso en el que debía utilizar la calculadora graficadora. Así, se dieron dos procesos simultáneos, uno de investigación y otro de innovación. Las ideas que presentamos a continuación aluden al proceso de innovación que vivió el grupo, y no a los resultados de la investigación.

Identificación de la crisis fundante de la innovación

Al iniciar la innovación, el contenido matemático del curso –centrado en el tema de funciones– se organizaba⁵ para su estudio, así: para cada tipo de

⁵ Tal organización del contenido era, a su vez, resultado de un proceso de innovación anterior.

función (lineales, polinómicas, racionales, con radicales) se trataba una serie de tópicos, entre los que cabe mencionar la resolución de ecuaciones e inecuaciones, la representación simbólica y su relación con la representación gráfica, y la resolución de problemas. Se enfatizaba el uso de la translación y la dilatación como herramientas conceptuales para hacer la representación gráfica de funciones sin tener que recurrir a la representación tabular, y más bien centrando la atención en la representación simbólica y el papel que en ella juegan los parámetros; también se insistía en el análisis del comportamiento de las funciones a través de métodos algebraicos; y en la resolución de ecuaciones e inecuaciones por medio de un método que combinaba lo gráfico con lo simbólico.

Profesor y estudiantes contaban con un programa que establecía, de manera general para cada día, la teoría que los estudiantes debían preparar por fuera de clase y los ejercicios que debían resolver para discutir en la clase siguiente; para ello se disponía de un libro de texto que se seguía muy de cerca. Eventualmente, el profesor proponía a los estudiantes otros ejercicios y algunos talleres especiales, diseñados por el coordinador⁶ del curso. Durante un par de semestres se utilizó la calculadora en las clases, pero los estudiantes no la llevaban a su casa y no estaba permitido utilizarla durante las evaluaciones; ocasionalmente se realizaban algunos talleres para el uso de la calculadora.

En un momento dado se tomó la decisión de que los estudiantes dispusieran de la calculadora graficadora como un recurso normal para la clase, es decir, que podían utilizarla para lo que requirieran y en cualquier momento del curso, incluida la evaluación. He ahí lo que detonó, echó a andar y sostuvo el proceso de innovación: su crisis fundante. El currículo existente dejaba de tener todo su sentido y coherencia pues mucho de lo que antes ocupaba la atención del profesor y el trabajo de los estudiantes, ante la nueva circunstancia, ya no ameritaba ni requería de la misma dedicación o esfuerzo. Por ejemplo, la calculadora resolvía ecuaciones e inecuaciones, hacía de manera rápida y segura las gráficas de las funciones, y, les mostraba el correspondiente comportamiento. Frente a eso, surgió de manera natural en los profesores del curso la pregunta sobre qué se debía entonces enseñar a los estudiantes, si todo lo que se les pedía que aprendieran lo hacía la calculadora. Una de las profesoras del curso (Mesa, 1995, p. 120) describe con mucha lucidez esa crisis:

⁶ Esta figura se daba por dos razones: en primer lugar, porque hay varias secciones del curso a cargo de varios profesores y en segundo lugar porque se pretendía unificar tanto como fuera posible el enfoque de enseñanza y la metodología de trabajo en las diferentes secciones del curso, y era el coordinador del mismo quien tenía a su cargo tal tarea.



Lo feo de un curso con calculadoras es la confrontación continua con lo que se supone son las matemáticas. Durante mucho tiempo consideré que era muy importante que el estudiante no tuviera calculadora en las evaluaciones; creía que de esa manera podía garantizar que estaba evaluando lo que él sabía y no lo que la calculadora era capaz de hacer. Cuando me enfrenté a la realidad de tener que permitir el uso de las calculadoras en las evaluaciones, se me paró el corazón: '¿qué preguntar entonces?, ¿cómo lograr que lo que el estudiante haga en su evaluación sea producto de lo que él sabe y no de lo que la calculadora es capaz de hacer?' (...) Y así, aunque esa sensación es bastante desagradable, el hecho de no haber tenido alternativa me obligó a buscar formas diferentes de hacer las preguntas en las evaluaciones; a indagar por otros aspectos que no había tenido en cuenta antes, a dejar menos tiempo al cómo (lo que hace la calculadora) y destinar más tiempo al por qué (...).

Caracterización, permanencia y sistematización

Se inició entonces un proceso intencionado y sistemático que duró cuatro semestres lectivos, período durante el cual el grupo de profesores se reunió semanalmente para diseñar actividades, discutir acerca de los objetivos de aprendizaje, y compartir experiencias positivas y negativas vividas con sus estudiantes al implementar lo planeado. Se quería llegar a tener una propuesta general de diseño curricular para el curso, que contemplara el uso de la calculadora como un hecho natural. En ese grupo, cada quien tuvo su propio rol. El líder dirigía permanentemente el rumbo y asignaba tareas específicas a cada uno; era el director del proyecto de investigación. Aunque cada quien hacía su propio proceso de diseño curricular, las personas de más experiencia diseñaban situaciones problemáticas "a la medida" de lo que se quería poner en juego, y todos los profesores del grupo las usaban en su curso. Algunas de tales situaciones se recogieron en un libro de texto (véase Gómez y Mesa, 1995).

En los períodos siguientes, los tres profesores que tuvieron a su cargo el curso de precálculo volvieron a implementar la propuesta y continuaron haciéndole ajustes. Tiempo después, el Departamento de Matemáticas de la Universidad suprimió el curso de precálculo del plan de estudio. Así que estas circunstancias impidieron poner a prueba la propuesta curricular en el mismo curso, pero con profesores que no hubieran participado en el proceso de innovación que la gestó; por tal razón no podemos hablar en este caso de la durabilidad del producto tangible de la innovación ni tampoco de un proceso de mediación con profesores que habrían tenido que participar en un proceso



de “enculturación” como medio para hacerse cargo del curso. Por otra parte, podemos afirmar que de los proyectos de investigación y de la sistematización permanente asociada con el proceso de innovación vivido, surgió un conocimiento profesional que se ha utilizado en diversos programas de formación de docentes y en particular, en el proyecto ICEP, objeto central de este texto.

Ejes de la innovación

En general, durante el proceso de innovación y como resultado del mismo se evidenciaron cambios en las visiones, las actitudes y el comportamiento docente de los profesores participantes. Por ejemplo, pasaron de ver las matemáticas como un conocimiento estático a verlas como un conocimiento en permanente cambio y construcción. El profesor dejó de verse como el poseedor del conocimiento y el validador del mismo, cuyo papel era resolver en clase los ejercicios que no podían desarrollar los estudiantes. En cambio, se percibió como un miembro más del grupo social de la clase, cuyo papel era proponer situaciones didácticas para propiciar el aprendizaje. El salón de clase dejó de ser el sitio para transmitir un conocimiento rígido y estático, para verse como un sitio en el que un conjunto de personas trabajaban para dar solución a problemas matemáticos. También el estudiante se pudo ver como gestor de su propio aprendizaje y no como un imitador de comportamientos.

También hubo cambios en el diseño y desarrollo curricular. Aquí resaltaremos aquellos cambios en el currículo que sirvieron de referencia en la mediación realizada por “una empresa docente” sobre el proceso de innovación iniciado por los tres colegios participantes en el proyecto ICEP.

Resolución de problemas

Los estudiantes debían resolver problemas. Éstos eran diseñados con una intención específica para cada tema y para la totalidad del curso. Podían ser resueltos con la ayuda de una calculadora graficadora, pero no, por ella. No eran rutinarios: no había una estrategia de solución predeterminada; en su solución se requerían algoritmos, pero éstos no eran suficientes para completar la tarea. Así, el uso de la calculadora debía ayudar al estudiante a explorar, a generar y validar conjeturas, a encontrar rápidamente resultados y a encontrar sus respuestas.

Sistemas de representación y conexiones entre ellos

La innovación enfatizó la existencia de diferentes sistemas de representación y las conexiones entre ellos. En la nueva propuesta se buscaba no sólo pasar de la representación simbólica a la gráfica, sino también de la gráfica a la simbólica,

identificando elementos especiales de las gráficas y haciendo la correspondiente traducción a lo simbólico. Se dio más importancia a lo gráfico a través del análisis de familias de funciones, y en lo algebraico se dio el rol de variable a los parámetros. La calculadora graficadora facilitaba la observación de familias de funciones. También se acentuó la importancia de representar y modelar, mediante funciones, fenómenos de la realidad. Se pedía a los estudiantes hacer un proyecto de investigación como si fueran diseñadores de cajas de una empresa y el gerente les pusiera una serie de condiciones para el diseño. Para tomar decisiones acerca del diseño pedido, tenían que hacer el análisis de varias funciones que modelaban ciertas relaciones entre las dimensiones de la caja y el área y el volumen, así como el costo de materiales y de producción de la caja.

Visión funcional

Este eje tiene que ver con la manera como se enfocaba el tema general. Se trataba de manejar la función como un objeto que se podía manipular y representar de diferentes maneras. Además, las expresiones simbólicas se podían interpretar de manera diferente: ya no eran ecuaciones en las que se buscara el valor de incógnitas, sino comparación de funciones para las que se buscaba una pareja ordenada que les fuera común.



ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

Como mencionamos antes, la convocatoria del IDEP para “transferencia de innovaciones” constituyó una oportunidad para explorar la posibilidad de generar, en instituciones de educación media, condiciones que potenciaran una innovación “similar” a la reseñada en la sección anterior. Bajo esta perspectiva, se decidió trabajar el proyecto con tres instituciones educativas del sector oficial que, por un lado, contaban con profesores de matemáticas que habían participado previamente en un proyecto de investigación⁷ adelantado por “una empresa docente” y en cursos de desarrollo profesional, y por el otro, manifestaron un interés institucional en participar en el proyecto. El proyecto contó así con la participación de diez profesores de matemáticas que tenían a su cargo los cursos de matemáticas de grado décimo, y de un equipo de investigadores de “una empresa docente”. Las instituciones ajustaron los horarios de los

⁷ El estudio se tituló “El análisis de contenido matemático como herramienta para la construcción de modelos pedagógicos: El caso de la función cuadrática”.

profesores participantes para permitirles la asistencia semanal a una reunión de trabajo en las instalaciones de la Universidad.

En lo que sigue de esta sección reportamos, en sendos apartados, algunos aspectos del desarrollo del proyecto, y de la estrategia utilizada para registrar sistemáticamente el proceso y sus resultados.

Desarrollo del proyecto

Una mirada retrospectiva al proyecto nos ha permitido identificar cinco etapas o momentos de desarrollo del mismo, a saber: (I) análisis de los contextos y establecimiento de acuerdos; (II) intercambios didácticos alrededor del tema “función lineal”; (III) elaboración e implementación de una propuesta curricular para el estudio de la función cuadrática; (IV) reconstrucción de aspectos del currículo implementado durante la innovación; (V) socialización. A continuación se describe brevemente el trabajo realizado en cada etapa.

(I) Análisis de los contextos y establecimiento de acuerdos

Desde el inicio teníamos la intuición de que la diversidad de los contextos –universitario y de las instituciones educativas– era un elemento que determinaría de manera fundamental la posibilidad de la transferencia. Decidimos entonces estudiar algunos aspectos de estos contextos, para lo cual se desarrollaron reuniones en las que cada una de las cuatro instituciones presentó información descriptiva de los respectivos contextos, y sus posibles implicaciones en las componentes curriculares.

Se explicitó entonces que la innovación en el curso de precálculo en la Universidad se desarrolló en un contexto específico caracterizado –y en cierto sentido, diferenciado de los contextos escolares– por:

1. Estudiantes que habían tenido contacto con el tema de funciones matemáticas en su vida escolar y –en consecuencia– con conocimientos matemáticos previos al respecto, con diversas experiencias mediadas por haber estudiado en diferentes instituciones escolares y con diferentes énfasis curriculares. Eran estudiantes que se mostraban interesados en las matemáticas puesto que habían decidido estudiar una carrera que las contemplaban.

2. Profesores que trabajaban –simultáneamente con el proceso de innovación– en un proyecto de investigación, que contaban y utilizaban los recursos técnicos y bibliográficos necesarios, convencidos de la necesidad y potencialidad de realizar un trabajo en equipo.



3) Un diseño curricular inicial, producto de un trabajo juicioso de grupo, que dio como resultado un libro de texto para el curso.

Igualmente pudimos establecer que en las tres instituciones escolares existía un ambiente favorable hacia el cambio, que el consejo directivo tenía como intención apoyar estos procesos, que los profesores contaban con la autonomía necesaria para realizar cambios, y que existía una brecha entre el discurso institucional (expresado, por ejemplo, a través del PEI) y la realidad (expresada, por ejemplo, a través del currículo desarrollado en matemáticas).

Una de las discusiones conjuntas acerca de los factores que determinan el cambio escolar en matemáticas, nos permitió colegir que el desarrollo curricular en matemáticas está realmente definido por las visiones y las arraigadas tradiciones de los profesores, así como por los documentos oficiales (e.g., indicadores de logros, programas curriculares del MEN). En consecuencia, pudimos advertir que era necesario que lo que se hiciera en el proyecto fuera “aceptado” por los profesores del área y apoyara el proceso de reflexión y cuestionamiento permanente de los profesores, y que el discurso matemático implementado estuviera acorde con los preceptos curriculares promovidos por el MEN.

De otro lado, a partir del análisis de los contextos escolares nos dimos cuenta de que la mayoría de los egresados de estas instituciones (cerca del 95%) no accedían a estudios profesionales, que algunos de ellos realizaban estudios técnicos o tecnológicos, y que un amplio porcentaje se vinculaban laboralmente como operarios. Este hecho nos conminó a indagar por los requisitos –respecto de la formación matemática– exigidos por algunas empresas que contratan bachilleres; el resultado de esta indagación nos mostró que salvo alguna formación respecto de procedimientos y conceptos aritméticos, las empresas están interesadas en que sus trabajadores tengan “capacidad de análisis”, “agilidad mental”, “razonamiento abstracto”, y “complejidad de pensamiento”.

Una vez descritos los contextos universitario y de las instituciones educativas, nos dimos a la tarea de establecer algunos acuerdos curriculares, que en la medida de las posibilidades atendieran a las diferencias y semejanzas entre éstos.

En primer lugar, acordamos que las tres instituciones deberían trabajar simultáneamente las mismas temáticas; se seleccionaron, entonces, como temas de estudio para el grado décimo las funciones lineal, cuadrática, logarítmica y exponencial, mientras que para el grado once, las funciones trigonométricas,

racionales y radicales. Esta selección implicaba ya una transformación curricular que se sustentaba en la idea de que a través del estudio de las diferentes funciones, de sus características, y de los aspectos que tienen en común, se logra una aproximación al concepto de función, esencia del precálculo. Además, establecimos que el estudio de estas funciones se debería guiar por los tres ejes descritos en la sección anterior, lo cual implicaba abordar los temas desde una perspectiva conceptual diferente a como se acostumbraba en las instituciones.

En segundo lugar, acordamos que no habría una metodología de aula unificada. Sin embargo, se enfatizó en la necesidad de utilizar situaciones problemáticas en el proceso de aprendizaje de los estudiantes, lo cual de hecho condicionaba el actuar esperado de profesores y alumnos. Adicionalmente, se previó que el uso de calculadoras graficadoras –que en la innovación generada en la Universidad jugó un rol determinante– no se podría dar hasta tanto no disponer de ellas en las instituciones, lo cual efectivamente se dio sólo un poco antes de finalizar el proyecto.

En tercer lugar, se acordó que los objetivos de aprendizaje de cada temática se irían construyendo en la medida en que se abordara el estudio de la misma. A este respecto, los profesores manifestaron su interés en plantear los objetivos de aprendizaje de acuerdo con algunos de los modelos de evaluación vigentes en el sistema educativo del Distrito Capital (e.g., los derroteros conceptuales del examen del ICFES y de la evaluación de competencias básicas).

En cuarto, y último lugar, se estimó conveniente no estandarizar la evaluación del aprendizaje, aunque se planteó la necesidad de realizar algunas pruebas comunes para todos los estudiantes, que permitieran establecer algunas regularidades y diferencias.

(II) Intercambios didácticos alrededor del tema “función lineal”

El inicio de esta etapa del desarrollo del proyecto coincidió con el inicio del año lectivo. Desde ese momento, y hasta finalizar el proyecto, el equipo de trabajo se pudo reunir semanalmente a realizar actividades académicas programadas previamente por el equipo coordinador. A través de estas sesiones compartíamos dudas; discutíamos tareas; reflexionábamos acerca de aspectos de contenido matemático, de enseñanza y de aprendizaje relativos a lo que se hacía y estaba sucediendo en las diferentes aulas; compartíamos talleres y experiencias de aula; discutíamos aspectos de la innovación inicial que podían ayudar a los maestros en sus decisiones en el aula; etc.

Inicialmente desarrollamos con los profesores un estudio de algunos aspectos vinculados con los ejes que habían orientado la innovación en la Universidad,

e hicimos una mirada a la función lineal desde estos tres ejes. Luego, como parte del estudio didáctico de la función lineal, propusimos la realización y análisis de mapas conceptuales de ésta. En estos mapas los profesores lograron expresar su comprensión de los ejes estudiados y la visión que tenían acerca de la complejidad temática de la función lineal. A partir de los mapas se reconocieron temas esenciales (e.g., pendiente, proporcionalidad, ecuaciones lineales) que estudiamos con un poco de atención, desde el punto de vista matemático y didáctico.

El panorama exhibido a partir de esta fase del estudio didáctico nos amplió las posibilidades de definir objetivos de aprendizaje para la función lineal, a la vez que complejizó las interpretaciones de éstos. Decidimos unificar los objetivos propuestos, haciendo uso de la matriz de niveles de competencias subyacente en las pruebas de competencias básicas de la Secretaría de Educación del Distrito Capital (véase SED, 1999, p. 35). Ahora bien, como la actividad escolar para el tema de la función lineal se desarrollaba de manera paralela a las sesiones en las cuales realizábamos las actividades descritas antes, y que el primer tema objeto de aprendizaje de los estudiantes era precisamente esta función, los profesores de cada institución tomaron decisiones acerca de la manera como iban abordando el tema con sus estudiantes, generando al menos tres estructuras temáticas diferentes. Un grupo de profesores asumió el acercamiento a la función lineal a partir del estudio de situaciones de proporcionalidad; otro equipo decidió aproximarse a la idea de función desde la idea de relación, y a la de función lineal desde la idea de función; el otro grupo de profesores, utilizó la presentación de un sinnúmero de situaciones funcionales diversas para identificar aquéllas que satisficieran las condiciones de linealidad. Esta diversidad de aproximaciones, si bien amplió el panorama de posibilidades para abordar el mismo tema, no favorecía el trabajo dirigido y el aprendizaje colaborativo que se pretendía realizar en las sesiones de trabajo conjunto.

A pesar de esta diversidad, logramos diseñar una evaluación del aprendizaje de los estudiantes con respecto a la función lineal. Por supuesto que esta evaluación fue objeto de análisis con los profesores participantes; en este sentido pudimos discutir el contenido de la misma, la pertinencia de las preguntas, las expectativas de logros de los estudiantes, y la manera como sería ideal mirar los resultados. Una vez logrados los acuerdos y ajustes necesarios, la actividad de evaluación se aplicó a los estudiantes, y se realizó un análisis de los resultados. Sorprendentemente, las diferentes aproximaciones a la temática no determinaron diferencias considerables en los resultados obtenidos por los estudiantes, estos resultados no superaron las expectativas que tenían los profesores.

(III) Elaboración e implementación de una propuesta curricular para el estudio de la función cuadrática

Esta etapa se inició a mitad del año lectivo, y durante ella el trabajo se enfocó en el tema de la función cuadrática. A diferencia de lo sucedido con la función lineal, el estudio de la función cuadrática por parte de los profesores y coordinadores del proyecto precedió a la implementación de las actividades escolares relativas al tema, en las aulas.

Para esta función, al igual que para el caso de la función lineal, realizamos actividades dirigidas a lograr un conocimiento didáctico–matemático de la función cuadrática. Una de las actividades realizadas tuvo como objeto de estudio un mapa conceptual resultado del proyecto de investigación reseñado al inicio de esta sección; éste puso en evidencia la complejidad de la temática a tratar con los estudiantes, a la vez que exhibió un panorama para definir objetivos de aprendizaje deseables y factibles. Simultáneamente, esta actividad nos permitió reconocer que el estudio de las familias de funciones, característico de la innovación en la Universidad, implica la construcción previa del concepto de función, y que en el caso de los estudiantes de décimo grado, ésta no se había dado y era necesario realizarla previamente. Este hecho condicionó las actividades realizables con estos estudiantes e impuso diferencias y limitaciones a la posibilidad de transferir la innovación original.

Una actividad adicional consistió en el diseño de situaciones de clase, por parte del equipo de profesores de cada institución, las que se sometieron a la crítica de colegas y del grupo coordinador. Estas actividades no fueron utilizadas con los estudiantes, pues decidimos diseñar una secuencia de talleres para desarrollar con los estudiantes, en torno al estudio de algunos aspectos relacionados con las funciones cuadráticas. Al menos tres razones nos llevaron a tomar esta decisión: en primer lugar, teníamos la percepción de que las actividades que los maestros habían realizado para el estudio de la función lineal y las que habían diseñado para el estudio de la función cuadrática no podían catalogarse como innovadoras; en segundo lugar, el hecho de que cada quien desarrollara aproximaciones tan diferentes a una misma temática, no permitía un intercambio de información y experiencias que propiciara una construcción colaborativa de conocimiento y un significado compartido de las experiencias individuales; y, en tercer lugar, vimos en ésta la posibilidad de poner en juego, es decir poner a prueba, nuestros conocimientos como innovadores.

La propuesta curricular resultante (Guacaneme y Perry, 2000) consiste en una secuencia de seis talleres, o actividades de aula, diseñados para introducir elementos básicos del tópico funciones representadas por polinomios de grado



dos; estos talleres están acompañados de sendas reflexiones didácticas que incluyen aspectos como: intencionalidad del taller, consideraciones metodológicas, y, consideraciones acerca de las preguntas y actividades propuestas y sus posibles respuestas o desarrollos.

En los talleres se aborda el estudio de ocho funciones (representadas simbólicamente por polinomios de primer, segundo y tercer grado) que proceden y se refieren a un contexto específico: la variación de algunas de las magnitudes determinadas en una caja sin tapa. A través de estas funciones se estudian conceptos como el de variación, y se resignifican procedimientos como la graficación de funciones y la modelización matemática; de otro lado, se enfatiza el trabajo de aspectos funcionales en el sistema de representación tabular o numérica. Estas temáticas, procedimientos y tipos de representación constituyen una característica que diferencia esta propuesta de la implementada en la innovación en la Universidad.

El tipo de actividad implicada en los talleres pretendía imponer relativas alteraciones en el rol de los estudiantes y del profesor. Los estudiantes –de manera individual y colectiva– debían desarrollar actividades que les implicaba escribir textos, realizar construcciones y mediciones, registrar resultados, someter a discusión sus elaboraciones, etc. Los profesores observaban el proceso de los estudiantes, les cuestionaban sus resultados, les formulaban preguntas que apoyaban el procesos, dirigían las plenarias de presentación de resultados, y promovían acciones de aprendizaje colaborativo.

Durante las reuniones de coordinación realizábamos actividades dedicadas a resolver, analizar, comentar y replantear cada uno de los talleres. Con esta formación, los profesores los implementaron en el aula, para lo cual realizaron algunas transformaciones frente a lo propuesto, que atendían al estado de conocimiento de los estudiantes, su valoración de lo fundamental en el aprendizaje, su interés en algún aspecto implicado en el taller, su conocimiento acerca de la intencionalidad del taller, etc. Posteriormente, durante las reuniones de coordinación, cada profesor comunicaba las dificultades y aciertos de sus estudiantes, las dificultades y aciertos que había tenido como profesor, y los cambios que había hecho o consideraba se debían hacer.

(IV) Reconstrucción de aspectos del currículo implementado durante la innovación

En esta etapa, que se desarrolló durante los dos últimos meses del proyecto, se conminó a los profesores a reflexionar acerca de todo el proceso vivido. Bajo esta intención se les pidió que hicieran un reporte acerca de lo que cada institución hizo para estudiar y desarrollar el tema de función lineal. En este

reporte debían describir los aspectos innovativos respecto a la metodología, al contenido matemático, al papel de los estudiantes, al papel del profesor, a la evaluación y al tipo de conocimiento privilegiado; explicitar las dificultades detectadas en la implementación de la innovación y los logros alcanzados a través del proyecto; y, sintetizar algunas de las reflexiones acerca de las relaciones entre la innovación realizada y el PEI, y entre ésta y el plan de estudios. Igualmente se les solicitó que hicieran y reportaran un análisis de los resultados obtenidos en la evaluación propuesta para la función lineal, y de los desarrollos logrados por los estudiantes al sexto taller de la propuesta curricular relativa a aspectos de la función cuadrática.

Como resultado de esta actividad, cada institución cuenta con la compilación de una gran cantidad de información acerca del desarrollo del proyecto. Ésta incluye el reporte de las actividades realizadas por los profesores y por sus estudiantes. La información procedente de los tres colegios está consignada en el informe final de este proyecto; aunque no presentamos aquí un resumen, podemos afirmar que esta actividad hizo posible que los profesores valoraran aún más el trabajo realizado.

(V) Socialización

En al menos dos momentos del desarrollo del proyecto se realizaron actividades de divulgación de información. En un primer momento, cuando el proyecto llevaba no más de cuatro meses de ejecución, presentamos un informe de avance ante los funcionarios del IDEP y la evaluadora del proyecto. Por la misma época desarrollamos una ponencia acerca del proceso de “transferencia” de la innovación, en el marco de un evento programado por el IDEP.

Al finalizar el proyecto realizamos varias actividades de socialización del proceso y de sus resultados. Preparamos, junto con los profesores, algunos carteles que presentamos en la Feria de innovaciones educativas –evento organizado por el IDEP– al igual que los materiales que cada grupo de profesores había recopilado en la etapa descrita inmediatamente antes. Además, en un evento organizado en Maloka desarrollamos una presentación y un taller en el que participaron profesores de varias áreas del conocimiento.

Igualmente, cada uno de los grupos de profesores de las instituciones escolares presentó su experiencia a profesores de la institución y de su zona.

Para finalizar el proyecto, realizamos una reunión con los directivos y algunos profesores de matemáticas de las instituciones, en la cual planteamos tanto experiencias y reflexiones logradas a través del proyecto, como las posibilidades y exigencias de iniciar una segunda fase, a través de un nuevo proyecto. Esto



último tuvo eco institucional al aceptar el reto de presentar una propuesta de innovación en el marco de la Convocatoria 04 promulgada por el IDEP.

Registro sistemático del proceso y algunos resultados

Convencidos de la importancia de llevar por escrito un registro sistemático de la experiencia de innovación que se estaba viviendo, y a la vez, conscientes de lo difícil que resulta llevar adelante tal tarea cuando no es usual hacerla –a comienzo de mayo, cuando aún se trabajaba en torno de la función lineal– el equipo coordinador decidió convertirla en una tarea central del proyecto y en consecuencia se abrió un espacio en la reunión semanal para revisarla y hablar sobre su contenido. La reflexión que nos condujo a tal decisión incluía las siguientes consideraciones:

En primer lugar, dadas las características de la práctica en la que está inmerso el trabajo del profesor –el sinnúmero de decisiones que debe tomar en su quehacer diario, la cantidad y diversidad de asuntos a los que debe atender de manera inmediata, el poco tiempo disponible para actividades propias de su práctica que se realizan fuera del aula (e.g., planeación y evaluación de la enseñanza y sus efectos), etc.– llevar un registro escrito es imprescindible para el profesor si quiere poder avanzar en la comprensión y en la reflexión de los asuntos que le preocupan o despiertan su interés. Al no hacerlo, hay una alta probabilidad de que olvide los detalles de lo que ha hecho en un determinado momento con relación a un cierto asunto, los resultados obtenidos, los problemas y dificultades encontrados, los esbozos de ideas para hacer modificaciones que fueron surgiendo durante la acción. Así, en el mejor de los casos, cuando el profesor vuelva a considerar el asunto sobre el que ya ha trabajado, sobre el que ha tenido ya experiencias, se encontrará en situación y actitud de iniciar una reflexión, un trabajo, en vez de retomarlos en el punto donde los había dejado, con la consecuencia natural de repetirse en ideas, errores y concepciones, de permanecer estancado en su comprensión del asunto.

En segundo lugar, llevar un registro escrito, es importante para quien lo hace no sólo porque le sirve como memoria sino también porque le abre una oportunidad de reflexión que incluye identificar las ideas relevantes, organizarlas, relacionarlas, analizarlas, explicitar supuestos, sacar conclusiones, etc., acciones éstas a través de las cuales se logra comprender mejor el asunto que centra la reflexión. Es decir, el escribir para otro se convierte en un camino para pensar y volver a considerar asuntos específicos.

En tercer lugar, si la innovación tiene un carácter institucional, es decir, si se pretende que permanezca en el tiempo y no dependa totalmente de quienes

la iniciaron, sino que a ella se puedan vincular otros docentes, es entonces indudable la importancia de tener un registro que dé cuenta de detalles del proceso y de los resultados que se fueron encontrando durante el mismo, de manera que sirva como fundamento para la integración de los docentes que, sobre la marcha, se vayan involucrando en la innovación.

Por otra parte, no es desconocido para quienes trabajamos en el sistema educativo (investigadores, formadores de profesores, funcionarios públicos del sistema educativo y profesores) que el profesor de matemáticas no tiene como prácticas sistemáticas el reflexionar ni el escribir acerca de su quehacer docente. Así, no obstante reconocer la importancia de llevar un registro escrito sobre la experiencia de innovación, somos conscientes de que realizar tal tarea exige un gran esfuerzo y una gran dedicación del profesor, en parte porque no sólo se trata de saber escribir, de saber redactar ideas de acuerdo con ciertas normas y estándares, y de sacar un tiempo para hacerlo. La exigencia tiene que ver principalmente con las ideas y conceptos que se tienen y usan para dar cuenta, explicar y problematizar lo que constituye el quehacer docente, así como también tiene que ver con las exigencias que impone ser un practicante reflexivo.

Era entonces necesario concretar lo más posible la tarea de registro que esperábamos de parte de los profesores. Fundamentalmente, teníamos la intención de que ellos enfocaran su atención sobre aspectos específicos de su vivencia en el proyecto y dieran cuenta de ellos. Así, pues, manejamos dos estrategias que, sin desbordar el trabajo de los docentes, nos proporcionaron alguna suerte de registro escrito de la experiencia de innovación vivida en el proyecto. Dichas estrategias fueron: (I) escribir un texto sobre algo sucedido en la clase que le llamara poderosamente su atención; (II) poner en común detalles relativos a la implementación de una propuesta de enseñanza común para todos los cursos implicados. A continuación se describen brevemente y se presentan resultados obtenidos a partir de ellas.

(I) Escribir un texto sobre algo sucedido en la clase que le llamara poderosamente su atención

Solicitamos a los profesores que escribieran un texto acerca de algo sucedido en alguna de sus clases, que les hubiera llamado la atención de manera especial. Se trataba de una tarea para desarrollar individualmente, que debían entregar en la reunión semanal de los viernes. La tarea de registro sistemático también se planteó para uno de los coordinadores del proyecto, quien debía dar cuenta de algún incidente ocurrido durante la reunión semanal con los profesores, que le hubiera llamado poderosamente la atención.



Al plantear tal tarea hicimos explícitos los siguientes puntos que queríamos que tuvieran en cuenta al realizarla:

1. Debían enfocar la atención en algo que les resultara relevante e interesante, de manera que para ellos tuviera sentido el detenerse a reflexionar sobre el asunto; además, en el texto debían explicitar qué les llamó la atención del incidente enfocado y por qué.

2. Debían dar detalles del asunto sobre el que estaban enfocados; es decir, no era suficiente nombrar fenómenos (e.g., desmotivación de los estudiantes, dificultades de aprendizaje de los estudiantes) ni tampoco era suficiente dar detalles utilizando sólo adjetivos o frases adverbiales que no necesariamente tienen un significado claro y preciso para todos (e.g., “mis estudiantes han aprendido muchísimo acerca de las fracciones”). En cambio, se les pedía hacer descripciones incluyendo detalles que permitieran caracterizar de alguna manera aquello de lo que estaban hablando, y hacer referencia más a asuntos particulares que a asuntos generales.

3. Además de la descripción se les pedía que hicieran una reflexión en torno al asunto que les había llamado la atención.

Aunque la tarea se planteó para todos los profesores participantes en el proyecto, se quería seguir con algún cuidado el rastro de los registros de tres profesores, y además, darles realimentación a través de comentarios escritos de parte de uno de los coordinadores de “una empresa docente”, con miras a lograr que los textos cumplieran cada vez más claramente los requisitos que se habían establecido. Así, pues, de cada colegio se seleccionó un profesor que fue quien se comprometió a entregar semanalmente la tarea acerca de algún suceso ocurrido siempre en el mismo curso. Los demás profesores también debían escribir el texto, entregarlo en la reunión de los viernes y en caso de que quisieran podían darlo a conocer en la misma reunión.

Tal como se planeó, cada una de las tres profesoras seleccionadas –una de cada colegio– entregó semanalmente un texto en la reunión de los viernes y, con un desfase de una semana, recibió un texto de comentarios y sugerencias acerca de su escrito, con el que se pretendía explicar e ilustrar qué era lo que se esperaba que ellos reportaran por escrito. Para todo el grupo, en dos reuniones se hicieron comentarios alusivos a lo que se veía que estaban incluyendo en sus textos y lo que se esperaba que incluyeran.

El registro escrito realizado por uno de los miembros del equipo coordinador acerca de algo sucedido en las reuniones de los viernes se utilizó en tres ocasiones para ilustrar el tipo de contenido que esperábamos obtener de parte de los

profesores. Al comenzar el estudio e implementación de la propuesta curricular acerca de la función cuadrática, el registro escrito de esta persona se cambió por un registro oral al final de cada reunión.

En términos generales, los profesores en sus textos no explicitaron un suceso o un incidente que les hubiera llamado la atención de manera especial. Señalaron eventos, hechos ocurridos en su clase dando una contextualización que en la mayoría de las ocasiones era insuficiente para poder reconocer la relevancia y el sentido que para el profesor podía tener el incidente en el marco correspondiente.

Aunque para los últimos textos la situación varió un poco, la mayoría de los textos revisados presentan pocos detalles, pocas explicaciones, ampliaciones o aclaraciones acerca de lo que se expone. Sin embargo, parece ser que el ejercicio de escribir este tipo de texto llevó a los profesores a revisar con algún detenimiento tareas escritas de sus estudiantes pues los registros, en la mayoría de los casos, dan una somera descripción de las respuestas de los alumnos.

Contamos con una buena cantidad de textos que registran incidentes específicos de las clases de todos los profesores participantes. Sin embargo, es difícil encontrar una forma de presentar un resumen o un reporte general de lo expuesto en tales textos, y probablemente no tenga mucho sentido hacerlo. Consideramos que el valor principal de la actividad de registro así realizada está en el ejercicio de una capacidad no muy desarrollada hasta el momento en los profesores: la comunicación escrita. Adicionalmente, los registros hechos pueden servir de referencia a quien los escribió para reentrar en su práctica (rememorar momentos significativos) cuando los retomen.

(II) Poner en común detalles relativos a la implementación de una propuesta de enseñanza común para todos los cursos implicados

En la tercera etapa del desarrollo del proyecto –estudio e implementación de una propuesta curricular para la función cuadrática–, descrita en la sección anterior, tuvo lugar la otra estrategia usada en el proyecto para registrar información acerca de la experiencia de innovación.

En la reunión semanal que tenía el equipo del proyecto para tratar asuntos del mismo, a partir de finales de julio y hasta finales de septiembre se abrió un espacio para estudiar con algún cuidado la propuesta curricular y también para que los profesores pudieran contar detalles acerca de la implementación de la misma. En tales reuniones (diez en total) se hizo una grabación de audio y

luego se realizó la correspondiente transcripción. A partir de cada transcripción, se produjo un texto que es interpretación de lo reportado por los profesores con respecto a la implementación de la propuesta; tales textos incluyen, en notas de pie de página o en la subsección del final, comentarios y consideraciones formulados por los coordinadores, ya fuera en la reunión misma o durante la elaboración del texto mismo. En busca de validar el contenido de tales textos, los cuatro primeros se entregaron a los profesores para su lectura y comentarios; al respecto no hubo explicitación de diferencias u objeciones.

Al organizar la información registrada por medio de esta estrategia fue posible encontrar alusión frecuente –aunque muchas veces no explícita– de los profesores a por lo menos tres aspectos: qué de la experiencia fue novedoso para ellos o los alumnos, qué condiciones limitaron las posibilidades de acción en el proceso de innovación, cuáles fueron sus preocupaciones más fuertes con respecto al cambio. En lo que sigue se amplía tal información.



CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Qué fue novedoso

La experiencia de profesores y alumnos con la implementación de por lo menos una parte de la propuesta curricular fue novedosa en varios sentidos. Es la primera vez que:

- dedican tanto tiempo al desarrollo de un tópico y entran en tantos detalles durante su estudio;
- hay una oportunidad real para que los estudiantes participen de manera más autónoma en su proceso de aprendizaje;
- se varía el esquema habitual de clase, revisión de tarea, explicación del tema, ejercicios de aplicación;
- hay una oportunidad para poner en juego y revisar muchos y diversos elementos del conocimiento matemático de los estudiantes;
- hay una oportunidad para comenzar a construir significado de “hacer matemáticas” en el salón de clase a través de realizar acciones como estimar, argumentar, conjeturar, validar resultados, etc.
- la evaluación de los estudiantes se da durante el proceso de aprendizaje, influye las decisiones que toma el maestro durante tal proceso y consiste en

algo más que repetir algoritmos escritos en el cuaderno frente a situaciones similares a las tratadas en clase;

La experiencia de un trabajo compartido y socializado con colegas y profesores universitarios en torno al estudio y la implementación de una misma propuesta curricular propició oportunidades para percibir elementos relativos a aspectos cognitivos y didácticos no percibidos antes de manera tan clara. Por ejemplo:

- aunque matemáticamente expresiones como x^2 , $4x^2$, $(2x)^2$, $(4x)x$ son equivalentes, desde el punto de vista cognitivo, para los estudiantes no necesariamente lo son, pues cada una de ellas representa no un resultado sino más bien un proceso;
- para poder visualizar algo particular (e.g., el área del papel de la caja, el área de papel desperdiciado) desde la perspectiva de los estudiantes es diferente tener la caja desarmada o armada;
- incluso con temas matemáticos elementales (e.g., función cuadrática) es necesario y posible re-construir el conocimiento del profesor no sólo del tema sino también didáctico;
- para identificar y reconocer un objeto matemático no es suficiente con atender a sus características. Es necesario poderlo diferenciar de otros que le sean comparables en algún aspecto. En consecuencia, desde el punto de vista de la didáctica parece apropiado abordar la comprensión de los objetos a través de establecer semejanzas y diferencias con otros, lo que va en contravía con la compartimentación de los temas;
- el cambio más importante en el tipo de actividades propuestas a los estudiantes no está en proponerles guías para que ellos las desarrollen; está en el tipo de tareas que debe hacer el estudiante como medio para construir su comprensión (e.g., explorar regularidades, describir procedimientos, comunicar ideas matemáticas, usar diversas formas de representar un concepto, hacer conjeturas, ponerlas a prueba, discutir y argumentar acerca de soluciones que da a una pregunta, versus, seguir el discurso que arma el profesor a través de preguntas cerradas, recordar, poner atención a lo que dice el profesor, copiar del tablero, aplicar algoritmos para solucionar tareas específicas).

Condiciones que limitaron las posibilidades de acción en el proceso de innovación

No es usual que los estudiantes hagan trabajo para la clase de matemáticas por fuera de ella. En consecuencia, no fue acertado el supuesto de que la

realización de los talleres se podía hacer parcialmente como trabajo extraclase. Hay una gran cantidad de actividades escolares y circunstancias externas al profesor que se interponen en el desarrollo regular de las clases de matemáticas, lo que tiene como consecuencia la dificultad de crear y mantener un ritmo de trabajo adecuado para mantener la motivación y dedicación tanto de los estudiantes como del profesor.

Preocupaciones de los profesores con respecto al cambio

Aunque los profesores no llegaron a explicitarlo como se expone a continuación, de sus comentarios se detectan algunas preocupaciones que los agobiaron durante el proceso de cambio:

- una tensión entre las intenciones, explícitas o no, del profesor con respecto al tipo de experiencia que considera deben tener sus estudiantes para aprender matemáticas, el supuesto no cuestionado que hace con relación a la cantidad de tópicos que se deben tratar en la clase de matemáticas y el tiempo real con el que cuenta para realizar lo que considera que debe realizar;
- una tensión entre la participación que se da a los estudiantes –tanto individualmente como en grupo– en la construcción del conocimiento matemático escolar y la interacción profesor-estudiantes-conocimiento matemático dirigida principalmente por el profesor puesto que es quien tiene el conocimiento y por tanto la autoridad para validar el conocimiento de los estudiantes.

Logros y dificultades

En esta sección describimos, desde nuestra perspectiva, los principales logros y dificultades del desarrollo del proyecto ICEP. Para hacer tal reporte utilizamos categorías que aluden a los diversos actores que intervinieron en el proyecto, a saber: estudiantes, profesores de matemáticas, instituciones educativas, y el grupo coordinador del proyecto. Reconocemos que la división generada por estas categorías es un tanto ficticia y que corresponde a una necesidad de reportar una complejidad de manera analítica, más que a una característica intrínseca de tal complejidad.

En relación con los estudiantes

La tradicional cultura escolar describe roles específicos arraigados en cada uno de los actores (e.g., estudiantes, profesores, saberes, etc.). En esta cultura, no es habitual que los estudiantes puedan vivir experiencias de aprendizaje

de las matemáticas que impliquen acciones radicalmente diferentes a copiar del tablero, hacer ejercicios y tareas, y responder evaluaciones.

La realización del proyecto ICEP, y en particular de su tercera etapa, permitió generar en las aulas de clase –y eventualmente fuera de ellas– un ambiente de aprendizaje que transformó el papel jugado por los estudiantes. En vez de cumplir una función de copiantes, tuvieron que generar sus propios textos descriptivos y argumentativos; esto les exigió y permitió evidenciar sus limitaciones y potencialidades en la comunicación escrita de ideas matemáticas. No les fue posible repetir procedimientos pre-enseñados, tuvieron que interpretar, ejecutar y/o diseñar procedimientos matemáticos para descubrir y –ocasionalmente– construir sus conocimientos; estos procedimientos implicaban no sólo el aspecto algorítmico sino también procesos de generalización, identificación de regularidades, representación –entre otras competencias matemáticas.

Por otro lado, la ausencia, en los estudiantes de una disciplina académica que implique actitudes de compromiso personal con el trabajo escolar dentro y fuera del aula de clase, se convirtió en la mayor dificultad a enfrentar. El incumplimiento y la impuntualidad en la elaboración de las tareas y los bajos niveles de concentración en el desarrollo de las actividades, por parte de algunos estudiantes, fueron algunos de los factores principales que dilataron la duración prevista para las actividades. Al respecto, entendemos que no es un asunto sencillo modificar las actitudes que durante más de diez años el sistema educativo ha permitido –y hasta promovido– en los estudiantes vinculados a la innovación; pero a la vez reconocemos que la innovación procuró también modificaciones de estas actitudes.

En relación con los profesores de matemáticas

Generar cambios significativos en la escuela, y particularmente en las clases de matemáticas, es un proceso extremadamente exigente, que demanda de los profesores una excelsa actitud y un compromiso excepcional con la profesionalización de su quehacer docente. Este alto nivel de exigencia se constituye en uno de los mayores obstáculos a los que se vieron enfrentados los profesores que participaron, a la vez que configura el ambiente donde reside el principal logro para ellos: haber podido hacer parte protagónica de una nueva experiencia que les mostró tanto la posibilidad de transformar la cultura escolar matemática como las exigencias implicadas en este proceso.

En este sentido, la selección –de entre la amplia lista de temas de grado décimo– de unos pocos temas matemáticos, no sólo se pudo reconocer como

una manera de reducir el currículo propuesto, sino también como una manera de ampliarlo, pues permite contemplar el trabajo sobre otras competencias matemáticas (e.g., la generalización, la elaboración de conjeturas, el reconocimiento de regularidades, la argumentación, etc.) tradicionalmente relegadas o subordinadas por la cantidad de los contenidos temáticos.

Además, hay que resaltar la actitud positiva y el alto nivel de compromiso de los profesores frente a los retos ligados a la innovación. Esto se expresó a través de múltiples manifestaciones; una de ellas, la dedicación de tiempo adicional al escolar. Con mayor frecuencia de la esperada, los profesores atendieron alumnos, realizaron sesiones de clase en días y horas extras, participaron de talleres de manejo de las calculadoras, y prepararon las tareas propuestas por los tutores de “una empresa docente”, por fuera del tiempo institucional, es decir, de su jornada de trabajo. Creemos que esta actitud y compromiso fueron promovidos por la satisfacción que sentían al advertir que tanto ellos como sus estudiantes estaban viviendo nuevas experiencias de aprendizaje, difícilmente posibles al margen de un proyecto de innovación.

Algunos de los profesores participantes tienen un reciente pasado académico en el que se reconoce la realización de reflexiones y acciones que favorecen su actitud y aptitud académica en pro de los procesos implicados en la innovación; para ellos las reflexiones didácticas abordadas durante el proyecto ICEP parecen haber tenido mayor significado y relevancia, en cierto sentido, porque pudieron interpretarlas desde perspectivas no tradicionales ni ingenuas. Otros profesores, al comenzar el proyecto, no mostraban acciones y compromiso significativos con su formación y actuar docente; a ellos se les percibía un poco marginales frente al proyecto. Esta diferencia de formación y acción, no siempre favorecía el desarrollo de las actividades constitutivas del proceso de innovación.

De otra parte, las diferentes aproximaciones asumidas por cada uno de los grupos de profesores, en la segunda etapa del proyecto (aquella que tenía como objeto de estudio la función lineal y afín), no permitieron un lenguaje común en torno a la estrategia metodológica y a los énfasis temáticos empleados en clase; sólo posibilitaron un marco temático común. Este hecho se constituyó en una dificultad para el actuar y reflexión colectiva de los profesores participantes del proyecto.

En la tercera etapa del proyecto, la implementación de la propuesta curricular relativa a la función cuadrática se dio de manera casi simultánea al diseño de la misma; en este sentido, los profesores no tenían preestablecidos derroteros suficientemente explícitos que demarcaran el rumbo que transitarían

a través de la propuesta. Este hecho dificultaba un poco el actuar docente durante las actividades y en ocasiones generó anticipar la reflexión sobre algunas temáticas consideradas en talleres posteriores. Esta dificultad se presentó fundamentalmente en los primeros talleres de la propuesta y se superó para los últimos de la misma.

En relación con las instituciones educativas

Las instituciones, como las personas, aprenden de las experiencias vividas y de la reflexión sobre éstas. Este aprendizaje es mucho más potente cuando las experiencias son novedosas y cuando la reflexión tiene la intencionalidad de generar aprendizajes; éstos difícilmente se logran cuando la repetición de los ritos y roles escolares caracteriza a la institución educativa. Desde esta perspectiva, el principal logro institucional radica en poder contar con una experiencia de innovación que ha permitido identificar tanto los costos y exigencias que un proceso tal demanda a todos los agentes institucionales, como los aprendizajes que ésta puede generar.

En esta dirección, las instituciones pudieron evidenciar, entre otros hechos: la necesidad de asumir los procesos de innovación como prolongados esfuerzos de toda la comunidad educativa, la necesidad de considerar como parte de la carga académica de los profesores vinculados con la innovación, la labor que el desarrollo del proyecto les demanda; la potencialidad del trabajo en equipos de docentes; la necesidad de mantener el apoyo institucional a proyectos que permitan la continuidad y fortalecimiento de la innovación; y la posibilidad, por falta de apoyo económico, de dar por terminado un proceso de innovación que apenas inicia.

A este respecto es necesario reconocer que, en términos generales, se logró una adecuada colaboración de las directivas de las instituciones. Esta colaboración se pudo evidenciar en los permisos otorgados a los profesores para asistir a diferentes actividades relacionadas con el proyecto; en la adecuación de horarios de clases que permitieron que los profesores pudieran participar de las reuniones semanales con el grupo coordinador; y, en una actitud receptiva frente a la participación institucional en el desarrollo y socialización del proyecto.

Otro logro para las instituciones participantes consistió en la elaboración y presentación, ante el IDEP, de propuestas⁸ de innovación curricular en el aula para posibilitar la continuación del proceso que se inició en el proyecto

⁸ Esta acción coincidió con la finalización del proyecto ICEP, en octubre de 2000.

ICEP. El logro fue aún mayor: tales propuestas fueron aprobadas y en la actualidad se están desarrollando. La elaboración, por parte de los profesores, de las nuevas propuestas de innovación, y el apoyo institucional a éstas, son una clara muestra de la valoración lograda del proyecto ICEP.

Con respecto a las dificultades encontradas cabe mencionar que el tiempo que los maestros pasan con sus estudiantes en sus clases está condicionado por una serie de actividades institucionales (e.g., paseos, jornadas sindicales, jornadas pedagógicas, izadas de bandera), por la intensidad horaria programada, y por los días en que las clases están programadas (por la Ley Emiliani, no se tiene la misma periodicidad si están programadas clases los lunes o los martes). Si bien esta situación es “normal” en las instituciones, al parecer fue mucho más evidente para los profesores dadas las condiciones de la innovación. En efecto, los profesores advirtieron que el desarrollo de la innovación exige continuidad, y que las situaciones descritas arriba entorpecen la continuidad del proceso y lo obstaculizan, dificultando o postergando el cumplimiento de las metas semanales programadas. Estas circunstancias generaban una gran angustia en algunos de los profesores que veían un lento avance en el desarrollo de las temáticas; esta angustia se sumaba a la generada por la consciencia de estar cambiando el statu quo de los contenidos del curso y de los procesos metodológicos de sus clases. La dificultad generada por estas circunstancias puede ser controlada a través de una buena planeación institucional, exigida y promovida por los maestros mismos.

De otra parte, el hecho de que el proceso de articulación de la innovación al PEI de cada institución sea prolongado, dialéctico, participativo, y que además exija acciones que trasciendan la inclusión de ésta en un documento escrito, genera dificultades institucionales que se pueden evidenciar en la marcada diversidad de aproximaciones docentes a la propuesta curricular. Por ejemplo, en uno de los colegios del proyecto, uno de los profesores que participaba de la innovación fue trasladado y el profesor que lo reemplazó no se vinculó con el proyecto, lo que ocasionó dejar a uno de los cursos décimos por fuera de la innovación. En la medida en que la innovación haga parte real y efectiva del Proyecto Educativo Institucional, se logrará que este tipo de cosas dejen de suceder, y que disminuya la incidencia negativa en las innovaciones curriculares.

En relación con el grupo coordinador del proyecto

La experiencia como mediadores en la iniciación del proceso de innovación de los tres colegios, nos permitió reconocer la potencialidad de la experiencia lograda a través del proceso de innovación curricular en la Universidad de los

Andes, así como advertir la pertinencia de las reflexiones y estudios didácticos adelantados en torno al concepto de función. Asumimos entonces el proyecto como un nuevo paso en el camino de búsqueda de la potenciación del sistema en educación matemática, y de nuestra formación como académicos de la comunidad educativa.

De otra parte, el proyecto ICEP nos permitió profundizar en la reflexión sobre la caracterización de la innovación, en tanto categoría ligada a la investigación y a la acción educativa, y sobre la posibilidad de transferir un proceso. Estas reflexiones condujeron a replantear y llevar a cabo estrategias metodológicas de uso no muy comunes en el trabajo de formación de docentes, adelantado por “una empresa docente”. Estas estrategias nos muestran ahora un panorama alternativo para incidir en el aula, a través del diseño e implementación guiada de propuestas curriculares en matemáticas, para temas específicos.

Quizás la mayor dificultad que tuvimos como grupo coordinador del proyecto está relacionada con el manejo del tiempo. De un lado, para la interacción directa con los profesores habíamos dispuesto de hora y media cada viernes; la cantidad de temáticas a tratar respecto de la innovación, la profundidad con la que pretendíamos abordar las discusiones, la necesidad de compartir experiencias y reflexiones, son –entre otras– algunas de las condiciones que hacían que el tiempo previsto fuera insuficiente. Igualmente las dos horas de reunión semanal, como espacio de interacción, que los coordinadores del proyecto dedicábamos a la preparación de las reuniones, a la programación de las actividades, a la reflexión sobre el proceso mismo, etc., se mostraron insuficientes, y debimos programar al menos dos horas más de interacción semanal y ampliar las horas de trabajo para abordar la reflexión y el arduo trabajo que un proceso de mediación de este tipo requiere.

De otra parte, la relativa baja velocidad impuesta por el desarrollo de la propuesta curricular implicó que los profesores no pudieran disponer de un diseño curricular para desarrollar las temáticas relativas a funciones logarítmicas y exponenciales. Este hecho se justificó en la culminación de los plazos contractuales y las restricciones económicas consecuentes. No obstante, el hecho de dejar “solos” a los profesores a partir de la mitad de septiembre para que terminaran el diseño y desarrollo curricular de sus cursos, constituyó para “una empresa docente” motivo tanto de preocupación como de expectativa, a la vez que permitió un elemento de valoración de las posibilidades y potencialidades del proceso de innovación.



Consideración final

Creemos que el proyecto ICEP tuvo un desarrollo exitoso pues los logros alcanzados fueron varios y representan una experiencia significativa y novedosa para quienes participamos en el proceso. A pesar de ello, somos conscientes de que aún falta mucho por hacer y que es fundamental no perder el impulso inicial logrado en este proyecto.

En lo que toca con los profesores e instituciones escolares participantes, vemos que se trata tan sólo del primer paso en un camino largo y tortuoso que deben recorrer las instituciones escolares como vía imprescindible para llegar a construir y consolidar una cultura profesional del grupo de profesores de matemáticas (Gómez, et al., 1998, pp. 103-155; Perry et al., 1998, pp. 53-54) en la que el diseño curricular, la interacción profesional y el desarrollo profesional, sean prácticas sistemáticas que apoyen los procesos de enseñanza y aprendizaje en cada salón de clase de matemáticas.

En lo que tiene que ver con el grupo coordinador del proyecto en su interés por comprender mejor lo que puede significar la transferencia o mediación de una innovación, vemos que ésta es tan sólo una experiencia de exploración en la que de manera informal se ratificó la influencia del contexto como condicionante no sólo para la transferencia sino también para la mediación. Nos quedan planteadas, entre otras, preguntas que será interesante y necesario retomar en experiencias similares que emprendamos en el futuro; por ejemplo, ¿se pueden evidenciar diferencias significativas en el proceso de cambio educativo y en los resultados obtenidos del mismo según que se tenga o no una crisis fundante específica?, ¿qué tipos de estrategias son más apropiadas para generar, en un proceso de mediación, una situación crítica en los profesores que quieren emprender un proceso de cambio en sus aulas de clase?



BIBLIOGRAFÍA

GÓMEZ, P. y MESA, V. (Eds.). (1998). Situaciones problemáticas de precálculo. *El estudio de funciones a través de la exploración con calculadoras gráficas* (primera reimpresión). Bogotá. una empresa docente.

GÓMEZ, P., PERRY, P., VALERO, P., CASTRO, M. y AGUDELO, C. (1998). "Desarrollo profesional de directivos y profesores: motor de la reforma de las matemáticas escolares". En F. LOZANO (Ed.). *La investigación: fundamento de la comunidad académica* (Serie Investigaciones 2). Bogotá. IDEP.

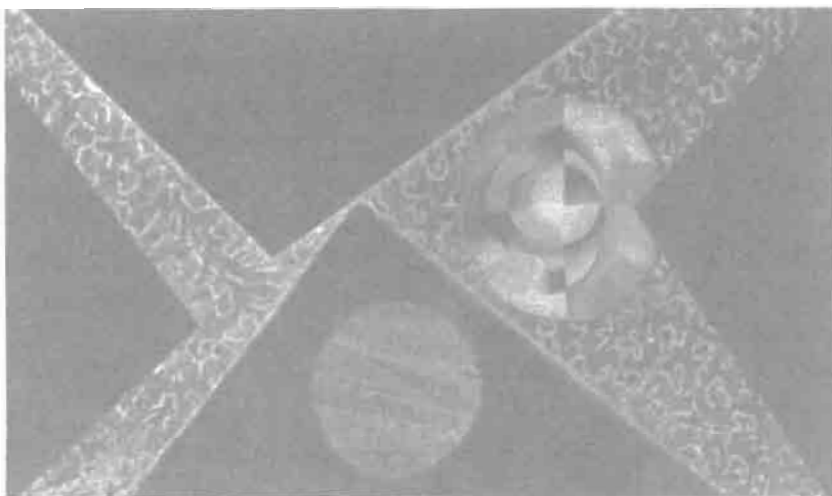
GUACANEME, E. y PERRY, P. (2000). *Propuesta curricular para la introducción a las funciones representadas por polinomios de grados dos* (Documento no publicado). Bogotá. "una empresa docente".

MESA, V. (1996). "Lo bueno, lo malo y lo feo de un curso de precálculo con calculadoras gráficas". En: Revista *EMA*, 1 (2).

PERRY, P., VALERO, P., CASTRO, M., GÓMEZ, P. y AGUDELO, C. (1998). *Calidad de la educación matemática en secundaria. Actores y procesos en la institución educativa*. Bogotá. "una empresa docente".

SED. (1999). *Evaluación de competencias básicas en lenguaje y matemática*. Resultados primera aplicación censal, octubre y noviembre de 1998. Bogotá. Secretaría de Educación Distrital.

INVESTIGACIONES E INNOVACIONES DEL IDEP



SISTEMATIZACIÓN DE ENCUENTROS SOBRE INVESTIGACIÓN EDUCATIVA

TEORÍA Y PRÁCTICA DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

*Encuentro de saberes en precálculo y tecnología**

“una empresa docente”

Estas memorias son producto del proyecto *Teoría y práctica de la educación matemática. Encuentro de saberes en precálculo y tecnología*, coordinado por “una empresa docente” y financiado por el Instituto de Investigación Educativa y Desarrollo Pedagógico (IDEP) –dentro de la modalidad de “encuentro de saberes”, cuyo objetivo era “promover proyectos de encuentros académicos entre teóricos de la educación y maestros en ejercicio”.

Se llevaron a cabo en la Universidad de los Andes siete reuniones en las que participaron profesores de matemáticas del Distrito Capital, profesores de matemáticas universitarios, investigadores en educación matemática, y funcionarios del IDEP y del Ministerio de Educación Nacional (MEN). En tales reuniones hubo oportunidad para que los participantes presentaran sus puntos de vista acerca de temas como la investigación en educación matemática, la formación de profesores, el diseño curricular, las políticas de innovación e investigación y los lineamientos curriculares, las tendencias de la investigación en tecnología y precálculo en nuestro medio, y las aplicaciones de la tecnología en la educación matemática. También se abrió un espacio para que profesores universitarios y de colegio expusieran sus experiencias pedagógicas con el uso de la tecnología en clase.

Los temas tratados en el primer encuentro fueron la investigación en educación matemática, la formación de profesores y el diseño curricular. Los ponentes –todos ellos investigadores en educación matemática– fueron Gloria García de la Universidad Pedagógica Nacional, Pedro Javier Rojas de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas y Pedro Gómez de “una empresa docente”, Universidad de los Andes. En la siguiente reunión se dio espacio a profesores

* La secciones de este texto son apartes extraídos y sintetizados de la cartilla *Teoría y práctica de la educación matemática. Encuentro de saberes en precálculo y tecnología. Memorias de un encuentro realizado entre noviembre de 1999 y junio de 2000*. Publicado por “una empresa docente” en noviembre de 2000 y financiado por el IDEP. Este encuentro de saberes participó en la convocatoria 04-99. El informe final se encuentra en el Centro de Documentación del IDEP.

de matemáticas para que expusieran sus puntos de vista en relación con las mismas temáticas tratadas en la primera reunión. Las exposiciones estuvieron a cargo de Beatriz Cuadros y Sara Garavito, profesoras del Colegio José Félix Restrepo, y Elizabeth Rojas, profesora del Colegio Juan del Corral.

De las dos primeras reuniones surgieron inquietudes acerca de lo que significa investigar e innovar así como de aspectos relacionados con el diseño curricular. Las ponencias de la tercera reunión centraron su atención en el tema de la investigación y la innovación educativa como prácticas que sería deseable que el docente asumiera. Se contó con el punto de vista de funcionarios públicos del sector educativo, fueron los ponentes Elizabeth Riveros y Aurelio Uson en representación del IDEP. Celia Castiblanco en representación del MEN presentó los enfoques teóricos del Ministerio que sustentan los lineamientos curriculares en tecnología y educación matemática. También presentó las bases de un proyecto de diseño curricular que se está llevando a cabo en un trabajo colaborativo entre el Ministerio, algunas universidades y algunos colegios del país, alrededor de la incorporación de nuevas tecnologías en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares.

Se inicia con la cuarta reunión la serie de ponencias centradas en el tema de la educación matemática y la tecnología. La investigadora Marina Ortiz, miembro del Anillo de Matemáticas, presentó un panorama de la investigación en educación matemática y, en particular, de la tecnología en la educación matemática en nuestro medio, basada en un estudio que realizó recientemente para el Instituto Colombiano para el Desarrollo de la Ciencia y la Tecnología Francisco José de Caldas (Colciencias). El profesor Bernardo Gómez de la Universidad de los Andes presentó el software Modellus, como recurso didáctico con altas potencialidades para integrar las matemáticas a otras disciplinas.

En tal reunión fue evidente que varios de los asistentes no habían tenido contacto cercano con el uso de la tecnología. Por tal razón se vio la pertinencia de realizar un taller en el que se pudiera vivenciar, en alguna medida, lo que puede significar aprender matemáticas con tecnología. Es así como en la quinta reunión, Cristina Carulla y Edgar Guacaneme, investigadores de “una empresa docente”, coordinaron un taller centrado en el uso de calculadoras graficadoras como herramienta para el aprendizaje del precálculo. Por su parte, Margarita de Meza, también miembro de “una empresa docente”, ilustró la potencialidad del software Cabri en el aprendizaje de la geometría.

Para conocer más a fondo el programa del Ministerio acerca de la incorporación de nuevas tecnologías en el aula, se invitó a la sexta reunión a Leonor Camargo, investigadora de la Universidad Pedagógica Nacional, quien presentó



sus propias visiones acerca de la tecnología en la educación matemática y expuso detalles del proyecto del MEN en el que está trabajando. En segundo lugar, se quiso mostrar la visión de un profesor universitario y fue así como se invitó al profesor Iván Castro de la Universidad Javeriana, quien habló acerca del software Derive como recurso y estrategia utilizados en las clases de matemáticas de esta universidad.

Hasta ese momento se habían presentado puntos de vista de investigadores, profesores universitarios y funcionarios del sistema educativo, acerca de la educación matemática y la tecnología. Faltaba entonces, el punto de vista de profesores de matemáticas acerca del uso de la tecnología en la clase de matemáticas. La séptima reunión contó con presentaciones de las experiencias de Jorge Rodríguez, profesor del Colegio San Jorge de Inglaterra, y Mariana Sarmiento, profesora del Colegio Santa Francisca Romana, quienes usan cotidianamente las calculadoras graficadoras en sus clases. Después de las dos ponencias se dio cierre al Encuentro con una discusión en torno a tres preguntas que se plantearon a los asistentes.

Este documento está constituido por tres partes; inicialmente, el lector encontrará algunos detalles de la propuesta presentada al IDEP, entre ellos, el marco teórico que le dio sustento al encuentro de saberes; a continuación, el reporte de lo sucedido en cada una de las reuniones; y en la parte final, una conclusión acerca de la experiencia vivida en el desarrollo del proyecto.

La propuesta, los reportes de las reuniones y las conclusiones fueron escritos por diferentes investigadores de “una empresa docente”. Tal hecho explica diferencias en el estilo y posiblemente en la interpretación de lo que ocurrió en tales reuniones. Este documento constituye una mirada al panorama de la educación matemática y la tecnología en el Distrito Capital. Para quienes estuvimos presentes en el *Encuentro de saberes*, es una referencia significativa de lo vivido.



MARCO TEÓRICO

Aportes de la propuesta presentada al IDEP en la modalidad de encuentro de saberes

Campo temático

El campo temático general de esta propuesta es la educación matemática, como disciplina que se preocupa por la enseñanza y el aprendizaje de las

matemáticas. El campo temático particular de la propuesta es la enseñanza y el aprendizaje del álgebra y la trigonometría, correspondiente a la educación media, junto con la problemática de la utilización de la tecnología dentro de este proceso.

Aunque los anteriores son los campos temáticos general y particular de la propuesta, desde las perspectivas del conocimiento matemático a enseñar y de la disciplina de la educación matemática, el problema que motiva esta propuesta tiene que ver con la brecha existente entre el conocimiento, la experiencia, las preocupaciones y las prácticas de los investigadores en educación matemática y el conocimiento, la experiencia, las preocupaciones y las prácticas de los profesores de matemáticas de la educación media de los colegios oficiales del Distrito Capital.

Para poder definir este problema y diseñar una estrategia para atacarlo, introducimos a continuación un esbozo de marco conceptual sobre este tema.

Educación matemática: actores, prácticas y discursos

La educación matemática, como disciplina, tiene muchas facetas y se puede mirar desde múltiples perspectivas. Para el caso que nos ocupa interesa tener una visión de esta disciplina desde la perspectiva de los actores involucrados en ella, teniendo en cuenta un grupo de dimensiones que los puedan caracterizar. Aunque la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, como todo proceso social, involucra a gran cantidad de actores, nosotros centramos nuestra atención en tres de ellos (teniendo en cuenta, evidentemente, que el estudiante es el actor principal):

- el profesor de matemáticas de colegio,
- el profesor universitario especialista en educación matemática,
- el funcionario público.

Cada uno de estos actores se puede ubicar en diferentes ámbitos, ejercer diferentes prácticas, poner en juego diferentes conocimientos y producir diferentes discursos. Adicionalmente, cada actor puede jugar diferentes papeles dentro de los ámbitos que le corresponden, como se describe en la Figura 1.

A continuación analizaremos brevemente algunas de las características de cada uno de los actores.

Profesor de colegio

Sugerimos que los tres principales papeles del profesor de colegio son como profesor-maestro, como profesor-investigador y como profesor-colega.

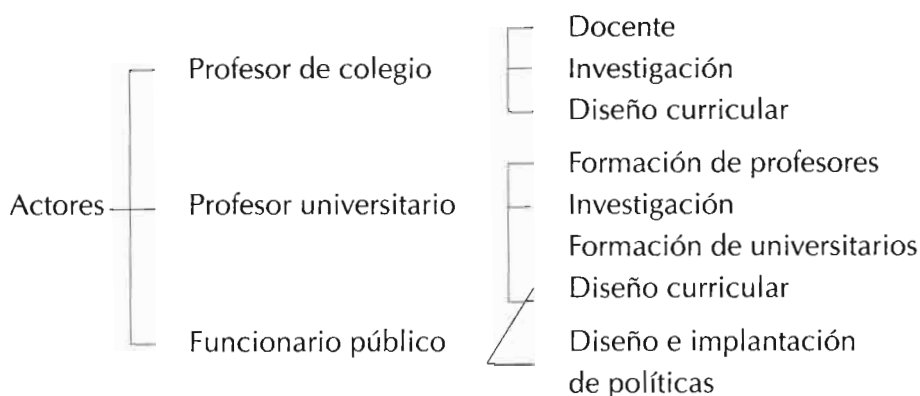


Figura 1. Actores y prácticas

Para cada uno de estos papeles es posible identificar una práctica, un discurso, un público, un conocimiento, unos saberes, un ambito y un lugar que se describe esquemáticamente en la Tabla 1.

ACTOR	Profesor-maestro	Profesor-investigador	Profesor-colega
PRÁCTICA	Docente	Investigación	Diseño curricular
DISCURSO	De salón de clase	Publicaciones	Programación Documentos
PÚBLICO	Estudiantes	Colegas	Colegas-directivos
CONOCIMIENTOS	Formal Artesanal Tecnológico		
SABERES	Matemáticas Matemáticas escolares Didácticas de la matemática	Investigación-acción Didácticas de la matemática	Didácticas de la matemáticas
AMBITO	Salón de clase		Grupo de profesores
LUGAR	Escuela		

Tabla 1. Profesor de colegio

Investigador

De la misma manera, el investigador en educación matemática puede jugar diferentes papeles que se describen esquemáticamente en la Tabla 2.

ACTOR	Investigador-formador de profesores	Investigador	Formador de investigadores	Investigador Diseñador de currículo
PRÁCTICA	Docente	Investigación	Docente investigador	Diseño curricular
DISCURSO	De salón de clase	Publicaciones	Documentos Publicaciones	Documentos Libros de texto
PÚBLICO	Profesor-maestro	Colegas	Estudiantes de posgrado	Escuelas Profesores
SABERES	Educación matemática	Múltiples	Múltiples Investigación	Todos
AMBITO	Salón de clase	Variados	Variados	Variados
LUGAR	Universidad			

Tabla 2. Investigador

Funcionario público

Finalmente, podemos también hacer una aproximación a los papeles que puede jugar el funcionario público. Estos se presentan en la Tabla 3.

ACTOR	Diseñador de currículo	Diseñador de políticas
PRÁCTICA	Diseño curricular	Diseño e implantación de políticas
DISCURSO	Documentos	Documentos Políticas
PÚBLICO	Escuelas Profesores	Sociedad
SABERES	Todos	¿?
AMBITO	Gobierno	Gobierno
LUGAR	Gobierno	

Tabla 3. Funcionario público

Visión desde las prácticas

Hemos descrito, de manera esquemática, algunas de las características de los tres actores principales de la educación matemática. Estos actores interactúan entre sí y, por consiguiente, las características de un actor condicionan los

espacios en los que las características de los otros actores se pueden expresar. La Figura 2 muestra un esquema de las principales interacciones entre los actores.

Las actuaciones del funcionario público, principalmente a través de sus decisiones en el ámbito del diseño curricular, condicionan las actuaciones del profesor y del investigador. El gobierno determina el espacio y las normas dentro de las cuales estos dos actores pueden ejercer sus prácticas.

El investigador ejerce su práctica de investigación y los resultados de la misma informan e influyen en sus prácticas como diseñador de currículo, formador de investigadores y formador de profesores. Finalmente, estas prácticas del investigador informan e influyen en las prácticas del profesor como diseñador de currículo, como investigador y como docente dentro del aula.

El esquema que aquí se propone no contiene todas las interacciones posibles. En particular, este pretende resaltar la ausencia de algunas interacciones que son trascendentales para el buen funcionamiento del sistema y que, aunque se dan en casos aislados, no son necesariamente características generales del sistema. Nos referimos especialmente a la manera como las prácticas del profesor de matemáticas deberían informar e influir en las prácticas del investigador y del funcionario público. Este es el centro del problema que definimos en el siguiente apartado y constituye la motivación y justificación de esta propuesta.

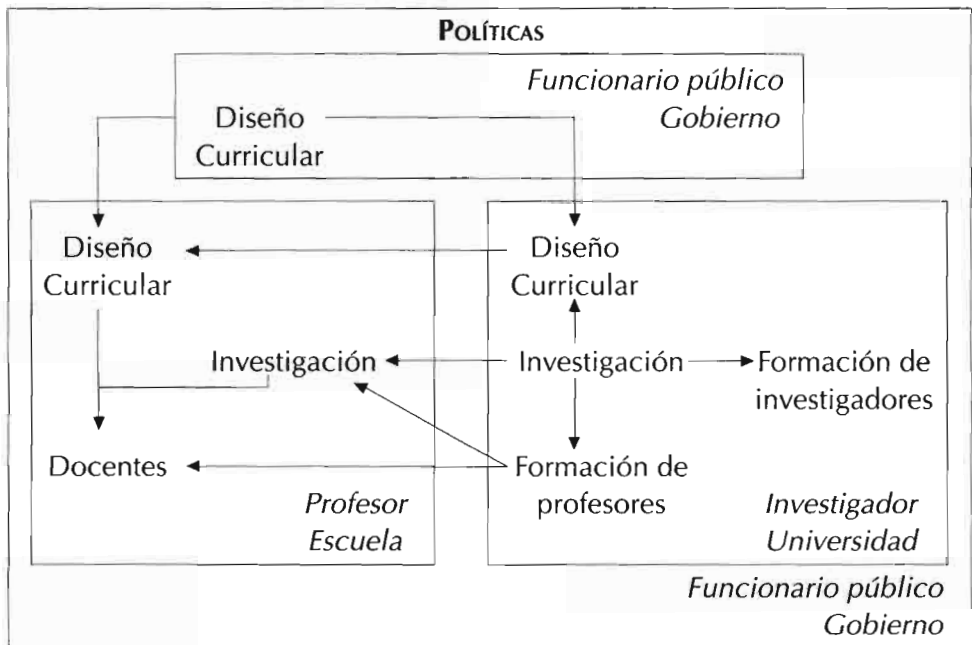


Figura 2. Interacción entre los actores

Justificación

Definición del problema

El esquema de marco conceptual presentado en el apartado anterior sugiere la existencia de una brecha que ha sido discutida en diversos contextos (Puig, 1998). Se trata de la brecha entre la teoría y la práctica de la educación matemática. Esta brecha se expresa en dos sentidos (Gómez, 1998):

- La necesidad de que el investigador en educación matemática conozca y comprenda cada vez con mayor profundidad la problemática de las matemáticas escolares y las características del contexto escolar que condicionan el funcionamiento de ese sistema y que deberían influir en la conformación de sus propias prácticas.
- La necesidad de que el profesor de matemáticas tenga acceso, teniendo en cuenta sus conocimientos y preparación, a los resultados de la investigación que deberían informar e influir en sus prácticas.

Se hace entonces evidente la necesidad de crear espacios y esquemas de interacción entre investigadores en educación matemática y profesores de matemáticas (con la participación de los funcionarios públicos) en los que se busque reducir esta brecha tanto como sea posible.

Interés para la comunidad académica del Distrito Capital

Consideramos que los esfuerzos que se hagan para cerrar la brecha descrita en la sección anterior tendrán un impacto en la calidad de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en los colegios oficiales del Distrito Capital. Al reducir la brecha, los investigadores en educación matemática tendrán mayor información y conocimiento de los problemas que pretenden atacar a través de sus prácticas (investigación, formación de investigadores, formación de profesores y diseño curricular). Esta evolución de la conciencia del investigador sobre los problemas "prácticos" de las matemáticas escolares deberían implicar una mejora en la calidad y la eficiencia de los aportes que ellos pueden hacer a los profesores de matemáticas del Distrito Capital.

Por otra parte, en la medida en que los profesores de matemáticas conozcan y comprendan cada vez más la problemática a la que se enfrenta el investigador en educación matemática y puedan tener un mayor y mejor acceso a los resultados de la investigación, ellos deberán estar en capacidad de utilizar este conocimiento para mejorar sus propias prácticas (docente, de investigación y de diseño curricular).



Finalmente, el funcionario público al profundizar en sus conocimiento de la problemática y las prácticas del investigador y del profesor de matemáticas, podrá tomar decisiones más informadas de tal forma que ellas afecten el sistema de manera eficiente.

El esfuerzo para reducir la brecha aporta en otro sentido igualmente importante. Los espacios de interacción que se creen para reducir la brecha tendrán un impacto en el desarrollo y la consolidación de una comunidad académica de la educación matemática en la que profesores, investigadores y funcionarios públicos serán conscientes de las problemáticas de los demás y de la importancia e influencia de sus propias prácticas en las actuaciones de esos actores. Esto implica una verdadera comunidad académica plural en la que las diferencias son el motor del progreso.

Metodología

Antes de describir el esquema metodológico a través del cual se espera lograr los objetivos, consideramos importante describir el contexto particular que motiva a la entidad proponente a presentar esta propuesta.

“una empresa docente” es un centro de investigación en educación matemática. Sus proyectos de investigación, programas de formación permanente de profesores y aportes al desarrollo y consolidación de la comunidad le han permitido construir una experiencia importante con respecto a la problemática de las matemáticas escolares en el Distrito Capital. Con base en esta experiencia y como continuación natural de varios de sus proyectos y programas ha diseñado dos proyectos de “transferencia” (desde la universidad hacia el colegio) que servirán de contexto para el desarrollo del proyecto objeto de esta propuesta. Se trata del proyecto *T³ Colombia* (ued, 1999b) y el proyecto *ICEP. Innovación curricular en precálculo para la educación media* (ued, 1999a).

El proyecto *T³ Colombia* busca la conformación de una red de instituciones de educación superior, profesores universitarios y profesores de matemáticas de secundaria con el propósito de consolidar la comunidad de educación matemática del país y promover la utilización de la tecnología portátil en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y las ciencias en la educación media. Para ello se buscará: promocionar la tecnología portátil a través de institutos de iniciación; identificar futuros instructores potenciales; capacitar a estos futuros instructores potenciales; diseñar los planes de mediano plazo para las regiones; y comenzar el trabajo con otras regiones del país. Se diseñarán, por consiguiente, dos tipos de actividades académicas: talleres de iniciación (dos por región), en los que se promocionará la tecnología y se

identificarán los futuros instructores potenciales; y un taller de profundización en el que se capacitará a los futuros instructores. Este proyecto tiene su nodo principal en Bogotá, donde se realizarán varios de los institutos propuestos.

El proyecto *ICEP. Innovación curricular en precálculo para la educación media* es una propuesta para la adaptación y replicación de una innovación curricular en el área de precálculo en la educación media del Distrito Capital. Esta innovación curricular busca reducir la brecha entre la enseñanza y el aprendizaje del álgebra y la trigonometría, de la forma en que tradicionalmente se ha enseñado y aprendido, y el precálculo, como tema que considera el concepto de función como elemento unificador de las matemáticas escolares de la secundaria. Esta visión funcional, junto con el énfasis en el manejo dinámico y coherente de los diversos sistemas de representación, la aproximación a la construcción del pensamiento de alto nivel con base en la resolución de problemas y la utilización de la tecnología como elemento catalizador del proceso de cambio, constituyen los ejes de esta innovación que sigue los lineamientos de las tendencias actuales de la educación matemática. En este proyecto participarán profesores de matemáticas de tres colegios del Distrito Capital.

Estos dos proyectos, junto con los diversos programas de formación permanente de profesores que hemos realizado durante los últimos años nos servirán de contexto para las conferencias y discusiones que se realizarán durante los encuentros que describimos a continuación.

Esquemas de interacción

Los esquemas de interacción estarán centrados en la realización de una serie de reuniones periódicas (encuentros). Estas reuniones tendrán lugar en la Universidad de los Andes y durarán cuatro horas. Tendrán todas una estructura similar repartida en dos mitades. En la primera mitad se presentarán tres conferencias, cada una de media hora de duración. En la segunda mitad se crearán los espacios de interacción para que los asistentes puedan interactuar entre sí y con los conferencistas. Se diseñará un esquema de moderación de la discusión que se adapte a los objetivos de cada reunión y que satisfaga también los intereses de los participantes.

Estas reuniones buscan que se dé una interacción biunívoca entre los tres actores del sistema: profesores de matemáticas de colegio, investigadores en educación matemática y funcionarios públicos.

Programa

La Tabla 4 muestra un programa tentativo para la serie de reuniones.



FECHA	TEMA	CONFERENCIAS	CONFERENCISTAS
Octubre 1999	Visión de los investigadores	<ul style="list-style-type: none"> • Investigación en educación matemática • Formación de profesores de matemáticas • Diseño curricular desde la perspectiva del investigador 	Investigadores en educación matemática (3)
Noviembre 1999	Visión de los profesores	<ul style="list-style-type: none"> • La práctica docente del profesor de matemáticas • El profesor de matemáticas como diseñador de currículo • El profesor de matemáticas como investigador 	Profesores de matemáticas de colegio (3)
Febrero 2000	Visión del funcionario público	<ul style="list-style-type: none"> • Diseño curricular a nivel gubernamental • Normas y lineamientos en educación matemática • Visiones del precálculo y la tecnología 	Funcionarios públicos (IDEP, Secretaría de Educación, Ministerio de Educación Nacional)
Marzo 2000	Tecnología y educación matemática	<ul style="list-style-type: none"> • Innovación curricular en la Universidad • Innovación curricular en el colegio • La transferencia de innovaciones curriculares 	Investigadores de "una empresa docente", profesores participantes en el proyecto ICEP
Abril 2000	Geometría, tecnología y precálculo	<ul style="list-style-type: none"> • Tecnología: visión desde la investigación • Tecnología: visión desde la Universidad • Tecnología: visión desde el colegio 	Investigadores de "una empresa docente", profesores participantes en el proyecto T ³ Colombia
Mayo 2000	Visión de los profesores y los investigadores	<ul style="list-style-type: none"> • Cerrando la brecha 	Investigadores y profesores
Junio 2000	Experiencias con la tecnología y el precálculo Conclusiones	<ul style="list-style-type: none"> • Caracterización de los contextos • Propósitos hacia el futuro • Conclusiones 	Investigadores, profesores, funcionarios públicos

La Tabla 4. Programa tentativo para la serie de reuniones



Primera reunión

Investigación, formación de profesores y diseño curricular: visión de los investigadores

Aspectos generales del evento

La primera reunión del proyecto se llevó a cabo el 4 de noviembre de 1999¹ entre 2 p.m. y 6 p.m., en el salón Marta Traba de la Universidad de los Andes, con la asistencia de aproximadamente de cien personas.

La reunión se inició con una breve presentación del proyecto: (a) el problema que dio lugar a la definición del proyecto, (b) la meta y objetivos que se pretenden lograr con el desarrollo del proyecto, (c) los productos que se espera tener a medida que avanza el proyecto, y (d) la metodología general que se seguirá en las reuniones que lo constituyen. A continuación, los investigadores hicieron sendas presentaciones. En la última parte de la reunión, hubo una interacción entre ponentes y asistentes a partir de preguntas y comentarios presentados por escrito por varios de los profesores asistentes.

Aspectos considerados en las ponencias

Ponencia: Investigación en educación matemática

La ponencia de Gloria García "Investigación en educación matemática" incluyó consideraciones en torno a cuatro puntos: la sobrevaloración cultural del término "investigación", la investigación como una actividad de comunidades científicas, cuatro tipos de acciones dentro de la comunidad de profesores universitarios, y algunos problemas y retos de la comunidad colombiana de educación matemática.

En primer lugar, García plantea que, de manera general, en el campo de la educación y, en particular, en el de la educación matemática, se ha venido dando una exigencia que no se da en otras profesiones; a saber, al docente universitario encargado de la formación de maestros se le exige ser investigador. Asociado con ello, señala que en el contexto educativo se ha incurrido en

¹ Reporte realizado por Patricia Inés Perry.



un uso muy vago del término “investigación” con el que se quiere decir mucho y “sin embargo aún queda todo por decir”. También alude a la necesidad e importancia de ver la investigación como una actividad ya no de individuos sino de comunidades científicas que proponen y desarrollan programas y líneas de investigación, con una claridad con respecto a los objetos que se estudian y los métodos que se siguen, actividad esta que requiere del apoyo de la sociedad.

Al referirse al caso colombiano, señala la tensión que enfrentan los investigadores en educación matemática por razón de tener, por un lado, que responder a la sociedad que presenta demandas urgentes para solucionar problemas cotidianos del profesor de matemáticas, y por otro lado, tener que cumplir con unos requerimientos que impone la comunidad internacional en relación con la calidad de la investigación en términos de pertinencia, validez, objetividad, originalidad, rigor, precisión, predicción y reproductibilidad. Con respecto a los estándares de investigación que impone la comunidad internacional, reconoce que nuestra comunidad tiene problemas y requiere una formación en ese sentido.

Dentro de los retos que plantea para la comunidad colombiana de educación matemática incluye:

- reconocernos como comunidad de educadores matemáticos, cuestión que ha venido dándose a través de la formación de diferentes grupos regionales, de la creación de publicaciones periódicas, y que este año se ha impulsado de manera más definitiva con la creación de la Asociación Colombiana de Matemática Educativa (ASOCOLME);
- introducir la educación matemática como disciplina académica en la formación inicial y continuada del profesorado;
- crear líneas de investigación e innovación;
- buscar apoyo de la sociedad.

En relación con los problemas que considera deben centrar la atención de la investigación en educación matemática, señala la necesidad de pasar de la búsqueda de modelos de enseñanza a la búsqueda de modelos de aprendizaje y comunicación; también enfatiza la necesidad de atender aspectos políticos y sociales relativos a la enseñanza de las matemáticas.

Ponencia: Formación de profesores de matemáticas

La ponencia “Formación de profesores de matemáticas” del investigador Pedro Javier Rojas incluyó una alusión a la historia de los programas de formación

inicial de maestros en nuestro país desde la década de los años sesenta, alusión que enfatizó la predominancia del contenido matemático sobre otro tipo de contenido como el pedagógico y el humanista.

Señala que la legislación colombiana en los últimos años está exigiendo que las facultades de educación replanteen sus currículos, teniendo en cuenta cuestiones tales como cuál es el sentido de la enseñanza como profesión, cuál debe ser el conocimiento profesional del profesor, etc. y en consecuencia, el cumplimiento de la norma puede resultar un problema fuerte para aquellas instituciones que no habían iniciado procesos de reestructuración y no habían pensado en el asunto con antelación.

Su planteamiento principal es que la formación de profesores –tanto la inicial como la continuada– debe acercarse mucho más a la realidad escolar, de manera que pueda aportar significativamente al ejercicio profesional de los profesores. Para ello, la formación profesional debe considerar cuestiones como por qué se enseñan matemáticas en la escuela, qué es el álgebra, cuáles son las concepciones del profesor y de los estudiantes, la visión de la complejidad en la que está inmersa la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, las dificultades inherentes al aprendizaje, etc. Destaca la importancia que puede tener para la cualificación profesional del profesor el poder recurrir a resultados de investigación sobre problemas puntuales de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Todo ello para lograr que el profesor en ejercicio esté más influido por su formación profesional que por su “recuerdo de la vivencia escolar” como ha sido lo usual.

Ponencia: Diseño curricular. Una de las prácticas del profesor universitario

La ponencia “Diseño curricular. Una de las prácticas del profesor universitario” del investigador Pedro Gómez se centró en aspectos relativos al diseño curricular como tarea propia del profesor universitario y la relación que tiene esta tarea con las prácticas de la escuela.

En primera instancia, se refirió al lugar en donde se cumple tal tarea: un lugar natural es la universidad donde trabaja, es decir, hace diseño curricular para los cursos que tiene a su cargo; también puede colaborar con el gobierno en la definición de políticas y lineamientos; puede hacer diseño curricular en asocio con editoriales y como consecuencia de proyectos de investigación e innovación, produciendo materiales didácticos; otra oportunidad para hacer diseño curricular son los programas de formación de profesores; y también, al acompañar a profesores e instituciones en sus esfuerzos para responder a la



descentralización curricular a través de la realización de proyectos conjuntos de innovación curricular.

En segunda instancia se refirió a cómo se lleva a cabo la tarea de diseño curricular. Destacó que para ello, el profesor universitario se apoya en el conocimiento que tiene del contexto escolar y de la teoría de la educación matemática. Mencionó que el diseño curricular puede ser en ocasiones consecuencia de proyectos de investigación e innovación.

En tercera instancia planteó consideraciones (inquietudes) que es necesario tener en cuenta al hacer diseño curricular. Una inquietud tiene que ver con la dualidad entre la teoría y el contexto escolar. Otra inquietud está dada por la problemática de la multiplicación, es decir, la relación que hay entre una experiencia piloto y sus resultados y experiencias más reales en las que se pretende hacer algo similar a lo hecho en la experiencia piloto, pero las condiciones de los dos casos son tan diferentes que no es posible; se requiere entonces buscar el mejor juego para reducir los logros de manera que se pueda hacer la multiplicación.

Preguntas de los asistentes

A continuación se transcriben las preguntas o intervenciones de los asistentes hechas a raíz de las tres ponencias presentadas. Se organizan de acuerdo con unas temáticas generales.

Acerca de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas

a. ¿Qué se puede validar como aprendizaje matemático en educación media? ¿Cuál es la influencia que tiene para el diseño curricular los estándares de la universidad?

b. ¿Cómo se mediría la calidad y eficiencia del docente? ¿Qué puede hacerse o qué herramientas y estrategias podemos tener para mejorar la comunicación en el aula? ¿Cómo tener interdisciplinariedad con el área de idiomas al respecto?

c. ¿Cómo utilizaría un estudiante en la parte social lo aprendido en el aula? (aplicación en el medio)

Acerca del diseño curricular

a. ¿Cómo lograr un diseño curricular que permita la continuidad de saberes desde preescolar hasta la universidad?

b. Acerca de la innovación curricular en precálculo, ¿en qué nivel exactamente debería tener lugar dicha innovación? Ya que pienso que debe

ser anterior al cálculo mismo, en el sentido que el álgebra prepare el acceso al cálculo. Desde esa visión, ¿habría que reformar el álgebra para familiarizar al estudiante en los razonamientos, en la lógica, en el lenguaje propios del cálculo? ¿Qué lugar tendría el concepto de límite en esa innovación? Hay quienes piensan que el cálculo NO debería hacer parte del currículo de la educación básica y media vocacional y entonces tal innovación no tendría sentido en la escuela. ¿Qué piensan de tal enfoque?

Acerca de la formación de profesores

a. ¿De qué manera los procesos de formación de docentes en servicio que ustedes adelantan, tiene en cuenta las experiencias y concepciones que el docente adquirió en su formación ciudadana e inicial?

b. ¿Cuál es el enfoque actual del saber matemático en la formación de maestros? ¿Qué papel juega la evaluación en este nuevo enfoque?

c. Hoy conociendo el problema complejo que presenta nuestro país se debe presentar la formación profesional del profesor de matemáticas más centrada en la realidad.

Acerca del profesor como investigador

a. Somos un grupo de docentes de la zona 5 (Usme). Hace un tiempo deseamos trabajar en el “Desarrollo del pensamiento matemático” en muchos de nuestro estrato social. Tenemos las siguientes inquietudes:

- ¿Considera que sea una problemática válida?
- ¿Dónde consultar estudios al respecto?
- ¿Hay alguna viabilidad de apoyo?
- Si usted fuera a realizar un estudio, ¿cuáles serían los pasos iniciales?

b. ¿Qué actividades concretas tienen planeadas como grupo investigador para orientar a los docentes hacia la investigación en el aula? ¿Habrán temas concretos? ¿Quién los elige o determina?

Acerca de la investigación como actividad especializada

a. Cuando se plantea la pregunta qué problemas estudiar, ¿se hace referencia al contexto social, a contenidos temáticos o cuáles otros aspectos?

b. ¿Se ha investigado si la cultura de lo fácil está incidiendo en la educación matemática de los niños y jóvenes?

c. ¿Sería necesario que el profesor universitario que “investiga” sea también profesor en el bachillerato y/o la primaria?



d. En su vida profesional, ¿ustedes han sido profesores de primaria y bachillerato? Si la respuesta es afirmativa o negativa, ¿en qué forma afecta esto su trabajo?

e. Cuando leí los lineamientos en matemáticas, encontré la participación de algunos de ustedes del grupo Pretexto en el diseño de los lineamientos. Ahora bien, ¿cómo se conecta su trabajo hecho en álgebra con ellos y básicamente con la resolución de problemas que allí se plantea?

f. ¿Por qué no diseñar currículo con el maestro de aula para que sea más cercano a la realidad escolar?

Acerca del encuentro

a. ¿Qué proyección de estas conferencias van a promover a nivel de educadores de primaria?

Segunda reunión

Investigación, diseño curricular y práctica docente: visión de los profesores

La segunda reunión del proyecto tuvo lugar el jueves 25 de noviembre de 1999² entre 2 p.m y 6 p.m., asistieron a la reunión más de sesenta personas. Algunas de ellas asistían por primera vez a la serie de encuentros, con motivo de información que se promocionó en Cadeles de algunas de las zonas de la ciudad.

Aspectos considerados en las ponencias

Ponencia: El profesor de matemáticas como investigador

Beatriz Cuadros del Colegio José Félix Restrepo, hizo una reflexión sobre la problemática de la investigación en educación matemática desde la perspectiva del profesor de matemáticas. Con base en su experiencia personal, la profesora Cuadros presentó sus opiniones sobre varios temas: el papel de la investigación en la práctica docente del profesor; el papel de los colegas en los trabajos de investigación; las dificultades de la investigación en la institución escolar; y el papel que pueden jugar las universidades en el apoyo a la investigación de los profesores. Ella se refirió a dos trabajos que, con otros colegas, ha realizado en el área de la investigación: la representación gráfica de la función lineal y el papel de las tareas en el rendimiento de los estudiantes.

² Reporte realizado por Pedro Gómez.

- *Experiencias de investigación*

En el primer proyecto, el grupo de profesores invirtió mucho tiempo y esfuerzo. Realizaron un diseño detallado y lograron que el colegio invirtiera en recursos para el proyecto (particularmente, en un retroproyector de transparencias). Llevaron el diseño a la práctica y después evaluaron sus resultados. Para sorpresa de los investigadores, los estudiantes tuvieron un rendimiento inferior al esperado. Esto generó todo un proceso de reflexión por parte de los profesores que participaron en el proyecto.

En la segunda experiencia, un grupo de profesores de la institución exploró el papel que pueden jugar las tareas en el rendimiento de los estudiantes. Para ello hicieron un diseño cuasi-experimental y recogieron y analizaron la información. Los resultados mostraron que las tareas sí afectan el rendimiento de los estudiantes. Como consecuencia de estos resultados, el área de matemáticas de la institución decidió insistir en la utilización de esta estrategia.

- *Papel de la investigación en la práctica docente*

La profesora Cuadros presentó algunas reflexiones sobre los efectos de la actividad de investigación. Ella afirma que la investigación genera reflexión permanente; puede aportar a la mejora de la práctica docente; invita al profesor a diseñar y llevar a la práctica nuevas maneras de recoger y analizar información; promueve el análisis de nuevos materiales de trabajo (como el caso del retroproyector); y se enriquece con el aporte de los colegas, con quienes es necesario un proceso de negociación.

- *El papel de los colegas*

Los colegas asumen una actitud particular cuando, en su institución, se realiza un proyecto de investigación. Ellos están dispuestos a servir de observadores del proceso y son respetuosos del colega investigador. Sin embargo, evitan asumir responsabilidades, aportando únicamente opiniones de manera oral. En general, la investigación del colega no afecta su propia práctica docente.

- *Dificultades de la investigación en la institución escolar*

El trabajo de investigación es muy interesante y motivante, pero tiene dificultades y problemas. Mientras que se realiza la investigación, se logran efectos en el proceso de enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Sin embargo, en el momento que se acaba, las cosas tienden a regresar a su estado previo. Este tipo de actividad requiere de mucho tiempo y esfuerzo y no existe una cultura institucional hacia la misma. En particular, el término

“investigación” se utiliza con varios significados diferentes. Por esa razón, en muchas ocasiones las directivas no entienden de qué se trata y, como consecuencia, no la apoyan. Las asesorías de las universidades son muy limitadas y no son permanentes. La investigación es una de las múltiples actividades del profesor. En las instituciones no existen los espacios para el trabajo en grupo.

- *Papel de las universidades*

Las universidades deberían apoyar a toda el área de matemáticas, incluyendo además a las directivas docentes. Ellas deberían también motivar al profesor a escribir los resultados de su trabajo y capacitarlo en las áreas necesarias para realizarlo apropiadamente. Deberían establecerse convenios que le permitan a las instituciones utilizar los recursos tecnológicos de las universidades. Éstas deberían mantener un contacto permanente con las instituciones educativas, las directivas y los profesores.

Ponencia: El profesor de matemáticas como diseñador de currículo

La profesora Sara Garavito del Colegio José Félix Restrepo, presentó su experiencia en el área del diseño curricular en matemáticas. Para ello, hizo un contraste entre la manera como ella se aproxima actualmente a esta actividad y la forma como lo hacía en el pasado.

Identificó seis grandes áreas sobre las cuales ellas se hace preguntas y busca darle respuesta para realizar el diseño curricular. Estas preguntas son las siguientes: ¿Qué voy a enseñar y en qué orden? ¿Para qué voy a enseñarlo? ¿Con qué recursos voy a hacerlo? ¿A quiénes voy a enseñar? ¿Cómo lo voy a enseñar? ¿Cómo voy a evaluar?

Insistió en la importancia de establecer y promover las conexiones entre los diversos temas y representaciones del contenido matemático. Ésta es la razón por la cual ella divide sus seis horas semanales de clases de matemáticas en cuatro áreas: geometría, matemáticas, cálculo mental y estadística. Con esto, ella busca tratar temas relacionados desde diversas perspectivas, promoviendo las relaciones y las conexiones entre ellos.

La profesora Garavito da mucha importancia a la construcción de hábitos y valores por parte de los estudiantes en la clase de matemáticas. También resalta el papel que pueden jugar los padres de familia en la obtención de recursos que no se encuentran disponibles en la institución escolar.

En el área de la evaluación y de la producción de materiales, ella ha desarrollado estrategias que le permiten trabajar con estudiantes que avanzan

a velocidades diferentes. Nos mostró cómo en la actualidad la evaluación es un proceso permanente y continuo en el que los estudiantes participan activamente. Esta evaluación incluye la reflexión sobre el mismo diseño curricular.

La presentación anterior contrasta con su actividad en el pasado. Hace algunos años, la profesora Garavito se centraba exclusivamente en una visión lineal del contenido que estaba guiada por el libro de texto. Los objetivos estaban dados por el Ministerio de Educación Nacional. Ella utilizaba una metodología “tradicional” en lo referente a las clases, los ejercicios, las tareas y las previas. La evaluación era puntual, las previas permitían clasificar a los estudiantes.

Ponencia: La práctica docente del profesor de matemáticas

La presentación de la profesora Elizabeth Rojas del Colegio Juan del Corral sobre la práctica docente del profesor de matemáticas estuvo centrada en la importancia del contexto en el que se enseña y aprende matemáticas, en las aplicaciones de ese contenido matemático y en la construcción de valores y hábitos en los estudiantes.

Ella mostró cómo es posible crear espacios en los cuales se puede motivar a los estudiantes a participar en la construcción social del conocimiento matemático dentro de un esquema en el que el profesor no tiene necesariamente la última palabra. De esta manera es posible lograr que el estudiante disfrute su actividad matemática dentro del salón de clase.

La profesora Rojas insistió, al final de su presentación, en la importancia del impacto de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la personalidad del estudiante al permitir el desarrollo de la autoestima, la autoimagen, la autoeficacia y el autoconcepto.

Discusión

La discusión que se dio, una vez realizadas las tres charlas anteriores, estuvo centrada en la relación entre la investigación, la innovación, el diseño curricular y la práctica docente.

Se insistió en el hecho de que los términos “investigación” e “innovación” tienden a usarse con múltiples significados. Se estableció la relación intensa entre la investigación y la innovación en la institución escolar. También se insistió en que para saber qué es la investigación y para poder hablar de ella es necesario haber hecho investigación.

Algunos profesores manifestaron que el problema de la investigación y la innovación es un problema cultural. Por otro lado, se enfatizó la necesidad



de tener identificado un problema o un interés particular para poder iniciar un proceso de investigación. Se introdujo la diferencia entre la *actividad* de investigación y las actitudes hacia la investigación, afirmando que no todos podemos realizar la actividad, pero que sí podemos tener una actitud hacia la reflexión sistemática sobre los fenómenos del aula. Por otro lado, se discutió sobre las características del entorno escolar que condicionan las actividades de investigación e innovación. Se mencionaron, entre otras: el papel de las directivas, la cultura institucional y la dificultad para el trabajo en grupo. Esto lleva a la pregunta *¿qué podemos y debemos hacer en nuestra institución en las áreas de investigación e innovación?*

Tercera reunión

Investigación, innovación y lineamientos curriculares: visión de los funcionarios

La tercera reunión del proyecto tuvo lugar el jueves 10 de febrero de 2000³ entre las 2:00 p.m y las 6:00 p.m.

En las dos reuniones anteriores se centró la mirada en dos de los actores: investigadores y maestros. En esta reunión se consideró la visión de otro actor: el funcionario, en su calidad de ente encargado de definir políticas educativas desde alguna instancia política que afecta directamente al sistema educativo. En esta ocasión se hizo un recuento de las inquietudes e interrogantes más relevantes, surgidos en las dos reuniones anteriores. Los temas de las ponencias de esta reunión pretendían, precisamente, responder a la mayoría de tales interrogantes.

Aspectos considerados en las ponencias

El IDEP dividió su presentación en dos partes: la primera centrada en la investigación, la segunda se enfocó en el tema de la innovación.

Ponencia: Investigación educativa

Aurelio Usón, representante del IDEP, presentó información relativa a qué es el IDEP y cómo funciona. En particular, el ponente aludió a la misión institucional y a los objetivos que concretan dicha misión, la estructura que incluye tres unidades académicas (comunicación, investigación e innovación).

Desde su visión, concibe la investigación educativa como una mirada rigurosa que pretende construir una explicación o comprensión del fenómeno

³ Reporte realizado por Gloria Neira y Edgar Guacaneme.



educativo. Hizo énfasis en ciertas características que debe tener el proceso de investigación en el aula y en el valor formativo que éste tiene para el maestro. Enfatizó también en el valor científico de los resultados de la investigación educativa como apoyo a otras investigaciones.

Ponencia: Innovación en educación

Elizabeth Riveros planteó la innovación como un fenómeno caracterizado por la incertidumbre, la imposibilidad de definir una determinada innovación y el efecto transformador que cualquier innovación debe tener en el aula, en la institución en la que se desarrolla y en el maestro que la lleva a cabo.

Se enfatizó en la innovación como un proceso de transformación intencional y explícito de las relaciones, estructuras y contenidos que componen las prácticas pedagógicas. De ahí que toda innovación sea contextualizada y se vea como una oportunidad en la producción del saber de las personas implicadas puesto que conlleva una reflexión permanente sobre la propia práctica y una sistematización de esa reflexión. Toda innovación se concreta en actividades de cuatro tipos: problematización, intervención, validación y transferencia.

- *Problematización*

Esto hace referencia a que debe haber una crisis que desestabiliza: una *crisis fundante* que da origen a la innovación y que se da en tanto lo que se realiza cotidianamente no satisface, presenta carencias o no conduce al lugar deseado. Esa crisis se percibe mediada por la reflexión sobre la práctica. Si esa reflexión no tiene lugar, todo parece bien, el individuo no tiene crisis, no tiene necesidad de cambio, no hay conceptos que lo problematicen. En tanto hay reflexión, tiene lugar una intencionalidad de cambio, cambio que se vuelve protagonista en la práctica docente.

- *Intervención*

Hace referencia, por un lado, al diseño y ejecución de estrategias y de indicadores para resolver la crisis que genera una innovación, y, por otro, a la aplicación de instrumentos de evaluación del cambio propuesto.

- *Validación*

Hace referencia a la sistematización de la propuesta, la evaluación del diseño, la contrastación y el desarrollo de competencias.

- *Transferencia*

Consiste en la capacidad de socializar y poner en común a otros sectores de la comunidad educativa, la experiencia vivida para que otros grupos o personas puedan tomar de ella elementos significativos para sus propias



experiencias innovadoras. No hace referencia a transferir conceptos o metodologías puntuales, sino a transferir la vivencia y la experiencia innovadora y sus resultados, conclusiones y reflexiones. Se reconoce como estrategia de desarrollo pedagógico y de construcción de saber.

El IDEP ve la innovación también como una estrategia de formación de maestros, en tanto el proceso de enseñanza-aprendizaje propicia contextualización, conceptualización y validación, etapas que están inmersas en un programa de formación docente.

Haciendo un recuento de las políticas del IDEP en los años anteriores, cataloga las convocatorias de 1998 como un tránsito entre el sueño y el proyecto, en contraste con las de 1999, que trataban de darle significación en un contexto específico a experiencias significativas de aula.

Con respecto a los indicadores que tiene en cuenta el IDEP para la aprobación de propuestas de innovación, la ponente citó los siguientes: pertinencia, impacto, calidad técnica, reconocimiento, viabilidad y transferencia.

También llamó la atención con respecto a que la mayoría de las propuestas de innovación que ha recibido el IDEP carece del elemento que las haría viables: no tienen crisis fundante, o mejor, los maestros no son conscientes de su crisis.

Ponencia: Lineamientos curriculares en matemáticas

Celia Castiblanco comenzó aclarando que en la actualidad, la función principal del Ministerio de Educación es la de establecer las pautas, orientaciones, horizontes y lineamientos para las instituciones educativas.

En el preámbulo que hizo para llegar a centrarse en el tópico de los lineamientos curriculares para la educación matemática, se refirió a la existencia de dos visiones diferentes acerca de la naturaleza de las matemáticas, consideración que se ha tenido presente a lo largo del trabajo del MEN. Planteó en ese sentido preguntas como las siguientes: ¿qué son las matemáticas?, ¿qué relación se establece entre las matemáticas y la cultura?, ¿cómo se organiza el currículo de matemáticas?, ¿qué énfasis es necesario hacer para desarrollar el pensamiento matemático?, ¿qué principios, criterios y estrategias orientarán la evaluación del desempeño de los alumnos en matemáticas?

Posteriormente, la ponente destacó que en los lineamientos curriculares para la educación matemática, se propone organizar el currículo como un todo armonioso e integrado alrededor de tres grandes ejes: procesos de aprendizaje, conocimientos básicos y el contexto.

Aludió también a la tecnología, llamando la atención sobre preguntas acerca del papel de la tecnología en la educación matemática, acerca de qué tipos de software educativo se maneja, y acerca de cómo usar esa tecnología en la educación. En relación con el uso de nueva tecnología (computadores, software) en colegios oficiales, señaló la existencia de situaciones que es necesario conocer y comprender para buscar maneras de superarlas; por ejemplo, varios colegios que han recibido el programa Cabri -Géomètre, no lo han desempacado siquiera. Así que, es urgente empezar a plantear problemas de matemáticas que involucren la tecnología, como una forma para impulsar su uso en el aula.

Para terminar y en esa línea de la tecnología, mencionó un proyecto que está liderando el MEN, en el que participan veinte universidades del país y algunos colegios, y que está recibiendo asesoría del investigador Luis Moreno del CINESTAV de México.

Algunas reflexiones

Con respecto a la implementación de las políticas educativas en las instituciones escolares, el relator Edgar Guacaneme plantea las siguientes reflexiones.

Durante muchos años, la comunicación del conocimiento ha estado expresada a través de una simple acción: la transmisión de información. De esta tradición parece no haber escapado el conocimiento, que podríamos denominar educativo, generado en los trabajos e investigaciones de organismos rectores como el Ministerio de Educación Nacional.

Esta tradición parece haber acompañado el movimiento que, bajo la dirección del profesor Carlos E. Vasco, dio como resultado la Propuesta de Reforma Curricular en Matemáticas, hacia la segunda mitad de la década del ochenta y primera de la del noventa. Esta misma tradición parece estar aún vigente en el actuar de muchos miembros de la comunidad educativa, y en particular de la encargada de gestionar –a todo nivel– las construcciones logradas más recientemente, algunas de ellas expresadas en los sustanciales cambios legislativos en materia educativa.

En la actualidad, y desde hace no muy pocos años, pero si de manera muy esporádica, algunos actores de la comunidad educativa han reconocido que el conocimiento educativo no puede ser implementado y usado en favor de la institución escolar si, paralelamente a la información, no existen procesos de construcción personal e institucional del mismo. La aceptación de este hecho, de un lado, explicaría –en gran medida– por que sólo en muy pocas institu-



ciones educativas los planteamientos contenidos en documentos directrices del currículo en matemáticas (v.g. Resolución 2343 o los Lineamientos Curriculares de Matemáticas) han logrado modificar de facto la actividad escolar en matemáticas y por que, en general, se realizan transformaciones que no trascienden el uso de un nuevo vocabulario sin lograr construcción que modifique las formas de pensar y actuar docente; de otro lado, exigiría a la comunidad educativa, definir y transitar caminos –seguramente no muy cortos pero si muy tortuosos– que conduzcan a la construcción social y colectiva de conocimiento educativo implementable en las instituciones escolares.

La construcción de un conocimiento educativo tal, debería exigir y promover la búsqueda de puentes o vías de comunicación y acción entre al menos dos instancias de la comunidad educativa: los profesores y los investigadores. Actualmente, esta tarea encuentra eco en algunos pocos programas de investigación-acción que adelantan algunas instituciones y personas, y en algunos de los recientes programas de formación de docentes en ejercicio; sin embargo, también esta tarea tiene enormes obstáculos para su realización, entre las cuales podemos resaltar la exigua cantidad de investigadores y las múltiples dificultades que una cultura tan arraigada en docentes e investigadores define para el trabajo en equipos o trabajo colaborativo.

Con respecto al uso de la tecnología en la educación en matemáticas el relator plantea las siguientes reflexiones.

Son innegables las posibilidades matemáticas que los ingenieros han podido involucrar en una calculadora o en un software especializado; por ejemplo, ya no sólo son los procedimientos aritméticos y estadísticos sino que ahora también son realizables a través de la tecnología los geométricos, algebraicos y analíticos; ya no es necesario hacer una tabulación de valores numéricos de las variables dependientes e independientes, o hacer un análisis de las características analíticas de la función, para poder visualizar un esbozo de su gráfica cartesiana.

Estas posibilidades constriñen una modificación en las actividades de aprender y enseñar matemáticas la cual, en tanto maestros de matemáticas, cuesta trabajo aceptar, comprender e iniciar.

Frente a éstas, y para el caso del aprendizaje, es casi imposible no preguntarse cuáles son los conocimientos matemáticos que un individuo aprende que no sean replicables por estos recursos tecnológicos. Las respuestas a esta pregunta dirigen la atención a una pregunta fácil y ampliamente formulada, pero difícil y pocas veces contestada, a saber: ¿qué significa saber o aprender matemáticas? Desde la particular respuesta que cada docente o investigador pueda construir

a esta pregunta es posible y necesario examinar la pertinencia, coherencia e implicaciones que pueda tener el uso de la tecnología en el aprendizaje de las matemáticas.

Frente a estas posibilidades tecnológicas, pero ahora para la enseñanza, no es fácil entender que llevamos mucho tiempo enseñando con instrumentos mediadores que no siempre permiten construir el tipo de conocimiento deseado y, además, que existen diversos medios que facilitan la realización de exposiciones y que les pueden hacer más comprensibles. Igualmente, ello lleva a cuestionarse si se justifica o no que un individuo invierta parte de su vida escolar aprendiendo a hacer (no muy eficaz ni eficientemente) cosas que una máquina puede realizar de mejor manera, o a reflexionar sobre la calidad de las exposiciones con y sin el uso de la tecnología.

La problemática acerca del uso de la tecnología en el salón de clase ejemplifica de manera evidente las dificultades de formación –e incluso de información– que caracterizan a un buen número de docentes de matemáticas.

Efectivamente, la mayoría de los profesores no conocen de la existencia de software educativo (v.g. Derive, Cabri Géomètre) cuyas potencialidades superan ampliamente los juegos interactivos y permiten generar procesos de aprendizaje de las matemáticas. Algunos de los que conocen de la existencia de estos paquetes informáticos no saben utilizarlos o conocen sólo algunas funciones de los mismos. Por su parte, aquellos quienes saben su funcionamiento no siempre los usan en sus clases ya sea para enseñar o para permitir aprendizaje.

Esta situación se complejiza aún más, cuando se reconoce que en el país no existen líneas de investigación consolidadas en torno a esta temática, y que los intereses particulares de grupos de investigación no siempre han encontrado un terreno definido por políticas académicas que permitan una gestión investigativa de trascendencia efectiva.

Con respecto los problemas de la capacitación y actualización docente el relator plantea las siguientes reflexiones.

La problemática acerca del uso de la tecnología en el salón de clase ejemplifica de manera evidente las dificultades de formación –e incluso de información– que caracterizan a un buen número de docentes de matemáticas.

Efectivamente, la mayoría de los profesores no conocen de la existencia de software educativo (e.g., Derive, Cabri Géomètre) cuyas potencialidades superan ampliamente los juegos interactivos y permiten generar procesos de aprendizaje de las matemáticas. Algunos de los que conocen de la existencia de estos

paquetes informáticos no saben utilizarlos o conocen sólo algunas funciones de los mismos. Por su parte, aquellos quienes saben su funcionamiento no siempre los usan en sus clases ya sea para enseñar o para permitir aprendizaje.

Esta situación se complejiza aún más, cuando se reconoce que en el país no existen líneas de investigación consolidadas en torno a esta temática, y que los intereses particulares de grupos de investigación no siempre han encontrado un terreno definido por políticas académicas que permitan una gestión investigativa de trascendencia efectiva.

Cuarta reunión

Educación matemática y tecnología: visión de una investigadora y de un profesor universitario

La cuarta reunión del proyecto tuvo lugar el jueves 9 de marzo de 2000⁴ entre las 2:00 p.m y las 6:00 p.m.

En esta oportunidad, se presentaron elementos de las visiones de una investigadora en educación matemática y un profesor universitario, acerca de la tecnología en la educación matemática y en la enseñanza de la física. Los ponentes fueron Marina Ortiz y Bernardo Gómez. Marina Ortiz es profesora de matemáticas en la educación básica e investigadora del Anillo de Matemáticas; recientemente hizo un estudio para Colciencias sobre el estado del arte de la investigación –en Colombia– en educación matemática, a partir del análisis de los proyectos que han sido financiados por tal entidad en los últimos diez años; basó su ponencia en los resultados del estudio mencionado. Bernardo Gómez es profesor del Departamento de Física de la Universidad de los Andes y hace parte del grupo *Tetraedro* de la misma Universidad. El profesor Gómez presentó el software *Modellus*, potente herramienta tecnológica –diseñada por Víctor Duarte, de Portugal– para modelar situaciones.

Aspectos considerados en las ponencias

Ponencia: Investigación en tecnología y educación matemática

En su presentación, la investigadora Marina Ortiz señaló que el análisis de los proyectos en educación matemática que han sido financiados por Colciencias en los últimos diez años, permite identificar algunos aspectos y cuestiones que han sido objeto de investigación; de éstos, desarrolló aquel que se relaciona

⁴ Reporte realizado por Gloria Neira.

con la investigación en tecnología y educación matemática, al considerar y reportar los problemas que en este campo han interesado a los investigadores, las premisas de investigación, y las categorías conceptuales que subyacen a las investigaciones.

- *Aspectos y cuestiones objeto de investigación*

La investigadora Ortiz reporta que el análisis realizado de las investigaciones permite referenciar tres aspectos, no excluyentes, alrededor de los cuales han girado los proyectos de investigación realizados en educación matemática: los componentes del currículo, la construcción de conceptos, y la incorporación de la tecnología en la educación matemática.

Adicionalmente, mencionó que el análisis de los proyectos le permitió reconocer y agrupar las cuestiones objeto de estudio de los investigadores. El primer tipo de cuestiones está relacionado directamente con aspectos relativos al aprendizaje; en este grupo se ubican preguntas acerca de cómo aprenden los niños, de las formas de aprendizaje del conocimiento matemático, y de los componentes psicológicos del proceso de aprendizaje. El segundo tipo de cuestiones, relacionado con el anterior, hace referencia a asuntos de la didáctica en general; son características de este tipo de cuestiones preguntas tales como: ¿cuáles son los procedimientos didácticos que producen mejores resultados en la aprehensión del conocimiento matemático?, o ¿cuáles son las características de un currículo en matemáticas que posibilite el dinamismo y la funcionalidad del conocimiento matemático que se adquiere en el proceso escolar? También, en relación con la didáctica en general, se ha mirado la validación de propuestas didácticas novedosas y la incorporación de nuevas tecnologías, como recurso y como medio en la obtención de mejores resultados. Un tercer tipo de cuestiones hace referencia a asuntos que tienen que ver con la cultura; por ejemplo, hay interés en el impacto del ámbito cultural y social en los procesos formales, en las causas de bajo desempeño en matemáticas, o en cómo se explica el poco gusto –y en ocasiones el rechazo– hacia el estudio de las matemáticas. Un cuarto tipo de cuestiones tienen que ver directamente con conceptos matemáticos como *número*, *variable*, o *función* y con aspectos relacionados con la formación de docentes en donde se abordan preguntas como ¿cuáles son los elementos conceptuales y metodológicos de un programa de formación de docentes que tenga en cuenta la problemática detectada?

De otra parte, Marina Ortiz señaló que se detecta una intencionalidad en los proyectos de generar propuestas que apunten a subsanar los problemas detectados y de no limitarse al diagnóstico de situaciones. Algunas de estas



propuestas se relacionan con la pertinencia del uso de la tecnología en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

• *Los proyectos acerca de la incorporación de la tecnología en la educación matemática*

La investigadora Ortiz, luego de exponer los aspectos y cuestiones objeto de investigación, presentó un breve reporte sobre las investigaciones en tecnología y educación matemática, haciendo notar que en el ámbito internacional se percibe un gran impulso en esta área de indagación; como indicador de este impulso mencionó que en la Duodécima Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME 12), se presentaron cerca de doce talleres relacionados con el empleo en las matemáticas escolares de las calculadoras TI-92, del Cabri Géomètre y del Derive.

En el ámbito nacional, reseñó la existencia de tres trabajos de investigación que financió Colciencias: *Matemática de la señal* (con el software Matemática), realizado en 1992 por George Kemel, de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas; *Los sistemas de computación simbólica en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas básicas universitarias*, realizado por Alfonso Bustamante y Jairo Alvarez, de la Universidad del Valle; y, *Calculadoras gráficas y precálculo*, realizado entre 1994 y 1995, por Pedro Gómez, Vilma Mesa, Cristina Gómez, Paola Valero, Cristina Carulla y Felipe Fernández, de “una empresa docente” de la Universidad de los Andes.

El estudio de estos trabajos permitió identificar algunos rasgos característicos de la investigación realizada (a nivel nacional) en tecnología y educación matemática, a saber:

Intereses en tecnología y educación matemática. Algunos ámbitos problemáticos que en este campo han abordado los investigadores atienden a: la naturaleza del conocimiento matemático que se pone en juego en la realización de tareas en las que es, o no, necesario utilizar tecnología; el desarrollo de destrezas matemáticas –geométricas, lógicas, o numéricas– a través del uso de nuevas tecnologías; la formación de los estudiantes en la autonomía y en actitudes favorables para el aprendizaje de las matemáticas, mediado por el uso de la tecnología en los procesos de enseñanza; los ejes organizadores de un currículo en matemáticas que considere la incorporación de nuevas tecnologías; la posibilidad de ubicar a los estudiantes en la esfera de la metacognición, por cuanto el computador permite alejarse al ser de la forma como aprende y se convierte en un medio para modificar la manera como se aprende.

Premisas de la investigación. Existen algunas premisas teóricas básicas que comparten los investigadores en tecnología y educación matemática, estas son: el conocimiento matemático se construye en un proceso dinámico de asimilación y acomodación, de desequilibración y equilibración; las matemáticas son una ciencia viva que evoluciona y es funcional, es decir que permite y ayuda a plantear y resolver problemas; el conocimiento matemático que se construye en la escuela debe tener un doble carácter: el saber matemático compuesto por el conocimiento matemático y el conocimiento escolar; las herramientas tecnológicas son un elemento constitutivo de situaciones de aprendizaje novedosas y esencialmente distintas de la que han proporcionado tradicionalmente el lápiz y el papel (o el tablero y la tiza), y que conducen a que se generen nuevos entendimientos, nuevas formas de acceder al conocimiento y promueven la creación de modelos propios de pensamiento; y, los objetos matemáticos, a través de las herramientas tecnológicas, encuentran formas de representación dinámicas y ejecutables.

Categorías conceptuales de la investigación. Se reconocen algunas categorías conceptuales que atraviesan la discusión de las investigaciones en lo conceptual y en lo metodológico; son ejemplo de ellas, el saber escolar, la transposición didáctica, los obstáculos didácticos y epistemológicos, o la ingeniería didáctica.

Ponencia: Modelos matemáticos en el aula de procesos físicos

En su ponencia, Bernardo Gómez inicialmente planteó una situación física relativa a un resorte y a un peso pendiendo de éste, con movimiento oscilatorio. En seguida, diseñó un modelo matemático en el que implicaba algunas de las magnitudes variables de la situación física; una vez introducido el modelo en el software Modellus, procedió a hacer variaciones de los parámetros constitutivos del modelo y a exhibir cómo éstas modifican el comportamiento de la variación de las magnitudes físicas. De esa manera ilustró cómo dicho software permite experimentar –en el plano virtual– para tener un entendimiento de las leyes físicas, y cómo los procesos de conjetura y prueba se redimensionan, y facilitan, a través del uso de la tecnología en el estudio de fenómenos físicos. Igualmente, a partir del modelo matemático creó, con este software, una animación que ilustraba el fenómeno físico.

En el contexto del análisis ulterior del proceso de modelación de fenómenos físicos, el profesor Gómez afirmó que la naturaleza está en lenguaje matemático, y que el describir las relaciones existentes entre dos o más fenómenos conduce generalmente a una fórmula matemática. Esta fórmula puede ser asimilada a un



modelo, en tanto representa justamente –de manera general y abstracta– la relación entre las magnitudes variables implicadas, independiente de los datos a partir de los que se ha deducido o inferido.

En la parte final de su ponencia, el profesor Gómez replicó el experimento y el trabajo de variaciones de los parámetros implicados en el modelo, utilizando el programa Microsoft Excel. A través de las tablas de valores generadas por este programa, mostró que escolarmente se puede utilizar este software para realizar procesos de modelación, experimentación y verificación de hipótesis y conjeturas, similares a los ofrecidos por el software Modellus. Señaló, además, que estos recursos tecnológicos permiten –a través de la representación gráfica y de la amplia cantidad de valores generados para las variables– una visualización más potente de los micromundos físicos, posibilitando el estudio del rango de validez del modelo, facilitando los procesos de predicción, reduciendo el tiempo usado para hacer cálculos, y generando un mejor ambiente para hacer nuevas preguntas y buscar nuevas respuestas.

Preguntas y comentarios en torno de las ponencias

La mayoría de los comentarios de los profesores asistentes giraron en torno de los posibles pros y contras que tiene la tecnología y/o las herramientas tecnológicas (calculadoras, computadores, etc.) en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Algunos de estos comentarios se presentaron a modo de pregunta; por ejemplo, se planteó una inquietud acerca del papel que juegan los programas de computador (e.g., el Derive) en los procesos algorítmicos, haciendo ver que éstos arrojan resultados y no permiten ver los procesos. Estos comentarios exhibían un carácter hipotético y, en cierto sentido, especulativo; el exiguo contacto didáctico con la tecnología y con sus herramientas, por parte de los profesores asistentes, justificaba ese carácter. Este mismo carácter condujo consecuentemente al reconocimiento de la necesidad de generar procesos de indagación e investigación en el aula acerca de las posibles implicaciones y necesidades que impone el uso de la tecnología en el aula de matemáticas. A este respecto, los asistentes consideraron que como parte de una estrategia investigativa se deberían tener un grupo experimental y un grupo control; al primero de ellos se le brindaría un tratamiento didáctico basado en el uso de la tecnología, en tanto que al segundo se le daría un tratamiento didáctico tradicional.

Justamente para destacar ante los asistentes la relevancia y pertinencia de la reflexión e indagación acerca de los asuntos didácticos implicados en el uso de la tecnología para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas

escolares, el investigador Edgar Guacaneme propuso una serie de preguntas y consideraciones en torno a: las ventajas y desventajas de la tecnología en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; el uso pertinente de la tecnología en el proceso de aprendizaje; los aspectos formativos que se ganan o pierden al introducir la tecnología en el proceso educativo; y, los requisitos para acceder al uso de la tecnología en el aula.

Para generar un contexto de ejemplificación para algunas de las preguntas y comentarios, el profesor Guacaneme presentó un problema retomado de la prueba utilizada en el Tercer Estudio Internacional en Matemáticas y Ciencias (TIMSS); el problema vincula el uso de una calculadora de cuatro operaciones.

Realice en la calculadora los tres primeros productos y luego, sin la calculadora, realice el cuarto producto

$$34 \quad \times \quad 34 \quad =$$

$$334 \quad \times \quad 334 \quad =$$

$$3334 \quad \times \quad 3334 \quad =$$

$$33334 \quad \times \quad 33334 \quad =$$

En este problema la calculadora simplemente permite encontrar los resultados de los tres primeros productos, pero no permite realizar el cuarto, para ello es necesario reconocer el patrón de comportamiento de los factores y asociarlo al patrón de comportamiento de sus respectivos resultados. En consecuencia, la calculadora permite centrar la atención en el objeto de estudio (los patrones) y ejecuta los procedimientos algorítmicos, que podrían dispersar la atención de los estudiantes.

Algunas reflexiones

La relatora Gloria Neira, plantea las siguientes consideraciones al respecto de los temas tratados en esta reunión. Existe aún mucho recelo por parte de los profesores de matemáticas de educación básica y media hacia el uso de la tecnología en la educación. Esto se hizo manifiesto en las posiciones que tomaron con respecto a los contras expuestos y en los comentarios acerca de que la tecnología nunca reemplazará al maestro. Se notó también en los participantes (la mayoría maestros) un marcado desconocimiento de software educativo básico y del uso de las calculadoras graficadoras, así como de la manera como estas herramientas pueden ser utilizadas en el salón de clase. Esto hace sospechar que son muy pocos los profesores que trabajan con tecnología y que el uso de la tecnología no ha permeado el sistema educativo, la

institución, ni el salón de clase. Por todas estas razones es pertinente involucrar a los maestros en una experiencia con tecnología, cercana a la que se puede vivir con los estudiantes, que ilustre algo en relación con las competencias que se podrían potenciar en sus alumnos mediante situaciones didácticas creadas para el empleo de tecnología. Una tal vivencia puede apoyar un acercamiento entre el conocimiento práctico y experiencia de los maestros, y el discurso de los investigadores que se ha explicitado en las reuniones anteriores.

De otra parte, preguntas y comentarios acerca del fundamento de las afirmaciones de la investigadora Ortiz, condujeron a pensar que no hubo una buena comprensión de lo que ella expuso como estado del arte y, que en general los términos usados por ella no encontraron eco en el grupo de maestros. Esto podría explicarse por el escaso conocimiento que ellos tienen acerca de las teorías en educación matemática; términos como “transposición didáctica”, “ingeniería didáctica”, “contrato didáctico”, etc., no hacen parte ni del lenguaje de los maestros, ni de sus necesidades e intereses.

La ponencia del profesor Gómez despertó mucha curiosidad por la potencia y novedad del software utilizado. Igualmente fue interesante la claridad con que fue expresado algo tan complejo como es la descripción por modelos matemáticos de una realidad observada. Sin embargo, los maestros adjudicaron el impacto logrado a la destreza con que el expositor lo utiliza y no al software mismo o a la problemática de enseñanza– aprendizaje que está detrás del uso de tal tecnología. Este hecho parece evidenciar una particularidad de los maestros asistentes: tienden a centrar su atención en el recurso tecnológico, más que en las posibilidades que se abren para la enseñanza y el aprendizaje de los estudiantes, a través de éste.

Quinta reunión

Calculadoras en el precálculo y la geometría escolar: una experiencia para profesores

La quinta reunión del proyecto tuvo lugar el jueves 13 de abril de 2000⁵ de 2:00 p.m. a 6:00 p.m.

La intencionalidad de la reunión era propiciar un encuentro de los profesores con la tecnología, a través del cual pudieran vivenciar y reflexionar

⁵ Reporte realizado por Gloria Neira y Edgar Guacaneme.

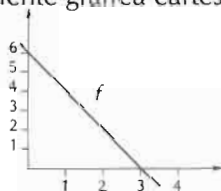
sobre la relación conocimiento matemático – tecnología, y sobre algunas características de la enseñanza y el aprendizaje del precálculo y la geometría con calculadoras.

La reunión se organizó en tres actividades. En la primera, Cristina Carulla y Edgar Guacaneme, investigadores de “una empresa docente” de la Universidad de los Andes, hicieron una sesión de taller en la cual los profesores participantes utilizaron la calculadora graficadora TI-85. En la segunda, Margarita de Meza, también investigadora de “una empresa docente”, hizo una presentación de las posibilidades brindadas por el programa Cabri-Géomètre incorporado en la calculadora TI-92. En la tercera y última actividad, se hizo una puesta en común en la cual se presentaron algunas reflexiones sobre las experiencias vividas durante la reunión y algunas apreciaciones acerca del uso de la tecnología en las clases de matemáticas.

Aspectos considerados en las actividades desarrolladas

- Taller: El papel de la calculadora en la “traducción” de la representación gráfica a la representación simbólica
- Primera parte. A los profesores se les propuso resolver el siguiente problema:

Considere la siguiente gráfica cartesiana de la función f .



- A. Escriba dos expresiones simbólicas para la función representada y justifique por qué las dos expresiones representan la misma función.
- B. Describa el procedimiento que utilizó para determinar cada una de las expresiones simbólicas.
- C. ¿Cuáles conocimientos matemáticos utilizó en cada uno de los procedimientos descritos?

Las expresiones simbólicas que surgieron como respuesta inicial de los profesores al ítem A fueron $y = -2x$, y $2x + y - 6 = 0$ mientras que las expresiones $y = -2(x - 3)$, y $x/3 + y/6 = 1$ aparecieron durante la discusión posterior acerca de otras posibilidades de representación simbólica.

Las respuestas que intentaban dar cuenta de la justificación solicitada en el ítem A, se concentraron en las dos primeras expresiones; al respecto los

profesores argumentaron que ambas expresiones son equivalentes, que describen la misma relación entre las variables, que para valores iguales del dominio se tienen imágenes iguales en ambas expresiones, y/o que las rectas descritas tienen la misma pendiente o los mismos puntos de corte con los ejes. Adicionalmente, los participantes establecieron que entre estas dos expresiones existe una diferencia que se presentó bajo la afirmación: “en la primera la asignación de valores es explícita, en tanto que en la segunda la asignación es implícita”.

Ahora bien, con respecto al ítem B, las respuestas de los profesores mostraron que los diversos procedimientos utilizados en la obtención de la expresión $y=-2x+6$ son relativamente similares; en términos generales, se puede decir que inicialmente se calculó la pendiente de la recta a partir de las coordenadas de dos puntos de ésta, y que esta información se incorporó al modelo de ecuación de la recta punto-pendiente (i.e., $y-y_1=m(x-x_1)$) o a la ecuación pendiente-corte con el eje y (i.e., $y=mx+b$). Una vez hallada la primera expresión, se hacían a ésta transformaciones simbólicas para obtener las demás; por ejemplo, la segunda expresión ($2x+y-6=0$) se obtiene de la primera a través de una suma a ambos términos de la ecuación, en tanto que la tercera expresión ($y=-2(x-3)$) deviene de una sencilla factorización de uno de los términos de la primera, y la cuarta expresión ($x/3+y/6=1$) se obtiene al dividir la primera por 6 y luego sumar -1, a ambos términos de la ecuación. Esta última expresión también se puede obtener de manera directa a partir del reconocimiento de las coordenadas de los cortes con los ejes y de su ubicación en la estructura $x/a+y/b=1$.

Como respuesta al ítem C, los profesores reportaron varios temas, entre los cuales se identificaron algunos prioritariamente utilizados, entre los que se establecen nexos relacionales, a saber: pendiente-coeficiente del monomio en y; punto de corte con el eje y -término independiente; punto de corte con el eje x -ceros de la función; orientación de la recta-signo algebraico del coeficiente del monomio en x; línea recta-función lineal; función decreciente-proporcionalidad inversa. Algunas de estas relaciones entre temas fueron objeto de discusión dado que no son del todo evidentes o válidas (por ejemplo, no son válidas las relaciones línea recta-función lineal o función decreciente-proporcionalidad inversa). También se reportaron temas como la factorización y la equivalencia entre las ecuaciones.

- Segunda parte. Se proporcionó a cada profesor una calculadora TI-85 y se realizó una breve instrucción sobre el manejo de algunas funciones (escritura de ecuaciones que describen funciones, elaboración de sus gráficas y sus

tablas). Con los conocimientos adquiridos en esta instrucción, se procedió a plantear nuevamente el problema abordado en la primera parte del taller, pero esta vez se solicitó que se hiciera uso de las calculadoras en la estrategia de solución. Se solicitó, además, desarrollar las siguientes preguntas y actividades:

D. ¿Cuál es el papel que cumplió la calculadora en la nueva solución del problema?

E. Reproduzca lo más fielmente posible la gráfica de la función en la pantalla de la calculadora.

F. ¿Cuáles fueron los conocimientos matemáticos, diferentes a los reportados en el ítem C, que le permitieron reproducir la gráfica?

Ante la pregunta planteada en el ítem D, los profesores manifestaron que en la solución de este problema la calculadora cumple un papel muy limitado. En efecto, los profesores no utilizaron la calculadora para determinar las expresiones simbólicas de la función f ; sin embargo, la utilizaron para explorar y verificar si las expresiones halladas generaban la gráfica reportada inicialmente, y con esto justificar la validez de la respuesta. A través de este procedimiento resolvieron parcialmente el ítem E, con lo cual, pudieron evidenciar que la calculadora no admite todas las expresiones halladas, sino solamente aquellas en las que la variable dependiente está expresada en términos de la variable independiente, es decir, aquellas en las que la letra aparece como uno de los miembros de la ecuación. Este hecho fue propicio para generar la inquietud acerca de la diferencia entre ecuaciones y funciones, sobre las relaciones que existen entre estos dos conceptos, y acerca del significado dual (asignación y equivalencia) que puede presentar el signo igual en estas expresiones.

Al tratar de reproducir la gráfica de la función f , en la pantalla de la calculadora, los profesores pudieron evidenciar que este ejercicio más allá de implicar el manejo de elementos técnicos sobre el uso de la calculadora, implica el manejo comprensivo de conocimientos matemáticos acerca de las gráficas cartesianas (e.g., la noción de escala), y de las funciones de variable real (e.g., la idea de dominio y rango de visualización). Con estas observaciones los profesores contestaron, en parte, al ítem F.

Algunas reflexiones a partir del taller

La etapa de instrucción en el manejo de la calculadora permitió evidenciar que la mayoría de los profesores participantes de la sesión, nunca antes había



utilizado calculadoras graficadoras y que ellos tenían dificultad para apropiarse de la lógica que subyace al manejo técnico de éstas. Este hecho, justificaba plenamente la necesidad de generar, para los profesores asistentes, una experiencia personal con el uso de la tecnología, desde la cual se potenciara la resignificación de las opiniones y creencias sobre el uso de las calculadoras en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas.

De otro lado, la mirada lograda acerca del papel de la calculadora en un ejercicio matemático que implica la “traducción” de un sistema de representación gráfico a uno simbólico, llevó a la mayoría de los asistentes a repensar la validez de las afirmaciones en las que se descalifica el uso de las calculadoras en los procesos de aprendizaje, a partir de la creencia de que con éstas ya no hay conocimiento matemático que aprender. Igualmente, esta mirada permitió un ambiente para repensar en la existencia de conocimiento matemático no algorítmico, implicado en ejercicios de matemáticas.

Otra de las reflexiones suscitadas por el taller atiende al desconocimiento que tienen los profesores acerca de cómo utilizar las calculadoras en el desarrollo de los cursos de matemáticas. A este respecto es conveniente reportar la dificultad que impone pensar en las diferencias que existirían entre una clase de matemáticas sin, y con, calculadoras. Por ejemplo, las diferencias en cuanto al contenido tratado; en cuanto a los papeles que desempeñarían profesores, alumnos, textos; en cuanto al conocimiento matemático evaluado y las características de la evaluación; etc.

Ponencia: Aprender geometría con Cabri-Géomètre

Margarita de Meza inició su ponencia señalando que uno de los problemas fundamentales de la educación matemática es “cómo hacer para que los niños aprendan geometría”. Desde ese punto de vista la misión de aprender geometría con Cabri es aportar al mejoramiento de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

La conferencista destacó tres formas de definir la geometría:

- *Geometría como ciencia del espacio.* Esta se ocupa de describir y analizar la forma, de buscar y descubrir regularidades y patrones de forma; a través de esto pretende organizar y codificar su comprensión del entorno.
- *Geometría como método para visualizar y modelar conceptos o procesos, en las matemáticas mismas o fuera de ellas.* A través de ésta se da forma mental o física a conceptos y procesos; se relaciona el mundo de los objetos y los conceptos, con el mundo de los conceptos geométricos, por medio de

imágenes; se usa creativamente la visualización para comprender conceptos o procesos.

- *Geometría como teoría matemática formal.* Básicamente ésta se puede entender como un modelo de la matemática occidental desarrollado –desde los griegos– por medio de axiomas, reglas lógicas, definiciones y teoremas. Este modelo ha sido el paradigma del razonamiento matemático deductivo.

Planteó, además, que en la geometría escolar surge la necesidad y conveniencia de propender por un equilibrio entre esas tres visiones. Para aproximarse a este equilibrio se requiere que en la clase de geometría haya espacio para que los estudiantes –entre otras actividades: exploren situaciones, descubran patrones e invariantes, formulen conjeturas, planteen hipótesis, diseñen experimentos para verificar si las hipótesis se cumplen o no, realicen varias veces el experimento, hagan demostraciones para probar la validez de la afirmación general o muestren contraejemplos.

Desde esta perspectiva es necesario reconocer las posibilidades y limitaciones generadas por la implementación del software Cabri-Géomètre en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría. Para tal efecto, es conveniente precisar que con el programa Cabri, la geometría se transforma en el estudio de las propiedades invariantes de unas figuras cuando se mueven sus componentes en la pantalla. Esta posibilidad de movimiento genera nuevas formas de experimentación que hace posible tanto la observación de una cierta propiedad geométrica, como la verificación de su validez para muchas figuras. Particularmente Cabri permite: experimentar en geometría como se hace en ciencias naturales; diseñar observaciones, construcciones, y/o representaciones; explorar objetos y relaciones entre objetos; modelar, es decir, encontrar una estructura matemática subyacente en cierto problema; conjeturar, es decir, hacer una hipótesis a partir de un descubrimiento e interpretarla; clasificar, es decir, encontrar propiedades comunes; argumentar, es decir, hallar argumentos intuitivos o usar la visualización para llegar a la demostración.

Cada una de estas posibilidades y acciones “físicas” y “mentales” que se potencian con el uso de Cabri, fueron objeto de ejemplificación por parte de la ponente. Por ejemplo, elaboró en la pantalla de la calculadora una construcción geométrica a través de la cual se podía visualizar fácilmente la propiedad de los triángulos que tienen como lado uno de los diámetros de una circunferencia y como vértice opuesto cualquier punto de la misma.

Finalizó su presentación señalando que el maestro que quiera usar Cabri en su clase tiene al menos dos retos importantes con respecto a la enseñanza



de la geometría: el primero es diseñar y realizar actividades que, mediante el uso pertinente de la tecnología, enriquezcan la comprensión de los conceptos y relaciones geométricas, en las tres acepciones de geometría; el segundo es determinar cuándo es pertinente usar Cabri y cuándo no lo es.

Discusión y plenaria

Después de las dos actividades anteriores, se sometió a consideración de los asistentes la siguiente cuestión:

Bajo el supuesto de que existen las condiciones ideales, ¿cuál podría ser la mayor potencialidad y cuál la mayor dificultad en el uso de la tecnología en el aula de clase?

Al respecto, a continuación se presentan clasificadas algunas de las respuestas dadas por los asistentes.

Potencialidades:

- El uso de la tecnología en el aula de clase potenciaría la enseñanza y el aprendizaje. En la enseñanza, conminaría al maestro a buscar diversas metodologías de enseñanza, a ser más creativo, a proponer alternativas novedosas de trabajo en el aula, y a reorganizar sus conceptos. En el aprendizaje, sería un elemento llamativo para los alumnos; desarrollaría más la creatividad, el razonamiento, el análisis y la búsqueda de diversas soluciones.

- El uso de la tecnología en el aula de clase se convierte en un reto para los docentes ya que deben explorar otros horizontes, que van más allá de la matemática en sí. Adicionalmente, brinda la posibilidad y la necesidad de diseñar y crear formas diferentes de introducir y analizar conceptos matemáticos, dejando de lado la memoria y enfatizando en los análisis.

- La utilización de la calculadora potencia el desarrollo del pensamiento matemático; por ejemplo impone condiciones que favorecen la justificación de respuestas que da la calculadora, ya sean gráficas, algebraicas o numéricas. En este sentido, la calculadora si bien hace el proceso mecánico, sigue necesitándose el proceso lógico para saber cómo, para qué y cuándo usarla.

- El uso de la tecnología en el aula de clase ahorra tiempo al facilitar construcciones y diseños. Además, permite afianzar procesos por medio de la experimentación al poder representar las diferentes variaciones en las construcciones o en los diseños.

- Las calculadoras permiten un acercamiento al mundo real, generando un mundo en donde lo abstracto (teoría) está próximo a lo visual.

- Con la tecnología haciendo parte de las clases, muy probablemente se convertiría en realidad esa intención de que la educación debe ser para lograr mejores desempeños en la vida, ya que los alumnos estarían viviendo en el colegio la tecnología que los rodea en el mundo de hoy.

- Las calculadoras usadas en el aprendizaje de las matemáticas darían mayor rapidez y facilidad para visualizar modelos que permitan y exijan la generalización. Igualmente, éstas podrían minimizar el desagrado que por las matemáticas tienen algunos estudiantes, y les despojaría de la angustia generada al cometer errores.

- El uso de la tecnología despierta la curiosidad por lo nuevo y alimenta su capacidad investigadora, hace sentir a estudiantes y maestros que la ciencia está al alcance de todos y que para experimentar no necesariamente debemos estar en un “laboratorio”.

Dificultades:

- El maestro debe reevaluar su trabajo, diseñar un nuevo currículo donde se incluya la tecnología, elaborando una gran cantidad de actividades en los diferentes temas. Esto requiere mayor tiempo y capacitación para el diseño de actividades apropiadas.

- Se requiere un replanteamiento de lo que debe ser enseñado, enfatizando más en los diversos contenidos matemáticos que lo algorítmico, lo cual implica una reforma curricular que impone exigencias difíciles de satisfacer por los maestros en las condiciones actuales.

- Rompe con una cultura basada en lo mecánico y en la que no se mira el valor de la abstracción. En este sentido exige un cambio de actitud acerca de lo que tradicionalmente los maestros hacen en la escuela.

Sexta reunión

El uso de tecnología en clase: visión de una investigadora y de un profesor universitario

La sexta reunión del proyecto tuvo lugar el jueves 11 de mayo de 2000⁶ entre las 2:00 p.m. y las 6:00 p.m.

En esta ocasión fueron dos los ponentes: Leonor Camargo, profesora-investigadora en educación matemática de la Universidad Pedagógica

⁶ Reporte realizado por Gloria Neira.



Nacional, quien ha estado vinculada al proyecto que lidera el Ministerio de Educación Nacional para la incorporación de nuevas tecnologías en las matemáticas escolares. El otro ponente fue Iván Castro, profesor de matemáticas de la Universidad Javeriana, quien ha liderado en su institución el empleo de la tecnología como herramienta para los cursos de matemáticas.

Aspectos considerados en las ponencias

Ponencia: Proyecto MEN. Incorporación de nuevas tecnologías al currículo de matemáticas

La investigadora Camargo partió del interrogante: ¿Por qué el Ministerio de Educación Nacional emprende un proyecto en esta dirección?

Como aproximaciones se tendrían respuestas como: los cambios sociales, las demandas de la sociedad. Un elemento que cuestiona es el analfabetismo funcional en matemáticas: el común de las personas no hacemos uso de las matemáticas. Hacemos uso de unas técnicas y las ejecutamos. Ni siquiera los profesionales hacen uso de las matemáticas. Al respecto cita a Bishop con sus estudios sobre la *enculturación de las matemáticas*. Se usan en la calle al encontrarse con rebajas y descuentos de artículos de uso común, pero nada más. Al respecto habla de la vigencia del conocimiento adquirido, de la movilidad de las empresas de acuerdo a la competencia, y para responder a las expectativas de evaluación en Colombia. ¿Por qué no se dan los cambios esperados en el sistema educativo? Por miedo, por inercia de las instituciones educativas: son procesos muy lentos porque faltan agentes de cambio. En ese sentido, ella parte de la premisa de que la incorporación de las nuevas tecnologías van a posibilitar transformación de las prácticas educativas y una nueva visión del conocimiento y del aprendizaje.

En seguida pregunta: ¿de qué manera introducir la calculadora al currículo? Frente a esto dice que se reconocen dificultades tanto de orden académico como de orden logístico. En ese sentido, el proyecto del MEN tiene dos objetivos: uno es propiciar, favorecer una nueva visión del conocimiento y de la actividad matemática: el conocimiento es situado; el otro es lograr la apropiación social de nuevas tecnologías, la endogenización del pensamiento científico y cultural y democratización del acceso a la tecnología. Todo esto con el fin de proporcionar un medio expresivo, permitir un acercamiento visual acompañado de instrumentos de medición y control, permitir acceder a representaciones dinámicas de carácter ejecutable, conectar las diferentes áreas y estimular la discusión y confrontación de ideas.



En cuanto al marco conceptual del proyecto, se ha pretendido hacer una reflexión seria que acompañe a los instrumentos para que no se queden como unos instrumentos más, sino que cumplan una función cognitiva y sean fuente de problematización de conceptos; es decir, que permita repensar el currículo.

En cuanto a los elementos teóricos del proyecto, el más importante es la concepción de *recurso tecnológico*: todo recurso que posibilita una vía más fácil de ejecutar acciones; es un instrumento de mediación, un sistema de representación ejecutable, medio de expresión. Con respecto a la evolución de la tecnología, identificó tres momentos de transición cognitiva en la historia:

Cultura mimética. En la que el cuerpo se convierte en sistema de medida.

Cultura oral o mítica. En la que el lenguaje es el elemento principal; la memoria es algo transferible, dado que puede comunicar a los demás.

Cultura teórica. En la que hay sistemas de representación externos como la escritura, y en la que la memoria rebasa los límites impuestos por la biología. Se da una transformación tecnológica y una búsqueda de la reproductibilidad de las acciones realizadas. Los instrumentos tecnológicos hacen por el individuo, las tareas rutinarias y mecánicas, para que el cerebro pueda dedicarse a procesos más elevados. Esos instrumentos de representación de una cultura determinan la organización de esa cultura y su tecnología.

La profesora Camargo hizo ver que el sistema educativo siempre ha hecho uso del recurso tecnológico. El uso de Internet, de lo virtual informático está organizando la vida social. ¿Qué se colige de todo esto? Toda acción cognitiva está mediada por un instrumento: el conocimiento depende de los instrumentos de representación. Entonces, si cada tecnología aporta algo, ¿qué aportan estas nuevas tecnologías? Posibilitan representaciones ejecutables.

Ponencia: Matemática asistida por computador en la Universidad Javeriana

El profesor Iván Castro contó que en la Universidad Javeriana se dictan las clases de matemáticas asistidas por computador. Los resultados de la tecnología hay que usarlos en su debido momento. Históricamente hay muchas muestras del uso de instrumentos en matemáticas: regla y compás, ábacos, manos, máquina calculadora (Pascal), computador (Babage), máquinas, programas (Byron); teorema de incompletitud de Gödel, inteligencia artificial (Newman) y máquina de Turing, máquina de Post hasta llegar al computador moderno.

El computador debe ser parte integral de la enseñanza y aprendizaje de la matemática porque es un centro de atención de lo conceptual, hay mayor motivación, se depura la acción docente, permite verificar los resultados de

su trabajo, permite ruptura de paradigmas, permite el cambio de condiciones del contrato didáctico, permite llegar rápidamente a los resultados.

En cuanto a los programas, manejan las matemáticas desde lo simbólico, a bajo costo, con bajas exigencias de hardware, son fáciles de operar, son buenos graficadores, aptos para programar, pueden ser llevados a las calculadoras graficadoras, de fácil configuración.

Entre los programas de matemáticas citó: Eureka: manejo numérico no simbólico, Redeus: matemática simbólica, problema al cargar cada programa, Calcula, Mathcad: no tiene un tratamiento simbólico de la matemática, Derive, Mathematica, MathLab.

Respecto al Derive, hay buen número de publicaciones: más de cincuenta libros en todos los idiomas, referenciados en muchas revistas internacionales, aún a nivel de secundaria.

En su experiencia en la Universidad Javeriana, dijo que se ha dado un trabajo en forma masiva a nivel de: cursos de formación de profesores permanentemente, planeación del trabajo en el computador en los cursos; reestructuración del contenido de los programas; talleres como soportes metodológicos. Se han hecho encuestas que revelan que el 97% de los profesores usan el computador y un 88% de los estudiantes está de acuerdo con el uso del computador. Hay opiniones acerca de que sí se presenta un cambio de actitud, una mejor comprensión que favorece la ejemplificación, una mayor capacidad de resolución de problemas, más interés por las materias.

Con respecto a los proyectos futuros, un propósito que tienen en mente es el de mejorar el currículo, mejorar la formación, extender el proceso a otros profesores, implementar el programa en estadística, con la novedad de que la calculadora TI 89 ya tiene incorporado el software Derive.

Consideraciones

En relación con la ponencia de la profesora Leonor Camargo se pudo concluir que muchos profesores universitarios están aprendiendo a usar el recurso al tiempo que los profesores de colegio. Es un ejemplo del tipo de interacción directa entre maestros y profesores universitarios, además de la interacción con los lineamientos en tecnología. Cada uno, desde su saber, interactúa para enriquecer y formular nuevas situaciones didácticas en el salón. En esta interacción se va construyendo un saber común a los investigadores y maestros de las escuelas. Los conceptos no emergen sino que se tiene la posibilidad de transferir esos constructos. Se da, con motivo de la presencia de la tecnología

una fluidez representacional. Se asume la matemática desde una perspectiva cultural. Se buscan significados. Hay que mirar e interpretar el mundo con las gafas de las matemáticas.

Los profesores manifestaron buen agrado con la ponencia de la profesora Camargo en tanto incorpora elementos didácticos y es más adecuada en el ámbito educativo escolar de la básica y media. La charla del profesor Castro la ven muy lejana a su realidad, lo cual se detecta por el reiterado comentario, de que el Derive es solamente para adiestrar y no para conceptualizar.

Los dos ponentes de la reunión presentaron visiones diferentes acerca de la problemática del uso de la tecnología. En el primer caso la charla se centró en aspectos teóricos que ayudaban a comprender la importancia de la incorporación de la tecnología en el ámbito escolar. La segunda hizo una descripción de las posibilidades del uso de la tecnología desde la experiencia que ha tenido en la Universidad Javeriana. Este hecho puede explicarse por el tipo de formación de cada uno de ellos. Mientras la profesora Camargo tiene una formación en educación matemática, entendida ésta como área de conocimiento que se ocupa de los fenómenos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, el profesor Castro viene de una formación matemática y sus conocimientos en educación matemática los ha adquirido a través de la experiencia con sus alumnos universitarios.

Séptima reunión

Profesores de matemáticas escolares y el uso de tecnología en clase. Cierre del Encuentro

La séptima reunión del proyecto *Encuentro de saberes* tuvo lugar el martes 6 de junio de 2000⁷ entre las 2 y las 6 de la tarde. La mayoría de los asistentes participaron en las siete reuniones del Encuentro.

En primer lugar se da cuenta de aspectos generales del evento; en segundo lugar se expone un resumen de ideas centrales de las dos ponencias realizadas; en tercer lugar se presenta un resumen de la actividad de cierre del Encuentro.

Aspectos generales

La reunión se inició con dos ponencias, cada una de cuarenta y cinco minutos, a cargo de dos profesores de matemáticas que han tenido alguna experiencia con respecto a la incorporación de la tecnología portátil en su aula de clase.

⁷ Reporte realizado por Patricia Inés Perry.



Los ponentes fueron Jorge Rodríguez, jefe del Departamento de Matemáticas del Colegio San Jorge de Inglaterra, y Mariana Sarmiento, profesora del Colegio Santa Francisca Romana. Aunque las dos reuniones anteriores también se centraron en la presentación de aspectos relativos al uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas y en particular, se hizo referencia a dos proyectos sobre la incorporación de tecnología en aulas de clase, en esta ocasión se quiso destacar de manera importante la visión y experiencia de dos profesores de matemáticas que han usado tecnología portátil en su clase, sin que dicha experiencia esté inscrita en un proyecto promovido o liderado por alguien diferente del profesor mismo.

Después de las dos ponencias se abrió un espacio para la interacción entre los participantes con el propósito de obtener unas conclusiones validadas por la opinión de quienes estuvieron asistiendo regularmente al Encuentro.

Ponencia: Las calculadoras graficadoras en el aula de clase

El profesor Rodríguez contó que desde hace algo más de un año está empeñado en lograr incorporar la tecnología portátil en las clases de matemáticas de todo el colegio. Aunque en ese empeño hay algún asunto económico por resolver pues ve la necesidad de contar con un cierto equipo, ese no es ni el único ni el más importante problema. En su calidad de jefe del Departamento de Matemáticas, Jorge señala dos dificultades que ha tenido que sortear para sacar adelante su propósito. Por un lado, convencer a las directivas del colegio de la importancia de usar este tipo de tecnología en la clase. Por otro lado, vencer la resistencia de los profesores de matemáticas a usar la tecnología. En relación con esto último, anotó que desde hace algún tiempo las dos horas semanales de reunión del área la dedican “solamente para que el profesor aprenda a usar la calculadora graficadora como requisito para que la use en clase”. También afirmó que “para el año entrante los programas de matemáticas se van a ajustar totalmente para que con los textos nuevos se maneje la calculadora graficadora en el aula”.

Dentro de esos planes, es bastante clara para el profesor Rodríguez la necesidad de una actitud crítica: no obstante reconocer los beneficios del uso de la tecnología en la enseñanza, también es consciente de los peligros potenciales del mal uso, razón por la cual afirmó, haciendo eco del autor del libro de texto que sigue para 10^o y 11^o, que “es necesario establecer dónde es adecuado usarla y dónde no lo es; lo que importa es el uso adecuado de la tecnología; la tecnología portátil, los computadores no son una panacea pero cuando se usan en forma correcta pueden ser un gran estímulo al aprendizaje”.

Además, algunos de los aspectos que quieren lograr con el uso de la calculadora graficadora, son:

- dedicar más tiempo a la exploración, análisis e interpretación de resultados numéricos y gráficos,
- ver gráficamente cómo se van haciendo ciertas construcciones que no es posible ver al hacerlo a mano, conocer las características de las gráficas de una familia de funciones,
- emprender de manera efectiva el uso de la tecnología como parte del proceso de resolución de problemas,
- analizar gráficas de funciones.

Con respecto a su experiencia personal en cuanto profesor de matemáticas cuenta que desde hace ocho años ha venido usando las calculadoras graficadoras (de diferentes marcas) en su aula. Se reúne los sábados con sus alumnos que tienen dificultades en el manejo de la calculadora para darles el apoyo necesario, con el fin de que en las clases puedan usarla de manera adecuada. Han utilizado esta tecnología para resolver sistemas de ecuaciones lineales, inecuaciones, para hacer gráfica de funciones, para estudiar temas específicos de estadística y probabilidad, y en cálculo para derivar, integrar y hacer análisis de gráficas.

Ponencia: Ya no sabría cómo enfrentar un curso de álgebra sin la calculadora graficadora, experiencia en el Santa Francisca Romana

El lema expresado en el título de esta ponencia expresa la visión de la ponente acerca de la importancia del uso de la tecnología en la enseñanza y aprendizaje del álgebra. La experiencia de Mariana se inscribe en un proyecto institucional de incorporar las calculadoras graficadoras en los cursos de matemáticas del colegio, proyecto que es iniciativa de los profesores que allí trabajan. Señala tres aspectos que han sido claves para el desarrollo de tal proyecto:

- el apoyo institucional de las directivas que se concreta en una confianza y respeto hacia la autonomía del profesor,
- el trabajo en equipo de los profesores del Departamento de Matemáticas que se concreta, entre otras cosas, en el apoyo que se dan los profesores entre sí en torno a los asuntos propios de la enseñanza y en la apertura de sus clases a los colegas,
- el trabajo personal de cada profesor que se caracteriza, entre otras cosas, por una actitud crítica para considerar las ventajas y desventajas del uso de la

calculadora graficadora en el aprendizaje, por una actitud de búsqueda y exploración en torno a los aspectos relativos a la enseñanza y por una actitud positiva para tomar riesgos puesto que el uso de la tecnología suele dar miedo y es necesario vencerlo.

La experiencia de la que habló Mariana en esta ponencia se ubica en 9º grado. Ella afirma que la incorporación de la calculadora graficadora en su clase (proyecto en el que ya lleva dos años de trabajo diario) ha tenido implicaciones en el currículo y efectos en sus estudiantes. Los cambios en el currículo se extienden a los contenidos matemáticos que se tratan y al enfoque con que se presentan; a la metodología empleada, y a la evaluación que se hace a los alumnos. Naturalmente, todos estos elementos del currículo junto con la presencia de la tecnología portátil como recurso habitual, están determinados por y al servicio del logro de unos objetivos generales⁸ que son comunes a todos los cursos de matemáticas del colegio y al logro de unos objetivos específicos que se concretan en cada curso de acuerdo al contenido matemático tratado⁹.

Entre los cambios realizados, destacó el hecho de presentar los temas matemáticos de manera conectada (e.g., ecuaciones lineales y funciones lineales se tratan dentro de una globalidad); además, el enfoque es funcional y hace énfasis en el manejo gráfico y numérico, estableciendo siempre conexiones entre lo gráfico y lo simbólico. Dijo que se ha llegado a trabajar de manera intuitiva, de manera informal, pero a fondo, conceptos matemáticos básicos para el cálculo (e.g., puntos de tangencia, asíntotas) y esto ha sido posible por tener como recurso la calculadora graficadora.

Con respecto a la metodología destacó cambios que se concretan en un énfasis para que el alumno pueda ver, descubrir, en vez de que se le cuenten como hechos cumplidos las propiedades y características de los objetos matemáticos. También señaló como cambio el tipo de tareas que es posible

⁸ Los cuatro objetivos generales para el área de matemáticas son: desarrollar habilidades de razonamiento, de comunicación, de resolución de problemas y lograr el uso eficiente de la tecnología.

⁹ En noveno grado, algunos de los objetivos específicos pretenden que el estudiante: interprete, realice y analice tablas, gráficos y fórmulas; comprenda funciones algebraicas (lineales, cuadráticas, polinómicas, racionales, exponenciales, logarítmicas) y las utilice para modelar situaciones reales; analice las propiedades de las funciones algebraicas (crecimiento, dominio, rango, interceptos, puntos de inflexión, etc.) e interprete los resultados en contextos reales, simulados o aplicados; organice datos y resuelva problemas; realice conexiones entre las matemáticas y otras áreas del conocimiento; organice y comunique ideas matemáticas en forma coherente, clara y exacta; lea comprensivamente información matemática; utilice las calculadoras graficadoras para incursionar en diferentes temas matemáticos.



proponer al estudiante cuando éste dispone de la calculadora graficadora; tales tareas pueden ser más significativas e interesantes y menos rutinarias, con lo que se logra, en su opinión, un aprendizaje más significativo.

Con respecto a la evaluación, ahora la profesora hace más énfasis en el análisis e interpretación de conceptos matemáticos en contextos reales o simulados, en la realización de proyectos que buscan modelar situaciones reales usando funciones matemáticas. Señaló como asunto clave el uso de la calculadora graficadora para hacer un proceso de autoevaluación que le ayuda a los alumnos a saber qué está bien y qué no.

Los alumnos están mucho más motivados durante la clase de matemáticas; incluso a quienes no les gusta la matemática se involucran en las tareas que se les plantea. Con respecto a lo que se puede esperar del comportamiento de los alumnos, la profesora Sarmiento afirmó que “ponerles [a los alumnos] una calculadora gráfica en las manos es ponerlos a volar”. Pero, aclaró que no es sólo la motivación y la actitud de los alumnos lo que ha cambiado; también ha visto que la comprensión de ellos ha mejorado y la forma como abordan las diferentes tareas que se les proponen.

Comentarios en torno a tres preguntas

A continuación se expone el texto (tres enunciados) que se sometió a consideración de los participantes en busca de validar lo allí dicho como conclusiones del proyecto.

A. Los investigadores en educación matemática se mueven en contextos teóricos que les impiden reconocer la realidad que se vivencia en la escolaridad, por ello, sus discursos son poco significativos para los maestros de matemáticas, sus diseños curriculares en matemáticas son irreproducibles e intrascendentes en la escuela, y los programas de formación que generan abordan temáticas ajenas a las necesidades de los profesores.

B. La dinámica que impone el quehacer como docente de matemáticas, genera condiciones que imposibilitan la acción simultánea como profesor, innovador e investigador. Esto conlleva a la necesidad de convertirse en receptor de resultados generados desde la investigación y la innovación en educación matemática y niega la posibilidad de participar en la construcción de estos resultados.

C. El uso de la tecnología en las clases de matemáticas es una realidad a construir. En ese proceso, el trabajo realizado por los investigadores deberá estar íntimamente ligado a la formación de profesores en el aprendizaje y uso

creativo de dicha tecnología, al diseño de estrategias curriculares adaptables y compatibles con las realidades y contextos escolares, y a la conceptualización en educación matemática.

Algunos de los comentarios de los asistentes en torno a las afirmaciones se presentan a continuación:

El nivel socioeconómico de los diferentes contextos en los que ocurre la escolaridad se ve como un factor asociado que determina casi que irremediabilmente lo que puede tener sentido y ser posible en la enseñanza de las matemáticas, máxime cuando se trata del uso de recursos tecnológicos que implican costos importantes para los involucrados en el asunto. Uno de los profesores asistentes señalaba que las experiencias con el uso de la tecnología expuestas por sus colegas (que hacían referencia a estudiantes de un nivel socioeconómico alto) son impensables con sus alumnos de nivel mucho menor; sin embargo, no fueron suficientemente claras las razones de esta tesis.

Con respecto a lo que puede resultar clave en la calidad de la enseñanza y de los resultados de los estudiantes, se destacó que es el cambio que viene desde dentro del profesor lo que realmente puede posibilitar un quehacer especial en el aula. La siguiente cita textual recoge lo dicho:

No interesa si se es profesor del estrato 2, 3 o 6, se puede ser buen profesor sin usar tecnología, es importante creer que los estudiantes son capaces porque una aproximación al currículo como la que hemos visto hoy tiene que partir de la aceptación y de la certeza de que los estudiantes son capaces de hacer una serie de cosas y que uno como profesor también es capaz de hacer un trabajo de enseñanza que implica búsqueda de recursos (Internet, libros), mirar diferentes enfoques, implica mucho trabajo que a veces no estamos dispuestos o acostumbrados a hacer y más bien esperamos soluciones desde fuera.

Con respecto a la distancia que puede haber entre el discurso y el trabajo de los investigadores y el de los profesores, alguien refiriéndose, por ejemplo, a los lineamientos curriculares para matemáticas, señaló que sí es necesaria e importante una interacción más próxima y frecuente entre investigadores y profesores de manera que éstos puedan ver y comprender más claramente los planteamientos teóricos de la educación matemática y eso les pueda aportar luces con respecto a lo que se podría hacer en el aula.

Con respecto a la hipotética imposibilidad de que un profesor participe en la construcción de resultados que provengan de un trabajo de investigación o

de innovación, se señaló que las ponencias presentadas por Mariana y Jorge dan indicios de que es posible hacer innovación en clase y que con una intención clara y consciente de sistematizar el proceso, es posible obtener resultados de tal proceso de indagación o de innovación.

Se mencionó también el deseo de profesores, que han hecho algún trabajo de indagación apoyados por alguna institución universitaria o inscritos dentro de algún proyecto de formación de profesores, de continuar teniendo oportunidades para hacer indagación sobre asuntos específicos de su quehacer docente. Además, se enfatizó la necesidad de comenzar a utilizar los espacios institucionales que se tienen para realizar en equipo, trabajos de indagación y para sistematizar las experiencias que se van construyendo y a través de las cuales el grupo de profesores de la institución podría aprender para mejorar aspectos específicos de su práctica.

Las dos experiencias que fueron presentadas en esta última reunión dan evidencia de que el uso de la tecnología en las clases de matemáticas es una realidad a construir. Se ve que detrás de lo que los ponentes contaron hay una intención clara y una forma de proceder en el día a día, que permite ir construyendo un currículo, una forma de ver las matemáticas, etc.



CONCLUSIONES

El proyecto *Teoría y práctica de la educación matemática. Encuentro de saberes en precálculo y tecnología* tuvo como objetivo principal abrir un espacio de interacción y de intercambio de ideas entre diferentes actores del sistema colombiano de educación matemática.

Al presentar la propuesta ante el IDEP se explicitó la necesidad de que el investigador en educación matemática conozca y comprenda, cada vez con mayor profundidad, la problemática de las matemáticas escolares y las características del contexto escolar que condicionan el funcionamiento de tal sistema, de manera que pueda influir en la conformación de las prácticas. Igualmente se vio la necesidad de que el profesor de matemáticas tuviera acceso a los resultados de la investigación que deberían informar e influir en sus prácticas.

Encuentros, desencuentros y reencuentros entre las prácticas de los investigadores en educación matemática y los profesores de matemáticas, es la impresión que deja esta mirada a los diferentes discursos que circularon en



el espacio que abrió el proyecto *Encuentro de saberes*. Se evidenció una necesidad, sentida por parte de cada uno de ellos, de acercarse más los unos a los otros con sus saberes y contextos diferentes.

Se identificaron tres grupos que hacen parte del sistema colombiano de educación matemática. Un grupo de investigadores en educación matemática cuyas prácticas se describieron alrededor de tres temas: la investigación, el diseño curricular y formación de maestros. Un grupo de profesores de matemáticas entre los cuales hay unos pocos que han hecho investigación en el aula y cuyas prácticas se describieron como investigación, diseño curricular y práctica docente. Igualmente se identificó que pertenecían a este grupo profesores universitarios que no necesariamente han realizado proyectos de investigación en educación matemática pero sí en su disciplina particular. Por último se describió el grupo de funcionarios públicos en donde se identificaron dos tipos, aquellos que han hecho investigación en educación pero no ligada a las matemáticas y aquellos que son investigadores en educación matemática y que forman parte de un equipo del Ministerio quienes tienen una estrecha relación con profesores universitarios y profesores de colegio a través de proyectos conjuntos en la construcción de diseños curriculares para el uso de tecnología en el aula.

Todos los actores que participaron en el Encuentro se pueden catalogar en alguno de estos grupos. Todos viven su práctica alrededor de los mismos temas pero cada uno le da un enfoque diferente y lo mira con profundidades de distinto nivel. Se ve la necesidad que tienen los diferentes actores de interactuar y comunicarse en forma permanente. Sin embargo, el Encuentro evidenció que son muy pocos los investigadores en educación matemática y muchos los profesores, cuestión que dificulta el acercamiento entre la práctica y la teoría. Para que haya acercamiento es necesario que los unos y los otros se formulen preguntas similares, que identifiquen claramente las fronteras de su saber y que cada uno reconozca su especificidad. Esto ayudaría a promover el encuentro.

Realizamos un seguimiento sistemático de la presencia de los diferentes actores, anotando aquellos que eran investigadores en educación matemática, aquellos que eran profesores de matemáticas de colegio o universitarios y aquellos que eran investigadores. Advertimos que asistieron una gran cantidad de profesores de matemáticas de colegios privados y públicos del Distrito Capital (50 en promedio), muy pocos investigadores en educación matemática (4 en promedio) y una menor cantidad de funcionarios públicos (sólo asistieron un día 3 funcionarios).

Este hecho no implica que no se hubiera dado un encuentro entre los diferentes actores de los tres grupos. Muestra quizás una diferencia fuerte en la cantidad de actores que existen en cada una de las categorías y sus necesidades. La comunidad de investigadores en educación matemática es pequeña, por el contrario la de profesores de matemáticas es muy grande. Igualmente puede mostrar una distancia entre lo que un grupo de investigadores en educación matemática ve como una necesidad fuerte y lo que otros grupos no. Muchas son las posibles explicaciones, no es nuestro interés especular en este sentido.

Algunos interrogantes quedaron planteados. En relación a la práctica del docente y su relación con el saber del investigador en educación matemática nos preguntamos ¿Cuál sería el conocimiento profesional deseable del profesor de matemáticas? ¿Cómo debería acercarse el profesor de matemáticas a los resultados de la investigación en educación matemática? ¿Acerca de qué debe ser la reflexión que el profesor haga en relación con su práctica?

Por otro lado vale la pena preguntarse acerca de lo que debería ser la práctica del investigador colombiano en educación matemática y cuál debería ser la relación ideal entre éste y los profesores de matemáticas.

Surgió la preocupación en los participantes acerca de que los términos “investigación” e “innovación” no tienen un significado único. Esta situación les genera confusión y promueve dificultades dentro de la institución escolar. Se hizo explícito que existe una relación entre la investigación, la innovación, el diseño curricular y la práctica docente, pero no fue evidente cómo se podría caracterizar. Es necesario tener en cuenta las condiciones en las que se realiza la práctica docente para decidir si se hace o no investigación o innovación y de qué manera. Es importante trabajar en la construcción de comunidades que busquen cambiar las visiones institucional y personales sobre la investigación y la innovación. Los investigadores deben promover una actitud investigativa en los profesores de matemáticas que se base en la exploración sistemática y reflexiva de la práctica docente, a partir de problemas que sean de interés del profesor. Esto permitiría un mayor encuentro entre investigadores y profesores.

Se evidenció al final del Encuentro que en relación a los planteamientos anteriores existen profesores que han logrado iniciar procesos de cambio –y por ende de innovación– en sus aulas gracias a la tecnología. Se llamó la atención sobre el hecho de que no es la tecnología lo novedoso sino la manera como se enseña el contenido matemático y en lo que se enfatiza para el aprendizaje. En esto estuvieron de acuerdo tanto profesores de matemáticas



que contaron su experiencia como investigadores en educación matemática que han trabajado en el tema de la tecnología.

Los textos presentados en este documento son el testimonio del movimiento de saberes que se vivenció a lo largo de las siete reuniones. Es, para los que estuvimos presentes, un material importante para propiciar nuevos encuentros y desencuentros, siempre con el fin de buscar respuestas a todos los interrogantes que quedaron abiertos y en los que es importante seguir pensando.

Agradecemos al IDEP porque con el aporte financiero al proyecto *Encuentro de saberes* hizo posible una experiencia rica y novedosa para los participantes, la cual nos ayuda a tomar nuevas fuerzas para seguir adelante con nuestras prácticas en busca de una mejor calidad de la educación de nuestros niños colombianos.



BIBLIOGRAFÍA

GÓMEZ, P. (1998a). Educación matemática: actores, prácticas y discursos. Trabajo presentado en *Tercer Seminario Nacional de Educación Matemática y Primero Internacional*. Colombia.

GÓMEZ, P. (1998b). Educación matemática como campo del saber: límites, responsabilidades y posibles perspectivas. En: UCV (Ed.) Caracas. UCV.

GÓMEZ, P. y PERRY, P. (Eds.) (1996). *La problemática de las matemáticas escolares. Un reto para directivos y profesores*. México: una empresa docente y Grupo Editorial Iberoamérica.

PERRY, P., CASTRO, M., VALERO, P., GÓMEZ, P. y AGUDELO, C. (1997). "A look at teacher's professional knowledge through the design of class activities". En: E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the PME 21 Conference* (vol. 1, p. 257). Lahti. University of Helsinki.

PERRY, P., GÓMEZ, P. y VALERO, P. (1995). "Proyecto MEN-EMA: exploración de la problemática de las matemáticas escolares en colegios oficiales de Bogotá". En: CIAEM (Ed.), *Memorias de la IX CIAEM* (pp. 19- 44). Santiago. CIAEM.

PUIG, L. (1998). *Investigar y enseñar. Variedades de la educación matemática*. Bogotá. una empresa docente.

UED (1995). Proyecto MEN-EMA 2 [On-line]. <http://ued.uniandes.edu.co/servidor/ued/proyectos/realizados/men-ema-2/proyecto-men-ema-2.html>.



UED (1997a). Desarrollo y Formación Profesional de Docentes en Informática Educativa [On line]. <http://ued.uniandes.edu.co/servidor/ued/proyectos/encurso/SecInfEd/Default.html>.

UED (1997b). Esquema de desarrollo y formación profesional en educación matemática para profesores de matemáticas de secundaria [On line]. http://ued.uniandes.edu.co/servidor/ued/proyectos/encurso/Sec_1/Sec_1_Prop/Sec_1_Prop.html.

VALERO, P., PERRY, P. y GÓMEZ, P. (1996). Educación matemática en secundaria y desarrollo profesional: una visión desde la institución educativa. *Educación y cultura*.

*Este libro fue compuesto
en caracteres Optima 11 pts.
e impreso en papel Propalibros de 70 g.*



ALCALDIA MAYOR
BOGOTA D.C.

Instituto
INVESTIGACION EDUCATIVA
Y DESARROLLO PEDAGÓGICO

El Instituto para la Investigación Educativa y el Desarrollo Pedagógico IDEP presenta las síntesis de algunos de los proyectos de investigaciones e innovaciones apoyados como resultados de las convocatorias abiertas y focalizadas –realizadas durante 1997, 1998 y 1999– y agrupados a partir de un análisis de las tendencias propias de la investigación y la innovación educativa y en sincronía con las pruebas de competencias básicas impulsadas por la Secretaría de Educación del Distrito Capital. Estas sinopsis están precedidas por un análisis valorativo y una puesta en el contexto de la discusión mundial en las áreas donde los proyectos fueron catalogados.

Ponemos esta colección, *Innovaciones e investigaciones del IDEP –Educación en matemáticas–*, en manos de los investigadores especializados, de los maestros en ejercicio y en formación, de los formadores de docentes y del público general con el fin de ofrecer un aporte significativo a la discusión académica que permita reconocer nuevos caminos hacia el mejoramiento de la educación.



ISBN 958806612-3



9 789588 066127