

ALGUNAS DIFICULTADES DE APRENDIZAJE PRESENTES EN EL ESTUDIO DE LA PARÁBOLA COMO SECCIÓN CÓNICA

EVER HERNÁN SÁNCHEZ BARÓN¹

Introducción

La preocupación de investigadores y maestros que han puesto su mirada reflexiva a las dificultades surgidas en el aprendizaje de la matemática constituye un campo de investigación que busca dar respuestas a problemas que tienen los estudiantes en los diferentes niveles educativos en esta disciplina. El proceso de construcción del conocimiento en matemáticas requiere de una reformulación de los roles de docentes y estudiantes que haga posible involucrar nuevas herramientas dentro del aula, promover el autoaprendizaje en los estudiantes e incentivar la investigación en el docente como la oportunidad para reflexionar sobre su práctica, no sólo para hacer evidentes sus fortalezas y debilidades para sí mismo, sino para hacerlas trascender a las prácticas de otros.

En el colegio IED María Cano, jornada de la tarde, donde se llevó a cabo la investigación, se identifican problemáticas relacionadas con el pensamiento matemático evidenciadas en los resultados obtenidos en las pruebas SABER (2010 al 2013) y en la práctica dentro de las clases. En términos generales se observó en los estudiantes la falta de dominio de las operaciones básicas, además de procesos inadecuados en representaciones de lo geométrico, simbólico y verbal de una situación problema. Por otra parte, en la institución las matemáticas son abordadas con material tradicional —clase magistral, resolución de ejercicios con lápiz y papel—, y aunque este establecimiento educativo cuenta con recursos tecnológicos con los cuales se puede dar giro a las formas magistrales de

1 Profesor del Colegio María Cano, jornada de la tarde.

enseñanza, el aprovechamiento de estos recursos es muy limitado, dado que los computadores se encuentran en dos aulas casi exclusivas para el área de tecnología e informática y el resto de las áreas, para el trabajo en dichas salas, deben repartirse ocho horas semanales disponibles. El artículo está dividido en cuatro apartados. El primero se enfoca en las dificultades de los estudiantes en el estudio de las secciones cónicas, en especial la parábola, teniendo en cuenta los trabajos de otros investigadores sobre el tema que motivaron a adelantar la investigación. El segundo apartado expone de manera sucinta los referentes pedagógicos que respaldaron la propuesta de investigación, resaltando los planteamientos en lo concerniente al Aprendizaje Significativo y a sus aportes a la enseñanza de la matemática. Además, se destaca la implementación de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) y el uso del *software* como recurso en el aula para la enseñanza de la matemática. En un tercer momento se describen los aspectos metodológicos de carácter cualitativo utilizados en las diferentes etapas de la investigación para organizar, recopilar, analizar e interpretar los datos, aspectos que permiten describir las dificultades cognoscitivas en el proceso con los estudiantes. Finalmente, se presenta la secuencia de acciones implementadas para superar las dificultades evidenciadas en la etapa diagnóstica.

Justificación y problema

La investigación realizada por Ancochea (2011) muestra cómo en los últimos cursos de bachillerato los estudiantes proponen soluciones a problemas de la temática propia del estudio de la parábola, basados en la comparación con problemas solucionados por otros, sin plantearse ningún interrogante previo, esquema gráfico o expresión algebraica como recursos de análisis para la propuesta de solución. En el estudio realizado por Santa & Jaramillo (2011) se muestran algunas dificultades, específicamente en la enseñanza de las secciones cónicas, que se imparte en estudiantes de grado décimo y primeros semestres de universidad. Los autores citados indican que hay una desarticulación entre procesos y conceptos de este tema de la geometría. En su experiencia detectan la dificultad que tienen los estudiantes en comprender el concepto como

lugar geométrico de una figura cónica, y muestran cómo a pesar de esta debilidad tienen la facilidad de determinar el algoritmo de la ecuación.

Gómez & Carulla (2000) manifiestan que los estudiantes aprenden de memoria las ecuaciones, no hacen procesos de análisis y tienen dificultad en relacionar las diversas escrituras algebraicas, además de no relacionar de forma lógica una representación algebraica con una geométrica. Una situación similar vivencia este tipo de dificultades en grados superiores del colegio María Cano: en los problemas que tienen los estudiantes para relacionar elementos gráficos con fórmulas o ecuaciones y en la escritura incorrecta de expresiones matemáticas. En concreto, las dificultades de aprendizaje de la matemática obedecen a varios factores que inciden en el dominio que tienen los estudiantes de esta materia. Factores de tipo cognitivo (dificultad para asimilar contenidos), emocional (baja autoestima), problemas externos al aula (sociales y familiares), dan cuenta de las múltiples causas en las dificultades de aprendizaje, como lo relatan D'Amore *et al.* (2007). Cruz (2008) reitera que la enseñanza tradicional de la matemática se limita a un sólo contexto; por tal motivo, propone que en una situación problema los alumnos trabajen en tres contextos: numérico, geométrico y algebraico. Además, Blancas (2012) afirma que es necesario incorporar en la enseñanza de las matemáticas, y en especial en el estudio de la geometría analítica, programas de *software* educativo acompañados de actividades que sean novedosas y que posibiliten modificar las prácticas tradicionales de enseñanza, de tal forma que los estudiantes visualicen, manipulen, clasifiquen y utilicen este mecanismo para una mejor comprensión de los temas.

Las reflexiones de estos autores, junto con las dificultades de aprendizaje de los alumnos de la IED María Cano, me motivaron a introducir el uso del *software* Geogebra en la enseñanza de la parábola. Este programa se caracteriza por su fácil acceso, su amplia variedad de herramientas, además de su rapidez y sencillez en el manejo por parte de estudiantes y docentes. Pero su mayor virtud está en que facilita la construcción y comprensión de esta cónica.

El estudio de las secciones cónicas es muy importante en la educación media, particularmente en el grado once, pues facilita que los estudiantes comprendan algunos fenómenos de la física, ejercitando de paso ciertos

conceptos matemáticos abordados en los cursos anteriores. La parábola es quizás una de las curvas que presenta una mayor simplicidad en su construcción y en su estructura, característica que hace que su estudio sea apropiado para una primera aproximación a la temática de las secciones cónicas. Usualmente el estudio de este tema se inicia en décimo grado con la parábola, pues si bien la circunferencia hace parte de este conjunto de curvas, su construcción ha sido abordada en temáticas de cursos anteriores. Y aunque el estudio de la parábola pueda parecer simple y de fácil comprensión por parte de los estudiantes, ocurre que su apropiación genera mayor dificultad que otros conceptos de la geometría. La pregunta obvia que surge es ¿por qué tienen los alumnos tanta dificultad para la interpretación y comprensión matemática de la parábola? La respuesta anticipada es que las dificultades surgen, entre otras razones, por las diferencias en las representaciones gráficas y algebraicas, y por el tratamiento geométrico que requieren unas y otras de las secciones cónicas. Teniendo en cuenta los resultados de las investigaciones señaladas, además de las condiciones específicas de los estudiantes y la implementación de una secuencia didáctica usando el *software* Geogebra, enmarcada en el aprendizaje significativo, abordaremos la pregunta: ¿qué dificultades presentan los estudiantes de undécimo grado de la IED María Cano en el estudio de la parábola?

Referentes pedagógicos

En los lineamientos curriculares de matemáticas del MEN (1998), se afirma que es necesario propiciar aprendizajes de mayor alcance y más duraderos, que puedan servir para resolver situaciones del cotidiano vivir. Por otro lado, Godino (2003) enfatiza que la enseñanza de la matemática tiene que verse reflejada en el medio social del estudiante; tal condición obliga a reformular la actuación del docente en la enseñanza de las matemáticas dentro del aula. Por tal razón, para el estudio de la parábola, se hace necesario el diseño, implementación y análisis de una estrategia metodológica, que apoyada con el *software* Geogebra, permita evidenciar las posibles dificultades de los estudiantes relacionadas con el pensamiento espacial y los sistemas geométricos, el pensamiento numérico

y el pensamiento métrico, y admita realizar un ejercicio reflexivo que contribuya en el campo de la enseñanza de las matemáticas.

Debido a que las matemáticas tienen un alto grado de aplicación en varios campos de la actividad humana, su enseñanza viene consolidándose como un amplio espacio de exploración e investigación didáctica. Estudiosos en el tema se han dado a la tarea de rastrear las problemáticas de aula, enfocándose en los contenidos que se imparten, cómo se enseñan y qué dificultades surgen en su construcción. Así mismo, los investigadores ven su importancia y trascendencia en el progreso de la ciencia y tecnología. Esto ha obligado a que su enseñanza sea de vital necesidad y no un cumplimiento de contenidos, a verse como un mecanismo necesario para la sostenibilidad de una sociedad en vías de desarrollo. Esta propuesta considera que el conocimiento matemático convive y encaja con la vida social de los hombres, y que es fundamental como aplicación en el desarrollo de la ciencia y tecnología, como lo expresa Ernest (1998) en los lineamientos en matemáticas.

Metodología

La investigación se desarrolló mediante la metodología de estudio cualitativo, pues su propósito era observar, comprender e interpretar las dificultades que tienen los estudiantes de grado undécimo en la construcción de la parábola como sección cónica. De igual manera, la investigación permitió observar las dificultades y fortalezas que tenían los estudiantes al comienzo de su proceso de aprendizaje de las secciones cónicas (la parábola) estableciendo inductivamente las ideas previas sobre el tema. Por último, la investigación es interpretativa, dado que se desea conocer el nivel matemático que tienen los estudiantes para poder estudiar las secciones cónicas.

La investigación se cataloga como estudio de caso porque trata de dar solución a un problema específico, intentando describir sus dificultades en el contexto real (Stake, 1998). La muestra estuvo conformada por un grupo de 6 estudiantes de grado undécimo de la jornada tarde del Colegio María Cano. En el proceso de recolección de información se aplicó

una prueba de entrada para identificar las dificultades iniciales de los estudiantes; a continuación se desarrollaron actividades de aprendizaje de la parábola apoyadas en el *software* Geogebra. Por último, se aplicó una prueba final que, acompañada de los comentarios de los estudiantes seleccionados para la muestra, permitió determinar los alcances de la estrategia metodológica. La investigación se desarrolló en cinco etapas. En la primera se diseñó y validó el *pre-test*. En la segunda se aplicó este a la muestra seleccionada. En la tercera se diseñaron e implementaron actividades basadas en el estudio de la parábola. En la cuarta se aplicó el *post-test*, y en la quinta se realizó una evaluación de las actividades y una autoevaluación de las dificultades que percibieron los estudiantes en la construcción de la parábola como sección cónica. Las distintas etapas y sus actividades se pueden observar en la Tabla 1.

Tabla 1. Panorama general de la investigación

Diseño y validación del <i>pre-test</i> .	<ul style="list-style-type: none"> • Revisión y delimitación de los conceptos a trabajar. • Construcción del <i>pre-test</i>. • Validación del Instrumento.
Aplicación del <i>pre-test</i> y selección de la muestra.	<ul style="list-style-type: none"> • Implementación del <i>pre-test</i> a curso completo. • Selección de una muestra de 6 estudiantes.
Diseño e implementación de actividades basadas en el estudio de la parábola.	<ul style="list-style-type: none"> • Sesión 1: el <i>software</i> Geogebra. • Sesión 2: representación de puntos en el plano cartesiano. • Sesión 3: expresiones y ecuación algebraica. • Sesión 4: taller de representación verbal, simbólica (algebraica) y geométrica. • Sesión 5: las secciones cónicas.
Aplicación del <i>post-test</i> .	<ul style="list-style-type: none"> • Aplicación del cuestionario <i>post-test</i>. • Aplicación del cuestionario de apreciaciones sobre la estrategia didáctica.
Evaluación de las actividades y autoevaluación de las dificultades que perciben los estudiantes en la construcción de la parábola como sección cónica.	<ul style="list-style-type: none"> • Establecimiento de las categorías de análisis. • Organización de la información recolectada en los diferentes registros. • Contratación y análisis de acuerdo con los referentes pedagógicos y de investigación.

Esta investigación se desarrolló con una muestra de estudiantes seleccionada de un curso del undécimo grado, en la Institución Educativa María Cano, ubicada en la localidad Rafael Uribe de la ciudad de Bogotá. Dicho grado se encontró constituido por dieciséis mujeres y catorce hombres con edades entre los 16 y los 19 años, pertenecientes a estratos socioeconómicos 1 y 2; de este grupo se estableció una muestra de seis estudiantes, seleccionados de acuerdo con los resultados obtenidos en matemáticas durante el primer y segundo trimestre del año 2014, según los criterios de superior, alto, básico y bajo del decreto 1290 de 2009. Después de aplicar los instrumentos de recolección de la información, se procedió a determinar las dificultades presentadas por el grupo de estudiantes de la muestra seleccionada, y por medio del diario de campo, se analizó su desenvolvimiento en la serie de actividades propuestas (*pre-test*, actividades secuencia didáctica, *post-test*), que evidenció las dificultades persistentes en la muestra escogida, en relación al estudio de la parábola como sección cónica. Finalmente, la información recogida a través de los cuestionarios se contrastó con el cuestionario de opinión y reflexión.

Análisis de resultados

En términos generales, los seis estudiantes de la muestra presentaron en el *pre-test* las mismas dificultades en la representación algebraica de situaciones descritas verbalmente, en la aplicación del Teorema de Pitágoras. También presentaron desconocimiento total de la ecuación de distancia y, en algunos casos, la no interpretación y ubicación de las coordenadas cartesianas. Los temas que notaron mayor dificultad, y por lo tanto un desempeño determinado como insuficiente, fueron: a) reconocimiento y uso de la ecuación de la distancia entre dos puntos; b) uso de argumentos geométricos para resolver problemas, y c) representación simbólica de una situación expresada de manera verbal. Mientras tanto, la subcategoría en la que se presentaron los mejores resultados fue la de «Estimación numérica a partir de una representación». Desde estas dificultades se diseñó una secuencia didáctica con el propósito de fortalecer en los estudiantes los conocimientos previos requeridos para el estudio de la parábola como sección cónica.

Actividades de desarrollo y reestructuración

Identificadas las dificultades más comunes entre los estudiantes de la muestra, y con el apoyo del Aprendizaje Basado en Problemas, se diseñó una serie de actividades para desarrollar en una secuencia didáctica. En esta secuencia se integran actividades y temas que implican al estudiante tanto el uso de lápiz y papel como el apoyo en el *software* Geogebra para la construcción de la parábola. Para la evaluación del proceso, en la ejecución de estas actividades se tuvieron en cuenta:

- La observación del trabajo individual y grupal por parte del docente.
- Las actividades desarrolladas por los estudiantes: utilizando lápiz y papel (construyen la parábola doblando papel) y el uso del *software* Geogebra.
- Las reflexiones que hacen los estudiantes a partir de las actividades de la secuencia didáctica (tablas 2 y 3).

Tabla 2. Encuesta de opinión 1

Estudiante	¿Qué opinión tiene sobre las actividades realizadas al estudio de la parábola como sección cónica?
E1	Me pareció muy interesante ya que pudimos aprender a hacer una parábola bien hecha.
E2	Pues me parecieron buenas y muy bien realizadas, lo único es no tuvimos tanto tiempo para saber más sobre sección cónica.
E3	Con Geogebra no me quedó claro, pero el resto de actividades con lápiz y papel me gustó porque pensé por mí mismo y así comprendí más.
E4	Me pareció muy interesante esta actividad que se realizó, ya que aprendí y entendí mejor varios conocimientos.
E5	Fue interesante porque fue con problemas de la vida cotidiana y así se facilitó su realización.
E6	Aunque hayan sido pocas las clases sobre este tema, pudimos explorar y aprender nuevas cosas.

Tabla 3. Encuesta de opinión 2

Estudiante	Los contenidos que se abordaron en sala de audiovisuales, sala de sistemas y salón de clase, ¿aún no son claros para usted?
E1	Sí fueron claros, ya que por medio de estos sistemas pudimos aprender más de lo que son las parábolas.
E2	Sí son claros, porque entendí mucho más y gracias a estas ayudas pudimos comprender sobre el tema abordado en clase.
E3	En algunos casos, porque hubo cosas que no me quedan claras.
E4	Sí fueron claras, ya que aprendí nuevos conceptos y mejor conocimiento frente al tema.
E5	Sí, esto ayuda a que se aclararan varias dudas que eran frecuentes.
E6	Sí, porque nos están dando las herramientas para poder aprender más.

Dificultades detectadas en el *post-test*

En el estudio de la parábola como sección cónica, Font (2001) expone sobre la representación verbal que es la capacidad lingüística que tienen las personas para interpretar situaciones relacionadas con el pensamiento numérico, geométrico y simbólico. En la recolección, el análisis, comparación y evaluación de la información obtenida de las pruebas aplicadas a la muestra escogida, persiste la dificultad para modelar algebraicamente situaciones que se relacionen con el entorno del estudiante, además de presentarse otras complejidades como la no utilización correcta de la ecuación de la distancia, debido a que confunden la ubicación de coordenadas de puntos en el plano y hacen operaciones de suma y resta entre componentes, lo cual no es acertado. Se presentan algunos comentarios de los estudiantes en la Tabla 4.

Tabla 4. Dificultades que evidenciaron los estudiantes

Estudiante	Reflexión de dificultades
E1	Tengo dificultad en encontrar la distancia de un punto a otro. Tengo dificultad en reemplazar los números en las ecuaciones. Se me dificulta mucho estas ecuaciones ya que no sé cómo reemplazar bien. Tengo dificultad de explicar de manera verbal una situación simbólica ya que me confundo mucho.

Estudiante	Reflexión de dificultades
E2	<p>Tengo un poco de dificultad, ya que sumo las coordenadas.</p> <p>Tengo un poco de dificultad en los procesos algebraicos, porque hay veces confundo los símbolos o algo por el estilo.</p> <p>No tengo claro cómo hallar la distancia con las ecuaciones, entonces tengo un poco de dificultad.</p> <p>No tengo muy en claro cuando me dicen algo verbal para ubicarlo en simbólico en el plano.</p>
E3	<p>Tuve dificultades en el reconocimiento de puntos en los cuadrantes y coordenadas.</p> <p>Tuve dificultades en la identificación de coordenadas desde un punto en el plano.</p> <p>Tuve algunas dificultades en la interpretación de la distancia entre puntos en el plano.</p> <p>Tuve dificultades en determinar coordenadas y en los procesos algebraicos y geométricos.</p> <p>Tuve dificultades en la representación de una situación verbal y simbólica.</p>
E4	<p>En el momento de la ubicación de puntos en el plano tuve una confusión para ubicar cada coordenada.</p> <p>En la interpretación de puntos tuve dificultades en el momento de su ubicación en el plano.</p> <p>Se me olvidó aplicar la fórmula binomio al cuadrado.</p> <p>En este proceso, al despejar el teorema de Pitágoras, tuve una confusión al despejar las coordenadas.</p>
E5	<p>Tuve dificultad al entender que las coordenadas no se pueden sumar.</p> <p>Cuando no tenía las coordenadas claras se dificultaba hallarlas.</p> <p>Es difícil llevar a cabo este proceso de determinar la distancia entre dos puntos.</p> <p>No tuve claro lo del teorema de Pitágoras.</p> <p>No sé explicar estos procesos de representación verbal y simbólico, por eso se me dificultan.</p>
E6	<p>Tengo dificultad en la comparación al hallar las coordenadas, al hallar un punto en el plano.</p> <p>Tengo deficiencia en cómo hallar las distancias entre puntos.</p> <p>La dificultad es no saber interpretar, hacia una representación verbal, una simbólica, para poder hallarla.</p>

Análisis y comparación prueba *pre-test* y *post-test*

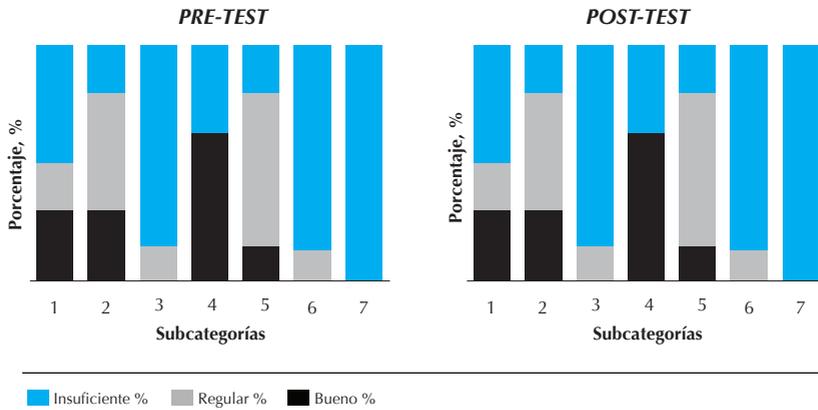
A partir de los resultados que se evidenciaron en la prueba de entrada *pre-test*, y teniendo en cuenta la Tabla 5 de subcategorías y el gráfico comparativo de barras, se puede establecer que:

- El grupo de estudiantes tiene dificultades para representar algebraicamente situaciones que están expresadas verbalmente.
- Los estudiantes no identifican recursos geométricos (teorema de Pitágoras) para resolver problemas.
- Los estudiantes desconocen notablemente la ecuación de la distancia entre dos puntos. Esta deficiencia va acompañada de la dificultad para ubicar puntos en el plano cartesiano y establecer sus coordenadas.

En cuanto a los resultados de la prueba *post-test*, que se expone en el gráfico de barras, es notoria la mejoría en el aprendizaje de temas que en un principio tuvieron un alto grado de dificultad, como la ubicación de puntos en el plano, la representación algebraica, geométrica y numérica de una situación cotidiana, aunque sigue siendo obstáculo tener argumentos geométricos para resolver problemas y utilizar la ecuación de la distancia. Se vislumbra una mejoría en poder representar situaciones de lo verbal a lo simbólico. Hay falencias en la localización de coordenadas de puntos en el plano y estimación numérica. Es importante mencionar que se incrementa esta dificultad con respecto a la prueba diagnóstica.

Tabla 5. Categorías y subcategorías

CATEGORÍAS	SUBCATEGORÍA
Pensamiento espacial y sistemas geométricos	1. Identificación de puntos en el plano cartesiano.
	2. Localización de coordenadas de puntos en el plano cartesiano.
	3. Argumentos geométricos para resolver problemas (triángulos y T. de Pitágoras).
Pensamiento numerico y sistemas numéricos	4. Estimación numérica a partir de una representación.
	5. Representación numérica de coordenadas de puntos.
	6. Representación de una situación de lo verbal a lo simbólico.
Pensamiento métrico y sistemas de medidas	7. Ecuación de la distancia entre dos puntos



Descripción de los resultados

A partir de las actividades realizadas con las herramientas brindadas por la institución, las recomendaciones y explicaciones hechas por el docente y el trabajo individual y grupal de los estudiantes, se puede afirmar que se evidencia compromiso por parte del grupo de estudiantes. A pesar de sus dificultades, es notable su participación en preguntas y argumentos hacia las temáticas que se realizan en cada sesión. El trabajo realizado con lápiz, regla y papel (doblado de papel para obtener la parábola) fue motivante para el grupo, porque rompió con la manera tradicional de hacer la clase de matemáticas.

La incorporación del *software* Geogebra para el estudio de la parábola resulta también motivante para el grupo de estudiantes; aunque para algunos es difícil familiarizarse con este programa, otros en cambio logran asimilar rápidamente el manejo de este *software*. La dificultad más frecuente es la utilización adecuada de los comandos, a pesar de la explicación y recomendación dada por el docente. Esto se debe también al poco trabajo con este tipo de programas.

Comentarios y opiniones expresados por los estudiantes al finalizar la clase:

Estudiante	¿Qué sugerencias puede dar a este tipo de actividades?
E1	Me pareció que estuvo bien hacer estas actividades, pero creo que deberían de hacerlas con más estudiantes y más seguidas.
E2	Que en el cronograma le apliquen más horas a estas actividades.
E3	Me parece bien todas estas actividades, pero considero que faltó más tiempo para mejorar los errores.
E4	Pues que se deberían hacer más continuamente, ya que es muy interesante y se aprende mejor y más rápido.
E5	Que se hagan más seguido para que los estudiantes le pongan más interés a esto.
E6	Que haya más tiempo hacia este tipo de temas, ya que fue muy corto el tiempo.

Con respecto a las actividades que se elaboraron a partir de las dificultades evidenciadas en la prueba *pre-test* (desconocimiento de la ecuación

de la distancia, del teorema de Pitágoras y de la representación algebraica de situaciones), y teniendo en cuenta la teoría del aprendizaje significativo para su elaboración, fue necesaria la explicación magistral y la participación de los estudiantes para solucionar esta serie de inquietudes. En su inicio, desarrollo y finalización, fueron notables las falencias en temas de la matemática que son fundamentales para la construcción de la parábola como sección cónica. Cabe destacar que el desarrollo de tales actividades, que hacen parte de la secuencia didáctica con el acompañamiento del docente, permitió en cierta medida reducir las dificultades que se presentaron en la prueba diagnóstica.

Comentarios de los estudiantes:

Estudiante	¿Esta secuencia de actividades logró un mejor aprendizaje de los contenidos temáticos en el estudio de la parábola? ¿Por qué?
E1	Muchos de nosotros no sabíamos cómo podíamos obtener una parábola y pudimos aprender, no todo, pero sí la mayoría.
E2	Sí, porque aprendí muy bien sobre qué era la parábola y cómo se formaba con el programa Geogebra.
E3	Sí, porque fue más didáctico y mejor elaborado.
E4	Sí. Se obtuvo un aprendizaje mayor, ya que es más fácil y mejor de entender la construcción.
E5	Sí, porque al usar ejemplos cotidianos e interactivos hace que el aprendizaje sea mucho mejor.
E6	No, ya que no hubo mucho tiempo para terminar el proceso de aprendizaje.

Frente al estudio de la parábola se manifestó interés y preocupación ante la importancia de articular este conocimiento con situaciones de su cotidianidad. Para ellos resulta prioritario tener la capacidad de expresar diferentes situaciones en el lenguaje propio de las matemáticas; y si bien plantean como una dificultad esta situación, reconocen que en la medida en que se abran de manera más frecuente espacios como éste podrían alcanzar esta meta.

En cuanto a la forma como se aprende, los estudiantes reconocen las actividades como novedosas, posibilitadoras de aproximar y profundizar en nuevos temas; les parece interesante el uso de ejemplos de

la cotidianidad y recursos tecnológicos. Aunque el uso de Geogebra en comienzo se pensaba que sería un elemento innovador y llamativo para los estudiantes, sólo uno de ellos lo mencionó para destacar una dificultad, por lo que se puede afirmar que este recurso tecnológico aplicado al estudio de la parábola se podría aprovechar mejor y llegar a ser valorado por los estudiantes en la medida en que los tiempos de interacción con él sean más amplios y frecuentes, como ellos mismos lo señalan.

Conclusiones

En el caso específico del estudio de la parábola como sección cónica se necesitan ciertos conceptos previos para su construcción; en muchas oportunidades, a pesar de los esfuerzos de los docentes, el alumno no encuentra su utilidad práctica, lo que se convierte en un obstáculo para su aprendizaje. La realización del *pre-test* como una de las etapas de la investigación, permite la delimitación de las dificultades que los estudiantes presentan frente al pensamiento espacial y los sistemas geométricos, el pensamiento numérico, los sistemas numéricos y el pensamiento métrico y de sistemas de medidas, de manera tal que en el diseño de la secuencia didáctica se incluyen acciones para retomar, aclarar y reforzar el uso del plano cartesiano y la representación numérica de coordenadas de puntos, así como del Teorema de Pitágoras. La explicación y apropiación de estos temas son herramientas que sirven *a posteriori* para la construcción de la ecuación de la distancia entre dos puntos y su integración en la construcción de parábolas con lápiz y papel.

La integración del *software* Geogebra en el estudio de la parábola representa un valioso aporte para la enseñanza de la geometría y, específicamente, para el estudio de las parábolas. Esta secuencia didáctica hace posible que de forma dinámica los estudiantes construyan representaciones de este objeto.

La teoría del aprendizaje significativo fue fundamental en el diseño de la secuencia didáctica porque es enfática en proponer actividades que sean del medio y cotidiano vivir de los estudiantes. No fue fácil la elaboración de estas actividades, pues además en su aplicación fueron constantes

las preguntas por parte de los estudiantes acerca de ¿cómo ubicar las coordenadas en el plano?, ¿cómo determinar la distancia entre puntos sin regla?, ¿cómo aplicar la ecuación de la distancia? y ¿qué quiere decir este enunciado?, etcétera. Esto presupone una revisión de las mismas actividades, que conlleve a la realización de ajustes necesarios para una próxima aplicación. Tal vez la redacción de los enunciados relacionados con su entorno no fue precisa y clara; también pudo ser que los recursos matemáticos necesarios para este tipo de actividades no han sido asimilados por los estudiantes y son un obstáculo que paraliza su creatividad.

Con la elaboración y aplicación de la prueba *pre-test* se concluye que es necesario utilizar un lenguaje claro y adecuado para que los estudiantes puedan comprender lo que se les explica. En especial en la enseñanza de la matemática, el trabajo del docente implica hacer comprensible el lenguaje matemático para que este pueda ser entendido. Una de las dificultades en el estudio de las secciones cónicas, y específicamente en el caso de la parábola, es que si no hay dominio del contenido geométrico y algebraico por parte del estudiante, el desarrollo del curso se hace extenso y no permite cumplir con la temática planeada en principio. Finalmente, es importante anotar que el diseño, implementación y valoración de propuestas pedagógicas como estas permiten, por un lado, el mejoramiento y fomento de las habilidades para la comprensión y el uso de las matemáticas por parte de los estudiantes, y por otro, el enriquecimiento de la labor docente como ejercicio de investigación y reflexión en el fortalecimiento de la enseñanza de las matemáticas. Esto consiente estar en sintonía con los retos que la sociedad actual plantea a los niños, niñas y jóvenes, y por lo tanto, a los educadores.

Referencias

- Ancochea, B. (2011). Un panorama de la TAD. *Centre de Recerca Matemàtica*. No. 10, pp. 533-551. Barcelona: Bellaterra.
- Font, V. (2001). Reflexiones didácticas desde y para el aula. Expresiones simbólicas a partir de gráficas. El caso de la parábola. *Revista Ema*, 2001. Vol. 6, No. 2, pp. 180-200.

- Gómez, P., & Carulla, C. (1999). *La enseñanza de la función cuadrática en las matemáticas escolares del distrito capital*. Bogotá: Universidad de los Andes.
- Palmero, M. (2010). *La teoría del aprendizaje significativo en la perspectiva de la psicología cognitiva*. España: Ediciones Octaedro, s.l.
- Godino, J. (2003). *Didáctica de la Matemática para maestros*. Recuperado de: <http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/>
- Blancas, M. (2012). *Integración de tecnología informática en tópicos selectos de Geometría Analítica*. (Tesis de maestría). Universidad Autónoma de Querétaro, México.
- D'Amore, B. (2006). *Didáctica de la Matemática*. Bogotá, D. C.: Cooperativa Editorial Magisterio.
- Santa, Z. M., & Jaramillo, C. M. (2010, septiembre-diciembre). Aplicaciones de la geometría del doblado de papel a las secciones cónicas. *Revista Virtual*. No. 31, Medellín: Universidad Católica del Norte.
- Stake, R. (1998). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Ediciones Morata.

