ANEXO 2
CENTRO EDUCATIVO DISTRITAL BRASILIA

- Descripción del contexto y condiciones iniciales
- Reporte de la función de gráfica lineal
- Reporte de la función cuadrática
- Evaluación de la función lineal
- Aspectos innovativos
- Evaluación de la función lineal y la función cuadrática

ICEP. INNOVACIÓN CURRICULAR EN PRECÁLCULO PARA LA EDUCACIÓN MEDIA

Bogotá, noviembre de 2000

Descripción del Contexto y condiciones iniciales.

CENTRO EDUCATIVO DISTRITAL BRASILIA

- Resolución: Acuerdo 17 de 1992 del Concejo de Bogotá.
- Jornadas: Mañana (0 a 9)

  Tarde (6 a 11)

  Sábados (Programa para adultos)
- Único consejo Directivo
- Eje del P.E.I. La comunicación. " Reconstruyamos las relaciones entre los seres humanos y la sociedad a través de la comunicación."
- Objetivos del P.E.I.

1. Propiciar un ambiente que fortalezca las relaciones entre los miembros de la comunidad educativa y haga de la comunicación un proceso eficaz y dinámico para desarrollar y resolver la problemática que vive la comunidad y la sociedad en general.
2. Transformar a través de la comunicación, las relaciones existentes entre el ser humano y la sociedad, de acuerdo con las necesidades de la comunidad Brasilia.

- Bachillerato por modalidades: comercio y electricidad.
- Ubicación: Zona 5, Usme.

JORNADA TARDE

- Personal

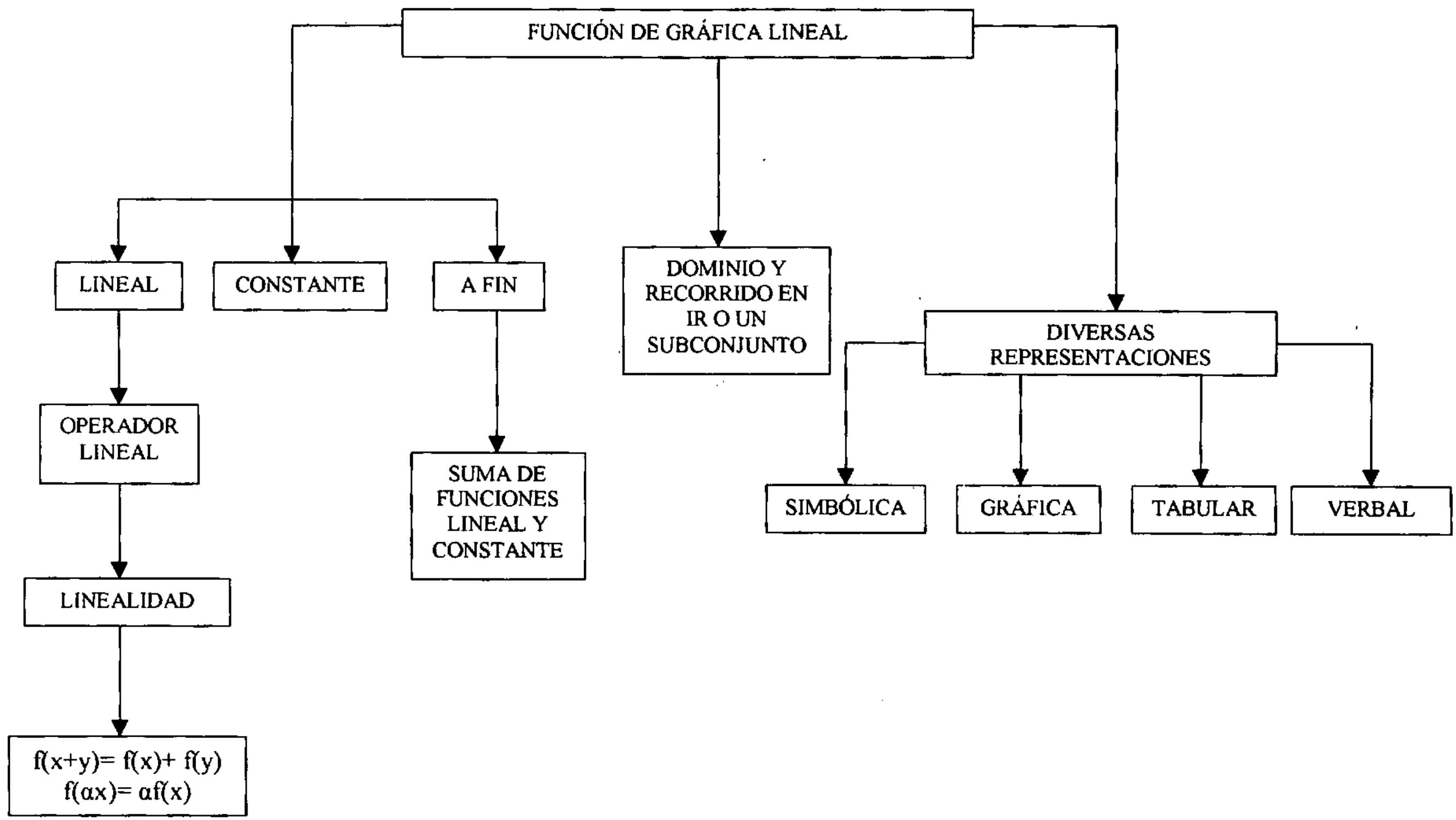
1. Administrativo: 1 Rector, 1 Coordinadora.
2. Docentes: 24 con nombramiento oficial, 4 por 10 horas, 1 en licencia, 1 convenio Universidad Nacional.
3. Trabajo Social: 1
4. Orientación: 1
5. Secretarias: 1
6. Servicios generales: 1 Audiovisuales, 3 Aseadoras, 5 Celadores, 1 Pagadora.
7. Estudiantes: 640

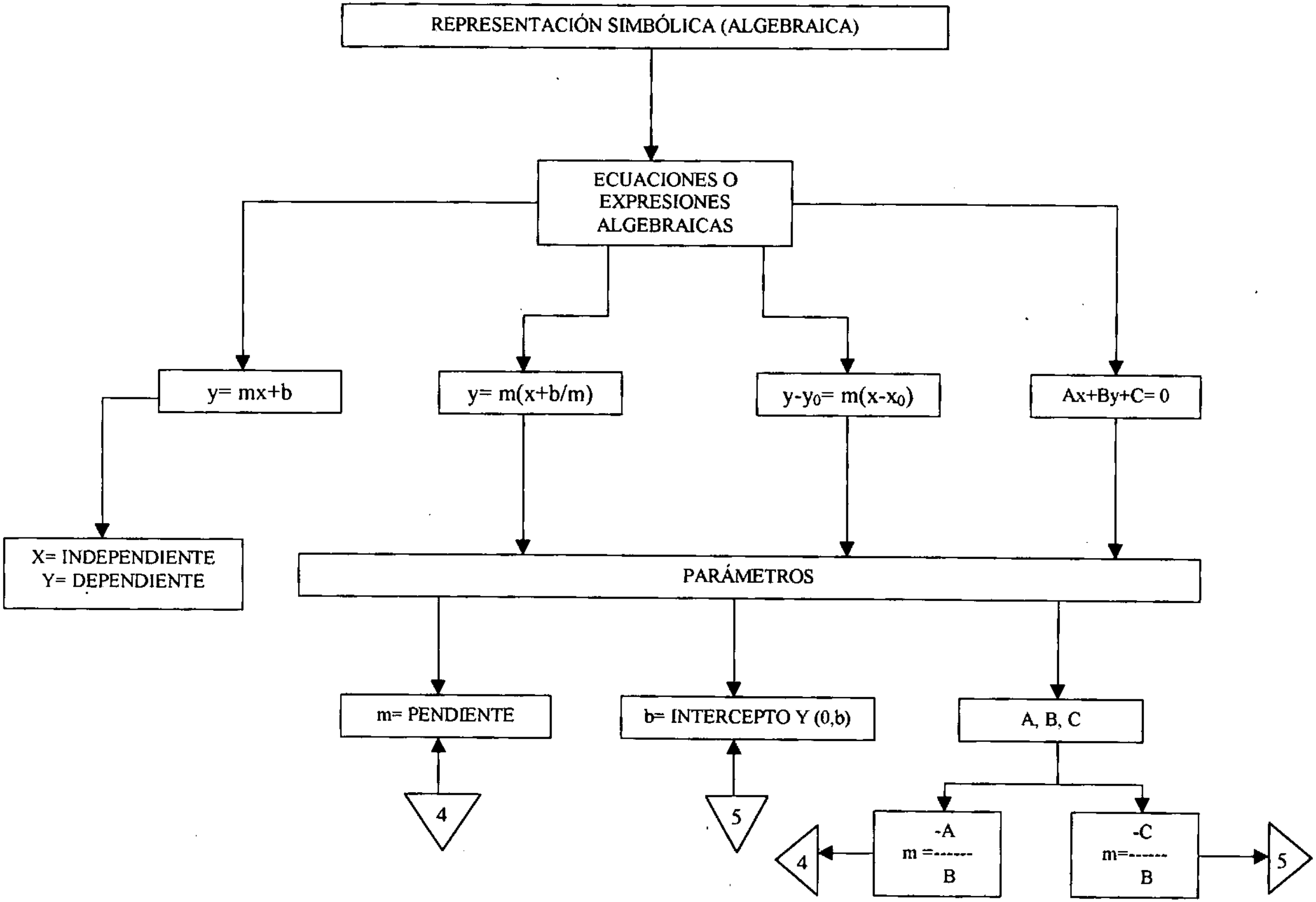
- Departamentos:

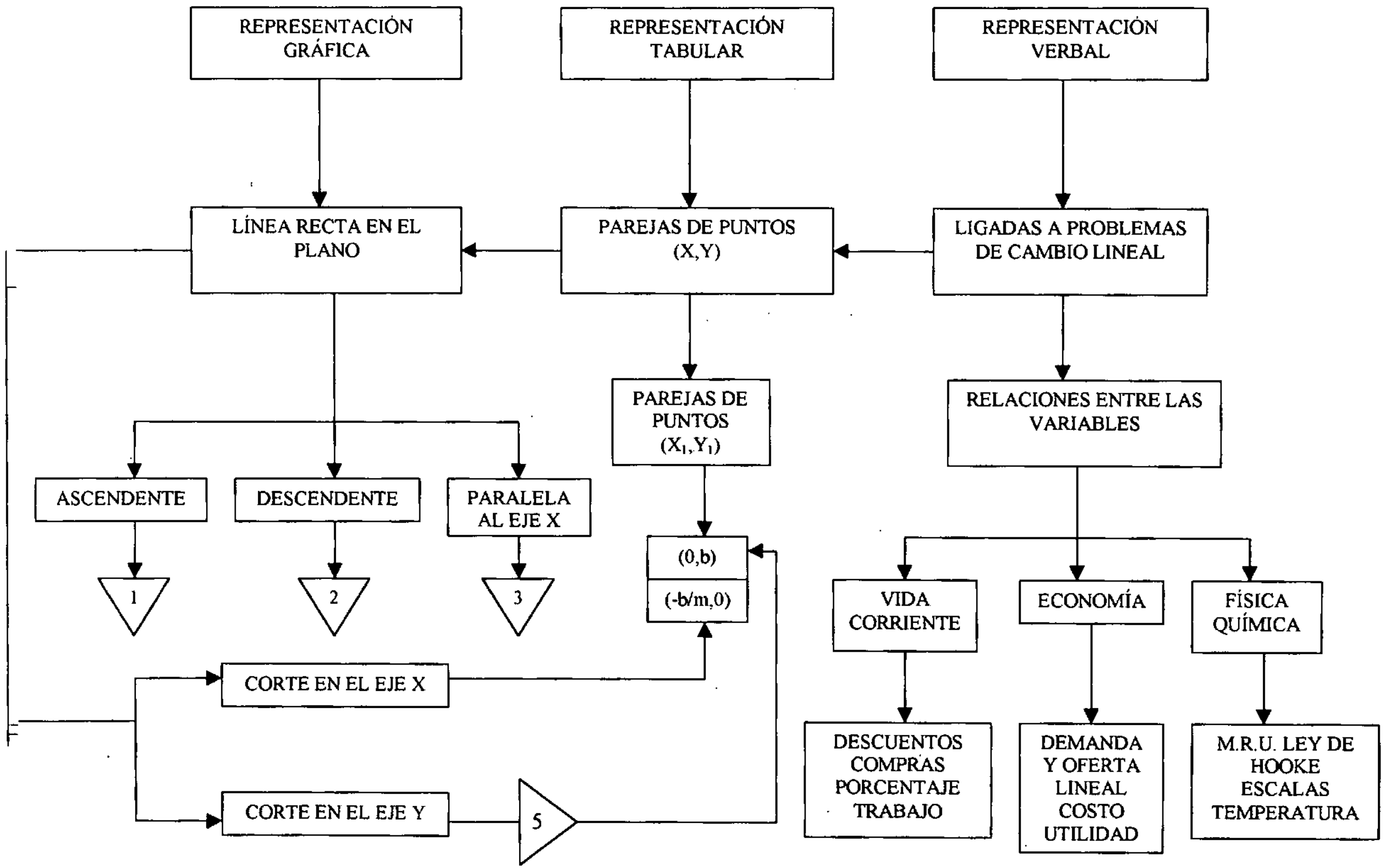
1. Tecnología: Electricidad, comercio, Ingles, Sistemas.
2. Ciencias: Matemáticas, Física, Química y Biología.
3. Humanidades: Sociales, Español, Música, Educación Física.

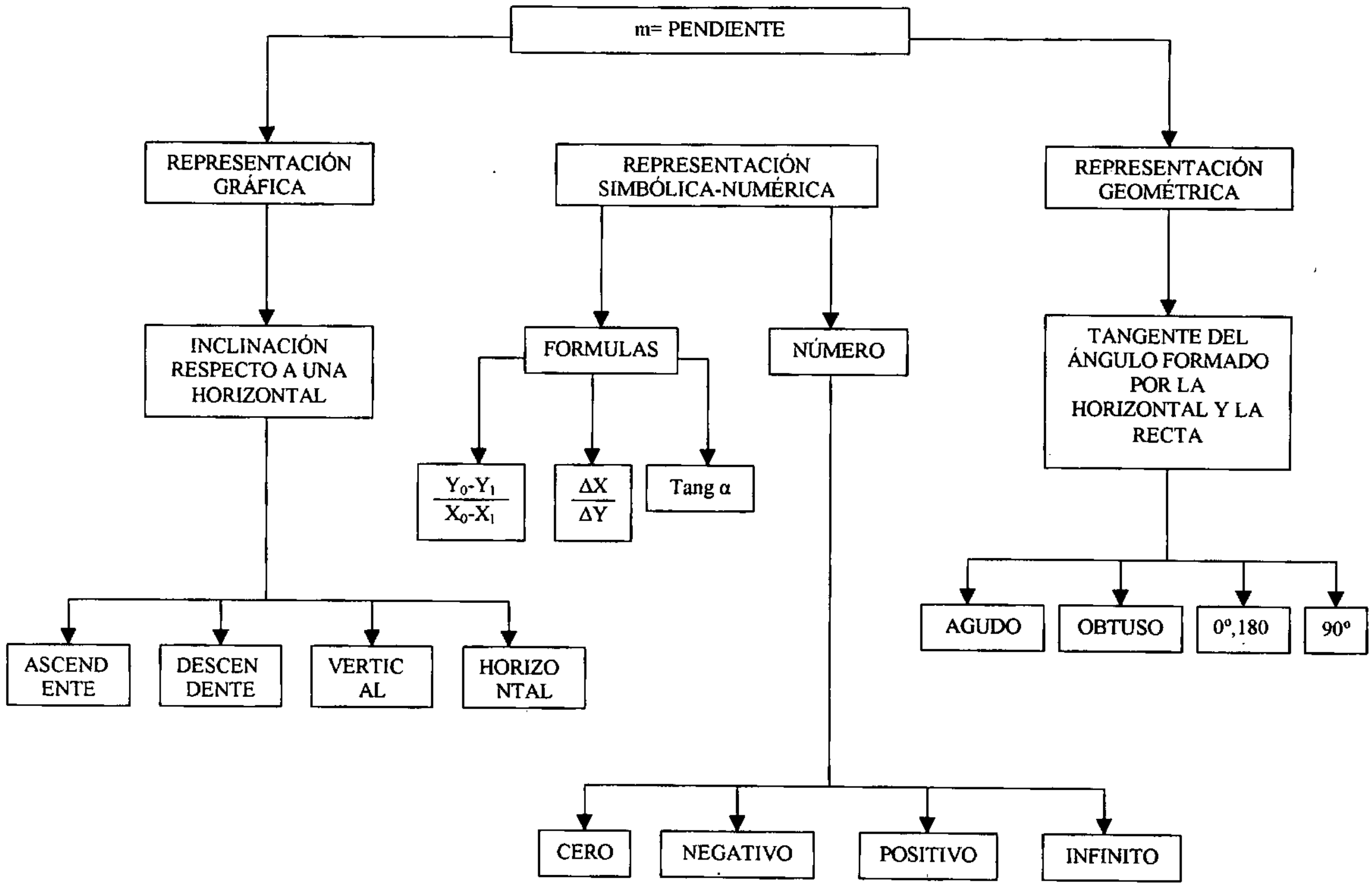
- Comités:

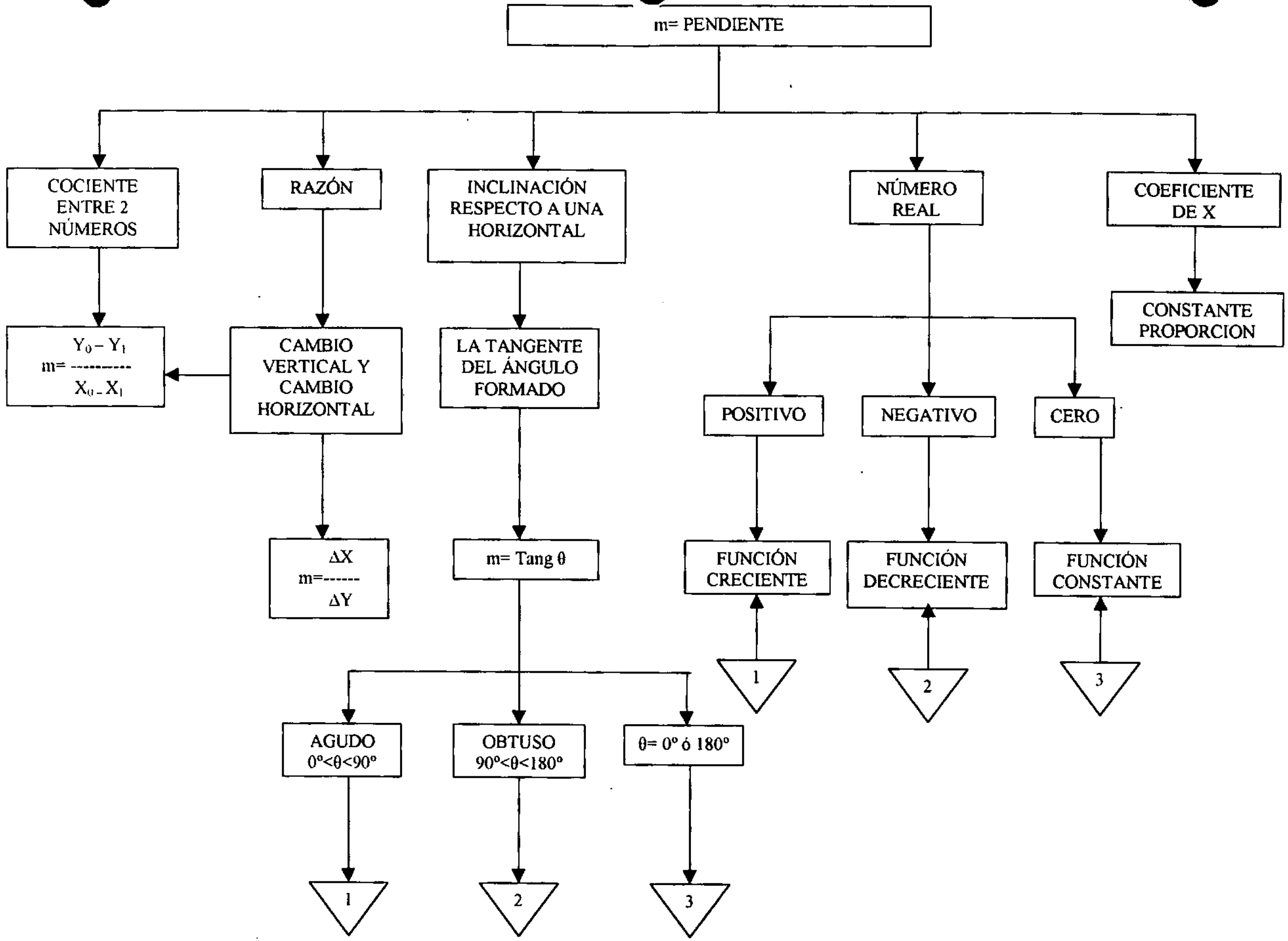
1. Disciplina: 4 profesores.
2. Académico: Rector, coordinadora, 1 profesor de cada departamento.


FUNCIÓN DE GRÁFICA LINEAL
LINEAL
CONSTANTE
A FIN
DOMINIO Y RECORRIDO EN IR O UN SUBCONJUNTO
DIVERSAS REPRESENTACIONES
OPERADOR LINEAL
SUMA DE FUNCIONES LINEAL Y CONSTANTE
SIMBÓLICA
GRÁFICA
TABULAR
VERBAL
LINEALIDAD
f(x+y)= f(x)+ f(y)
f(αx)= αf(x)

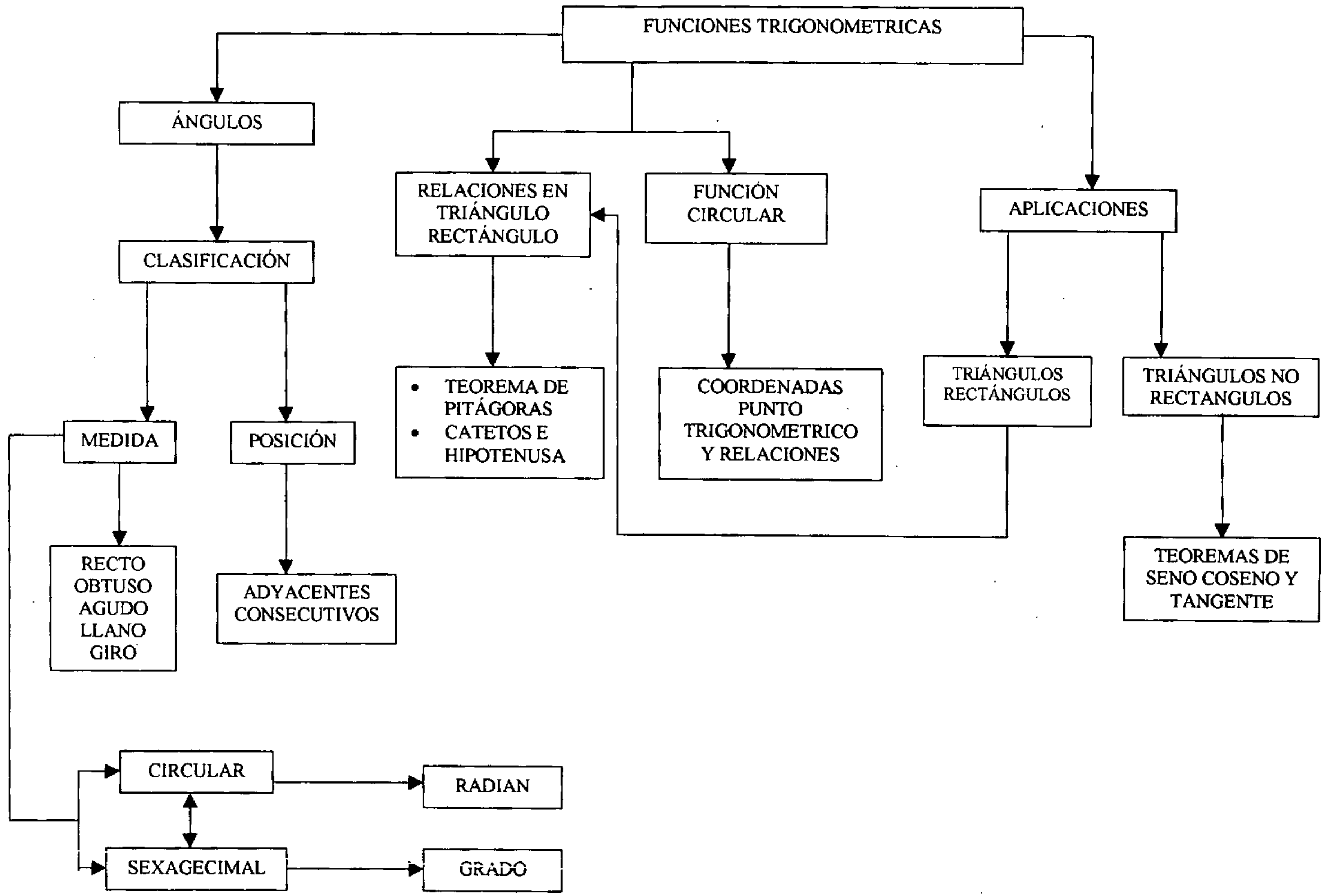

REPRESENTACIÓN SIMBÓLICA (ALGEBRAICA)
ECUACIONES O EXPRESIONES ALGEBRAICAS
y= mx+b
y= m(x+b/m)
y-y0= m(x-x0)
Ax+By+C= 0
X= INDEPENDIENTE
Y= DEPENDIENTE
PARÁMETROS
m= PENDIENTE
b= INTERCEPTO Y (0,b)
A, B, C
4
5
-A
m =------
B
-C
m=------
B
4
5

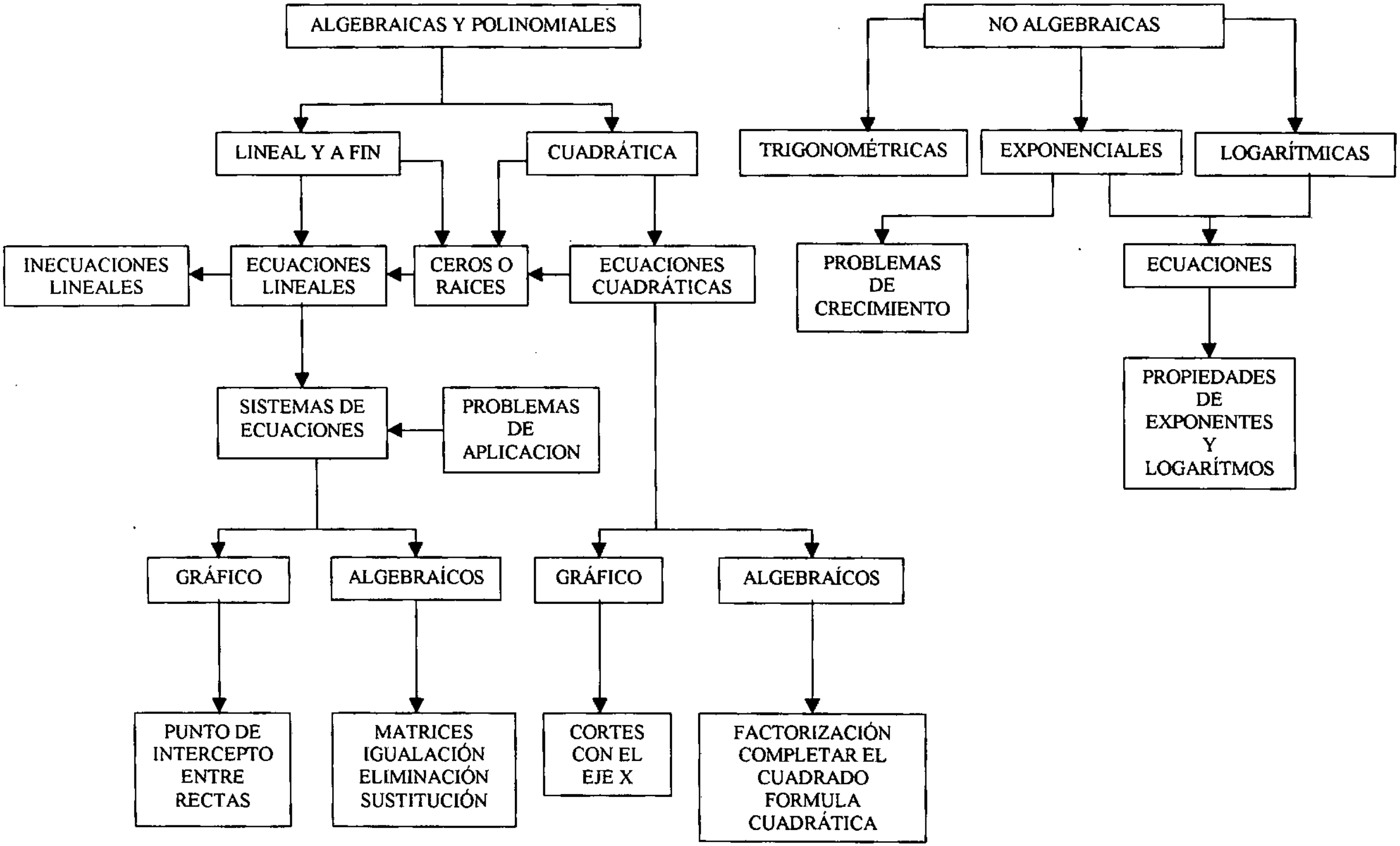

REPRESENTACIÓN GRÁFICA
REPRESENTACIÓN TABULAR
REPRESENTACIÓN VERBAL
LÍNEA RECTA EN EL PLANO
PAREJAS DE PUNTOS (X,Y)
LIGADAS A PROBLEMAS DE CAMBIO LINEAL
PAREJAS DE PUNTOS (X_1,Y_1)
RELACIONES ENTRE LAS VARIABLES
ASCENDENTE
DESCENDENTE
PARALELA AL EJE X
(0,b)
(-b/m,0)
1
2
3
VIDA CORRIENTE
ECONOMÍA
FÍSICA QUÍMICA
CORTE EN EL EJE X
CORTE EN EL EJE Y
5
DESCUENTOS COMPRAS PORCENTAJE TRABAJO
DEMANDA Y OFERTA LINEAL COSTO UTILIDAD
M.R.U. LEY DE HOOKE ESCALAS TEMPERATURA


m= PENDIENTE
REPRESENTACIÓN GRÁFICA
REPRESENTACIÓN SIMBÓLICA-NUMÉRICA
REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA
INCLINACIÓN RESPECTO A UNA HORIZONTAL
FORMULAS
NÚMERO
TANGENTE DEL ÁNGULO FORMADO POR LA HORIZONTAL Y LA RECTA
$\frac{Y_0-Y_1}{X_0-X_1}$
$\frac{\Delta X}{\Delta Y}$
Tang α
AGUDO
OBTUSO
0º,180
90º
ASCEND ENTE
DESCEN DENTE
VERTIC AL
HORIZO NTAL
CERO
NEGATIVO
POSITIVO
INFINITO



m= PENDIENTE
COCIENTE ENTRE 2 NÚMEROS
RAZÓN
INCLINACIÓN RESPECTO A UNA HORIZONTAL
NÚMERO REAL
COEFICIENTE DE X
CONSTANTE PROPORCION
$m = \frac{Y_0 - Y_1}{X_0 - X_1}$
CAMBIO VERTICAL Y CAMBIO HORIZONTAL
$m = \frac{\Delta X}{\Delta Y}$
LA TANGENTE DEL ÁNGULO FORMADO
m= Tang θ
POSITIVO
NEGATIVO
CERO
FUNCIÓN CRECIENTE
FUNCIÓN DECRECIENTE
FUNCIÓN CONSTANTE
1
2
3
AGUDO $0° < \theta < 90°$
OBTUSO $90° < \theta < 180°$
$\theta = 0°$ ó $180°$
1
2
3


FUNCIONES TRIGONOMETRICAS
ÁNGULOS
CLASIFICACIÓN
MEDIDA
POSICIÓN
RECTO
OBTUSO
AGUDO
LLANO
GIRO
ADYACENTES
CONSECUTIVOS
CIRCULAR
SEXAGECIMAL
RADIAN
GRADO
RELACIONES EN TRIÁNGULO RECTÁNGULO
• TEOREMA DE PITÁGORAS
• CATETOS E HIPOTENUSA
FUNCIÓN CIRCULAR
COORDENADAS PUNTO TRIGONOMETRICO Y RELACIONES
APLICACIONES
TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS
TRIÁNGULOS NO RECTANGULOS
TEOREMAS DE SENO COSENO Y TANGENTE


ALGEBRAICAS Y POLINOMIALES
LINEAL Y A FIN
CUADRÁTICA
INECUACIONES LINEALES
ECUACIONES LINEALES
CEROS O RAICES
ECUACIONES CUADRÁTICAS
SISTEMAS DE ECUACIONES
PROBLEMAS DE APLICACION
GRÁFICO
ALGEBRAÍCOS
GRÁFICO
ALGEBRAÍCOS
PUNTO DE INTERCEPTO ENTRE RECTAS
MATRICES IGUALACIÓN ELIMINACIÓN SUSTITUCIÓN
CORTES CON EL EJE X
FACTORIZACIÓN COMPLETAR EL CUADRADO FORMULA CUADRÁTICA
NO ALGEBRAICAS
TRIGONOMÉTRICAS
EXPONENCIALES
LOGARÍTMICAS
PROBLEMAS DE CRECIMIENTO
ECUACIONES
PROPIEDADES DE EXPONENTES Y LOGARÍTMOS

REPORTE DE LO REALIZADO EN TORNO A LA FUNCION LINEAL

1. CONCEPTO DE FUNCIÓN

1.1. Producto cartesiano. Par ordenado.

1.2. Relaciones. Diagrama sagital.

1.3. Conjuntos de partida y de llegada.

1.4. Representación en el plano cartesiano.

1.5. Función. Condiciones para que una relación sea función.

1.6. Imagen de un elemento.

1.7. Dominio y recorrido.

1.8. Representación tabular, simbólica y gráfica. Identificando las características de una función.

2. FUNCIÓN LINEAL

2.1. Situaciones de proporcionalidad directa. Representación tabular a gráfica y simbólica (guía de trabajo #1)

2.2. Concepto de pendiente. Significado gráfico como *desplazamiento en Y / desplazamiento en X.*

2.3. Significado del signo de la pendiente con respecto a la inclinación de la recta.

2.4. Valor numérico de la pendiente dada la gráfica.

2.5. Representación simbólica de funciones lineales y afines dada la gráfica.

2.6. Función lineal. Concepto, representaciones tabular, gráfica y simbólica. Formula para hallar la pendiente conociendo dos valores de la función, formula punto pendiente. (Sesión #1).

2.7. Representación gráfica usando el computador (Derive). Rectas paralelas y perpendiculares, desplazamientos verticales y horizontales. (Sesión #2).

2.8. Magnitudes directamente proporcionales. Representación tabular a gráfica y simbólica, funciones directamente proporcionales y afines. (Sesión #3).

2.9. Magnitudes inversamente proporcionales. Representación tabular a gráfica y simbólica, ejemplo de funciones no lineales (sesión #4).

2.10 Aplicaciones en economía (comercio). Ecuaciones de demanda, oferta y costo lineal (sesión #5).

2.11. Evaluación Andes.

ASPECTOS INNOVATIVOS.

1. Trabajo en grupo.
2. Guías de trabajo.
3. Representación gráfica usando el Derive.
4. No se hizo énfasis en la representación tabular como forma única para realizar la gráfica.
5. Plenarias acerca de los trabajos en grupo.
6. Énfasis en el paso de la representación gráfica a la simbólica.
7. Uso y significado de los números de acuerdo al contexto de los problemas.
8. Identificación de las variables en un problema.

REPORTE DEL TRABAJO REALIZADO

I. FUNCIONES.

Se empezó haciendo un repaso del concepto de producto cartesiano entre conjuntos y se hizo énfasis en la importancia del orden de las componentes, se presentaron algunos ejemplos y se pidió a los estudiantes que hallaran algunas relaciones dados dos conjuntos y que realizaran los diagramas sagital y cartesiano.

Posteriormente se explicó el significado de dominio y recorrido de una relación y se pidió que identificaran características de la correspondencia, se les sugirió tener en cuenta que todos los elementos del dominio tuvieran imagen y que ésta fuera única, o que observaran si existían varias imágenes para un mismo elemento, esto se hizo con el fin de identificar las condiciones para que una relación sea función.

Algunos ejercicios utilizados en esta parte se presentan a continuación:

1. Dados los conjuntos $A=\{0,1,2,3\}$, $B=\{0,1,4,9\}$, $C=\{0,3,4,6,8,10\}$ y $D=\{0,1,2,4,5,6,9,11\}$:

a) Hallar AxB y CxD.

b) Escribir las parejas de la relación $R_1=\{(a,b) \,/\, a<b\}$

c) Escribir las parejas de la relación $R_2=\{(a,b) \,/\, a+b \text{ sea impar}\}$

d) Escribir las parejas de la relación $R_3=\{(a,b) \,/\, a=b\}$

e) Escribir las parejas de la relación $R_4=\{(c,d) \,/\, d=c+1\}$

f) Escribir las parejas de la relación $R_5=\{(c,d) \,/\, c+d = \text{múltiplo de } 3\}$

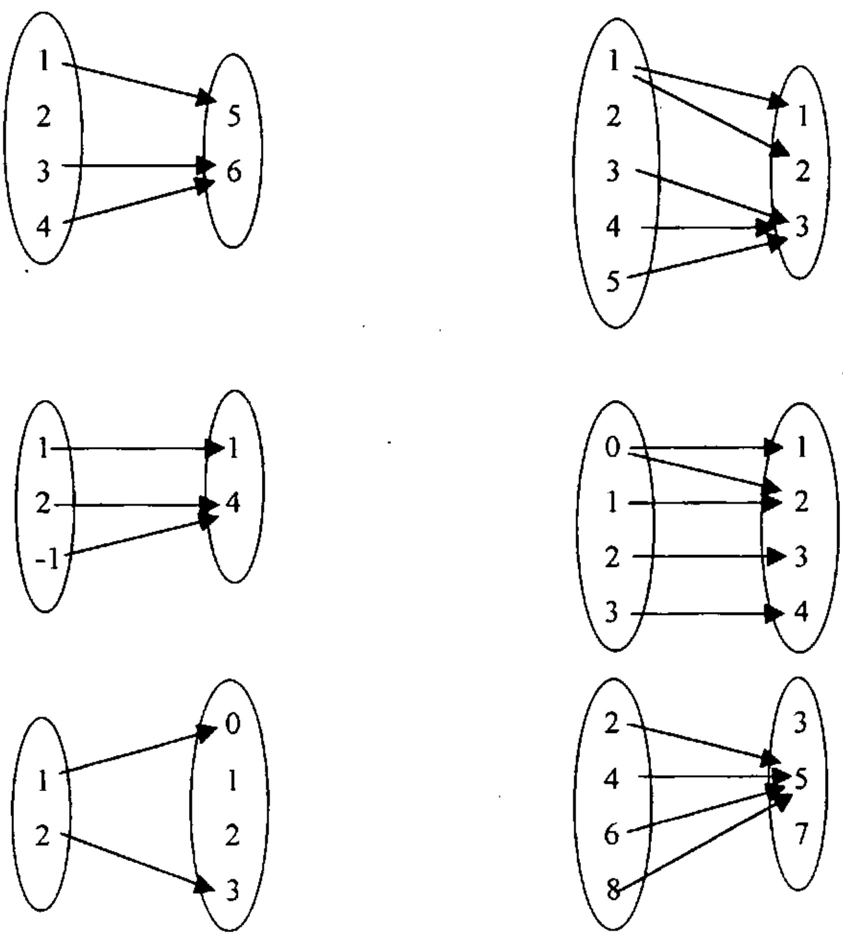
2. Realice los diagramas sagital y cartesiano para cada relación.
3. Escriba las características de cada relación.
4. Escriba el dominio y el recorrido de cada relación.

A través de los ejercicios los estudiantes identificaron que una relación es función si cumple las siguientes condiciones:

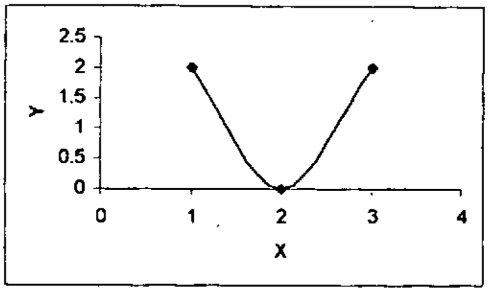
1. Todo elemento del dominio se relaciona con algún elemento del conjunto de llegada.
2. Los elementos del dominio se relacionan una sola vez con los elementos del conjunto de llegada.

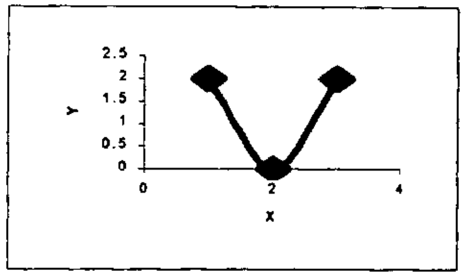
Una vez identificadas las anteriores características se seleccionaron de todas las relaciones trabajadas en clase aquellas que eran funciones y se resolvieron ejercicios como los siguientes:

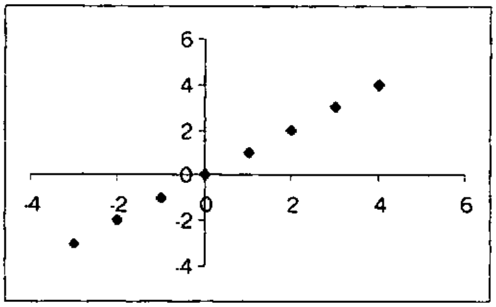
1. Dados los siguientes diagramas sagitales diga cuales son funciones y cuales no, justifique la respuesta.

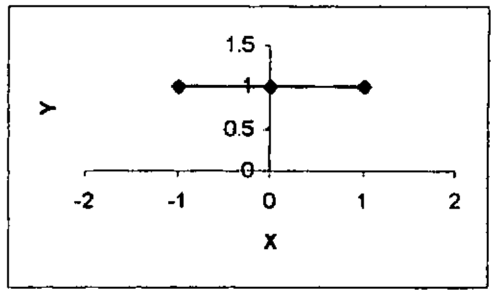


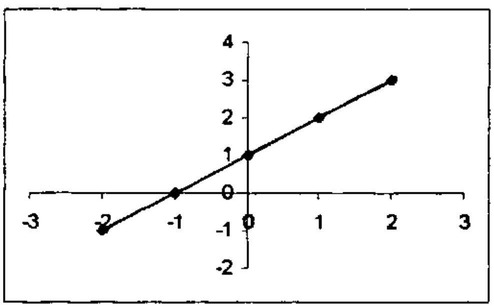
2. Indique si las gráficas siguientes representan funciones, justifique la respuesta.

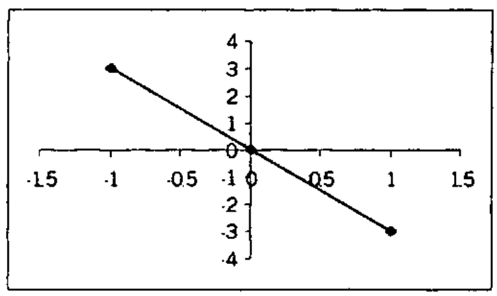


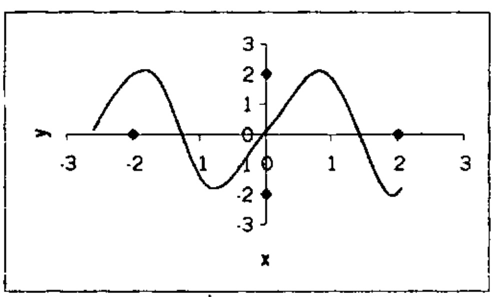


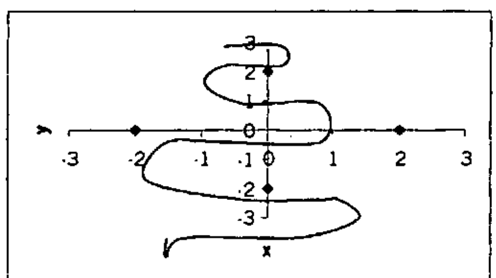


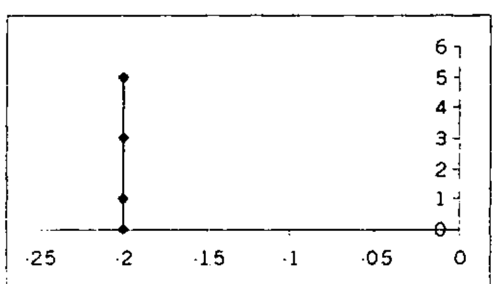








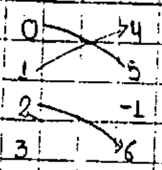




→ EJERCICIO ←

PROPIEDADES

R_1



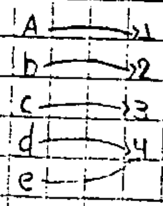
→ No todos los elementos de A se relacionan con los de B

→ Un elemento de A no se relaciona con ninguno de B

→ El 3 de A no se relaciona con ningun elemento de B.

R_2

FUNCIÓN

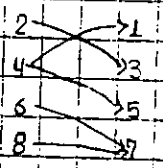


→ Todos los elementos de A se relacionan con los de B

→ Dos elementos de A se relacionan con uno de B

→ Todo elemento de A se relaciona una sola vez con B.

R_3

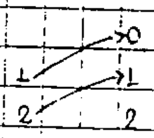


→ Todos los elementos de A se relacionan con los de B

→ Un elemento de A se relaciona con dos elementos de B.

R_4

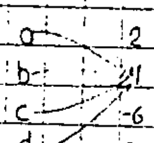
FUNCIÓN



→ Todos los elementos de A se relacionan una sola vez con los de B

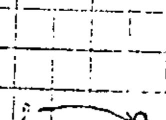
R_5

FUNCION



→ Todos los elementos de A se relacionan una sola vez con los de B

R_6



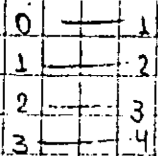
→ No todos los elementos de A se relacionan con los de B

→ Un elemento de A se relaciona con dos elementos de B.

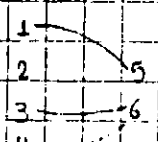
FUNCIÓN O RELACIÓN FUNCIONAL : Es una relación que cumple dos características :

→ Todo elemento del conjunto de partida o Dominio se relaciona con algún elemento del conjunto de llegada o Rango

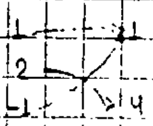
→ Los elementos de A se relacionan una sola vez con los elementos de B



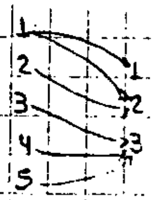
→ Esta función a cada elemento del dominio se le suma 1



→ No es función porq' falta que un elemento de A se relacione con los de B.

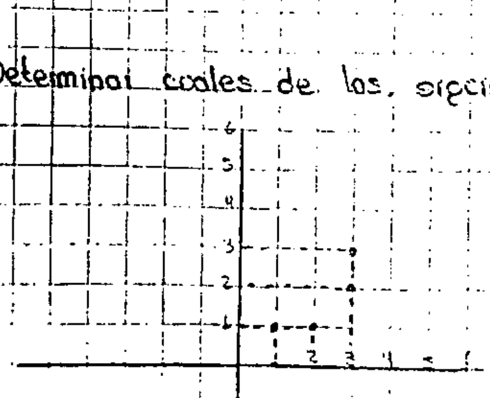


→ Si es función porq' todos los elementos de A se relacionan con los de B.



→ No es función porq' el 1 se relaciona dos veces con un elemento de B.

Determinar cuales de los siguientes relaciones son funciones :



No es función →

→ 4, 5 y 6 no tienen imagen

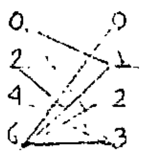
→ El 3 tiene 2 imagenes

AXB = { (0,0) (0,1) (0,2) (0,3) (2,0) (2,1) (2,2) (2,3) (4,0) (4,1) (4,2) (4,3) (6,0)
(6,1) (6,2) (6,3) }

R1 = { (a,b) / a+b = multiplo de 3

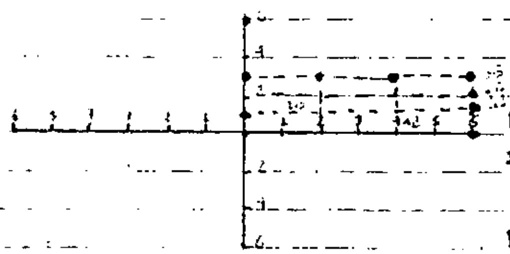
R1 = { (~~0,1~~) (~~0,2~~) (2,3) (4,2) (~~4,0~~) (6,1) (6,2) (6,3) }

DIAGRAMA SAGITAL:



~~CARAC: Todos los elementos de A~~
~~Se relacionan con los de B.~~
~~Los elementos de A se relacionan~~
~~1 o más veces con los de B.~~

1, 3 y 5 no son elementos de A.



~~No es función porque 1, 3, 5 no~~
tienen imagen y el 6 tiene 3 imagenes.

DOMINIO = { 0, 2, 4, 6 }
RANGO = { 0, 1, 2, 3 }

c. Dados los siguientes conjuntos:

A = { 3,4,5,6,7 }
B = { 1,2,3,4,5 }

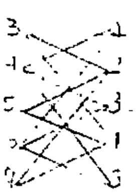
Hallar AXB

AXB = { (3,1) (3,2) (3,3) (3,4) (3,5) (4,1) (4,2) (4,3) (4,4) (4,5) (5,1) (5,2) (5,3)
(5,4) (5,5) (6,1) (6,2) (6,3) (6,4) (6,5) (7,1) (7,2) (7,3) (7,4) (7,5) }

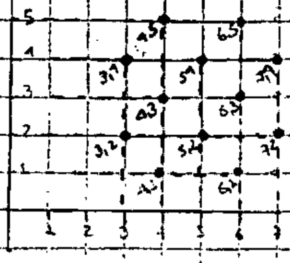
R1 = { (a,b) / a+b = sea impar }

R1 = { (3,2) (3,4) (4,1) (4,3) (4,5) (5,2) (5,4) (6,1) (6,3) (6,5) (7,2) (7,4) }

DIAGRAMA SAGITAL:



CARAC: Todos los elementos de A
Se relacionan con los de B
Los elementos de A Se
relacionan 2 o más veces
con los de B.



~~No es función porque al 1,2 no tienen~~ imagen y al 3,4,5,6,7 Tienen 2 o más imagenes.

DOMINIO: {3,4,5,6,7}
RANGO: {1,2,3,4,5}

Para las característica solo se tienen en cuenta los elementos de,

d- Dados los siguientes conjuntos:

A = {0,1,2,3}
B = {3,6,9}

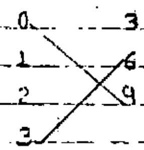
Hallar AXB

AXB = {(0,3) (0,6) (0,9) (1,3) (1,6) (1,9) (2,3) (2,6) (2,9) (3,3) (3,6) (3,9)}

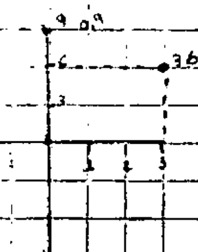
R1 = {(a,b) / a+b = 9}

R1 = {(0,9) (3,6)}

DIAGRAMA SAGITAL



CARAC: No todos los elementos de A
Se relacionan con los de B.
Dos elementos de A se relacionan
con dos elementos de B. Solo una vez.



No es función porque 1,2 no
tienen imagen.

DOMINIO {0,3}
RANGO {6,9}

e- Dados los siguientes conjuntos:

A = {2,4,6,8,10}
B = {4,8,12}

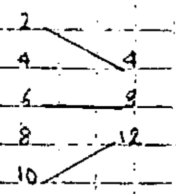
Hallar AXB:

AXB = { (2,4) (2,8) (2,12) (4,4) (4,8) (4,12) (6,4) (6,8) (6,12) (8,4) (8,8) (8,12)
(10,4) (10,8) (10,12) }

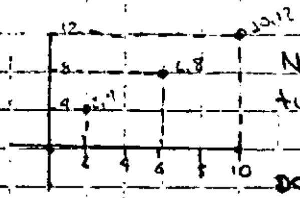
R1 = { (a,b) / b - a = 2 }

R1 = { (2,4) (6,8) (10,12) }

DIAGRAMA SAGITAL:



CARAC: No todos los elementos de A
se relacionan con los de B.
El 4 y 8 no se relacionan
con los elementos de B.



No es función porque 4 y 8 no
tienen imagen.

DOMINIO: { 2,6,10 }
RANGO: { 4,8,12 }

f = Dado los siguientes conjuntos:

A = { 1,2,3,4,5 }
B = { 0,3,5,7 }

Hallar AXB

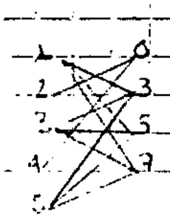
R:

AXB { (1,0) (1,3) (1,5) (1,7) (2,0) (2,3) (2,5) (2,7) (3,0) (3,3) (3,5) (3,7)
(4,0) (4,3) (4,5) (4,7) (5,0) (5,3) (5,5) (5,7) }

R1 = { (a,b) / a + b sea par }

R1 = { (1,3) (1,5) (1,7) (2,0) (3,3) (3,5) (3,7) (4,0) (5,3) (5,5) (5,7) }

DIAGRAMA SAGITAL.



CARAC: Todos los elementos de A
se relacionan con los de B.
1,3,5 se relacionan 2 o más
veces con los elementos de B.

Aquí también se podía hallar el dominio y el rango aclarando que en la presentación gráfica en el plano cartesiano, para hallar el dominio se deben identificar todos los posibles elementos del eje X que tienen imagen y para hallar recorrido se deben mirar todos los elementos en Y que son imagen de algún X. Los estudiantes trabajaron individualmente y luego algunos explicaban en el tablero sus respuestas, esto con el fin de unificar resultados.

Se habla también de la representación simbólica de una función como una fórmula que relaciona las componentes de la relación, no se hizo mucho énfasis en este aspecto pero se hicieron algunos ejercicios como el siguiente:

1. Escribir una fórmula que represente las siguientes expresiones algebraicas:

a) Un número incrementado en 8.
b) 3 veces un número.
c) La diferencia de un número y 3.
d) A 23 se le resta un número.
e) Un número menos 11.
f) La quinta parte de un número.
g) Cuatro veces un número más 13.
h) El doble producto de un número menos 7.
i) El producto de dos números elevados al cuadrado.
j) La suma por la diferencia de dos números.
k) Cinco veces la suma de tres números.

2. Escribir un enunciado que represente las expresiones algebraicas siguientes:

a) $3(x+y)^2$
b) $3x^2-y^2$
c) $(3xy)^2$
d) $4(x-2)^2$

Con este tipo de ejercicios se buscaba que el estudiante aprendiera a pasar de representaciones orales a la simbólica y que no tuviera posteriormente tanta dificultad cuando se pida hallar la fórmula que relacione las variables en un problema.

2. FUNCION LINEAL.

Aprovechando que en el curso anterior habían trabajado sistemas de ecuaciones y representación gráfica de la recta, se empezó el tema de función lineal con este último concepto; para ello se partió de funciones proporcionales de la siguiente manera.

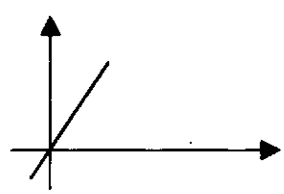
Primero se le dio significado al concepto de pendiente gráficamente como el resultado de hacer un desplazamiento vertical (partiendo del origen) y luego un desplazamiento horizontal; así por ejemplo $m=2$ significa que a partir del origen se suben 2 unidades y a partir de allí se desplaza hacia la derecha una unidad, quedando así un punto de la recta, también significa bajar 2 unidades y luego desplazarse una unidad hacia la izquierda, este proceso se repite desde distintos puntos de la recta con el fin de ubicar nuevos puntos.

Se explico que el valor de la pendiente podría interpretarse de diversas formas, por ejemplo $m=2$ tendría el mismo resultado de realizar $m={}^{4}/_{2}$, $m={}^{6}/_{3}$,......, $m={}^{80}/_{40}$, $m={}^{-2}/_{-1}$, etcétera. También se concluyo que la posición de la recta queda determinada por el signo del valor numérico de la pendiente, así:

$m={}^{\text{desplazamiento en } y}/_{\text{desplazamiento en } x}={}^{\text{desplazamiento vertical}}/_{\text{desplazamiento horizontal}}$

$m>0$ significa ${}^{\text{desplazamiento hacia arriba}}/_{\text{desplazamiento hacia derecha}}$

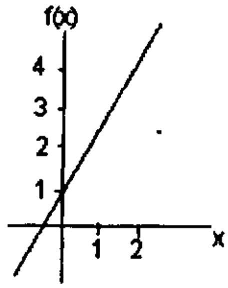
"o" ${}^{\text{desplazamiento hacia abajo}}/_{\text{desplazamiento hacia izquierda}}$



Ejemplo 4

Si y =f(x) es una función lineal tal que f(0)=1 y f(2)=4 encontrar f(x).

Solución:
Para este caso, f(0)=1 significa que cuando x =0 entonces y =1, y que cuando f(2)=4, significa que cuando x =2 entonces y =4, luego sabiendo que: $m\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ entonces $m=\frac{4-1}{2-0}$, es decir $m=\frac{3}{2}$, ahora bien también se sabe que: $y=m(x-x_1)+y_1$ entonces $y=\frac{3}{2}(x-0)+1$ luego : $y=\frac{3}{2}x+1$ es decir: $f(x)=\frac{3}{2}x+1$



x	f(x)
0	1
2	4

Ejercicio:

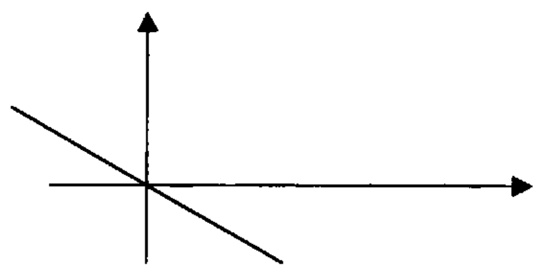
1. Determine en cada caso: pendiente, intersección con el eje vertical de la función lineal y haga la gráfica.

   a. $f(x)=-4x$ b. $h(q)=\frac{7-q}{2}$ c. $f(x)=x+1$

2. Determinar f(x) cuando f es función lineal con las posibilidades dadas
   a. Pendiente 4 ; f(2) = 8 b. Pendiente 2 ; f(0) = 5 c. f(1) = 2 ; f(-2) = 4

$m<0$ significa *desplazamiento hacia arriba* / *desplazamiento hacia izquierda*

"o" *desplazamiento hacia abajo* / *desplazamiento hacia derecha*



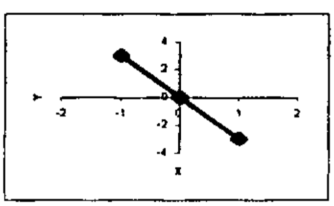
Este mismo procedimiento se realizó para hacer la gráfica de funciones afines partiendo del punto *(0,b)*. Luego de la representación gráfica se pasó a la representación simbólica y se retomaron los conceptos de imagen, dominio, recorrido.

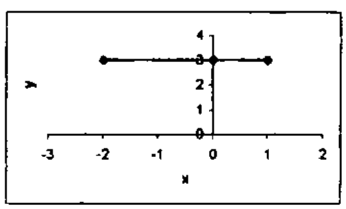
Algunos tipos de ejercicios trabajados en esta parte fueron:

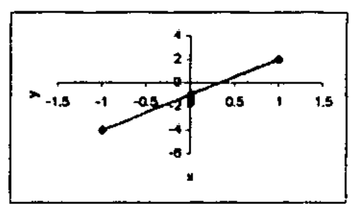
1) Trace la gráfica de la recta que cumple:

a) Pasa por *(0,0)* y su pendiente es $m=3$.
b) Pasa por *(0,0)* y su pendiente es $m=-3$.
c) Pasa por *(0,1)* y su pendiente es $m=-^4/_5$.
d) Pasa por *(0,-2)* y su pendiente es $m=^3/_2$.

2) Dadas las siguientes gráficas escriba el valor de la pendiente.







3) Trazar las gráficas que se indican:

a) $y=-^1/_2x+3$

b) $y = x+3$

c) $y = 3$

d) $y = {}^{2}/_{3}x-4$

e) $y=4-{}^{2}/_{3}x$

f) $y=-1-{}^{2}/_{3}x$

Una vez realizados estos ejercicios se definió la función lineal (de gráfica lineal) como aquella que puede escribirse de la forma $f(x) = mx+b$, para ello se utilizó la guía titulada Sesión 1 Tema: *Función Lineal*, en la cual se presenta dicha función en forma tabular, gráfica y simbólica; se presentó también la fórmula para hallar el valor numérico de la pendiente conociendo dos puntos de la recta

$$m = \frac{Y2-Y1}{X2-X1}$$

y se realizaron algunos ejercicios para escribir la representación simbólica de la función lineal: conociendo el valor de la pendiente y un punto de la función o conociendo dos valores de la misma. Finalizando la guía se realizaron ejercicios como los siguientes:

1) Determine la pendiente de la recta que pasa por los puntos dados. Si la pendiente de la recta es indefinida, indíquelo.

a) (1,5) y (2,-3)

b) (5,1) y (2,4).

c) (4,2) y (4,-1).

d) (2,5) y (-1,5).

e) (6,-2) y (-1,-2).

f) (-1,4) y (0,3)

2) Determinar $f(x) = mx+b$ con las condiciones dadas:

a) $m = 4$ y $f(2) = 8$.

b) $m = -3$ y pasa por $(-2,-3)$.

c) $f(3) = 6$ y $f(-2) = 4$.

3) Escribir el valor de la pendiente y del punto de corte con el eje *y* de las siguientes funciones lineales:

a) $f(x)= 2-{}^{3}/_{4}\,x.$

b) $f(x)= (4x-3) / 5.$

c) $f(x)= -50x-10.$

d) $f(x)= -{}^{3}/5\,x.$

e) $f(x)= -3$

4) Trace la gráfica de las siguientes funciones:

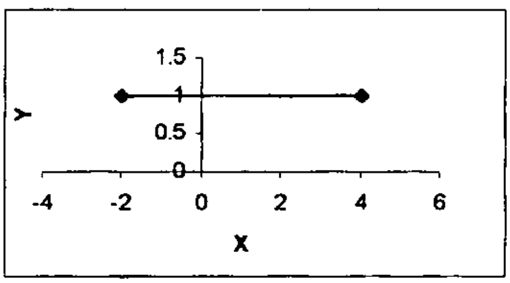
a) $F(x) = 2X - 4$

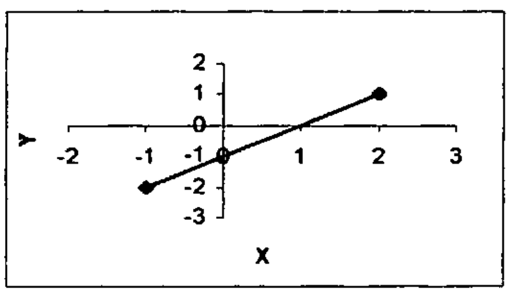
b) $F(x) = \frac{1}{2}X - 6$

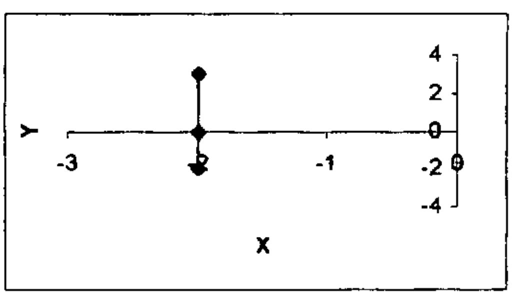
c) $F(x) = (-5X - 6) / 2$

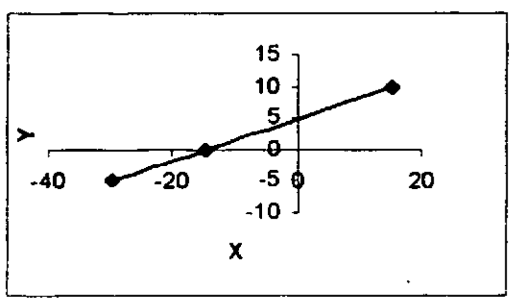
d) $F(x) = (4 - 4X) / 8$

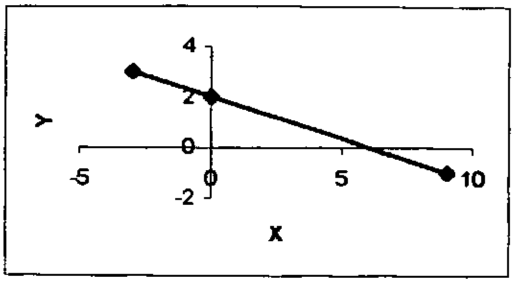
5) En las siguientes gráficas escriba las ecuaciones correspondientes:

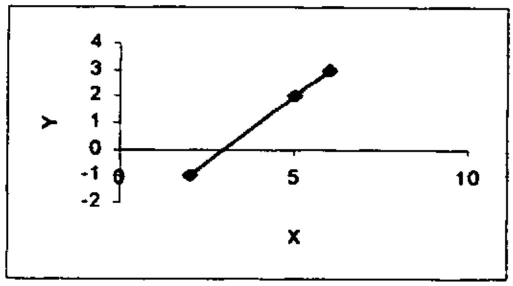












Posteriormente se utilizó la tecnología para agilizar el trazado de gráficas de funciones lineales y para ayudar a la comprensión de los conceptos vistos, para ello se diseño la guia titulada Sesión 2 tema: Función Lineal con Tecnologia. En esta guia los estudiantes aprendieron a manejar el paquete matemático DERIVE PARA D.O.S., primero se presenta una descripción de algunos comandos necesarios para el trazado de gráficas y luego con ejemplos se presentan los conceptos de paralelismo y perpendicularidad, así como también ejemplos de rotación y traslación (vertical y horizontal) de rectas; luego se pide al estudiante que realice algunos ejercicios aplicando lo visto.

Para la terminación de esta guía hubo mucha dificultad por la poca disponibilidad para el uso de los computadores en clase, la mayoria de estudiantes solo logro desarrollar el ejercicio 1 de la guía.

SESIÓN No.1
TEMA: FUNCIÓN LINEAL

OBJETIVO

Al finalizar esta guía de trabajo el alumno estará en capacidad de reconocer en forma: tabular, gráfica y simbólicamente una función lineal.

MARCO TEORICO

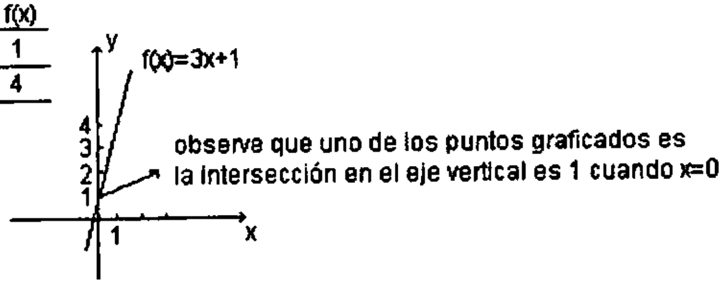
Una función f es una función lineal si y solo si, si f(x) puede ser escrita en la forma f(x)=ax+b, en donde a y b son constantes y a es diferente de cero. Supóngase que y=f(x) y que a=m, entonces y es igual a ax+b la cual es una ecuación de la recta según la teoría vista en las clases anteriores con m = a e intersección con el eje y en b, luego podemos concluir que la gráfica de una función lineal es una recta.

Diremos entonces que la función f(x)=ax+b, tiene pendiente a.

Ejemplo 1:
Graficar f(x) = 3x + 1

Solución:
Aquí la función f es lineal con pendiente 3 luego su gráfica es una recta. Como dos puntos determinan una recta solo necesitaremos dos puntos y luego dibujamos la recta que pasa por ellos.

x	f(x)
0	1
1	4



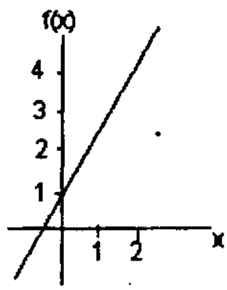
Ejemplo 2
Graficar $g(t) = \dfrac{2-t}{2}$

Solución:
Obsérvese que la función g es lineal, pues la podemos expresar en la forma $g(x) = ax + b$

Ejemplo 4

Si y =f(x) es una función lineal tal que f(0)=1 y f(2)=4 encontrar f(x).

Solución:
Para este caso, f(0)=1 significa que cuando x =0 entonces y =1, y que cuando f(2)=4, significa que cuando x =2 entonces y =4, luego sabiendo que: $m\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ entonces $m=\frac{4-1}{2-0}$, es decir $m=\frac{3}{2}$, ahora bien también se sabe que: $y=m(x-x_1)+y_1$ entonces $y=\frac{3}{2}(x-0)+1$ luego : $y=\frac{3}{2}x+1$ es decir: $f(x)=\frac{3}{2}x+1$



x	f(x)
0	1
2	4

Ejercicio:

1. Determine en cada caso: pendiente, intersección con el eje vertical de la función lineal y haga la gráfica.

   a. $f(x)=-4x$ b. $h(q)=\frac{7-q}{2}$ c. $f(x)=x+1$

2. Determinar f(x) cuando f es función lineal con las posibilidades dadas
   a. Pendiente 4 ; f(2) = 8 b. Pendiente 2 ; f(0) = 5 c. f(1) = 2 ; f(-2) = 4

SESIÓN No.2
TEMA: FUNCIÓN LINEAL CON TECNOLOGÍA

OBJETIVO

Al finalizar esta guía el alumno estará en capacidad de graficar funciones lineales utilizando el paquete Derive para DOS.

MARCO TEORICO

GRAFICA DE UNA FUNCIÓN EN EL PLANO CARTESIANO (2D).

Entre al paquete Derive, siguiendo las instrucciones del profesor:

Siga los siguientes pasos cada vez que desea hacer una gráfica:

1. Escriba en la pila la función que desea graficar.
2. Seleccione del comando principal: Plot

OJO: Si entra a graficar por primera vez aparecerá: Beside (at column), Under (at line) Overlay(toda). Esto significa respectivamente: Pantalla separada verticalmente, horizontalmente, pantalla total. Si escoge cualquiera de las dos primeras, la pantalla se dividirá en dos ventanas, a tantas unidades como usted se lo indique. Esta división de la pantalla en ventanas será muy útil para hacer mas interactiva la gratificación.

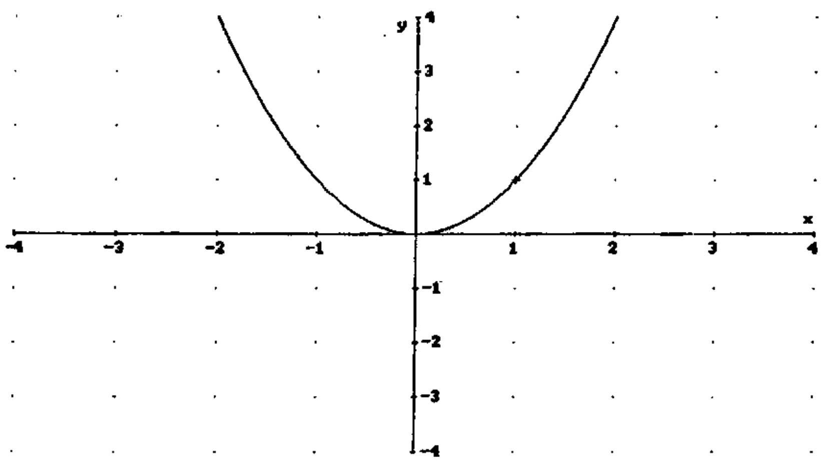


Figura 1

Por ejemplo escriba en la pila x^2, seleccione el comando Plot, en Beside escriba 40 y luego seleccione de nuevo Plot, obtendrá como resultado la gráfica No 1 en la derecha y la pila a la izquierda.

NOTA : Si desea cerrar ventanas:Seleccione: Windows-Close:Cierre de menor a mayor.
Es bueno observar que dentro del menú Window encuentra:

Close Designate Flip Goto Next Open Previous Split

Close: Significa cerrar ventana y el le preguntará cual. Designate, asignará pantalla para gráficas en 2D, o gráficas en 3D (en este caso estamos en el plano 2D) o simplimente la utilizará para escribir expresiones. Flip: vuelve al menú principal, Got:,envia a la ventana deseada, Next : va a la próxima ventana, Open: abre una indicada, Previous: abre la anterior, Split: da la opción en forma horizontal o vertical.
Una vez confirme el tamaño de la pantalla que utilizará para realizar la gráfica encontrará el siguiente menú:

Algebra- Center- Delete- Help- Move- Option- Plot- Quit- Range- Scale- Transfer Windows- aXes- Zoom .

Algebra: permite volver a la pila, Center: Mejora el centro, Delete(all,Butlast,first,last) que en orden sería: borrar: todas,la penúltima, la primera y la última. Help: es el comando de ayuda, Move: permite mover la gráfica a nuestro gusto. Option: tiene las mismas opciones que se aprendieron en la guía número 1. Plot: confirma el trazo de la gráfica. Quit: Sale del modo gráfico abandonado las expresiones trazadas. Range: mejora las márgenes de la pantalla en la gráfica: izquierda,derecha,arriba,abajo. Scale: mejora las escalas de los ejes x,y. Transfer: permite llamar una gráfica, o grabarla o imprimirla. Windows: edita ventanas, aXes: mejora los ejes, y Zoom: cambia la visualización de la gráfica.

3.Seleccione de nuevo Plot del menú de gráficas que visualizarà.Con este paso la gràfica se trazarà.
Nota: Existe una forma abreviada de cambiar el aspecto de la gráfica, utilizando las teclas de las funciones:

F2= Vuelve el control a la Pila.
F3= Permite mover el cursor (con las flechas) sobre la gráfica(□) o fuera de ella (+), esto es fundamental para calcular intersecciones, máximos, mínimos, asíntotas, etc...
F5= Cambia el poder de resolución de la gráfica.
F7= Disminuye la escala en el eje Y
F8= Aumenta la escala en el eje Y.
F9= Disminuye la escala en el eje X.
F10= Aumenta la escala en el eje X.

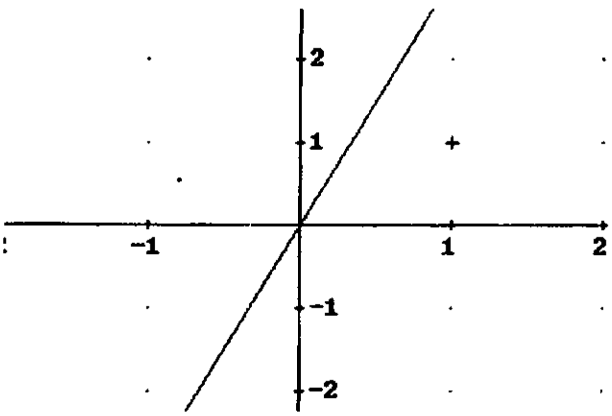
Ejercicios:

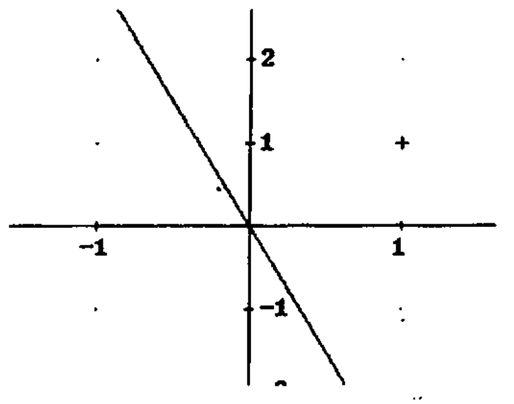
A. Realice la Gráfica de cada función:

1. $f(x) = 3x - 2$ 2. $f(x) = -3x - 3$ 3. $y = -x + 3$

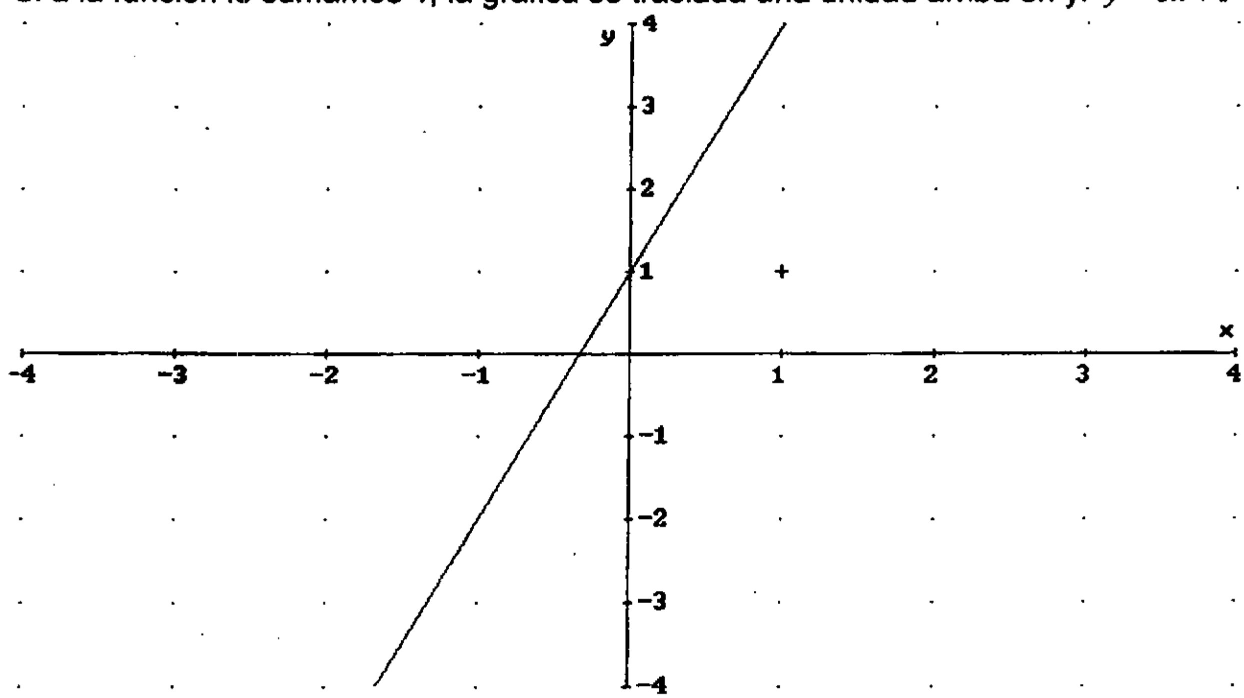
ROTACIONES, TRASLACIONES Y DILATACIONES.

Haga la gráfica de y = 3x, si graficamos y = -3x la gráfica rotará 90 grados.

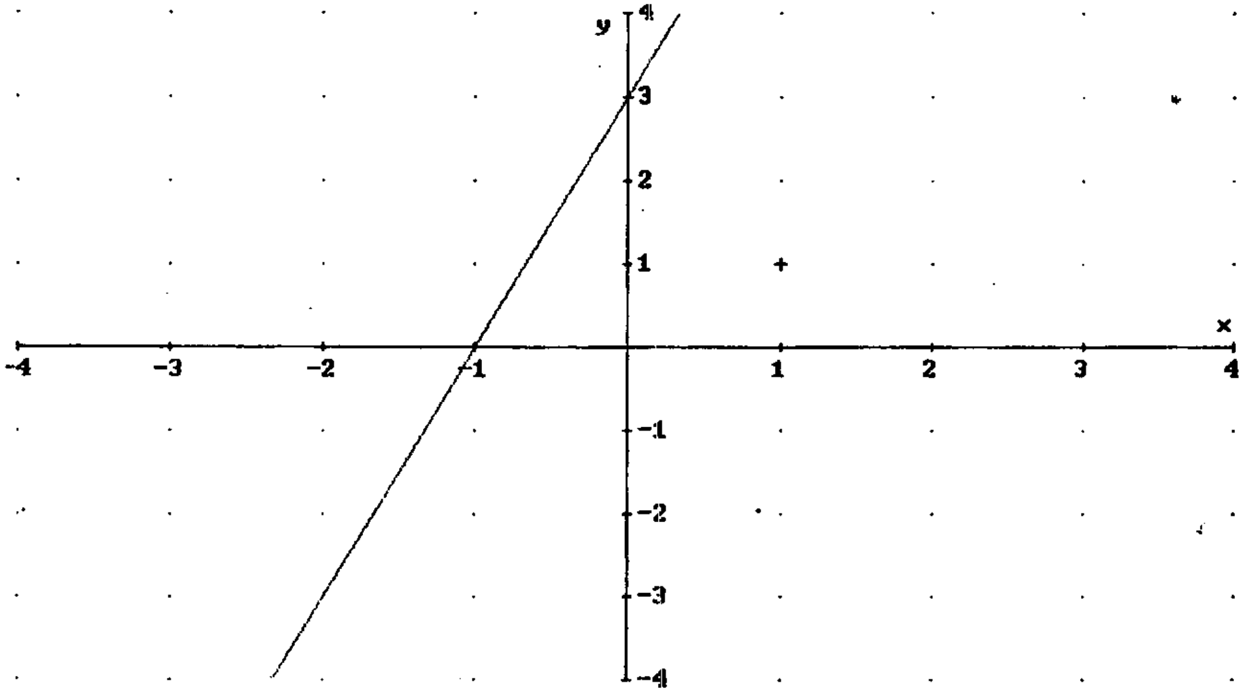




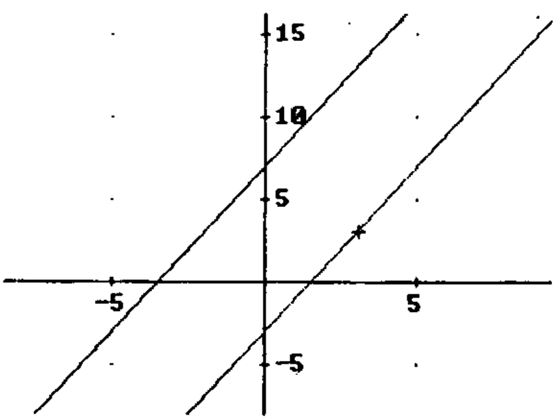
Si a la función le sumamos 1, la gráfica se traslada una unidad arriba en y. $y = 3x + 1$



Ahora bien si realizamos la gráfica de $y = 3(x+1)$ la función se dilata sobre el eje horizontal.



RECTAS PARALELAS:

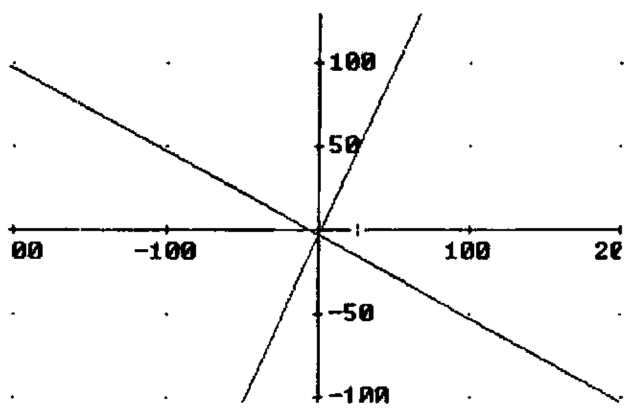


$$y = 2x - 3$$
$$y = 2x + 7$$

Obsérvese que las dos ecuaciones tienen la misma pendiente luego estas rectas son paralelas.

RECTAS PERPENDICULARES.

$$y = 2x - 3$$
$$y = -\frac{1}{2}x - 3$$



Como el producto de las pendientes es −1 las rectas son perpendiculares.

Ejercicios:

1. Realice la gráfica de cada una de las funciones dadas e indique cuales son paralelas y cuales son perpendiculares. Justifique su respuesta.

$$a.\ f(x) = 2x - 3$$
$$b.\ f(x) = 2(x - 5)$$
$$c.\ g(x) = -x - 3$$
$$d.\ h(x) = -10x + 1$$
$$e.\ m(x) = 0.1x - 7$$
$$f.\ k(x) = \frac{1}{2}(4x - 6)$$
$$g.\ l(x) = x - \frac{1}{2}$$

2. Suponga la función: $f(x) = 5x$,
   a. Escriba la función que hace que f ROTE.
   b. Escriba la función que hace que f se TRASLADE 5 unidades en y.
   c. Escriba la función que hace que f se DILATE 3 unidades.
   d. Escriba la función que hace que f al mismo tiempo se ROTE, se TRASLADE 2 unidades hacia abajo y se dilate 4 unidades.
   e. REALICE LA GRAFICA DE CADA ejercicio anterior y discuta con sus compañeros los resultados.

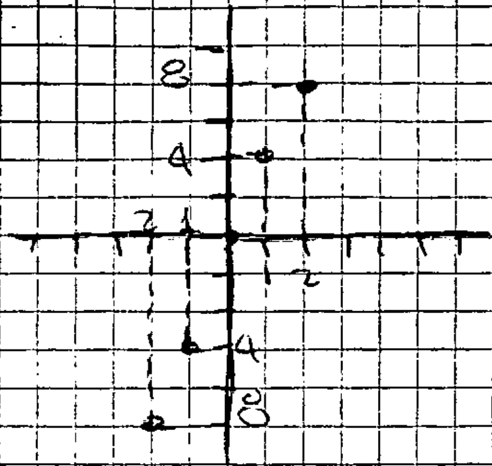
Para diferenciar las funciones proporcionales (Lineales) y afines se diseñaron inicialmente dos guías (1 y sesión 3 tema: proporcionalidad), en las que se presentan algunos ejemplos de magnitudes directamente proporcionales; como estrategia se usó la representación tabular para pasar a las representaciones gráfica y simbólica. En la sesión 3 hace la diferencia entre las funciones afín y lineales o proporcionales y se presenta un ejercicio para cada caso; posteriormente se utilizaron algunos ejercicios de los libros matemática 2000 de grado octavo y las fotocopias Calentando Motores para reforzar los conceptos. Con estos ejercicios los estudiantes relacionaron la pendiente como la constante de proporcionalidad o el valor numérico que acompaña a la variable independiente en las funciones afines. Estos problemas se trabajaron en grupo y luego se hizo la plenaria para aclarar dudas e inquietudes.

Con el objetivo de que los estudiantes pudieran identificar magnitudes inversamente proporcionales y concluyeran que las ecuaciones que ligan estas variables no representan funciones lineales o afines se diseño la sesión 4 tema: Proporcionalidad (magnitudes inversamente proporcionales), nuevamente de la representación tabular se pasa a las representaciones gráfica y simbólica, la guía finaliza con un ejercicio de aplicación.

Finalmente la propuesta se cierra con la guía titulada sesión 5 tema: Economía, en esta se presenta algunas aplicaciones de las funciones lineales y afines en la economía, se habla de ecuaciones de demanda, oferta y costo lineal, se incluyen algunos ejemplos para cada caso; la representación gráfica se realiza utilizando el concepto de pendiente y de ecuación de la forma punto-pendiente y se dejan 3 ejercicios como aplicación.

Para el trabajo de las guías y talleres los estudiantes se reunieron en grupos de 3 o 4 integrantes, por lo general para cada una de ellas se empleo un bloque de dos horas, excepto la de DERIVE que requirió 3 bloques.

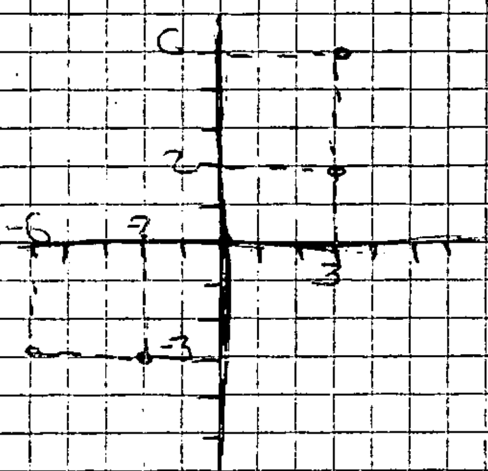
3 $Y=4$ $Y=4X$



X	Y
0	0
1	4
-1	-4
2	8
-2	-8

4. $2X + 3Y = 0$ $Y = -2X$

$Y = \frac{-2X}{3}$

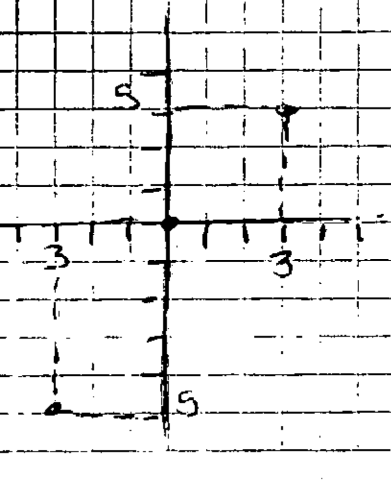


X	Y
0	0
3	-2
-3	02

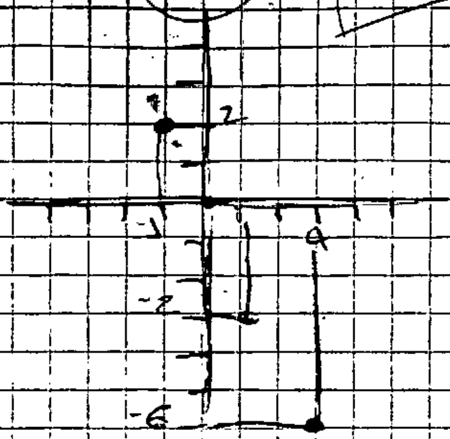
5 $5X - 3Y$ $Y = -5X$

$Y = \frac{5X}{3}$

X	Y
0	0
3	5
-3	-5



6 $2x = 4$ $\boxed{Y = -2X}$

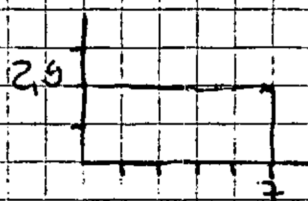


X	Y
0	0
1	-2
-1	2
3	-6

30-1/2

Trazar los gráficos

7 1.A Kg Pintura

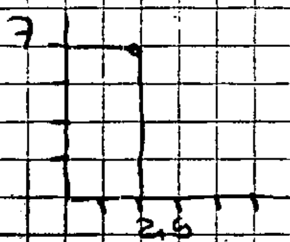


Superficie - pintura

$y = \frac{2,5}{7} = 0,3X$

B Superficie - Pintura

$y = \frac{7}{2,5} = 2,8X$

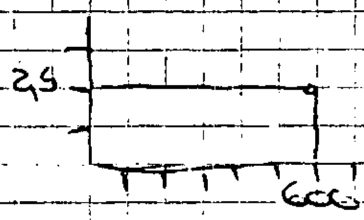


$y = 2,8X$

Kg - Pintura

C Kg - Pintura

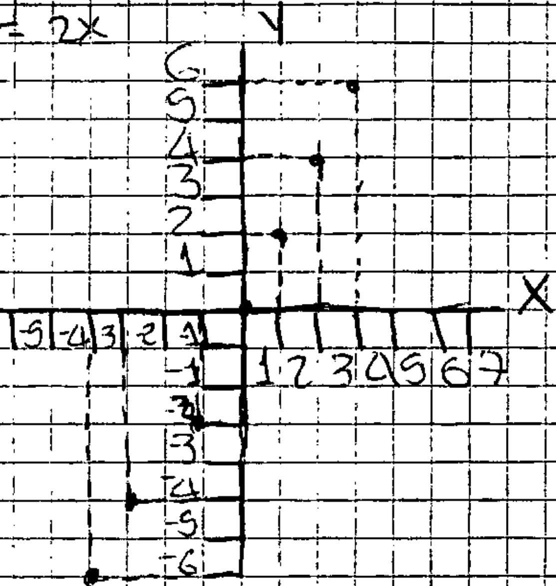
$y = \frac{2,6}{600} = 0,046X$



Costo $y = 0,046X$

ACCION

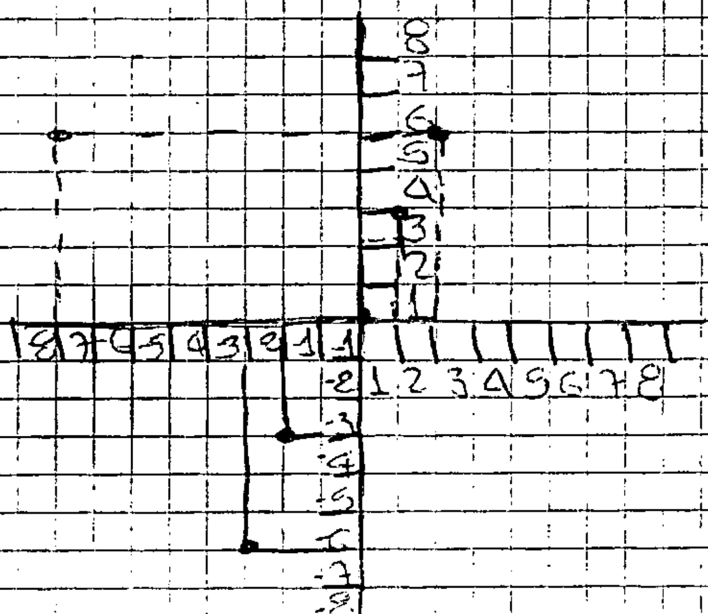
1. $Y = 2X$



X	Y
0	0
1	2
-1	-2
-2	4
3	6
-3	-6

Trazar la gráfica

2. $Y = X$ $\quad Y = 3X$



X	Y
0	0
1	3
-1	-3
2	6
-2	-6

CENTRO EDUCATIVO DISTRITAL BRASILIA
GRADO DECIMO
GUIA DE TRABAJO 1

1. Un entrenador tan solo registró los siguientes datos durante un entrenamiento de ciclismo de uno de sus pupilos, quien mantuvo el mismo ritmo de carrera.

NUMERO DE VUELTAS	TIEMPO (MINUTOS)
3	12
	20
7	
	36
35	

a. Ayúdale a completar la tabla. Explica cómo lo haces.

b. Es posible que en 10 vueltas el ciclista emplee 45 minutos?. Explica la respuesta.

c. ¿Cómo podrías saber qué tiempo emplea el ciclista para cualquier número de vueltas? (digamos n vueltas).

d. Para todos los casos halla el cociente que existe entre el tiempo empleado y el número de vueltas. ¿Qué encuentras?, ¿cómo justifica el resultado?.

e. Realiza en el plano cartesiano la gráfica que relaciona el número de vueltas en términos del tiempo empleado.

2. Los registros tomados por el entrenador para otro pupilo quien también mantuvo el mismo ritmo de carrera son:

NUMERO DE VUELTAS	TIEMPO (MINUTOS)
2	3
4	6
6	9
10	15
14	21

a. ¿Cuántos minutos tarda en dar 5 vueltas?. Explica la respuesta.

b. En 12 minutos cuántas vueltas ha dado?. Explica la respuesta.

c. Con solo los datos de la tabla calcule:
¿Cuánto tiempo gastaría en hacer 24 vueltas?. Explica la respuesta.

d. Escriba una expresión algebraica que relacione el número de vueltas para cualquier tiempo (t).

3. De la tabla siguiente establezca una expresión que permita calcular un valor cualquiera de la segunda columna a partir de su correspondiente valor en la primera, explica como llegaste a esa respuesta.

NÚMERO DE FOTOCOPIAS	COSTO (PESOS)
3	75
6	150
9	225
12	300
20	500

SESIÓN No.3
TEMA: PROPORCIONALIDAD
MAGNITUDES DIRECTAMENTE PROPORCIONALES

OBJETIVO

Al finalizar esta guía el estudiante estará en capacidad de distinguir magnitudes relacionadas en forma directa y deducir la función lineal que las relaciona

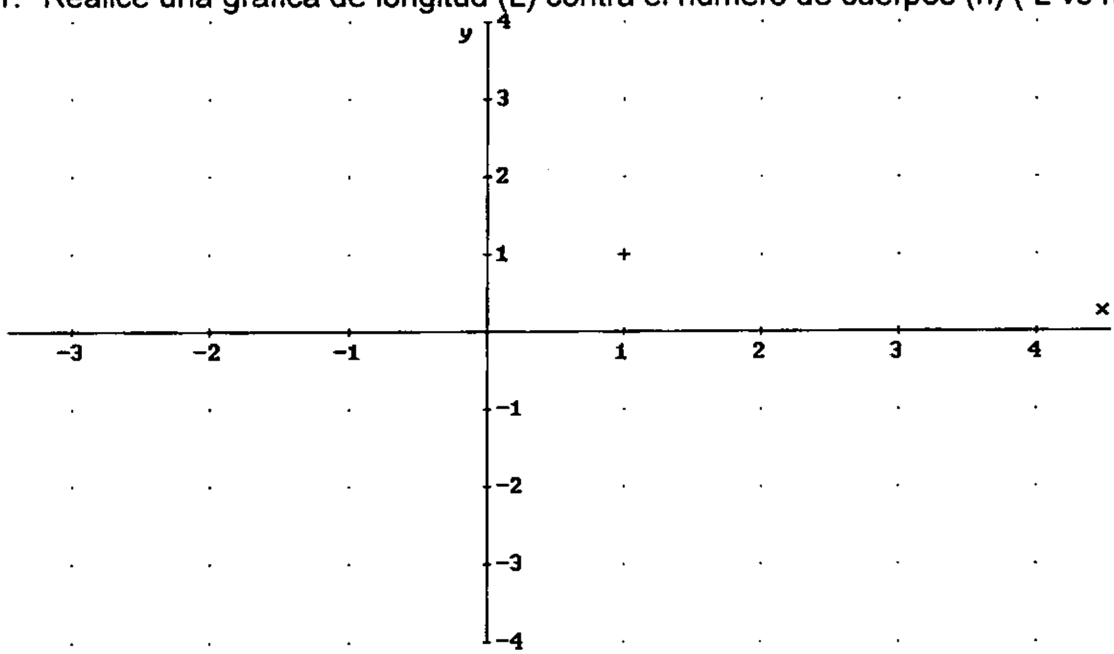
MARCO TEORICO

Observe los datos de la siguiente tabla:

Número de Cuerpos	Longitud
0	0 cm
1	2 cm
2	4 cm
3	6 cm
4	8 cm

Estos datos se han obtenido cuando un **resorte** de longitud se ha venido deformando un longitud L, cuando en el se colocan determinado número de cuerpos.

1. Realice una gráfica de longitud (L) contra el número de cuerpos (n) (L vs n).



2. Como la recta pasa por el origen y cuando al aumentar el número de cuerpos aumenta la longitud, entonces decimos que son: ***"Directamente Proporcionales*** y lo escribimos así: $L \propto n$
3. Si dos magnitudes son directamente proporcionales, ellas están ligadas por un cociente constante aquí:

$$\frac{L}{n} = K \leftarrow \text{Constante de proporcionalidad.}$$

Luego la ecuación que liga las variables es L = K n

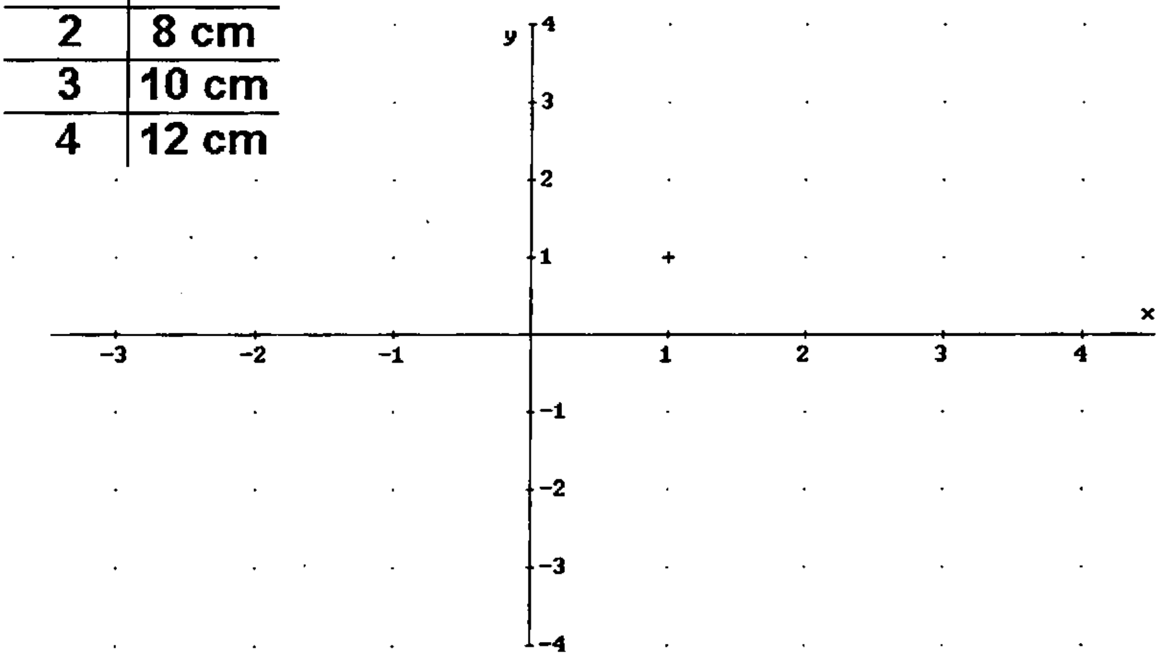
4. Hallemos la constante K, para esto completemos:

$$k = \frac{2}{1} = \_\_\_\_; k = \frac{4}{2} = \_\_\_\_; k = \frac{6}{3} = \_\_\_\_ \quad \underline{\textit{\textbf{luego k=2}}}$$

En conclusión la ecuación será **L = 2n** dado que l depende de n, podemos escribirla en notación de función lineal así: **L(n) = 2n**

Ahora bien: Suponga la tabla con los datos que se dan. Realice la gráfica

n	L
0	**4 cm**
1	**6 cm**
2	**8 cm**
3	**10 cm**
4	**12 cm**



Observe que la recta no pasa por el origen, las magnitudes no son directamente proporcionales sino de tipo lineal. Si trasladamos el eje horizontal (n) cuatro unidades de tal forma que la recta pase por el origen tendremos que

$$L - 4 \propto n$$

$$\frac{L-4}{n} = k \Rightarrow L - 4 = kn$$

Luego la ecuación seria L = kn + 4, es decir de la misma ecuación del ejemplo 1 trasladada 4 unidades en y (longitud L)

Ejercicio:

1. Suponga la tabla

Posición =S (mt)	Tiempo = t(seg)
2	0
5	1
8	2
11	3
14	4

a. Realice la gráfica de S contra t
b. Que tipo de relación hay entre las variables?
c. ¿Cuál es el punto de corte de la recta con el eje y (S)?
d. Determine la constante de proporcionalidad
e. Encuentre la ecuación que liga las variables.
f. ¿Cuál será la posición cuando han pasado 7 seg.?

Para encontrar la ecuación que relaciona el peso con la cantidad de cierto número de puntillas, un estudiante realizó la siguiente experiencia:

Tomó diferentes cantidades de puntillas y en la balanza midió la masa que les correspondía. Recogió los datos en la siguiente tabla:

# de puntillas	N (puntillas)	1	3	8	9	12	20
Masa	m(g)	1.2	3.6	9.6	10.8	14.4	24.0

Ayúdale al estudiante que hizo la experiencia y contesta las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es la variable dependiente y cuál la variable independiente?

b) ¿En qué unidades se mide la masa de las puntillas y cómo se llama esta magnitud'

c) ¿Cuál es la masa de cero puntillas?

Realiza las siguientes actividades:

a) Elabora un gráfico de la masa en función de la cantidad de puntillas. Asígnale al eje vertical la variable masa y al eje horizontal el número de puntillas.

b) Representa los valores (1, 1.2); (3, 3.6); (8, 9.6); (20, 24.0)

c) Calcula en cada pareja ordenada el cociente *m/N*. ¿Cuál es el valor de la constante de proporcionalidad?.

d) Si calculas la pendiente de la recta, ¿qué valor obtienes?

e) Calcula la pendiente de la recta y compara este valor con la constante de proporcionalidad.

f) ¿Cuál de los siguientes valores corresponde a la constante de proporcionalidad o a la pendiente de la recta?

   1.2 *gramos/puntilla*

   0.87 *gramos/puntilla*

   1 *gramos/puntilla*

   0.5 *gramos/puntilla*

g) Escribe la ecuación o ley que relaciona la masa en función del número de puntillas.

h) Utiliza esta ecuación para encontrar la masa de 13,15 y 17 puntillas.

10-02

Nombre: Adriana Aguilera

TALLER

Para encontrar la ecuación que relaciona el peso con la cantidad de cierto número de pastillas, un estudiante realiza la siguiente expresión:
Toma diferentes cantidades de pastillas y en la balanza midió la masa que le correspondía. Recogió los datos en la siguiente tabla:

N # de pastillas	N# (pastillas)	1	2	8	9	12	20
Masa	M (g)	12	36	96	10,8	144	240

Ayúdale al estudiante que hizo la experiencia y contesta las siguientes preguntas:

1- Cual es la variable dependiente y cual es la variable independiente

2- En que unidades se mide la masa de las pastillas y como se llama esta magnitud.

3- Cual es la masa de 0 pastillas.

* Realize las siguientes actividades

A. Elabora un grafico de la masa en función de la cantidad de pastillas. Como la masa depende de la contidad de pastillas que se van a pasar en la balanza, asignale al eje vertical la variable masa y al eje horizontal el de pastillas. Divide el eje convenientemente, asignandole un segmento apropiado en cada unidad puede ser N.5 en cada caso.

B. Representa (1,12), (3,36), (8,96), (20,240)

C- observa que todos los puntos se encuentran a lo largo de una linea recta que pasan por el origen. P= (0,0) por lo tanto, los magnitudes son directamente proporcionales, calcula cada pareja ordenada, el cociente M/n ¿cual es el valor de la constante de proporcionalidad.

D- Si calculas la pendiente de la recta, que valor obtienes?

E- Calcula la pendiente de la recta y compara este valor con la constante de proporcionalidad.

F- Cual de los siguientes valores corresponde a la constante de proporcionalidad o al pendiente de la recta.

* 1.2 Gramos / puntillas
* 1. Gramos / puntillas
* 0.87 gramos / puntillas
* 0.5 Gramos / puntillas

La ecuación que expresa la ley que relaciona la masa en función del numero de puntillas $m = 1.2 \frac{Gramos}{puntillas}$

* N donde la pendiente de la recta es 1.2 Gramos / puntillas

6- Utiliza esta ecuación para encontrar la masa y 13, 15 y 17 puntillas.

SOLUCIÓN

1- La variable dependiente es la => masa
* la variable independiente la cantidad de puntillas

2- La masa de las puntillas se mide en gramos, ~~equivalente a 10 decigramos, 100 centigramos o 1000 milligramos.~~

3- La masa de 0 puntillas es 0 gramos, puesto que una sola puntilla pesa 1,2 g, o nada.

A: RTA -> 1,2 ÷ 1 = 1,2

B = RTA

C = RTA

1,2 ÷ 1 = 1,2; 3,6 ÷ 3 = 1,2; 9,6 ÷ 8 = 1,2; 10,8 ÷ 9 = 1,2; 14,4 ÷ 12 = 1,2; 240 ÷ 20 = 1,2;

E = RTA

$\frac{m}{n} \to \frac{1,2}{1} = 1,2 \to$ pendiente.

$\rightarrow \frac{1,2}{1} = 1,2 \rightarrow$ valor de la constante de proporcionalidad.

= RTA $\rightarrow$ 1,2 gramos
puntilla

= RTA $\rightarrow$ $m = 1,2$ gramos x n
puntillas

$1,2 \cdot 13 = 15,6$; $m = \frac{15,6}{13} = 1,2$

* $1,2 \cdot 15 = 18$ $m = \frac{18}{15} = 1,2$

* $1,2 \cdot 17 = 20,4$ $m = \frac{20,4}{17} = 1,2$

CALENTANDO MOTORES ACERCA DE FUNCIONES LINEALES Y AFÍNES

1) El precio de la tarifa de los taxis ha subido un 12%, como el taxímetro no ha sido aún actualizado, el taxista debe subir, cada vez, el importe en un 12 %.

a) Completa la tabla usando reglas de tres:

TAXIMETRO	NUEVO IMPORTE
725 PESETAS.	
550 PESETAS.	
720 PESETAS.	
....	

b) El taxista se cansa de tanta regla de tres, y como sabe de funciones, llama x a la cantidad que marca el taxímetro y calcula:

TAXIMETRO	NUEVO IMPORTE
100 PESETAS.	112 PESETAS.
X	Y

$y = {}^{112x}/_{100}$ $\qquad\qquad$ $y = 112x$

Con la formula hallada, comprueba los resultados de la tabla del principio.

2) A simple vista parece que al duplicar el lado de un triángulo equilátero se duplica la altura, lo que sería una situación de proporcionalidad. Comprobémoslo experimentalmente:

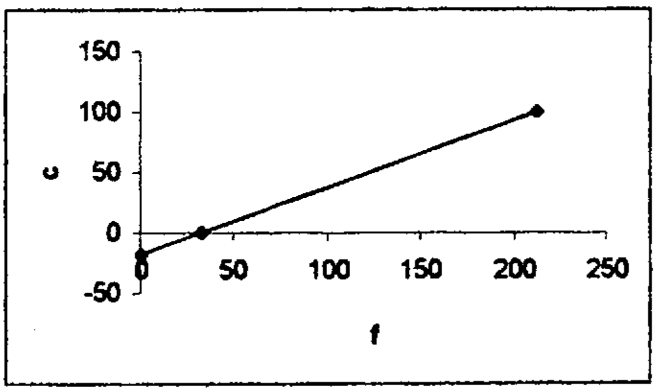
a) Dibuja varios triángulos equiláteros, completa la tabla y la gráfica (utiliza un compás).

Lado x	3	6	8	9	...
Altura y	2.6				
$^{y}/_{x}$					

b) ¿Son aproximadamente constantes los cocientes $^{y}/_{x}$?. ¿Es la gráfica una recta que pasa por el origen?. ¿Hay proporcionalidad entre base y altura?.

c) Despeja y en $^{y}/_{x} = m$, donde m es la constante que has hallado, para obtener la fórmula aproximada de la función *base →altura*.

3) La escala centígrada de temperatura (escala Celsius) está graduada de 0 a 100. La escala Fahrenheit (usada en los países anglosajones) está graduada desde 32 a 212. En ambas escalas, el extremo inferior corresponde al punto de congelación del agua, y el superior al punto de ebullición.



a) Dos puntos definen la recta. Los puntos (32,0) y (212,100) permiten conocer la fórmula que pasa grados Fahrenheit a centígrados. Calcula.
(Deberás llegar a $y = {}^{5}/_{9}x - {}^{160}/_{9}$)

b) Intervienen los negativos. Pasa de Fahrenheit a centígrados:

-45°F→	$\square$ °C	0°F→	$\square$ °C
18°F→	$\square$ °C	415°F→	$\square$ °C

c) Se inquietaría un médico Inglés al observar en un paciente la temperatura de 100° F.

d) Imagen inversa. Expresa en grados Fahrenheit:

-15°C→	$\boxed{}$	°F
0°C→	$\boxed{}$	°F
90°C→	$\boxed{}$	°F

Usa la fórmula y, después, comprueba en la gráfica

e) ¿Qué temperatura se expresa con el mismo número en °C y en °F?.

Indicación: ¿cómo tiene que ser x e y en la fórmula $y= {}^{5}/_{9}x - {}^{160}/_{9}$?

ACCION

$0F = 9/5 \cdot °C + 32$

$0F = 9/5 \cdot 5/9 + 32$

$\frac{45+32}{45} + \frac{77}{45}$

$01 \quad \boxed{(F-32) \cdot 5/9} + 32$

$-y = \frac{9}{5} \cdot X - \frac{160}{9}$

$-y = \frac{5}{9} X - \frac{160}{9}$ $\qquad C = F - 32 \cdot \frac{\cancel{100}^{5}}{\cancel{180}_{9}}$

$\frac{C}{F-32} = \frac{100°}{180°}$ $\qquad C = (F-32) \cdot 5/9$

$y = F \; 5/9 X \cdot \frac{160}{9}$

$C \cdot 180° = F - 32 \cdot 100$

$-B \; -45° F \quad (°C = \frac{5}{9} \; (\cdot 45 \; °F) - 32)$

$°C = \frac{5}{9} - 77 \quad °C = -\frac{385}{9} = °C \; -42{,}7$

$* \; 18 \; °F \quad °C = 5/9 \cdot (18 \; °F \; -32)$

$°C = \frac{5}{9} - 14 \quad °C = \frac{-70}{9} = °C = -7{,}7$
$18 °F = °C = 7{,}7$

$* \; 0 \; °F \quad °C = \frac{5}{9} \quad °C = \frac{5}{9} - 32$

$°C = -\frac{160}{9} \quad °C = 17{,}7$

pendiente

* 451 °F

$°C = \frac{9}{5}(451\ °F - 32)$

$°C = \frac{5}{9} + 419 \quad °C = \frac{2095}{9} \quad °C = 232{,}7$

C 51- ...., D - 15°C

$°F = \frac{9}{5}(C - 15°) + 32$

$°F = \frac{9}{5}(C + 17)$

$°F = \frac{153}{5} \Rightarrow °F = 30{,}6$

* 0° C

$°F = \frac{9}{5}(0\ °C) + 32 \Rightarrow °F\ \frac{9}{5} + 32$

$°F = \frac{288}{5} \Rightarrow °F\ 57{,}6$

* 90 °C

$°F = \frac{9}{5}(90\ °C) + 32$

$°F = \frac{9}{5} + 122$

$°F = \frac{1098}{5} \Rightarrow °F = 219{,}6$

$\begin{array}{r} C + 32 \\ -32 \end{array}$

$Y = \frac{5}{9} = °C$

$X = \frac{-160}{9} = °F = \frac{5}{9}(°F - 32)$

Pendiente

SESIÓN No.4
TEMA: PROPORCIONALIDAD
MAGNITUDES INVERSAMENTE PROPORCIONALES

OBJETIVO

Al finalizar esta guía el estudiante estará en capacidad de distinguir magnitudes relacionadas en forma inversa y deducir la ecuación que las relaciona

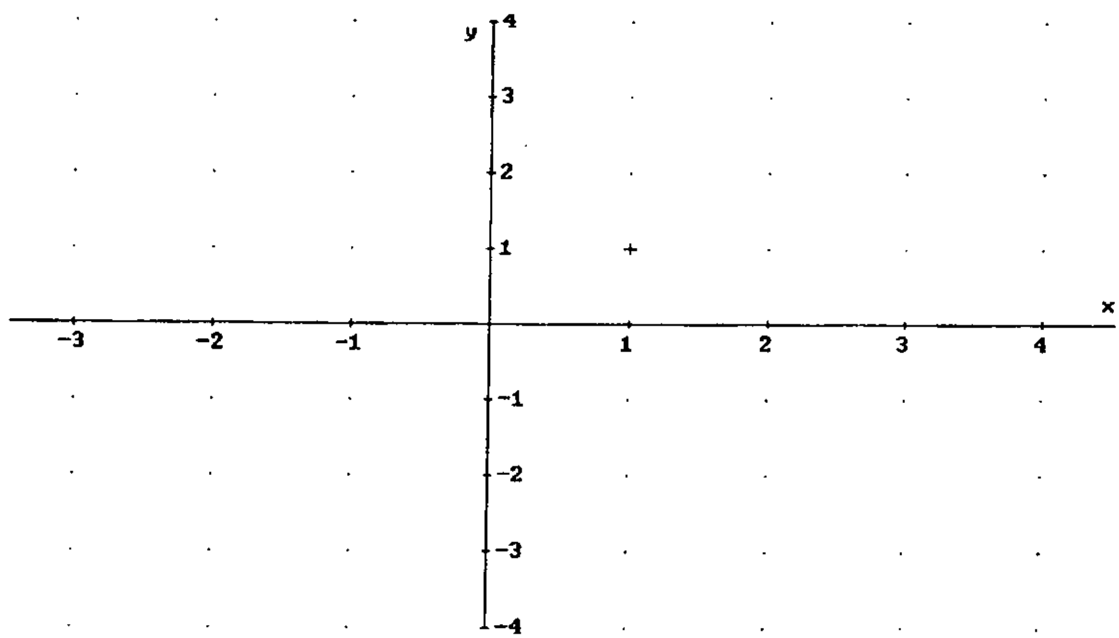
MARCO TEORICO

Observe los datos de la siguiente tabla

Velocidad (k/h)	Tiempo (h)
20	6
40	3
60	2
80	15

Estos datos se han obtenido cuando un carro ha venido cambiando la velocidad (v) a través del tiempo (t).

1. Realice la gráfica de tiempo (t) contra velocidad (v).



Luego la ecuación que liga las variables es: $t = \frac{k}{v}$

4. Hallemos la constante k para este caso:

$$k = 6 \times 20\_\_\_\_\_; k = 3 \times 40\_\_\_\_\_; \ luego \ k = 120$$

En conclusión la ecuación será: $t = \frac{120}{v}$

Ejercicio:

Se tienen cinco recipientes que contienen la misma cantidad de agua. Cada uno de ellos tienen un orificio de área determinada y diferente a los demás. Se registra el tiempo de salida del agua para cada recipiente obteniendo los siguientes datos:

Tiempo (s)	Área (cm^2)
1	24
2	12
3	8
4	6
5	4.8

1. Determine las variables dependiente e independiente.
2. Realice una gráfica.
3. Son magnitudes inversamente proporcionales? Justifique su respuesta.
4. Encuentre k.
5. Encuentre la ecuación que relaciona las variables.
6. Halle el valor del tiempo de vaciado para un recipiente que tiene un orificio de $5\ cm^2$.

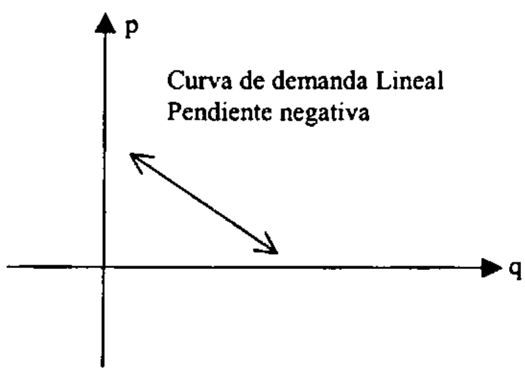
SESIÓN No.5
TEMA: ECONOMIA
DEMANDA, OFERTA Y COSTO.

OBJETIVO

Al finalizar esta guía el estudiante estará en capacidad de aplicar la función lineal en economía, para la toma de decisiones en demanda, oferta y costos de productos determinados.

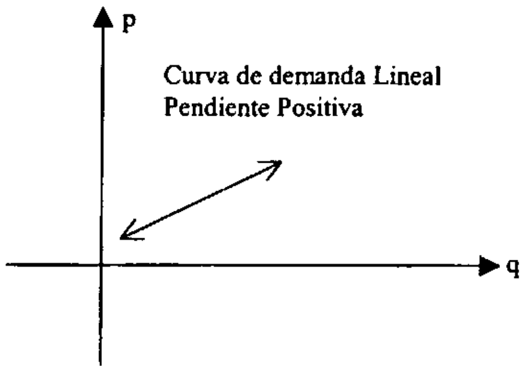
MARCO TEORICO

Para cada nivel de precios de un producto existe una cantidad correspondiente de ese producto que los consumidores demandarán (comprarán) durante algún período. Por lo común a mayor precio, la cantidad demandada es menor; cuando el precio baja la cantidad demandada aumenta. Si el precio por unidad esta dado por p y la correspondiente cantidad en unidades esta dada por q, entonces una ecuación que relaciona p y q es llamada ecuación de demanda.



La magnitud de los productos, un incremento en la cantidad de demanda corresponde una disminución en el precio. Por lo tanto una curva de demanda en general desciende de izquierda a derecha.

Como respuesta a diferentes precios, existe una cantidad correspondiente de productos que los productos están dispuestos a proveer al mercado durante algún periodo. Usualmente a mayor precio por unidad en mayor la cantidad que los productos están dispuestos a proveer; cuando el precio disminuye también lo hace la cantidad suministrada; para este caso la ecuación que relaciona p y q se llama ecuación de oferta.



Una curva de oferta por lo regular asciende de izquierda a derecha. Esto indica que un fabricante suministrará más de un producto a precios mayores.

Ejemplo1

Suponga que la demanda por semana de un producto es de 100 unidades cuando el precio es de $58 por unidad y 200 unidades si son $51 cada una. Determine la ecuación de demanda, suponiendo que es lineal.

Solución:

La pendiente de la recta que pasa por (100,58) y (200,51) es:

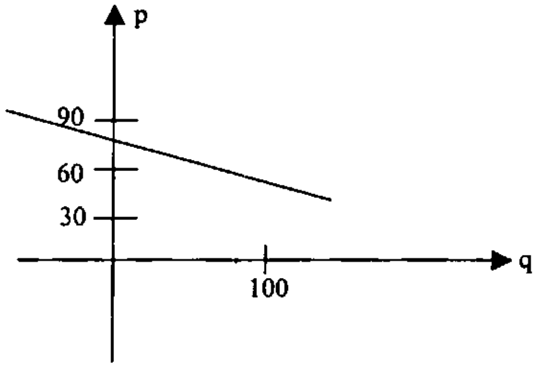
$$m = \frac{51-58}{200-100} = -\frac{7}{100}$$

Luego utilizamos la ecuación y = m (x – x) + y, donde y = p; q = x tenemos que:

$$P = m\,(q - q_1) + p, \quad \text{luego} \quad p = -\frac{7}{100}q + 65$$

$$\text{Que es lo mismo que} \quad f(q) = -\frac{7}{100}q + 65$$

Gráfica



q	p
0	65
100	58

Ejercicios:

1. Ecuación de demanda: Suponga que los clientes demandarán 40 unidades de un producto cuando el precio es de \$12 por unidad y 25 unidades cuando el precio es de \$18 cada uno: Encontrar la ecuación de demanda, suponiendo que es lineal, graficarla; Hallar el precio por unidad cuando 30 unidades se requiera.

2. Ecuación de Oferta: Suponga que un fabricante de zapatos colocará en el mercado 50 (miles de pares) cuando el precio es de \$35 (dólares por par) y 35 pares cuando cuestan \$30. Determinar la ecuación de oferta, la gráfica suponiendo que es lineal.

3. Ecuación de costo: Suponga que el costo para producir 10 unidades de un producto es de \$40 y el de 20 unidades es \$70. si el costo e está relacionado linealmente con el producto q, determine una ecuación lineal que relacione c con q. Encuentre el costo de producir 35 unidades.

Reporte de Función Cuadrática.

3. FUNCIÓN CUADRÁTICA

Se empezó con la aplicación del primer taller diseñado por Patricia Perry y Edgar Guacaneme. La metodología implementada fue la misma que se utilizó para el caso de la función lineal, es decir, primero se trabajó en grupo y luego se hizo la puesta en común y se aclararon algunas dudas e inquietudes.

Los estudiantes debían llevar resuelto el trabajo individual y empezar con las actividades programadas para el grupo, sin embargo se debió dar tiempo a aquellos estudiantes que no habían cumplido.

En la primera parte del taller los estudiantes debían construir las expresiones de dos funciones afín (que representan el largo y el ancho) y dos cuadráticas (área desperdiciada y área del papel empleado), el objetivo en esta parte era identificar la diferencia entre esas 4 funciones y caracterizarlas.

Luego de la plenaria los estudiantes debieron construir dos cajas una muy alta y otra muy baja para desarrollar la segunda parte del taller. La mitad de cada curso trabajó la versión correspondiente a la función que representa el área del papel de la caja y la otra mitad la versión B correspondiente al área desperdiciada. Los estudiantes a través de un análisis de las tablas de valores y de la situación debían encontrar el dominio y el recorrido de las 4 funciones, y en este aspecto se hizo énfasis en la plenaria.

Terminada la segunda parte del taller se propuso a los estudiantes hacer las representaciones gráficas de las 4 funciones con el fin de encontrar más elementos para caracterizar dichas funciones y también para reafirmar los aspectos que se proponían en los dos talleres aplicados. Esta parte del trabajo se realizó individualmente para que cada estudiante pudiera construir sus gráficas y entender los conceptos, luego cada uno de ellos debía escribir la mayor cantidad de características observadas. Se anexan los resultados encontrados, en los que se habla del tipo de gráfica (línea, curva), comportamiento (creciente, decreciente), dominio, recorrido, variables, etc.

COMPLEMENTACIÓN →

ALTA

5. - El area de papel disminuye hasta 99.9999
- Largo del papel disminuye hasta llegar casi a 4
- El ancho llega casi hasta 0
- El area desperdiciada aumenta hasta 99.9999

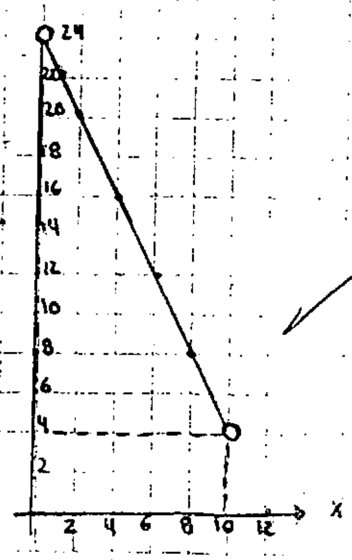
BAJA

7. - El largo aumenta hasta 23.9999
- El ancho aumenta hasta 19.9999
- El area de papel llega casi a 0
- El area desperdiciada llega a 480

TRABAJO EN CLASE →

Largo → $24 - 2x$

$f(x)\ mx + b$
$-2x + 24$



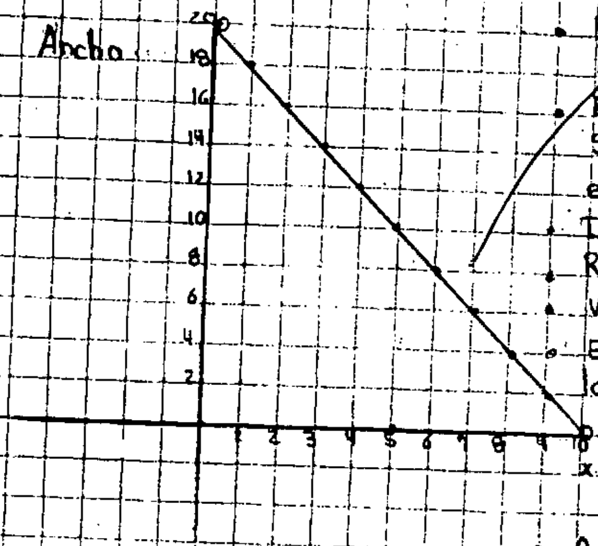
- VI = Lado Cuadrado, VD = largo de la caja
- Dominio $(0, 10)$ → intervalo abierto (x)
- Recorrido o Rango $(4, 24)$ (y)
- La función es decreciente $(\overset{+}{x}, \bar{y})$

CARACTERISTICAS →

- Es una linea recta
- Es función lineal ya que cumple la función $f(x)\ mx + b$
- Es de tipo lineal
- Su punto de corte es $(0, 24)$ y es negativa la pendiente
- No se puede utilizar el cuadrante negativo, ya que no se puede realizar una caja negativa
- la pendiente es -2
- No es directamente proporcional
- No pasa por $(0,0)$
- Es a fin
- El largo depende de la medida de la caja

Ancho →

$f(x)$ $mx+b$
$-2x+20$



CARACTERISTICAS

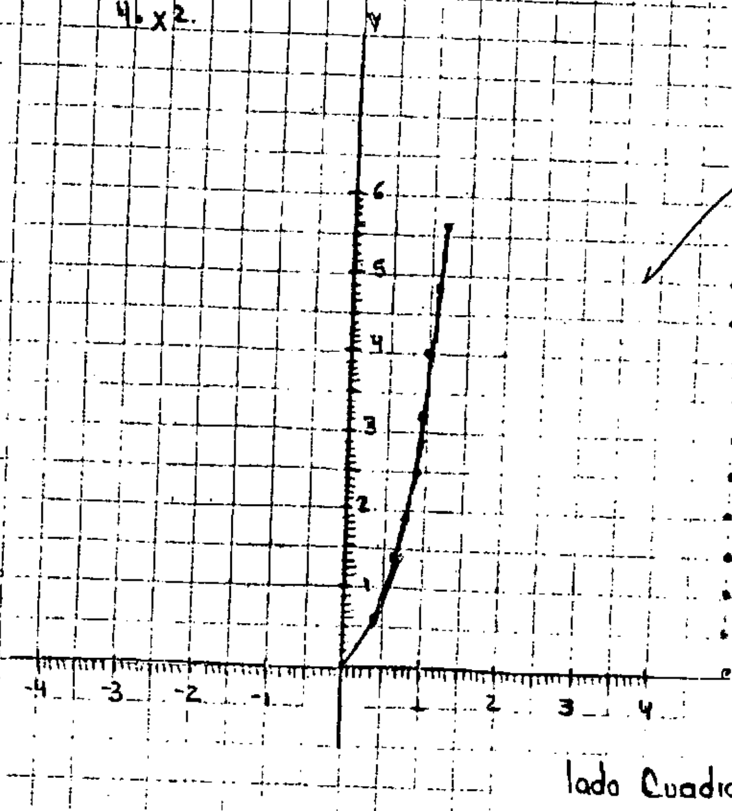
- Es una linea recta.
- Es una función lineal ya que cumple la función $f(x) mx+b$.
- Es de tipo lineal
- Su punto de corte es (0,20)
- es negativa
- Dominio (0,10)
- Recorrido (0,20)
- V.D → ancho V.I → lado al cuadrado
- El ancho esta en función del lado al cuadrado.

x lado al cuadrado

- A 20-2x } son paralelas porq
  L 24-2x } tienen la misma m

Papel desperdiciado →

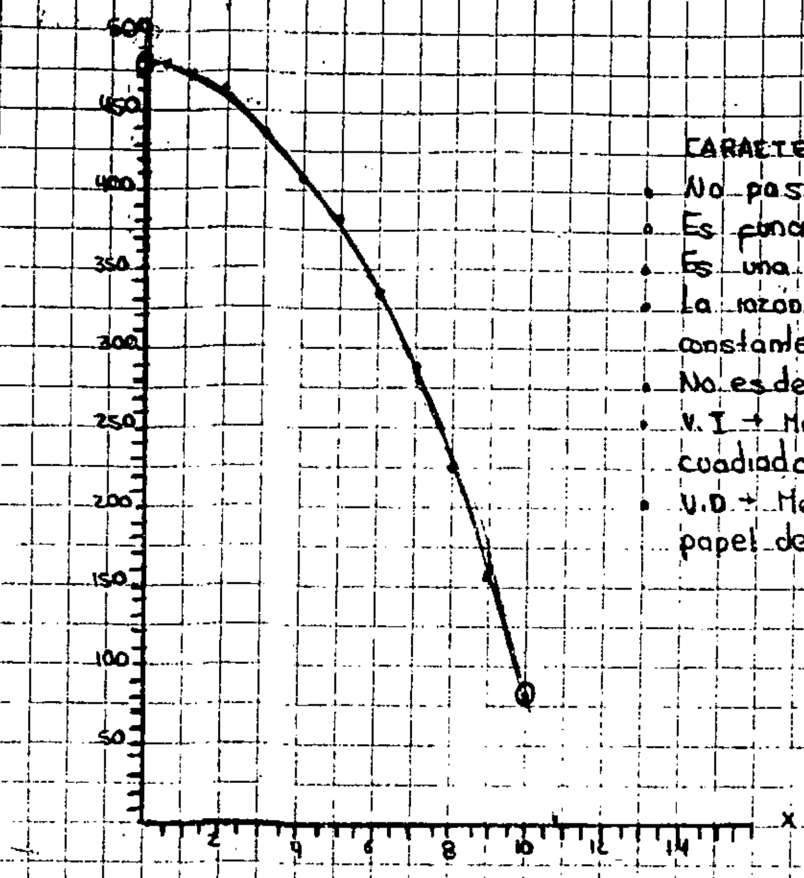
$f(x)$ $mx+b$
$4 \cdot x^2$.



CARACTERISTICAS

- No es directamente proporcional.
- Es función Cuadrática.
- Es una Curva
- La razón entre x y y no es constante
- No es función lineal
- V.D → Papel desperdiciado
- V.I → Medida al cuadrado
- No es función a fin
- Dominio (0,10)
- Rango (0, 400)
- Es de orden creciente
- No se puede utilizar cuadrante negativo.

lado Cuadrado



Lado Cuadrado

CARACTERISTICAS

- No pasa por (0,0)
- Es función Cuadratica
- Es una curva
- La razón entre ella no es constante
- No es de tipo lineal
- V.I → Medida del lado al cuadrado
- V.D → Medida del area del papel de la caja

4

4

- la función es decreciente.
- No es función a fin porque la variable x esta elevado al cuadrado y no cumple la forma $f(x)mx+b$.
- Dominio (0,10)
- Rango (80,480)
- P.C. (0,480)
- No se puede utilizar el cuadrante negativo
- No se puede utilizar em negativos.

$480 - 4x \cdot 10^2$

$480 - 4 \cdot 100$

$480 - 400$

80

DENSIDAD → Relación entre el peso y el volumen de un cuerpo

CAPACIDAD → Aptitud que poseen varios cuerpos y elementos para contener en su seno material o energia. Extensión o espacio de algún sitio.

VOLUMEN → Espacio ocupado por un cuerpo y magnitud que expresa dicho espacio en relación con una unidad escogida. Las unidades de volumen son el m3 y sus multiplos y submultiplos; el volumen de los liquidos y de algunos solidos se expresa tambien mediante unidades de capacidad (la unidad fundamentales el litro).

CARACTERISTICAS

Gráfico N° 3

- No es de tipo lineal ya que no es una recta.
- No es directamente proporcional ya que no parte del (0,0) ademas no cumple la función F(x) mx + b.
- La razón entre X y Y no es constante ya que al dividirlos el resultado no es el mismo.
- No es a Fin ya que no tiene la función F(x) mx + b.
- Es cuadrática ya que la variable independiente esta elevada al cuadrado
- No parte de (0,0) sino del (0,000004).
- Los puntos se unen en curva con una Curvígrafo.
- Dominio → Primeras componentes pertenecientes al eje x (0,10).
- Punto de Corte (,) dos puntos ; Intervalo (;) de ... a ...
- No tiene pendiente, ya que es una función cuadrática.
- Recorrido → Segundas componentes pertenecientes a y (0,400).
- La altura, es la variable independiente o lado al cuadrado
- No tiene punto de Corte.
- No se puede escribir la función F(x) mx + b.
- Su ecuación es d (x) = $4x^2$.
- El área del papel desperdiciado esta en función de la medida del lado al cuadrado.

Para poder realizar el tercer taller se pidió a los estudiantes que consultaran como hallar el volumen de una caja y que encontraran esta medida para las tres cajas construidas, esto lo debieron hacer individualmente; posteriormente desarrollaron la tercera parte del taller en la que debieron construir expresiones simbólicas para dos funciones más, una cuadrática completa (con términos *a, b, c*) que representa el área de la base de la caja y una cúbica para representar la capacidad.

En este taller se buscaba que el estudiante caracterizara estas funciones y hallara el dominio y recorrido. Un hecho importante en el taller es el uso de la calculadora como herramienta para poner a prueba las conjeturas de los grupos. También se presenta en el taller un resumen de los aspectos principales de las 6 funciones construidas para ir consolidando los conceptos. En el momento de entregar este reporte no se ha realizado la plenaria de este taller.

En la cuarta parte se asignará una de las 6 funciones a cada grupo, se busca que el estudiante realice la gráfica (solo están pendientes las dos funciones de área de la base y capacidad de la caja) y a partir de ella interpreten lo que significa un punto en la misma o fuera de ella y puedan encontrar valores del dominio o del recorrido sin tener que hacer uso de la representación simbólica.

En la quinta parte del taller se trabajaran dos versiones A y B, en las que se hará un estudio de las dos funciones afin y las cuadráticas a partir de lo numérico. Una vez finalizados estos talleres y si contamos con tiempo tenemos pensado tomar algunas actividades del libro Situaciones Problemáticas de Una Empresa Docente, con relación a funciones lineal y cuadrática.

FUNCIONES CUADRÁTICAS • PRIMER TALLER (PRIMERA PARTE)

Para la actividad siguiente se van a organizar en grupos de 4 estudiantes. Inicialmente habrá un trabajo individual, luego un trabajo en el grupo de 4 y para terminar habrá una puesta en común en la que cada grupo expondrá un resumen del trabajo que realizó.

Trabajo individual

1) Con la hoja de papel cuadriculado, de 20 cm. por 24 cm. que cada uno de ustedes trajo y siguiendo la misma estrategia que les mostré para hacer una caja sin tapa, cada uno de ustedes va a construir su propia caja. Queremos que entre todos los alumnos de este curso haya mucha variedad en los tamaños de las cajas construidas; para ello, asegúrese de que su caja sea de diferente tamaño a las construidas por sus compañeros de grupo.
2) ¿Qué medida tiene el lado del cuadrado que recortó?
3) Con el dato anterior, calcule las medidas de la caja construída. Escriba una descripción de lo que hizo.
4) Mida el largo, el ancho y la altura de su caja. ¿Coinciden dichas medidas con los datos calculados en el punto anterior?
5) ¿Qué cantidad (área) de papel se desperdició al construir la caja de la manera como se hizo? Describa por escrito cómo llegó a su respuesta.
6) ¿Qué cantidad (área) de papel tiene la caja? Explique cómo llegó a su respuesta.

Trabajo en los grupos de 4

1) En la siguiente tabla registren los datos correspondientes a la caja de cada uno de los cuatro integrantes del grupo.

Nombre del estudiante	altura de la caja	largo de la caja	ancho de la caja	área del papel desperdiciado	área del papel de la caja

2) Cada uno de los integrantes del grupo debe explicar oralmente a sus compañeros cómo calculó las medidas de su caja registradas en las últimas cuatro columnas de la tabla. Para cada una de las medidas incluidas en la tabla, escriban qué similitudes y diferencias encontraron en los procedimientos expuestos.
3) Describan cómo podrían calcular los datos correspondientes a las últimas cuatro columnas de la tabla para la caja de cualquiera de los alumnos de otro grupo.
4) Si x representa la medida del lado de cualquier cuadrado recortado en cualquiera de las cajas construídas y l representa la medida del largo de la caja, escriban una ecuación que les permita calcular l a partir de x.

5) Si x representa la medida del lado de cualquier cuadrado recortado en cualquiera de las cajas construídas y a representa la medida del ancho de la caja, escriban una ecuación que les permita calcular a a partir de x.

6) Si x representa la medida del lado de cualquier cuadrado recortado en cualquiera de las cajas construídas y d representa el área del papel desperdiciado, escriban una ecuación que les permita calcular d a partir de x.

7) Si x representa la medida del lado de cualquier cuadrado recortado en cualquiera de las cajas construídas y u representa el área del papel que tiene la caja, escriban una ecuación que les permita calcular u a partir de x.

8) Pidan a otro grupo la tabla que registra los datos de sus cajas. Con estos datos, pongan a prueba las cuatro ecuaciones que establecieron anteriormente. Es decir, usen las medidas de los cuadrados recortados para calcular l, a, d, u y comparen los resultados obtenidos con los datos de la tabla. Reporten por escrito el resultado de la prueba, ilustrando algunos de los cálculos realizados.

9) Determinen si el siguiente enunciado es falso o verdadero y expliquen su respuesta. Entre las cuatro ecuaciones que quedaron determinadas en los puntos 4 a 7, hay algunas que representan funciones afines y otras no.

10) Con base en sus respuestas a los puntos 6 y 7, describan las ecuaciones que representan el área del papel desperdiciado y el área del papel que tiene la caja.

11) Preparen una breve exposición del trabajo realizado por el grupo en la que destaquen la manera como llegaron a las ecuaciones y las ecuaciones mismas, incluso si éstas no funcionaron al ponerlas a prueba en el punto anterior.

CONSIDERACIONES RELATIVAS AL DESARROLLO CURRICULAR DEL PRIMER TALLER (PRIMERA PARTE)

Intencionalidad

Con esta tarea se pretende propiciar una oportunidad para que los estudiantes tengan un acercamiento a lo que significa la dependencia entre variables y que esa dependencia se puede representar simbólicamente. Además, queremos que los estudiantes vean que hay situaciones de la realidad que no se describen con ecuaciones lineales.

Consideraciones metodológicas

Materiales requeridos: tres hojas de papel cuadriculado de 24 cm. por 20 cm., tijeras, cinta pegante, regla. El día anterior a la clase, se pide a los estudiantes traer esos materiales.

Estrategia: Se organizan los estudiantes en grupos de cuatro y a cada estudiante se le da una hoja con las instrucciones y las preguntas correspondientes a la tarea que se les está proponiendo (la hoja titulada "Funciones cuadráticas • Primer taller").

Para comenzar, como la idea es que cada alumno construya una caja de un modelo dado, utilizando una estrategia específica, el profesor la indicará a medida que él mismo construye una de tales cajas, a manera de ilustración para todo el curso. La estrategia para construir la caja sin tapa consiste en recortar cuadrados de las esquinas, con lo cual queda determinado el tamaño de la caja; luego hacer los correspondientes cuatro dobleces; y, finalmente hacer las uniones con cinta pegante. Se quiere que el profesor haga delante de sus alumnos todo el proceso que se espera que ellos hagan para construir la caja. Así, pues, en la ilustración del proceso —dado que el profesor trabajará con una hoja en blanco— tendrá que dar cuenta de, por ejemplo, (a) la elección de un valor para la medida de los cuadrados que va a recortar; (b) el trazado de las líneas guías para saber por dónde recortar; (c) la forma de armar la caja. Se recomendará a los estudiantes no botar los pedazos de papel que se han recortado; la razón para esto es que los estudiantes se puedan valer de ese material concreto en el caso de que hayan olvidado la fórmula del área de un cuadrado.

Puesto que no se pretende que la construcción de la caja distraiga en demasía la atención de los estudiantes, se restringirá la estrategia a utilizar a una específica (la que el profesor muestre) y además, se les pedirá trabajar en papel cuadriculado, de las medidas indicadas.

Se espera que entre todos los alumnos del curso se tengan construidas cajas de diversos tamaños —para lo cual se dará una instrucción que apunte a este hecho— que permitan ver que la altura de la caja es una variable de la que dependen las otras dos dimensiones de la caja y en consecuencia, de dicha variable también dependen las variables sobre las que se enfocarán esta tarea y la siguiente: el área del papel que se desecha al hacer los recortes en las esquinas, y el área del papel que tiene la caja.

Una vez cada alumno haya construido su caja y haya respondido a ciertas preguntas relativas a ella, habrá un trabajo en el grupo de 4. Se espera que teniendo más información (la de los compañeros) y teniendo que enfocar la atención sobre semejanzas y diferencias en los procedimientos personales, los estudiantes puedan describir verbalmente la generalidad y luego haya espacio para que hagan conjeturas (representadas simbólicamente) que podrán poner a prueba en otros casos específicos para los cuales tienen la información obtenida por alumnos de otros grupos.

Si en la exposición de los grupos de 4 no salió sino una forma de expresar simbólicamente la cantidad de papel de la caja, sugerimos hacer preguntas para promover que se explicite otra forma y podría aprovecharse la oportunidad para verificar la equivalencia matemática entre las dos expresiones (sin embargo, vale la pena darse cuenta de que desde el punto de vista del aprendizaje y de la enseñanza esas dos expresiones no son equivalentes). Es importante que cada profesor, planee cómo va a cerrar la puesta en común surgida a través de las exposiciones; para ello conviene tener en cuenta la intencionalidad de la actividad con el fin de destacar en las conclusiones los puntos que se querían destacar.

A propósito de la implementación del primer taller

Documento de trabajo • 8 de agosto de 2000

En este documento se describen someramente aspectos relativos a la implementación de la primera parte del primer taller diseñado para la enseñanza del tópico funciones cuadráticas y a las respuestas de los estudiantes. Para lograr este registro, en la reunión del 28 de julio se abrió un espacio para que los profesores[1] comentaran detalles de lo sucedido en sus clases, se hizo una grabación en audio y la correspondiente transcripción. Aquí se presenta un resumen de los detalles mencionados que considero más relevantes y en algunos casos presento citas textuales con el fin de explicar o sustentar las afirmaciones.

Aspectos generales

Hasta el momento en que fue hecho el registro, en la mayoría de los casos se había llevado a cabo una sesión de dos horas de clase, y los profesores estuvieron de acuerdo en que se necesitarían dos sesiones más para completar el desarrollo del taller: una, para completar el trabajo en grupo y la otra para hacer la plenaria.

Siguiendo lo acordado como parte del diseño, los profesores hicieron ante sus estudiantes una demostración de cómo querían que se construyeran las cajas y les dejaron como tarea para la casa construir sendas cajas; algunos profesores también pidieron responder las preguntas del trabajo individual. En la mayoría de los casos, los alumnos trajeron a la siguiente clase una caja construida según las instrucciones dadas; sin embargo sólo unos pocos estudiantes desarrollaron el trabajo individual como tarea extraclase, así que en todos los casos hubo que dejar un tiempo de la primera sesión de clase para que los estudiantes respondieran las preguntas del trabajo individual.

En términos generales, no hay alusión explícita a cómo sucedió el trabajo individual. En particular, no se sabe si hubo o no interacción entre los estudiantes y entre los estudiantes y el profesor; y si la hubo, de qué tipo fue (e.g., preguntas, comentarios) y en qué se centró (e.g., revisar si el trabajo estaba completo, si las respuestas eran correctas, si había justificaciones y explicaciones). Dos de los cuatro profesores dieron detalles de algunas respuestas dadas por los alumnos al trabajo individual, sin embargo, no se sabe cómo llegaron a tener esa información, si fue a través de la observación directa mientras los estudiantes estaban trabajando o si fue a través de la observación de las respuestas escritas de los estudiantes. Con respecto a la observación vale la pena destacar que dos profesoras de diferentes colegios intercambiaron visitas a sus clases y que cada una observó la clase de la otra; además, habían establecido previamente los aspectos que querían observar.

En lo que toca con el trabajo en grupo, parece ser que en todos los casos el profesor se acercó a los diferentes grupos ya fuera porque lo solicitaba el grupo o porque él decidía acercarse, y en la clase de tres profesores predominó una interacción manejada por el profesor a través de preguntas más o menos directas y casi siempre encaminadas a lograr que los estudiantes llegaran a la respuesta correcta. Así lo evidencian los siguientes comentarios textuales de dos profesores:

1. El registro incluye comentarios de la implementación del taller en el aula de cuatro profesores.

Universidad de los Andes
Apartado Aéreo 4976
Bogotá - Colombia
Teléfonos: 3 52 04 66 - 3 39 49 49 Ext. 2717
Fax: 3 52 04 66 Ext. 2709

> *[...] uno de ellos decía que cuando la altura es 7 entonces el área desperdiciada es 28 porque como 7 es la medida del cuadrado y como hay 4 cuadrados, es 28. Al preguntarles cuál es el área de un cuadrado dijeron que 7 × 7 , 49, y al preguntarles que si eso correspondía con lo que habían dicho anteriormente, dijeron que no porque no habían multiplicado el área sino la longitud, se dieron cuenta de inmediato que estaba mal la tabla y la corrigieron. (...) Para hallar el área de la caja, fue mucha dificultad; yo creo que es que ellos no tienen claro el concepto de área; en la mayoría de grupos, a lo último me tocó fue hacerlos desbaratar la caja, que miraran otra vez la forma para ver si podían llegar al concepto, a lo que se quería. (...) Lo otro es que no tienen una justificación de por qué hacen eso; la mayoría me decía "porque es más fácil y porque ahí están las tres medidas de la caja, entonces las tengo que utilizar todas para hallar el área de la caja".*

> *Cuando se llegó al trabajo en grupo (...) entonces yo hice un cuadro grande para ir registrando también datos de diferentes grupos y cuando empezamos a ver cómo lo hacían, muchos lo hacían midiendo entonces les fui induciendo: ¿es necesario medirla?, ¿se podría averiguar sabiendo que la altura de la caja, por ejemplo, es 8.5, sin necesidad de medir, podría saber cuál es el largo de la caja? entonces, a través de esas preguntas —fue un poco difícil— mas, sin embargo, se llegó a la conclusión. (...) Entonces les dije si a mí se me da por construir una caja y se me da por calcular el área de esta cara, luego la de esta otra, etc. y sumo todo esto, ¿me dará lo mismo?*

Aspectos particulares

En el trabajo individual

Las medidas de todas las cajas construidas por los alumnos fueron números enteros. Con respecto a la pregunta 3, fue común ver que los alumnos midieran en vez de calcular, desconociendo la información que dice: "Con el dato anterior". No obstante, el hecho de que la siguiente pregunta les pida medir y confrontar los resultados obtenidos con los anteriores, pareció cumplir su cometido en el caso relatado por una de las profesoras.

> *Con respecto al punto 3, la mayoría de los grupos midieron no calcularon. Con el siguiente punto, entendieron mejor la diferencia entre medir y calcular y mejoraron la descripción de lo que habín hecho.*

En uno de los cursos, algunos estudiantes para responder la tercera pregunta se valieron de un plano que representaba la caja desarmada; no es explícito si los estudiantes recurrieron por su cuenta a esa representación o si fue sugerida por el profesor.

Hay pocos comentarios registrados con respecto a las respuestas de los alumnos a las preguntas 5 y 6. Una profesora da cuenta de que en su salón una alumna dijo haber unido los pedazos recortados y haber calculado el área de la región resultante, para calcular el área de papel desperdiciado, lo cual daría una estretegia de solución diferente a la que probablemente usó la mayoría de los estudiantes: calcular el área de un pedazo y multiplicar por 4. Para calcular el área del papel de la caja, parece que en dos de los cursos, la estrategia usada fue calcular el área de las caras y sumarla con el área de la base. En particular, no hay ninguna referencia detallada a si los estudiantes hicieron o no las descripciones pedidas en esos puntos y en caso de que las hubieran hecho, qué características presentan los textos escritos al respecto.

En el trabajo en grupos

Con respecto a la elaboración de la tabla que se plantea en la primera pregunta, es de destacar la insistencia que una de las profesoras le hizo a sus alumnos para que en cada casilla "escribieran el proceso numérico que da cuenta de cómo hallaron cada medida de su caja", estrategia que en su opinión[2] les facilitó a algunos estudiantes el establecer la generalización:

> *(...) algunos grupos ya llegaron a la generalización porque precisamente como yo les insistí mucho en este proceso, entonces llegaron fácilmente (los que llegaron).*

En relación con las preguntas 2, 3 y siguientes en las que se pide escribir una ecuación, los profesores dan información no muy detallada y en la que se confunden las respuestas a las diferentes preguntas. Por ejemplo, una profesora dice:

> *Al trabajar en grupo, la columna con relación al área desperdiciada casi todos [los estudiantes] llegaron fácilmente; aunque no decían* $4x^2$*, decían que multiplicaban por 4 después de haber hallado el área. Solamente dos grupos no llegaron; uno de ellos decía que cuando la altura es 7 entonces el área desperdiciada es 28 porque como 7 es la medida del cuadrado y como hay 4 cuadrados, es 28. Al preguntarles cuál es el área de un cuadrado dijeron que* 7×7*, 49, y al preguntarles que si eso correspondía con lo que habían dicho anteriormente, dijeron que no porque no habían multiplicado el área sino la longitud, se dijeron cuenta de inmediato que estaba mal la tabla y la corrigieron.*

Una dificultad que tuvo que enfrentar una profesora con varios de sus estudiantes es relativa al concepto de *área*. En algunos casos, quizás el problema estuvo en que no sabían de qué se les hablaba, o creían que se les pedía utilizar alguna fórmula (ya hecha) para calcularla. En otros casos, el problema estuvo en que los estudiantes entendieron que se les pedía hallar el área de una caja y eso no tenía sentido para ellos:

> *Para hallar el área de la caja fue mucha dificultad; (...) Hubo un grupo de tres chicas que me pareció muy interesante, ellas me decían que una caja no tiene área, es que tiene alto, largo y ancho y no hay ninguna fórmula [de área] que utilice las tres. Decían que uno puede hallar el área de un rectángulo, de un triángulo, de un cuadrado, pero no el área de una caja; si se utilizan el largo, el ancho y el alto se halla el volumen, pero la caja en sí no tiene área. Entonces yo les decía que ellas tenían toda la razón y que ahí nos están preguntando no el área de la caja porque no la tiene sino el área del papel, que entonces buscaran una fórmula para hallar el área del papel utilizado y ellas discutieron mucho y llegaron finalmente al resultado.*

En las consideraciones que acompañaron el diseño del taller se decía "Si en la exposición de los grupos de 4 no salió sino una forma de expresar simbólicamente la cantidad de papel de la caja, sugerimos hacer preguntas para promover que se explicite otra forma y podría aprovecharse la oportunidad para verificar la equivalencia matemática entre las dos expresiones (...)". Atendiendo a ese llamado, en la clase de una profesora tuvo lugar durante el trabajo en grupo el siguiente suceso que quiero considerar. Como en el curso la única solución que salió fue "calcular el área del rectángulo de la hoja y restar lo que se recortó", la profesora decidió preguntar de manera directa si esa forma de proceder conduciría al mismo resultado que calcular las áreas de las caras y la base y sumarlas. Aunque los alumnos estaban reacios a tener en cuenta la propuesta de la profesora porque "eso es mucho más largo" ella logró que trabajaran en torno a esa cuestión argumentando la importancia de que ellos "no coman cuento". Después de haber hecho la prueba con valores numéricos, les solicitó a los estudiantes generalizar el hecho, con lo cual abrió espacio para la manipulación de expresiones simbólicas. Al final, los estudiantes

2. Infortunadamente la profesora no explica o justifica su afirmación.

aunque vieron que los dos procedimientos conducen a expresiones equivalentes, decían "de todas maneras, es más largo [el segundo]."

Comentarios de los profesores

Con respecto al hecho de que las medidas de todas las cajas construidas por los alumnos fueron números enteros, surgieron propuestas de plantearles a los estudiantes preguntas que los induzcan a trabajar con medidas no enteras. Para decidir al respecto, vale la pena responder la pregunta: ¿Por qué y para qué interesa que en esta primera parte del taller, los estudiantes trabajen con medidas no enteras? En caso de que la decisión para la siguiente versión del taller fuera trabajar no sólo con números enteros, se podría exigir que grupos vecinos garanticen construir ocho o doce cajas de diferentes tamaños. En todo caso, es importante darse cuenta de que en la segunda y tercera parte del taller habrá espacio para trabajar con medidas no enteras para las cajas.

Los profesores estuvieron de acuerdo con la apreciación de algunos de sus alumnos con respecto a que las preguntas 2 y 3 del trabajo en grupo solicitan lo mismo.

Llevar a cabo un taller como el que está propuesto impone al profesor un trabajo arduo y requiere de más tiempo del que se podría imaginar. Al respecto una profesora afirma que:

> *Alvaro [un colega] fue a mirar la clase, y terminó ayudándome porque se necesitan dos profesores para el taller, porque todo el mundo quiere preguntar al mismo tiempo y además en el grupo en el que yo estoy haciendo la actividad son 50 estudiantes, es muy numeroso. (...) Se necesita mucho tiempo, yo pensé que no se necesitaba tanto tiempo, pero al ponerlo en práctica me doy cuenta de que es necesario disponer por lo menos de dos sesiones para el trabajo en grupo y por lo menos otra sesión de dos horas para la plenaria.*

Los estudiantes apreciaron haber tenido en su clase, la visita de un profesor que no fuera del colegio. Esto es un contraejemplo para la idea que varios profesores tenían de que la presencia de alguien extraño podía molestar a los estudiantes.

> *Los estudiantes estuvieron muy contentos de que la profesora hubiera ido a visitar la clase y me preguntaron qué había opinado del grupo, que nuevamente vaya. La visita es muy motivante para los estudiantes. Les dije que "muy juiciosos, que muy trabajadores", entonces dijo uno "No la haremos quedar mal, va a ver nuestra exposición cómo va a ser".*

Mis comentarios

El hecho de que por una parte, en algunos casos no haya habido comentarios de los profesores en relación con el trabajo individual de los estudiantes (dos de las cuatro profesoras no aludieron al trabajo individual), y por otra parte, haya habido comentarios relativos al trabajo en grupo en donde se alcanza a percibir que el profesor explicó y condujo el trabajo de los estudiantes que se esperaba que hicieran en el trabajo individual, me hace pensar que los maestros subestimaron el papel del trabajo individual dentro del taller como globalidad y que quizás no vieron con suficiente claridad que aunque en la parte de trabajo individual y la de trabajo en grupo se tocan los mismos aspectos del contenido matemático implicado, esto se hace con diferentes niveles de abstracción y de generalización, y "saltarse" aquello que estaba planteado en el nivel concreto (el de las cajas construidas por los alumnos) es estar cayendo en algo que ha sido práctica usual. Para explicar esa diferencia que puede parecer sutil vale la pena explicitar respuestas a preguntas que pueden parecer la misma; esto conecta naturalmente con el comentario de profesores y alumnos con respecto a las preguntas 2 y 3 del trabajo en grupo. (Obsérvese que la primera parte de la pregunta 2 del trabajo en grupo es una reformulación de la descripción pedida en las preguntas del trabajo individual.)

En el trabajo individual, la descripción pedida para el caso del largo de la caja podría ser algo del estilo: «como recorté cuadrados de lado 4 cm. en las esquinas, para calcular el largo de la caja tengo que restar 2 veces 4 a 24». Cuando en la segunda pregunta del trabajo en grupo se pide establecer las similitudes y diferencias encontradas en los procedimientos expuestos, esperábamos que fuera la oportunidad para que los alumnos que hubieran usado el mismo procedimiento se dieran cuenta de que para cajas diferentes todos habían hecho una sustracción donde el minuendo era 24 (semejanzas) y la cantidad restada en cada caso era diferente (diferencia) pero en todos los casos había algo común: el sustraendo era el doble del lado del cuadrado recortado (semejanza). Es decir, consideramos que responder a la pregunta 2 del trabajo en grupos exige en el nivel de lo concreto, buscar un patrón en el comportamiento de casos específicos, llegar a una generalización válida para los casos que se están tratando. La pregunta 3 pedía, sin más información que la de los casos tratados por el grupo, una generalización para calcular las medidas de cualquiera de las cajas posibles en el contexto, con lo que estábamos esperando algo del estilo «para calcular el largo de cualquier caja restamos a 24, 2 veces lo que mida el lado del cuadrado recortado». Esta afirmación, aunque es general para el contexto en el que se está trabajando, tiene un grado de concreción dado por la verbalización de la idea implicada. En cambio, lo que se espera que hagan los estudiantes como respuesta a la pregunta 4, no sólo es general en el contexto en cuestión sino que también es abstracto.

Considero que en el taller falta algo que ligue explícitamente las preguntas 2 y 3, y quizás que permita ver que lo que se pide en 3 es una invitación a hacer una conjetura a partir de los casos examinados anteriormente.

El suceso ocurrido en torno a los dos procedimientos para calcular el área del papel de la caja y la equivalencia de las dos expresiones simbólicas correspondientes me pone de manifiesto que a menos que se encuentren situaciones que verdaderamente generen interés y necesidad real en los estudiantes de explorar, comprobar, conjeturar, etc., en el mejor de los casos, ellos cumplirán con lo que se les pide pero estarán pensando en terminar rápidamente la tarea. Así que después de esta experiencia, considero que proponer a los estudiantes tareas para que vean la equivalencia de las dos expresiones por el solo de verla no tiene caso dentro del taller.

Para terminar, me planteo dos preguntas:

- En la implementación de estos talleres, ¿sería deseable dejar jugar a la interacción entre estudiantes cuando trabajan en grupos y en la plenaria, un papel protagónico, o, será más conveniente que esta interacción esté fuertemente mediada por el profesor? Si queremos tender a lo primero, ¿cómo podríamos conocer detalles de esa interacción?
- ¿Qué supuestos tácitos, creencias profundas puede tener el profesor cuando frente a lo que ve que pasa en el trabajo en grupo de sus alumnos toma la decisión de intervenir, explicar, preguntar, decir qué es lo correcto, etc.?

FUNCIONES CUADRÁTICAS • PRIMER TALLER (SEGUNDA PARTE)
VERSIÓN A

Para trabajar en la situación que se plantea a continuación van a seguir organizados en los mismos grupos que para la primera parte del taller. También ahora se quiere lograr una gran variedad de tamaños de cajas, así que asegúrese de que el tamaño de sus dos cajas sea diferente al tamaño de las cajas de sus compañeros de grupo.

Trabajo individual

1) Con la misma estrategia usada en la primera parte del taller y usando el mismo tamaño de papel (24 cm. por 20 cm.), construya una caja muy alta. Determine las tres medidas de la caja y calcule el área del papel de tal caja.

2) Con la misma estrategia usada en la primera parte del taller y usando el mismo tamaño de papel (24 cm. por 20 cm.), construya una caja muy baja. Determine las tres medidas de la caja y calcule el área del papel de tal caja.

Trabajo en grupos de 4

<u>Acerca de las cajas muy altas</u>

1) En las filas 3 a 6 de la siguiente tabla registren los datos correspondientes a las cajas muy altas que cada uno de los cuatro integrantes del grupo construyó (organicen ascendentemente los datos correspondiente a la altura de la caja).

1	Nombre del estudiante	medidas de la caja construida			área del papel de la caja
2		altura	largo	ancho	
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					

2) Juan y Mercedes, alumnos que están realizando este taller, hacen respectivamente las siguientes afirmaciones:

"en el contexto en el que estamos trabajando, la caja de mayor altura que se puede construir, así sea en la imaginación, es la que tiene altura 11.9999 cm."

"en el contexto en el que estamos trabajando, la caja de mayor altura que se puede construir, así sea en la imaginación, es la que tiene altura 9.9999 cm."

¿Cuál de los dos alumnos tiene razón? Expliquen su respuesta.

3) ¿En el grupo de ustedes se ha construido la caja de mayor altura posible? Expliquen su respuesta.

4) En las filas 7 a 10 de la tabla anterior, registren en forma ascendente la medida de la altura de cuatro cajas (de tamaños diferentes) que se puedan construir, por lo menos en la imaginación, en el contexto dado y que tengan altura mayor que las ya construidas. Calculen también las otras medidas que están implicadas en el resto de la tabla.

5) Examinen la tabla que han elaborado y describan, en términos generales, cómo varían las medidas del largo, el ancho y el área del papel de la caja cuando la medida de la altura se hace cada vez más grande, en el contexto dado.

Acerca de las cajas muy bajas

6) En las filas 3 a 6 de la siguiente tabla registren los datos correspondientes a las cajas muy bajas que cada uno de los cuatro integrantes del grupo construyó (organicen descendentemente los datos correspondiente a la altura de la caja).

1	Nombre del estudiante	medidas de la caja construida			área del papel de la caja
2		altura	largo	ancho	
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					

7) Un estudiante de un grupo dice haber construido en su imaginación una caja de altura 0.001 cm. y afirma que esa es la caja de menor altura en el contexto en el que se está trabajando. Si consideran que el estudiante tiene razón, expliquen por qué; y si consideran que el estudiante no tiene razón, construyan un argumento para convencerlo de que no tiene razón.

8) ¿En el grupo de ustedes se ha construido la caja de menor altura posible? Expliquen su respuesta.

9) En las filas 7 a 10 de la tabla anterior, registren en forma descendente la medida de la altura de cuatro cajas (de tamaños diferentes) que se puedan construir, por lo menos en la imaginación, en el contexto dado y que tengan altura menor que las ya construidas. Calculen también las otras medidas que están implicadas en el resto de la tabla.

10) Examinen la tabla que han elaborado y describan, en términos generales, cómo varían las medidas del largo, el ancho y el área del papel de la caja cuando la medida de la altura se hace cada vez más pequeña, en el contexto dado.

Acerca de cualquier caja

11) Den dos valores (los llamaremos e y q) muy próximos entre sí, que sean las medidas de la altura de dos cajas en el contexto en el que se está trabajando. Para las dos cajas que quedan así determinadas, calculen las medidas del largo, el ancho y el área del papel. ¿Se podría construir una caja que tuviera altura w entre e y q? Den un valor para w. Hagan algún tipo de estimativo (no se les pide que hagan cálculos) para la medida del largo y el ancho de la caja de altura w y para el área del papel de tal caja.

12) Con respecto al punto anterior, ¿el valor que dieron a w es el único posible? Expliquen su respuesta.

13) En el contexto en el que estamos trabajando, ¿habría dos cajas de alturas diferentes entre las cuales no se pudiera encontrar una tercera caja de altura intermedia? Expliquen su respuesta.

14) Expresen el conjunto que representa todos los valores que podría tomar la medida del lado del cuadrado recortado para construir cualquier caja en este contexto.

15) Expresen el conjunto que representa todos los valores que podría tomar la medida del largo de cualquier caja construida en este contexto.

16) Expresen el conjunto que representa todos los valores que podría tomar la medida del ancho de cualquier caja construida en este contexto.

17) Expresen el conjunto que representa todos los valores que podría tomar el área del papel de cualquier caja construida en este contexto.

18) Preparen una breve exposición del trabajo realizado por el grupo en la que destaquen la manera como llegaron a determinar los conjuntos de valores en las preguntas 14 a 17 y los conjuntos mismos.

FUNCIONES CUADRÁTICAS • PRIMER TALLER (SEGUNDA PARTE) VERSIÓN B

Para la situación que se plantea a continuación van a seguir organizados en los mismos grupos que para la primera parte del taller. También en este caso se quiere lograr una gran variedad de tamaños de cajas, así que asegúrese de que el tamaño de sus dos cajas sea diferente al tamaño de las cajas de sus compañeros de grupo.

Trabajo individual

1) Con la misma estrategia usada en la primera parte del taller y usando el mismo tamaño de papel (24 cm. por 20 cm.), construya una caja muy alta. Determine las tres medidas de la caja y calcule el área de papel desperdiciado.
2) Con la misma estrategia usada en la primera parte del taller y usando el mismo tamaño de papel (24 cm. por 20 cm.), construya una caja muy baja. Determine las tres medidas de la caja y calcule el área de papel desperdiciado.

Trabajo en grupos de 4

Acerca de las cajas muy altas

1) En las filas 3 a 6 de la siguiente tabla registren los datos correspondientes a las cajas de altura muy grande que cada uno de los cuatro integrantes del grupo construyó (organicen ascendentemente los datos correspondiente a la altura de la caja).

1	Nombre del estudiante	medidas de la caja construida			área del papel desperdiciado
2		altura	largo	ancho	
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					

2) Juan y Mercedes, alumnos que están realizando este taller, hacen respectivamente las siguientes afirmaciones:

   "en el contexto en el que estamos trabajando, la caja de mayor altura que se puede construir, así sea en la imaginación, es la que tiene altura 11.9999 cm."

   "en el contexto en el que estamos trabajando, la caja de mayor altura que se puede construir, así sea en la imaginación, es la que tiene altura 9.9999 cm."

¿Cuál de los dos alumnos tiene razón? Expliquen su respuesta.

3) ¿En el grupo se ha construido la caja de mayor altura posible? Expliquen su respuesta.

4) En las filas 7 a 10 de la tabla anterior, registren en forma ascendente la medida de la altura de cuatro cajas (de tamaños diferentes) que se puedan construir, por lo menos en la imaginación, en el contexto dado y que tengan altura mayor que las ya construidas. Calculen también las otras medidas que están implicadas en el resto de la tabla.

5) Examinen la tabla que han elaborado y describan, en términos generales, cómo varían las medidas del largo, el ancho y el área del papel desperdiciado cuando la medida de la altura se hace cada vez más grande, en el contexto dado.

<u>Acerca de las cajas muy bajas</u>

6) En las filas 3 a 6 de la siguiente tabla registren los datos correspondientes a las cajas de altura muy pequeña que cada uno de los cuatro integrantes del grupo construyó (organicen descendentemente los datos correspondiente a la altura de la caja).

1	Nombre del estudiante	medidas de la caja construida			área del papel desperdiciado
2		altura	largo	ancho	
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					

7) Un estudiante de un grupo dice haber construido en su imaginación una caja de altura 0.001 cm. y afirma que esa es la caja de menor altura en el contexto en el que se está trabajando. Si consideran que el estudiante tiene razón, expliquen por qué; y si consideran que el estudiante no tiene razón, construyan un argumento para convencerlo de que no tiene razón.

8) ¿En el grupo se ha construido la caja de menor altura posible? Expliquen su respuesta.

9) En las filas 7 a 10 de la tabla anterior, registren en forma descendente la medida de la altura de cuatro cajas (de tamaños diferentes) que se puedan construir, por lo menos en la imaginación, en el contexto dado y que tengan altura menor que las ya construidas. Calculen también las otras medidas que están implicadas en el resto de la tabla.

10) Examinen la tabla que han elaborado y describan, en términos generales, cómo varían las medidas del largo, el ancho de la caja y el área del papel desperdiciado cuando la medida de la altura se hace cada vez más pequeña, en el contexto dado.

Acerca de cualquier caja

11) Den dos valores (los llamaremos e y q) muy próximos entre sí, que sean las medidas de la altura de dos cajas en el contexto en el que se está trabajando. Para las dos cajas que quedan así determinadas, calculen las medidas del largo, el ancho y el área del papel desperdiciado. ¿Se podría construir una caja que tuviera altura w entre e y q? Den un valor para w. Hagan algún tipo de estimativo (no se les pide que hagan cálculos) para la medida del largo y el ancho de la caja de altura w y para el área del papel desperdiciado al construir tal caja.

12) Con respecto al punto anterior, ¿el valor que dieron a w es el único posible? Expliquen su respuesta.

13) En el contexto en el que estamos trabajando, ¿habría dos cajas de alturas diferentes entre las cuales no se pudiera encontrar una tercera caja de altura intermedia? Expliquen su respuesta.

14) Expresen el conjunto que representa todos los valores que podría tomar la medida del lado del cuadrado recortado para construir cualquier caja en este contexto.

15) Expresen el conjunto que representa todos los valores que podría tomar la medida del largo de cualquier caja construida en este contexto.

16) Expresen el conjunto que representa todos los valores que podría tomar la medida del ancho de cualquier caja construida en este contexto.

17) Expresen el conjunto que representa todos los valores que podría tomar el área del papel desperdiciado para cualquier caja construida en este contexto.

18) Preparen una breve exposición del trabajo realizado por el grupo en la que destaquen la manera como llegaron a determinar los conjuntos de valores en las preguntas 14 a 17 y los conjuntos mismos.

CONSIDERACIONES RELATIVAS AL DESARROLLO CURRICULAR DEL PRIMER TALLER (SEGUNDA PARTE)

Intencionalidad

Con esta situación se pretende que los estudiantes puedan identificar la existencia del dominio y rango para cada una de las funciones implicadas, y además las características de tales conjuntos.

Consideraciones metodológicas

Para la segunda parte del taller hemos preparado dos versiones (A y B) que difieren entre sí porque una de ellas (A) aborda la función que representa el área del papel de la caja, mientras que la otra (B) aborda la función que representa el área de papel desperdiciado. A través de las dos versiones queremos poder cubrir simultáneamente el estudio de dos funciones cuadráticas, originadas en el mismo contexto, empleando para ello menor tiempo que el que sería necesario si se hiciera como dos actividades consecutivas.

Para optimizar el tiempo de la sesión de clase, sugerimos que el trabajo individual planteado se proponga como tarea para la casa. Suponemos que el trabajo puede requerir de dos sesiones de clase (4 horas de clase) y eventualmente algo de tiempo adicional extraclase. La plenaria debería no tomar más de una sesión de clase.

En la realización del trabajo en grupo, probablemente los estudiantes tendrán varias y diversas inquietudes con respecto a las preguntas del taller. Proponemos que el papel del profesor ante tales inquietudes esté encaminado a plantear preguntas que ayuden a los estudiantes a encontrar sus propias respuestas y no a formular respuestas correctas y definitivas. Esta actitud del profesor aporta principalmente a dos cuestiones que consideramos fundamentales. Por un lado, en el debate que se genera a partir de la discusión de las diferentes ideas se hacen unas exigencias más cercanas a la forma científica de la construcción de conocimiento, que a la manera dogmática implicada en situaciones en las que lo importante es responder correctamente a las preguntas. Por otro lado, la participación del profesor a través de preguntas lo despoja de su papel de validador de la verdad; en ese caso, es posible y necesario construir la verdad entre quienes participan del debate.

En la plenaria, se sugiere que el papel del profesor sea guiar las posibles discusiones surgidas por las diferencias en las exposiciones de los grupos, o, proponer objeciones, inquietudes, preguntas, afirmaciones que puedan generar discusión entre los alumnos. De nuevo, no creemos que lo importante sea que el profesor siente cátedra.

Comentarios acerca de algunas preguntas y algunas respuestas

1) En una versión preliminar de este taller, se pedía "... construya la caja que tenga mayor/menor altura posible". Para la versión definitiva, se cambió tal enunciado por "... construya una caja muy alta/muy baja". Vimos la conveniencia de hacer el cambio porque consideramos que podía-

mos aprovechar la situación no sólo para evidenciar la inexistencia de unos casos extremos que determinan los límites del dominio de la variable independiente (altura de la caja) y el rango de variación de las variables dependientes (largo y ancho de la caja y área del papel de la caja y área del papel desperdiciado), sino también para evidenciar características generales de la variación de cada una de tales variables con respecto a la variación de la variable independiente. Es decir, con la serie de preguntas planteadas no estamos tratando de justificar solamente el por qué de los extremos del dominio y recorrido de las funciones implicadas; también estamos tratando de justificar por qué están incluidos todos los reales entre ciertos valores extremos.

2) Para la pregunta 5, la respuesta esperada es algo del estilo: cuando la medida de la altura se hace cada vez más grande (tendiendo a 10), la medida del largo de la caja se hace cada vez más pequeña tendiendo a 4 y la medida del ancho, también se hace cada vez más pequeña tendiendo a 0; el área del papel de la caja se hace cada vez más pequeña, tendiendo a 80; y el área de papel desperdiciado se hace cada vez más grande, tendiendo a 400.

3) Para la pregunta 10, la respuesta esperada es algo del estilo: cuando la medida de la altura se hace cada vez más pequeña (tendiendo a 0), la medida del largo de la caja se hace cada vez más grande tendiendo a 24 y la medida del ancho, también se hace más grande tendiendo a 20; el área del papel de la caja se hace cada vez más grande, tendiendo a 480; y el área de papel desperdiciado se hace cada vez más pequela, tendiendo a 0.

4) Hemos adoptado la convención anglosajona que emplea "punto" en vez de "coma" para la notación de números decimales; con esto queremos adoptar la misma convención que utilizan las calculadoras que se van a usar en los cursos. Sin embargo, para evitar la posible confusión en la lectura de los números (leer un decimal como entero) decidimos usar cuatro dígitos a la derecha del punto decimal cuando fue necesario.

5) En una versión del taller —preliminar a la definitiva— se había planteado el siguiente trabajo individual para realizar en la casa:
Imagine que ya no estamos trabajando en el contexto de las cajas y que en el contexto de las matemáticas no aplicadas, encuentra usted las ecuaciones $u = 480 - 4x^2$ y $l = 24 - 2x$ (versión B, $d = 4x^2$, $a = 20 - 2x$).

   a. Para cada una de tales ecuaciones, ¿hay algún valor real que no pueda asignar a la variable x? Explique su respuesta.

   b. ¿Qué tipo de valores para l se obtienen al asignarle a x los valores que es posible asignarle? Explique su respuesta.

   c. ¿Qué tipo de valores para u se pueden obtener al asignarle a x los valores que es posible asignarle? Explique su respuesta.

Como se puede ver, decidimos suprimir tal tarea al intentar responder a las siguientes inquietudes:

¿A partir del trabajo realizado por los estudiantes en el contexto específico, habrán podido construir los elementos necesarios para lograr un manejo significativo de la generalidad que implican las funciones en el contexto de los números reales?

¿La intención fundamental del aprendizaje de las matemáticas escolares está ligada al manejo de las funciones cuadráticas en el contexto de las funciones de variable real, o al desarrollo de las posibilidades de pensamiento matemático que exige y promueve el manejo de modelos matemáticos en contextos particulares con referente concreto?

Qué conocimiento pone en juego la situación planteada

El desarrollo de la segunda parte del taller exige:

- usar las ecuaciones obtenidas en la primera parte del taller ($l = 24 - 2x$, $a = 20 - 2x$, $u = 480 - x^2$, $d = 4x^2$ para calcular el largo y el ancho de la caja construida, y el área del papel de la caja (área del papel desperdiciado) para valores determinados de la altura de la caja;
- ordenar números racionales no enteros;
- operar (elevar al cuadrado, multiplicar, restar) con números racionales no enteros;
- reconocer y explicitar verbalmente regularidades en el comportamiento de conjuntos ordenados de datos;
- hacer estimativos con base en las regularidades que se han reconocido;
- usar una noción de densidad de los racionales;
- usar una noción de límite de una función cuando la variable independiente tiende a un cierto valor;
- usar tablas para registrar datos correspondientes a casos particulares;
- establecer generalidades a partir del examen de varios casos particulares y de la consideración, en términos abstractos, del asunto.

TALLER SOBRE FUNCIONES CUADRÁTICAS (TERCERA PARTE)

En el contexto en el que estamos trabajando hay otras dos funciones que queremos estudiar en este taller, ellas son: la función ***área de la base de la caja*** y la función ***capacidad de la caja.***

Trabajo individual

1) **Para las tres cajas que construyó en la primera y segunda parte del taller, calcule la medida del área de la base y la medida de la capacidad. Explique *cómo* calculó cada uno de los valores. En la tabla escriba, en cada caso, los procedimientos aritméticos *realizados* y su resultado.**

altura	área de la base de la caja	capacidad de la caja

Trabajo en grupos de 4

1) Reunan los datos de las tablas individuales en la siguiente tabla. Atendiendo a la altura, ordénenlos ascendentemente. Describan algunas *características* de los datos registrados en cada una de las columnas de la tabla, para ello consideren, por ejemplo, si los datos están ordenados, el tipo de orden de los datos, en qué lugar de la columna se ubica el menor o el mayor de los datos y hacia qué valores se tiende en los *extremos* de las columnas.

altura	área de la base de la caja	capacidad de la caja

2) Teniendo en cuenta el(los) procedimiento(s) usado(s) para calcular la medida del área de la base y la medida de la capacidad de la caja en los casos particulares, escriban ecuaciones que sirvan

para calcular las medidas del área de la base y de la capacidad de cualquier caja en términos de la medida de la altura de la caja. Representen con x la altura de la caja, con b la medida del área de la base de la caja, y, con c la medida de la capacidad de la caja.

3) Para una caja cuya altura es 3.63 cm., la medida del área de la base es 213 27 cm^2 y la capacidad es 774.16 cm^3. ¿Las ecuaciones que ustedes dieron en el ítem anterior corroboran esos valores?

4) Examinen la tabla elaborada en el punto 2 y la de otros grupos para hacer una conjetura acerca de cuáles son todos los valores que puede tomar la medida del área de la base. Usen la calculadora para verificar si su conjetura parece ser razonable. Describan por escrito los procesos utilizados. Expresen el conjunto que representa todos los valores que podría tomar la medida del área de la base de cualquier caja construida en este contexto.

5) Examinen las tablas de sus compañeros de grupo y de otros grupos para hacer una conjetura acerca de cuáles son todos los valores que puede tomar la medida de la capacidad. Usen la calculadora para verificar si su conjetura parece ser razonable. Describan por escrito los procesos utilizados (seguramente será necesario modificar las opciones TblStart y ΔTbl de TBLSET de manera que pueda tomar valores de x cada vez más juntos entre sí y más cercanos al valor que corresponde a la mayor capacidad). Expresen el conjunto que representa todos los valores que podría tomar la medida de la capacidad de cualquier caja construida en este contexto.

6) Con base en los resultados encontrados en los talleres anteriores y en éste completen la siguiente tabla. En la columna titulada "Expresión" utilicen la notación que se emplea para las funciones, en la que se expresa el hecho de que hay una variable de la que depende la función.

Nombre de la función	Expresión	Posibles valores de la función (todos)
largo de la caja		
ancho de la caja	$f_2(x) = a = -2x + 20$	
área del papel desperdiciado		(0, 400)
área del papel de la caja		
área de la base		
capacidad de la caja		

7) Preparen una breve exposición del trabajo realizado por el grupo en la que destaquen las ecuaciones encontradas para calcular la medida del área de la base y de la capacidad de cualquier caja construida en el contexto, y la forma como llegaron a ellas. También deben hablar de la forma como llegaron a determinar los conjuntos de valores que pueden tomar la medida del área de la base y la medida de la capacidad de cualquier caja, y expresar cuáles son esos conjuntos.

CONSIDERACIONES RELATIVAS AL DESARROLLO CURRICULAR DEL PRIMER TALLER (TERCERA PARTE)

Intencionalidad

Este taller pretende introducir dos funciones que enriquecen las posibilidades de análisis y contrastación del tipo de variación exhibido por funciones descritas por diversos tipos de polinomios. Este enriquecimiento se expresa fundamentalmente en:

- ▲ la existencia de una expresión simbólica que involucra un polinomio de segundo grado con sus tres coeficientes reales diferentes de cero,
- ▲ la existencia de una función cuadrática decreciente (con coeficiente principal positivo) en el dominio significativo en el contexto de trabajo,
- ▲ la existencia de una función cuya expresión simbólica es un polinomio de grado tres,
- ▲ la existencia de una función que no es monótonamente creciente o decreciente en el dominio significativo en el contexto de trabajo,
- ▲ la existencia de rango no definido por los valores correspondientes a los extremos del dominio de variación en el contexto,
- ▲ la existencia de una variación no lineal que no es del tipo cuadrático.

Para estas dos funciones se pretende inferir y representar su expresión simbólica correspondiente, así como identificar el rango de variación significativo.

De otra parte, el taller puede asumirse simultáneamente como una actividad que permita visualizar y, en cierto sentido, evaluar el desempeño de los estudiantes frente a la identificación de un patrón procedimental en las operaciones aritméticas implicadas en el cálculo de algunas medidas, frente a la identificación de una expresión algebraica que dé cuenta de dicho patrón, y frente a la identificación del comportamiento de datos numéricos y su consecuente determinación de conjuntos o intervalos numéricos.

Consideraciones acerca de algunas preguntas y respuestas

En el ítem del trabajo individual se exige que los estudiantes escriban los procedimientos aritméticos empleados para calcular las medidas objeto de estudio. Se trata, con esto, de facilitar la identificación de los términos y las operaciones y la relación que configurarían una ecuación algebraica que represente la manera de calcular cualquier medida y la medida misma.

En el primer ítem del trabajo en grupo se propone ordenar los datos. La intención de esta instrucción no es otra que la de permitir una mejor visualización del comportamiento de las medidas del área de la base y de la capacidad de la caja. Al respecto se quiere que los estudiantes puedan identificar tanto el decrecimiento monótono de los valores de la medida del área de la base de la caja, mientras que la medida de la altura de la caja aumenta; como el crecimiento y posterior decrecimiento de la medida de la capacidad de la caja cuando la medida de la altura aumenta (o disminuye). De igual manera se quiere que los estudiantes reconozcan que el máximo valor reportado para la medida del área de la base de la caja se ubica al inicio de la columna y el mínimo al final; en tanto que para la medida de la capacidad de la caja, el valor máximo reportado muy probablemente no se ubica en los extremos de la columna. También se quiere que los estudiantes adviertan que para medidas de la altura muy pequeñas o muy grandes, los correspondientes valores para ambas funciones tienden a un cierto valor.

En el segundo ítem del trabajo en grupo se pide la escritura de ecuaciones que permitan generalizar el procedimiento aritmético. Para el caso del *área de la base de la caja* se pueden presentar dos estrategias de solución procedimental que conducirían a sendas expresiones algebraicas matemáticamente equivalentes. La primera posibilidad es el cálculo del área a partir del producto de las longitudes del largo y ancho de la caja; en este caso la expresión algebraica es $(24-2x)\,(20-2x)$. La segunda posibilidad se obtiene al restar del área del papel de la caja, el área de las cuatro caras laterales, en cuyo caso la expresión resultante podría ser la expresión siguiente o alguna "procedimentalmente equivalente"[1] $\left(480-4x^2\right)-(2\,(20-2x)\,(x)+2\,(24-2x)\,(x))$. Para el caso del volumen sólo prevemos una estrategia, el producto de las medidas del largo, ancho y altura de la caja; sin embargo, puede darse el caso que este producto se realice y se obtenga un polinomio de grado tres.

No es difícil advertir que la intención del tercer ítem es permitir un dato para corroborar la validez de las ecuaciones planteadas en el ítem inmediatamente anterior. Al respecto de este dato vale la pena mencionar que el valor de la altura seguramente no aparecerá en la tabla construida por los estudiantes, dado que éste tiene dos cifras decimales; de otra parte, el cálculo con este valor pretende, además, exigir el uso de la calculadora; finalmente, el valor dado para la altura es muy cercano al valor relativo a la máxima medida de la capacidad de la caja, o —de manera más intuitiva— a la altura de la caja más grande.

La determinación del recorrido de las funciones, objeto de estudio de los ítems (4 y 5), implica identificar tres elementos. En primer lugar, es necesario advertir el comportamiento relativo al orden de los datos de las dos columnas de resultados numéricos, respecto del comportamiento de los datos de la primer columna; este aspecto debió haber sido referenciado en el ítem 1, como característica de los datos. En segundo lugar, se debe reconocer la posible existencia de valores extremos, es decir, de tendencias hacia ciertos valores; advertimos que en sentido estricto, el valor mínimo no existe para ninguna de las dos funciones consideradas, pues el dominio de variación (significativo) de la altura es un intervalo abier-

1. Empleamos la expresión "procedimentalmente equivalente" para representar la equivalencia entre diferentes expresiones que impliquen el procedimiento de restar las medidas de las áreas de las cuatro caras laterales, cualquiera sea el orden o la configuración de esta resta. Queremos, a la vez, diferenciarla de la expresión "matemáticamente equivalentes", que implicaría la existencia de una identidad (numérica) entre expresiones algebraicas de diferente estructura. En ese sentido las expresiones $\left(480-4x^2\right)-(2\,(20-2x)\,(x)+2\,(24-2x)\,(x))$ y $(24-2x)\,.(20-2x)$ son matemáticamente equivalentes, pero no procedimentalmente equivalentes.

to, el que se transforma a través de las funciones en un intervalo abierto que sí tiene extremos inferior (Inf), pero no mínimo. Para el caso de la función área de la base, tampoco existe el máximo, pero sí el extremo superior (Sup). Mientras que para la función capacidad, existe el máximo, pero la determinación de su valor, aun con ayuda de la calculadora sólo es aproximado. En tercer lugar, se debe reconocer la continuidad de la variación, hecho que puede ser algo intuitivo y no explícito.

TALLER SOBRE FUNCIONES CUADRÁTICAS (CUARTA PARTE)

En los talleres anteriores hemos comenzado el estudio de seis funciones que dependen de la altura de la caja, a saber: largo de la caja, ancho de la caja, área del papel desperdiciado, área del papel de la caja, área de la base de la caja, capacidad de la caja. Para tales funciones hemos encontrado una representación simbólica y el conjunto de valores de cada función, sabiendo que la altura de cualquier caja es un valor entre 0 y 10. A continuación presentamos una tabla de resumen de estos datos:

Nombre de la función	Expresión simbólica	Posibles valores de la función (todos)
largo de la caja	$f_1(x) = l = -2x + 24$	(4, 24)
ancho de la caja	$f_2(x) = a = -2x + 20$	(0, 20)
área del papel desperdiciado	$f_3(x) = d = 4x^{2}$	(0, 400)
área del papel de la caja	$f_4(x) = u = -4x^2 + 480$	(80, 480)
área de la base	$f_5(x) = b = 4x^2 - 88x + 480$	(0, 480)
capacidad de la caja	$f_6(x) = c = 4x^3 - 88x^2 + 480x$	(0, 774.1646...)

Trabajo en grupo

1) Para la función asignada al grupo, construyan una tabla de valores, donde TblStart = 0 y Δ Tbl = 0.5; y el valor máximo de x sea 10.

2) En medio pliego de papel periódico, elaboren una gráfica cartesiana de la función asignada. Tengan en cuenta que en el contexto, el valor de la altura pertenece a (0, 10) y que tal intervalo no incluye los extremos; además, asuman que en la gráfica el eje horizontal representa los valores de la altura de la caja. A la vez que vayan haciendo la gráfica, recojan información que les permita preparar la exposición que se reporta en el ítem 4.

3) Respondan las preguntas relativas a la función para la que hayan hecho la gráfica.

<u>Función largo</u>

a. En los ejes marquen con color los posibles valores de la altura y de la función que tienen asignada.

b. El punto de coordenadas (3.25, 17.5) pertenece a la gráfica de la función. ¿Qué significa cada una de las dos coordenadas cartesianas del punto?

c. Determinen cuáles de los siguientes puntos expresados a través de sus coordenadas cartesianas pertenecen a la gráfica de la función: (11, 2); (6, 14); (14, -4). Expliquen sus respuestas.

d. Señalen un punto en el eje X, que represente la altura de una caja posible en el contexto. Sin realizar cálculos, determinen para dicho punto el correspondiente punto en el eje $f_1(X)$, que representa el largo de tal caja.

e. Señalen un punto en el eje $f_1(X)$, que represente el largo de una caja posible en el contexto. Sin realizar cálculos, determinen para dicho punto el correspondiente punto en el eje X, que representa la altura de tal caja.

f. Un grupo de estudiantes del curso afirma que es posible construir dos cajas de diferente largo que tengan la misma altura. Discutan si tal afirmación es verdadera o falsa; justifiquen su respuesta valiéndose de la tabla, la gráfica, o, la expresión simbólica correspondientes.

g. ¿Es válido afirmar que "de dos cajas de diferente altura, es más larga la más alta"? Utilicen la gráfica para argumentar su respuesta.

Función ancho

a. En los ejes marquen con color los posibles valores de la altura y de la función que tienen asignada.

b. El punto de coordenadas (3.25, 13.5) pertenece a la gráfica de la función. ¿Qué significa cada una de las dos coordenadas cartesianas del punto?

c. Determinen cuáles de los siguientes puntos expresados a través de sus coordenadas cartesianas pertenecen a la gráfica de la función: (11, -2); (6, 10). Expliquen sus respuestas.

d. Señalen un punto en el eje X, que represente la altura de una caja posible en el contexto. Sin realizar cálculos, determinen para dicho punto el correspondiente punto en el eje $f_2(X)$, que representa el ancho de tal caja.

e. Señalen un punto en el eje $f_2(X)$, que represente el ancho de una caja posible en el contexto. Sin realizar cálculos, determinen para dicho punto el correspondiente punto en el eje X, que representa la altura de tal caja.

f. Un grupo de estudiantes del curso afirma que es posible construir dos cajas de diferente ancho que tengan la misma altura. Discutan si tal afirmación es verdadera o falsa; justifiquen su respuesta valiéndose de la tabla, la gráfica, o, la expresión simbólica correspondientes.

g. ¿Es válido afirmar que "de dos cajas de diferente altura, es menos ancha la más alta"? Utilicen la gráfica para argumentar su respuesta.

Función área del papel desperdiciado

a. En los ejes marquen con color los posibles valores de la altura y de la función que tienen asignada.

b. El punto de coordenadas (3.25, 42.25) pertenece a la gráfica de la función. ¿Qué significa cada una de las dos coordenadas cartesianas del punto?

c. Determinen cuáles de los siguientes puntos expresados a través de sus coordenadas cartesianas pertenecen a la gráfica de la función: (11, 484); (6, 140). Expliquen sus respuestas.

d. Señalen un punto en el eje X, que represente la altura de una caja posible en el contexto. Sin realizar cálculos, determinen para dicho punto el correspondiente punto en el eje $f_3(X)$, que representa el área del papel desperdiciado para construir tal caja.

e. Señalen un punto en el eje $f_3(X)$, que represente el área del papel desperdiciado para construir una caja posible en el contexto. Sin realizar cálculos, determinen para dicho punto el correspondiente punto en el eje X, que representa la altura de tal caja.

f. Un grupo de estudiantes del curso afirma que es posible construir dos cajas para las que el área del papel desperdiciado es diferente y tienen la misma altura. Discutan si tal afirmación es verdadera o falsa; justifiquen su respuesta valiéndose de la tabla, la gráfica, o, la expresión simbólica correspondientes.

g. ¿Es válido afirmar que "de dos cajas de diferente altura, el área de papel desperdiciado es mayor en el caso de la caja más alta"? Utilicen la gráfica para argumentar su respuesta.

Función área del papel de la caja

a. En los ejes marquen con color los posibles valores de la altura y de la función que tienen asignada.

b. El punto de coordenadas (3.25, 437.75) pertenece a la gráfica de la función. ¿Qué significa cada una de las dos coordenadas cartesianas del punto?

c. Determinen cuáles de los siguientes puntos expresados a través de sus coordenadas cartesianas pertenecen a la gráfica de la función: (10.75, 17.75); (6, 332); (11, -4). Expliquen sus respuestas.

d. Señalen un punto en el eje X, que represente la altura de una caja posible en el contexto. Sin realizar cálculos, determinen para dicho punto el correspondiente punto en el eje $f_4(X)$, que representa el área del papel de tal caja.

e. Señalen un punto en el eje $f_4(X)$, que represente el área del papel de una caja posible en el contexto. Sin realizar cálculos, determinen para dicho punto el correspondiente punto en el eje X, que representa la altura de tal caja.

f. Un grupo de estudiantes del curso afirma que es posible construir dos cajas para las que el área del papel es diferente y tienen la misma altura. Discutan si tal afirmación es verdadera o falsa; justifiquen su respuesta valiéndose de la tabla, la gráfica, o, la expresión simbólica correspondientes.

g. ¿Es válido afirmar que "de dos cajas de diferente altura, el área del papel de la caja es menor en el caso de la caja más alta"? Utilicen la gráfica para argumentar su respuesta.

Función área de la base

a. En los ejes marquen con color los posibles valores de la altura y de la función que tienen asignada.

b. El punto de coordenadas (3.25, 236.25) pertenece a la gráfica de la función. ¿Qué significa cada una de las dos coordenadas cartesianas del punto?

c. Determinen cuáles de los siguientes puntos expresados a través de sus coordenadas cartesianas pertenecen a la gráfica de la función: (11, -4); (6, 98). Expliquen sus respuestas.

d. Señalen un punto en el eje X, que represente la altura de una caja posible en el contexto. Sin realizar cálculos, determinen para dicho punto el correspondiente punto en el eje $f_5(X)$, que representa el área de la base de tal caja.

e. Señalen un punto en el eje $f_5(X)$, que represente el área de la base de una caja posible en el contexto. Sin realizar cálculos, determinen para dicho punto el correspondiente punto en el eje X, que representa la altura de tal caja.

f. Un grupo de estudiantes del curso afirma que es posible construir dos cajas para las que el área de la base es diferente y tienen la misma altura. Discutan si tal afirmación es verdadera o falsa; justifiquen su respuesta valiéndose de la tabla, la gráfica, o, la expresión simbólica correspondientes.

g. ¿Es válido afirmar que "de dos cajas de diferente altura, la que tiene base de menor área es la más alta"? Utilicen la gráfica para argumentar su respuesta.

Función capacidad

a. En los ejes marquen con color los posibles valores de la altura y de la función que tienen asignada.

b. El punto de coordenadas (3.25, 767.8125) pertenece a la gráfica de la función. ¿Qué significa cada una de las dos coordenadas cartesianas del punto?

c. Determinen cuáles de los siguientes puntos expresados a través de sus coordenadas cartesianas pertenecen a la gráfica de la función: (11, -44); (6, 578). Expliquen sus respuestas.

d. Señalen un punto en el eje X, que represente la altura de una caja posible en el contexto. Sin realizar cálculos, determinen para dicho punto el correspondiente punto en el eje $f_6(X)$, que representa la capacidad de tal caja.

e. Señalen un punto en el eje $f_6(X)$, que represente la capacidad de una caja posible en el contexto. Sin realizar cálculos, determinen para dicho punto el(los) correspondiente(s) punto(s) en el eje X, que representa(n) la(s) altura(s) de tal caja.

f. Un grupo de estudiantes del curso afirma que es posible construir dos cajas de diferente capacidad que tengan la misma altura. Discutan si tal afirmación es verdadera o falsa; justifiquen su respuesta valiéndose de la tabla, la gráfica, o, la expresión simbólica correspondientes.

g. ¿Es válido afirmar que "de dos cajas de diferente altura, tiene volumen mayor la más alta"? Utilicen la gráfica para argumentar su respuesta.

4) Preparen una exposición en la que den información acerca de:

- cómo eligieron la escala sobre ambos ejes, el horizontal y el vertical;
- cómo asociaron un par de valores correspondientes de la tabla con un punto de la gráfica;
- por qué hicieron o no un trazo uniendo los puntos ubicados a partir de la tabla;

- Proyectos

1. Democracia.
2. Ecológico
3. Educación sexual.
4. Lecto-escritura.
5. Matemáticas.

MODALIDAD DE COMERCIO

1. Sexto a octavo: 4 horas.

   Introducción a la contabilidad, nociones de comercio.
2. Noveno: 8 horas.

   Contabilidad, legislación comercial, estadística, sistemas.
3. Décimo: 12 horas.

   Contabilidad, Legislación comercial, estadística, sistemas.
4. Undécimo:

   Contabilidad, legislación laboral, archivo, sistemas.

- Convenio con el Sena:

  240 horas de practica empresarial (11)

Examen de conocimientos en contabilidad, legislación comercial y laboral.

Sistemas, manejo del Sapiens.

- Conceptos Matemáticos necesarios para comercio:

1. Operaciones básicas con números Naturales (+, -, x, ÷) aplicados a procesos contables.
2. Regla de tres simple (6).
3. Regla de tres compuesta (6 y 7).
4. Solución de ecuaciones (interés simple y compuesto)(7).
5. Operaciones con enteros (ecuación polinomial)(7).
6. Cálculo mercantil: Interés simple y compuesto, comisiones, utilidades (9).

- Recursos:

1. Aula de Mecanografía.
2. Aula de sistemas.

MODALIDAD DE ELECTRICIDAD

- Sexto y séptimo: 4 horas.

  Nociones de electricidad.

- Octavo: 4 horas.

  Fundamentos de electricidad.

- Noveno: 4 horas.

  Instalaciones eléctricas domiciliarias.

- Décimo: 12 horas.

  Principios de electricidad industrial.

- Undécimo:

  Electrónica Básica.

Materias:

- Taller, teoría, dibujo.

Recursos:

- Aula de electricidad, con un mínimo de aparatos para el área.

Conceptos básicos que se necesitan:

1. Conceptos en geometría: líneas verticales, horizontales, ubicación espacial, manejo del transportador, regla y escuadra, perspectiva y escalas (6).
2. Operaciones con números decimales (6,7).
3. Magnitudes físicas (7,8).
4. Solución de ecuaciones (V,I, R)(7,8).
5. Sistemas de ecuaciones (matrices, determinantes)(9,10).
6. Algebra Boleana (11).
7. Sistemas numéricos y operaciones, (binario y hexadecimal)(11).

ESTUDIANTE

Estrato socioeconómico: 1 y 2

Edad: 12 a 18 años aproximadamente.

Familiar: viven con sus padres 80%.

Provienen de hogares desintegrados 20%.

Ubicación: En barrios aledaños a la institución Brasilia, santa librada , yomasa.

Comportamiento: Agresividad que se manifiesta en peleas como forma de resolver conflictos, participación en pandillas.}

Problemas de drogadicción.

Ocupaciones: algunos trabajan en jornada contraria, los fines de semana o en vacaciones.

Casos de embarazos precoces, así como paternidad a muy temprana edad.

Actitud frente al conocimiento: desmotivación hacia el estudio, poco compromiso con los deberes académicos aunque existen estudiantes que sobresalen y se esfuerzan por superarse.

Creativos en actividades culturales: Izadas de bandera y jornadas culturales.

Visión de las matemáticas: Es una materia dificil, siempre les ha ido mal, las clases son monótonas, no le ven aplicabilidad en su vida cotidiana, entienden los temas explicados pero cuando van a realizar talleres o tareas se bloquean y se les olvida todo.

MATEMATICAS

Objetivos:

1. Generales: de acuerdo al P.E.I. de la institución y los objetivos del área de ciencias.

- Desarrolla habilidades comunicativas para interpretar y solucionar problemas de la vida real, la ciencia y la tecnología a través de modelos matemáticos.
- Desarrolla capacidades para razonamiento lógico y analítico propio de un pensamiento formal

2. Logros específicos por materia de acuerdo al P.E.I., los objetivos, los temas propuestos. Mínimo 6 logros y máximo 8 logros en el año; cada uno con 4 o 5 indicadores de logro. Los logros se presentan semestralmente a coordinación académica y se deben dar a conocer a los estudiantes.

CONTENIDO

Se eligen los temas al empezar el año de acuerdo a la evaluación de lo realizado anteriormente.

Al empezar el año en todos los cursos se hace un repaso general.

Se realizan reuniones de todos los profesores de cada grado para presentar los temas y su relación con las demás materias.

Se ha hecho énfasis en la parte algoítmico y procedimental.

Resolución de problemas: ligados a cada concepto y por lo general de única solución.

METODOLOGIA

- Se están intentando hacer cambios para no seguir la metodología tradicional centrada en la explicación magistral del profesor.
- Impulso al trabajo en equipo y socialización de experiencias, talleres, investigaciones, exposiciones.
- Resolución de problemas: ligada a los temas específicos que en el momento se estén trabajando y por lo general de única solución.
- Enfasis en la lectura científica, comprensión de vocabulario propio de la materia.
- Uso del diccionario.

PROFESOR

- Número de docentes con nombramiento: 24 todos licenciados.
- Realistas: se trabaja con los elementos que se tienen.
- Persistentes y emprendedores: a pesar de las condiciones adversas.
- Colaboradores: en general la mayoría participan en las actividades programadas por la institución como jornadas pedagógicas, actividades culturales, participación en comités, etc.
- Interés por capacitarse: Seminario por competencias, física Universidad Nacional, Matemáticas Universidad de los Andes, Lectoescritura Universidad Distrital, Encuentro de intermedia.
- Innovadores: Buscan diversas formas metodológicas y de evaluación.
- Las condiciones de distancia, contaminación ambiental, inseguridad, falta de incentivos (ruralidad), hacen que el profesor no tenga sentido de pertenencia a la institución y busque traslado cada año.

Reporte de la función de gráfica lineal.

- cómo hicieron para determinar qué tipo de trazo habría que hacer entre dos puntos;
- cómo representaron los valores extremos de la función;
- cómo hicieron para determinar si un punto dado a través de sus coordenadas cartesianas pertenece o no a la gráfica de la función;
- cómo hicieron para ubicar el punto sobre el eje $f_n(X)$, correspondiente a un punto dado sobre el eje X;
- cómo hicieron para ubicar el punto sobre el eje X, correspondiente a un punto dado sobre el eje $f_n(X)$;
- cómo argumentaron la veracidad o falsedad de las afirmaciones de los puntos (f) y (g).

5) Luego de las exposiciones, realicen en una hoja de papel milimetrado una gráfica cartesiana de la función asignada. Saquen tantas fotocopias de esa gráfica como la mitad de grupos que haya conformados y entreguen una a cada uno de esos grupos. Después de esto, cada grupo deberá tener copia de una gráfica de cada una de las seis funciones con las que estamos trabajando.

6) Determinen algunas características que sean comunes a las gráficas de las seis funciones. Repórtenlas por escrito.

7) Determinen algunas características que permitan configurar grupos de gráficas de las seis funciones. Reporten cada característica seguida de la clasificación de las funciones por ella generada.

8) Determinen algunas características que permitan configurar grupos de expresiones simbólicas de las seis funciones. Reporten cada característica seguida de la clasificación de las funciones por ella generada.

9) Identifiquen si el resultado de alguna clasificación generada en el punto 7 se corresponde con alguna clasificación generada en el punto 8.

TABLA

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	$f_5(x)$	$f_6(x)$
0	24	20	0	480	480	0
0.5	23	19	1	479	437	218.5
1	22	18	4	476	396	396
1.5	21	17	9	471	357	535.5
2	20	16	16	464	320	640
2.5	19	15	25	455	285	712.5
3	18	14	36	444	252	756
3.5	17	13	49	431	221	773.5
4	16	12	64	416	192	768
4.5	15	11	81	399	165	742.5
5	14	10	100	380	140	700
5.5	13	9	121	359	117	643.5
6	12	8	144	336	96	576
6.5	11	7	169	311	77	500.5
7	10	6	196	284	60	420
7.5	9	5	225	255	45	337.5
8	8	4	256	224	32	256
8.5	7	3	289	191	21	178.5
9	6	2	324	156	12	108
9.5	5	1	361	119	5	47.5
10	4	0	400	80	0	0

CONSIDERACIONES RELATIVAS AL DESARROLLO CURRICULAR DEL PRIMER TALLER (CUARTA PARTE)

Intencionalidad

La representación gráfica de funciones polinómicas se ha asumido como un procedimiento matemático relativamente simple y no siempre ha sido objeto de estudio por parte de los profesores de matemáticas. Sin embargo, la elaboración y comprensión de este sistema de representación exige y promueve una buena cantidad y variedad de objetos, relaciones y conocimientos matemáticos, que habitualmente pueden pasar desapercibidos para profesores y estudiantes.

A través de este taller pretendemos, entonces, generar un ambiente en el que, de un lado, los estudiantes pongan en juego, revelen y mejoren su nivel de manejo y comprensión acerca de los procesos de elaboración, interpretación y uso de las gráficas de funciones (en un contexto específico); y de otro, los profesores puedan advertir algunas particularidades de los conocimientos matemáticos implicados en el aprendizaje de estos procesos.

Consideraciones acerca de la metodología implicada

La cuarta parte del primer taller pretende desarrollarse a través de cinco momentos. En el primero, el profesor asignará a cada grupo de estudiantes una de las seis funciones que se están trabajando; en esta distribución es necesario tener en cuenta que al menos dos grupos trabajen por separado la misma función para garantizar la posibilidad de confrontación de resultados y facilitar que luego todos los grupos dispongan de las gráficas de las seis funciones.

En la segunda parte se espera que con la función asignada, cada uno de los grupos desarrolle los cuatro primeros ítems, uno de los cuales —ítem (3)— presenta versiones diferentes para cada una de las funciones pero equivalentes entre sí; esta actividad podría sugerirse como trabajo extraclase —en cuyo caso se perdería la posibilidad de observar e intervenir los desarrollos que realicen los estudiantes—, sin embargo consideramos más pertinente que se realice durante la clase y que el profesor cumpla tanto el papel de observador del trabajo de sus estudiantes como el rol de cuestionador de la validez del mismo.

La realización de una exposición de tales desarrollos y sus resultados, constituirá el tercer momento. En éste es muy importante brindar la posibilidad de confrontación de ideas y resultados, y la posibilidad de realizar preguntas que permitan evidenciar y esclarecer dudas respecto del proceso adelantado por cada grupo en las diferentes funciones.

Posteriormente, en un cuarto momento, cada grupo reconstruirá y distribuirá copias de la gráfica de la función aisgnada. Con las copias de las seis gráficas de sendas funciones los grupos desarrollarán las actividades registradas en los ítems (6) a (9). El profesor deberá interactuar con los grupos para que puedan identificar la mayor cantidad de características acerca de las gráficas y puedan generar una buena cantidad de clasificaciones de las mismas.

Sugerimos que en un quinto y último momento se desarrolle una plenaria, orientada por el profesor, en la que se pongan en juego las diversas características identificadas y sus respectivas taxonomías.

Consideraciones acerca de algunas preguntas y respuestas

Respecto del contenido que precede los ítems que orientan el trabajo en grupo, señalemos que si bien la tabla que aparece al inicio del taller reporta de manera sintética algunos resultados obtenidos en los anteriores talleres, también introduce una nueva notación, pues, de un lado, usamos los símbolos $f_n(x)$ con $n=1,2,3,4,5,6$ para denotar cada una de las seis funciones objeto de estudio, y de otro, escribimos los polinomios que describen las funciones en su forma estándar, que difiere (no desde el punto de vista matemático) de las expresiones utilizadas en los anteriores talleres. Igualmente, advertimos sobre la posibilidad de malinterpretación, por parte de los estudiantes, de la notación de intervalos; ellos podrían llegar a pensar que la expresión (4, 24) no representa un intervalo abierto en los reales, sino que representa una pareja de números reales de las medidas de la altura de la caja y el largo de la misma, que podría hacerse corresponder con un punto del plano.

A través del ítem (1) se pretende la obtención rápida de una buena cantidad de valores para cada una de las funciones, para lo cual se sugiere el uso de la calculadora. Sin embargo, si no se dispone de ésta, podría obviarse la construcción de la tabla y simplemente entregar una tabla con los valores establecidos y proponer la verificación de la validez de algunos de los datos.

Para el ítem (2), el cual propone la realización de la gráfica de la función en un tamaño que permita su visualización al momento de la exposición bajo unas condiciones, sugerimos que el profesor centre su atención en los diversos procedimientos y decisiones que están involucrados en la elaboración de la gráfica y que se revelan en el actuar de los estudiantes. Se podrían observar—entre otras—: la estrategia que usan para trazar ejes perpendiculares; la manera como los estudiantes eligen la escala para cada uno de los ejes; el criterio (paralelismo o perpendicularidad respecto de los ejes) que utilizan para trazar un punto dadas sus coordenadas; la estrategia usada para determinar la ubicación de la abcisa o la ordenada cuando el valor numérico no coincide con los valores explícitos en el eje; el criterio utilizado para decidir si se hace un trazo "uniforme" que contenga a todos los puntos, si se hace un trazo "segmentado"[2], o si no se hace trazo alguno; o, la manera como se representan las parejas de valores de los extremos de la tabla, que en el contexto no pertenecen a la función.

2. Las palabras "uniforme" y "segmentado" se utilizan aquí bajo una significación intuitiva. Sin embargo, podrían guardar alguna relación con ideas y conceptos de la geometría diferencial o con la idea de diferenciabilidad del cálculo.

Las actividades y preguntas que configuran el ítem (3) tienen intenciones diversas. Con el numeral(a) pretende explorarse la manera como los estudiantes están entendiendo las características de los intervalos que definen el dominio y recorrido de la función (ser denso, continuo y abierto); se espera que los estudiantes tracen segmentos continuos y abiertos en cada uno de los ejes, o que marquen sobre cada eje un número finito de puntos que corresponden a las respectivas coordenadas dadas en la tabla. Con el numeral (b) pretendemos cuestionar el significado de las coordenadas de un punto con relación al contexto de trabajo; al respecto, suponemos que en las respuestas no todos los estudiantes expresen que la primera componente de la pareja ordenada representa la medida de la altura de una caja y la segunda la medida de la magnitud respectiva a la función objeto de estudio (largo, ancho, área, capacidad). A través del numeral (c) intentamos abordar el estudio de las estrategias utilizadas para determinar si un punto pertenece o no a la gráfica de una función en un determinado dominio y recorrido de variación; para lograr esto, hemos propuesto el análisis de: parejas coordenadas que si bien pertenecen a la función, no pertenecen al dominio y recorrido significativo de la función, y parejas coordenadas que no pertenecen a la función. Con las actividades de los numerales (d) y (e) se pretende enfrentar a los estudiantes a una actividad que les exija hacer un uso significativo de la representación gráfica, a la vez que le permite al profesor un ámbito para evidenciar el significado que los estudiantes manejan de ésta; advertimos que la respuesta al numeral (e) para la función capacidad de la caja proporciona una información adicional a las ofrecidas por las otras funciones ya que ésta no es inyectiva. La identificación de la característica de unicidad de las imágenes para cada uno de los elementos del dominio es el objeto de estudio del numeral (f); consideramos que es necesario enfatizar este rasgo esencial al concepto de función. Finalmente, con el numeral (g) queremos abordar una aproximación al comportamiento del orden de la variación, es decir, reconocer consecuencias de la variación creciente y/o decreciente de las funciones; sugerimos que se exija que la argumentación se apoye fuertemente en la gráfica de la función.

El listado que aparece en el ítem 4 pretenden marcar un derrotero para la exposición que realicen los grupos. Todos los aspectos vinculados a las preguntas expresadas en el listado están relacionados con las actividades y preguntas contenidas en los tres ítems anteriores; por tanto esta actividad deberá permitir a los estudiantes no sólo presentar sino también cualificar su trabajo. Es pues importante que el profesor permita a los demás grupos— y se permita— observar, valorar, criticar, etc. los resultados presentados por cada grupo.

La actividad presentada en el ítem 5 pretende constituirse en un espacio en el que los grupos de estudiantes puedan mejorar el resultado de su trabajo a partir de la cualificación del mismo.

Creemos que algunas de las semejanzas que los estudiantes deberían reportar en el desarrollo del ítem 6 tienen que ver con el hecho de que todas las gráficas representan funciones continuas y diferenciables, definidas de un conjunto abierto y absoluto en otro similar. Este hecho se refleja en el carácter continuo del trazo, en la "uniformidad" de las curvas trazadas, en la identificación de los extremos de la gráfica como puntos no pertenecientes a la función, en el uso exclusivo del primer cuadrante para representar la función, entre otras.

Por supuesto que no se espera que las descripciones involucren nombres y conceptos matemáticos en su presentación formal; sin embargo, si se espera que impliquen una interpretación intuitiva de estos conceptos.

Dentro de las características esperadas como respuesta al ítem 7 quisiéramos que surgiera —entre otras—: el tipo de trazo (rectilíneo o curvo), el tipo de orden en la variación (creciente, decreciente, o combinado) y la consecuente existencia o no de máximos y mínimos relativos, el tipo de recorrido (intervalo abierto o semiabierto), la ubicación de los extremos de la gráfica (ambos, alguno o ninguno, ubicado(s) sobre el eje de las abcisas), el tipo de concavidad del trazo (sin concavidad, cóncavo o convexo). Nuevamente, se espera una descripción intuitiva, no formal, de estos rasgos. Es muy importante que no sólo se describan las características, sino que éstas permitan hacer taxonomías de todas las funciones objeto de estudio.

Los grupos que surjan de la clasificación de las funciones a través de sus expresiones podrían considerar: el valor del exponente del monomio principal del polinomio que describe la función, el valor algebraico del coeficiente principal del polinomio, o la cantidad de términos explícitos del polinomio.

Con el ítem 9 pretendemos que se pueda establecer alguna identificación entre grupos generados en el desarrollo de los dos ítem anteriores; particularmente podría surgir el reconocimiento del valor del exponente con el del tipo de gráfica. También, interesa establecer algunas relaciones que no siempre son válidas, por ejemplo la identificación del signo algebraico del coeficiente principal del polinomio con el carácter decreciente de la gráfica.

FUNCIONES CUADRÁTICAS • PRIMER TALLER (QUINTA PARTE)
VERSIÓN A

En este taller seguiremos trabajando con las seis funciones establecidas en el taller anterior, las cuales dependen de la altura de la caja. En lo que sigue vamos a examinar con algún detalle la variación de estas funciones.

Trabajo individual en los grupos

1) En el contexto en el que estamos trabajando surgen dos cuestiones que queremos tratar de resolver con el trabajo de este taller.

   Si al comparar varias parejas de cajas se encuentra que su altura difiere en la misma cantidad, ¿será cierto que el largo de las cajas también difiere en una misma cantidad?

   Si al comparar varias parejas de cajas se encuentra que su altura difiere en la misma cantidad, ¿será cierto que el área del papel de las cajas también difiere en una misma cantidad?

   a. Sin utilizar más de cinco minutos, intente responder por escrito las dos preguntas anteriores.

   b. Si en los cinco minutos que tuvo no pudo responder, ¿qué estrategia seguiría para resolver tales cuestiones? Explique su respuesta.

<u>Acerca de la función *largo de la caja*</u> ($f_1(x) = -2x + 24$)

2) Cada uno de los integrantes del grupo va a examinar cómo varían los valores de $f_1(x)$ cuando la variable x varía con incrementos de un valor específico. Para ello, cada miembro del grupo debe completar la segunda fila de una de las cuatro tablas que aparecen a continuación (usando calculadora) y luego, con base en la información de su tabla, debe responder las preguntas 3 a 6.

a.

diferencia en x								

x	0.2	1.2	2.2	3.2	4.2	5.2	6.2	7.2	8.2
$f_1(x)$									

diferencia en $f_1(x)$								

b.

diferencia en x									
x	3.3	3.8	4.3	4.8	5.3	5.8	6.3	6.8	7.3
$f_1(x)$									
diferencia en $f_1(x)$									

c.

diferencia en x									
x	0.3	1.1	1.9	2.7	3.5	4.3	5.1	5.9	6.7
$f_1(x)$									
diferencia en $f_1(x)$									

d.

diferencia en x									
x	0.1	1.3	2.5	3.7	4.9	6.1	7.3	8.5	9.7
$f_1(x)$									
diferencia en $f_1(x)$									

3) En la tabla, los valores dados a x están ordenados ascendentemente. Determine si la siguiente aseveración es verdadera o falsa: entre dos valores consecutivos cualesquiera de x (considerando primero el que está a la derecha) hay una diferencia constante (los valores de las diferencias son iguales). En la primera fila de óvalos registre los valores de las diferencias.

4) Para cada par de valores consecutivos de $f_1(x)$ registrados en su tabla, determine la diferencia (lo mismo que para los valores de x, considere primero el que está a la derecha); si lo considera necesario utilice la calculadora. En la segunda fila de óvalos, escriba el valor de la diferencia obtenida. ¿Es cierto que los valores de las diferencias son el mismo?

5) Que la diferencia en valores consecutivos de x sea la misma en la tabla fue decisión de quien escogió los valores. ¿Puede dar alguna explicación o alguna justificación de por qué la diferen-

cia entre valores consecutivos de $f_1(x)$ resultó negativa y por qué esa diferencia es la misma en todos los casos considerados?

6) ¿Las respuestas a los ítems 3, 4 y 5 se modifican si la diferencia entre valores consecutivos de la tabla se calcula considerando primero el valor que está a la izquierda (y no a la derecha como se especifica en los ítems 3 y 4)? Explique su respuesta.

Acerca de la función *área del papel de la caja* ($f_4(x) = -4x^2 + 480$)

7) Cada integrante del grupo va a examinar cómo varían los valores de $f_4(x)$ cuando la variable x varía con diferencias de un valor específico. Para ello, cada miembro del grupo debe completar la tercera fila de una de las cuatro tablas que aparecen a continuación (usando calculadora) y luego, con base en la información de su tabla, debe responder las preguntas 8 a 9.

e.

diferencia en x

x	0.2	1.2	2.2	3.2	4.2	5.2	6.2	7.2	8.2
$f_4(x)$									

diferencia en $f_4(x)$

f.

diferencia en x

x	3.3	3.8	4.3	4.8	5.3	5.8	6.3	6.8	7.3
$f_4(x)$									

diferencia en $f_4(x)$

g.

diferencia en x

x	0.3	1.1	1.9	2.7	3.5	4.3	5.1	5.9	6.7
$f_4(x)$									

diferencia en $f_4(x)$

h.

diferencia en x

x	0.1	1.3	2.5	3.7	4.9	6.1	7.3	8.5	9.7
$f_4(x)$									

diferencia en $f_4(x)$

8) También en este caso, al considerar dos valores consecutivos en la tabla, la diferencia en x es constante. En la primera fila registre el valor de dicha diferencia.

9). Para cada par de valores consecutivos de $f_4(x)$ registrados en su tabla, utilizando calculadora, determine su diferencia. En la segunda fila de óvalos, escriba el valor de la diferencia obtenida. ¿Es cierto que los valores de las diferencias son el mismo? Describa la mayor cantidad de detalles acerca del comportamiento de los valores de las diferencias que obtuvo.

Trabajo en grupos de 4

Acerca de la función *largo de la caja* ($f_1(x) = -2x + 24$)

10) En la respectiva gráfica cartesiana, entregada por el profesor, identifiquen y marquen con un mismo color los puntos correspondientes a los valores de la tabla (a.) que elaboraron en el trabajo individual. Con el mismo color, representen en esa gráfica las diferencias que calcularon. Describan las características que se pueden observar al mirar el dibujo obtenido.

11) Con tres colores diferentes al utilizado antes, realicen las actividades propuestas en el ítem 10 para las tablas (b., c., d.) respectivamente.

12) De las características que identificaron en las gráficas de cada una de las tablas, ¿cuáles son comunes y cuáles no lo son?

13) En la siguiente tabla, registren un resumen de los resultados obtenidos en el trabajo individual.

Nombre del estudiante	Diferencias entre valores consecutivos de x	Diferencias entre valores consecutivos de $f_1(x)$

14) Con base en el trabajo individual y en la tabla anterior, si dos cajas difieren en su altura en 1.5 cm., ¿se puede averiguar en cuánto difieren los correspondientes largos? Expliquen cómo dan respuesta a esa pregunta.

Acerca de la función *área del papel de la caja* ($f_4(x) = -4x^2 + 480$)

15) En la respectiva gráfica cartesiana, entregada por el profesor, identifiquen y marquen con un mismo color los puntos correspondientes a los valores de la tabla (e.) que elaboraron en el trabajo individual. Con el mismo color, representen en esa gráfica las diferencias que calcularon. Describan las características que se pueden observar al mirar el dibujo obtenido.

16) Con tres colores diferentes al utilizado antes, realicen las actividades propuestas en el ítem 10 para las tablas (f., g., h.) respectivamente.

17) De las características que identificaron en las gráficas de cada una de las tablas, ¿cuáles son comunes y cuáles no lo son?

18) En la siguiente tabla, registren un resumen de los resultados obtenidos en el trabajo individual.

Nombre del estudiante	Diferencias entre valores consecutivos de x	Diferencias entre valores consecutivos de $f_4(x)$

19) Con base en el trabajo individual y en la tabla anterior, si dos cajas difieren en su altura en 1.5 cm., ¿se puede averiguar en cuánto difieren las correspondientes áreas del papel de las cajas? Expliquen cómo dan respuesta a esa pregunta.

20) Discutan las respuestas que cada quien dio al ítem 1. Atendiendo a lo discutido y a lo realizado en el taller, elaboren una nueva respuesta del grupo para las preguntas:

Si al comparar varias parejas de cajas se encuentra que su altura difiere en la misma cantidad, ¿será cierto que el largo de las cajas también difiere en una misma cantidad?

Si al comparar varias parejas de cajas se encuentra que su altura difiere en la misma cantidad, ¿será cierto que el área del papel de las cajas también difiere en una misma cantidad?

FUNCIONES CUADRÁTICAS • PRIMER TALLER (QUINTA PARTE) VERSIÓN B

En este taller seguiremos trabajando con las seis funciones establecidas en el taller anterior, las cuales dependen de la altura de la caja. En lo que sigue vamos a examinar con algún detalle la variación de estas funciones.

Trabajo individual

1) En el contexto en el que estamos trabajando, surgen dos preguntas que queremos tratar de responder con el trabajo de este taller.

   Si al comparar varias parejas de cajas se encuentra que su altura difiere en la misma cantidad, ¿será cierto que el ancho de las cajas también difiere en una misma cantidad?

   Si al comparar varias parejas de cajas se encuentra que su altura difiere en la misma cantidad, ¿será cierto que el área del papel desperdiciado también difiere en una misma cantidad?

   a. Sin utilizar más de cinco minutos, intente responder por escrito las dos preguntas anteriores.

   b. Si en los cinco minutos que tuvo no pudo responder, ¿qué estrategia seguiría para resolver tales cuestiones? Explique su respuesta.

<u>Acerca de la función *ancho de la caja*</u> ($f_2(x) = -2x + 20$)

2) Cada uno de los integrantes del grupo va a examinar cómo varían los valores de $f_2(x)$ cuando la variable x varía con incrementos de un valor específico. Para ello, cada miembro del grupo debe completar la segunda fila de una de las cuatro tablas que aparecen a continuación (usando calculadora) y luego, con base en la información de su tabla, debe responder las preguntas 3 a 6.

a.

diferencia en x

x	0.2	1.2	2.2	3.2	4.2	5.2	6.2	7.2	8.2
$f_2(x)$									

diferencia en $f_2(x)$

b.

diferencia en x

x	3.3	3.8	4.3	4.8	5.3	5.8	6.3	6.8	7.3
$f_2(x)$									

diferencia en $f_2(x)$

c.

diferencia en x

x	0.3	1.1	1.9	2.7	3.5	4.3	5.1	5.9	6.7
$f_2(x)$									

diferencia en $f_2(x)$

d.

diferencia en x

x	0.1	1.3	2.5	3.7	4.9	6.1	7.3	8.5	9.7
$f_2(x)$									

diferencia en $f_2(x)$

3) En la tabla, los valores dados a x están ordenados ascendentemente. Determine si la siguiente aseveración es verdadera o falsa: entre dos valores consecutivos cualesquiera de x (considerando primero el que está a la derecha) hay una diferencia constante (los valores de las diferencias son iguales). En la primera fila de óvalos registre los valores de las diferencias.

4) Para cada par de valores consecutivos de $f_2(x)$ registrados en su tabla, determine la diferencia (lo mismo que para los valores de x, considere primero el que está a la derecha); si lo considera necesario utilice la calculadora. En la segunda fila de óvalos, escriba el valor de la diferencia obtenida. ¿Es cierto que los valores de las diferencias son el mismo?

5) Que la diferencia en valores consecutivos de x sea la misma en la tabla fue decisión de quien escogió los valores. ¿Puede dar alguna explicación o alguna justificación de por qué la diferen-

cia entre valores consecutivos de $f_2(x)$ resultó negativa y por qué esa diferencia es la misma en todos los casos considerados?

6) ¿Las respuestas a los ítems 3, 4 y 5 se modifican si la diferencia entre valores consecutivos de la tabla se calcula considerando primero el valor que está a la izquierda (y no a la derecha como se especifica en los ítems 3 y 4)? Explique su respuesta.

<u>Acerca de la función *área del papel desperdiciado*</u> ($f_3(x) = 4x^2$)

7) Cada integrante del grupo va a examinar cómo varían los valores de $f_3(x)$ cuando la variable x varía con diferencias de un valor específico. Para ello, cada miembro del grupo debe completar la tercera fila de una de las cuatro tablas que aparecen a continuación (usando calculadora) y luego, con base en la información de su tabla, debe responder las preguntas 8 a 9.

e.

diferencia en x

x	0.2	1.2	2.2	3.2	4.2	5.2	6.2	7.2	8.2
$f_3(x)$									

diferencia en $f_3(x)$

f.

diferencia en x

x	3.3	3.8	4.3	4.8	5.3	5.8	6.3	6.8	7.3
$f_3(x)$									

diferencia en $f_3(x)$

g.

diferencia en x									
x	0.3	1.1	1.9	2.7	3.5	4.3	5.1	5.9	6.7
$f_3(x)$									
diferencia en $f_3(x)$									

h.

diferencia en x									
x	0.1	1.3	2.5	3.7	4.9	6.1	7.3	8.5	9.7
$f_3(x)$									
diferencia en $f_3(x)$									

8) También en este caso, al considerar dos valores consecutivos en la tabla, la diferencia en x es constante. En la primera fila registre el valor de dicha diferencia.

9) Para cada par de valores consecutivos de $f_3(x)$ registrados en su tabla, utilizando calculadora, determine su diferencia. En la segunda fila de óvalos, escriba el valor de la diferencia obtenida. ¿Es cierto que los valores de las diferencias son el mismo? Describa la mayor cantidad de detalles acerca del comportamiento de los valores de las diferencias que obtuvo.

Trabajo en grupos de 4

Acerca de la función *ancho de la caja* ($f_2(x) = -2x + 20$)

10) En la respectiva gráfica cartesiana, entregada por el profesor, identifiquen y marquen con un mismo color los puntos correspondientes a los valores de la tabla (a.) que elaboraron en el trabajo individual. Con el mismo color, representen en esa gráfica las diferencias que calcularon. Describan las características que se pueden observar al mirar el dibujo obtenido.

11) Con tres colores diferentes al utilizado antes, realicen las actividades propuestas en el ítem 10 para las tablas (b., c., d.) respectivamente.

12) De las características que identificaron en las gráficas de cada una de las tablas, ¿cuáles son comunes y cuáles no lo son?

13) En la siguiente tabla, registren un resumen de los resultados obtenidos en el trabajo individual.

Nombre del estudiante	Diferencias entre valores consecutivos de x	Diferencias entre valores consecutivos de $f_2(x)$

14) Con base en el trabajo individual y en la tabla anterior, si dos cajas difieren en su altura en 1.5 cm., ¿se puede averiguar en cuánto difieren los correspondientes anchos? Expliquen cómo dan respuesta a esa pregunta.

Acerca de la función *área del papel desperdiciado* ($f_3(x) = 4x^2$)

15) En la respectiva gráfica cartesiana, entregada por el profesor, identifiquen y marquen con un mismo color los puntos correspondientes a los valores de la tabla (e.) que elaboraron en el trabajo individual. Con el mismo color, representen en esa gráfica las diferencias que calcularon. Describan las características que se pueden observar al mirar el dibujo obtenido.

16) Con tres colores diferentes al utilizado antes, realicen las actividades propuestas en el ítem 10 para las tablas (f., g., h.) respectivamente.

17) De las características que identificaron en las gráficas de cada una de las tablas, ¿cuáles son comunes y cuáles no lo son?

18) En la siguiente tabla, registren un resumen de los resultados obtenidos en el trabajo individual.

Nombre del estudiante	Diferencias entre valores consecutivos de x	Diferencias entre valores consecutivos de $f_3(x)$

19) Con base en el trabajo individual y en la tabla anterior, si dos cajas difieren en su altura en 1.5 cm., ¿se puede averiguar en cuánto difieren las correspondientes áreas del papel desperdiciado? Expliquen cómo dan respuesta a esa pregunta.

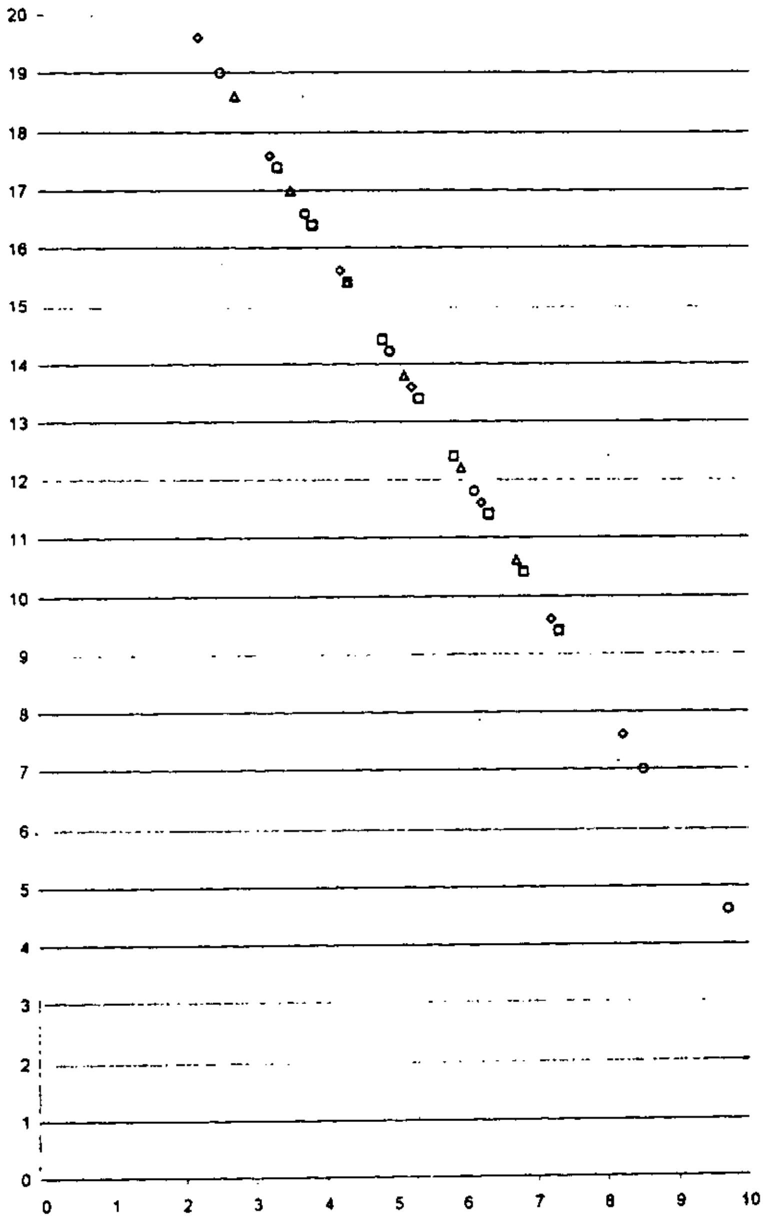
20) Discutan las respuestas que cada quien dio al ítem 1. Atendiendo a lo discutido y a lo realizado en el taller, elaboren una nueva respuesta del grupo para las preguntas:

Si al comparar varias parejas de cajas se encuentra que su altura difiere en la misma cantidad, ¿será cierto que el ancho de las cajas también difiere en una misma cantidad?

Si al comparar varias parejas de cajas se encuentra que su altura difiere en la misma cantidad, ¿será cierto que el área del papel desperdiciado también difiere en una misma cantidad?

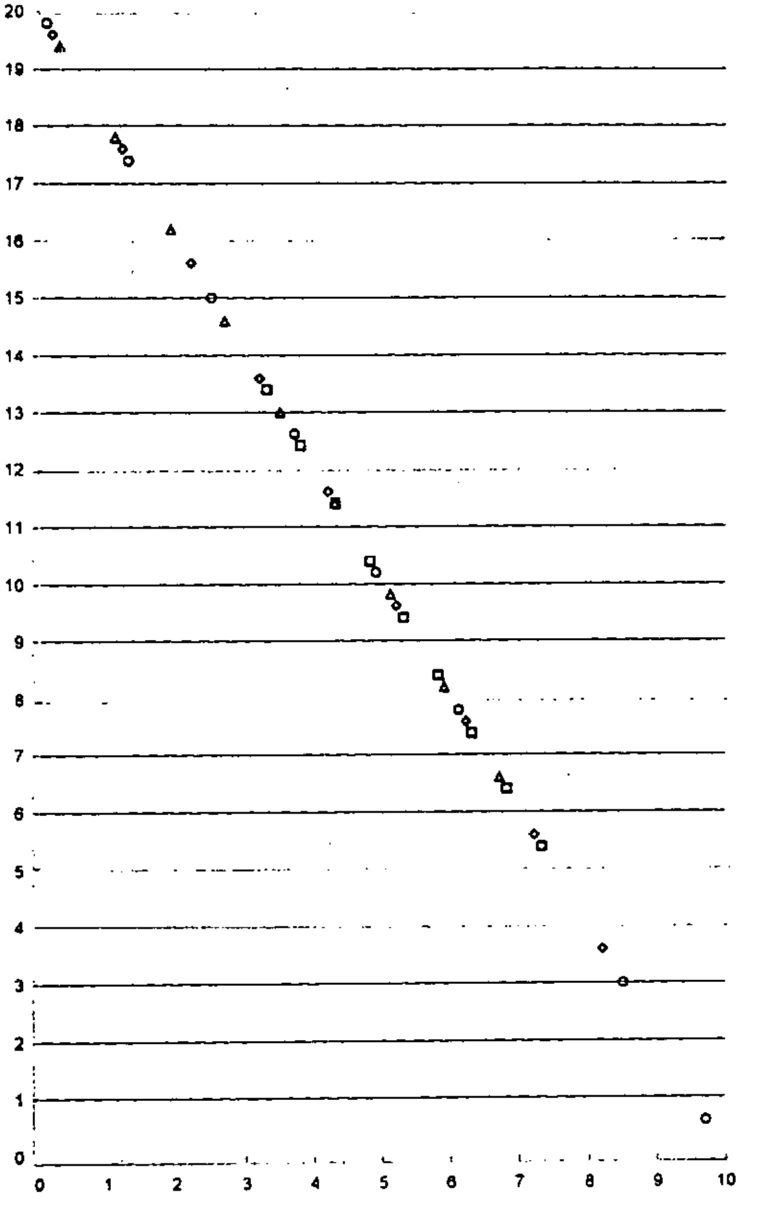
GRÁFICA DE LA FUNCIÓN LARGO DE LA CAJA

$$f_1(x) = -2x + 24$$



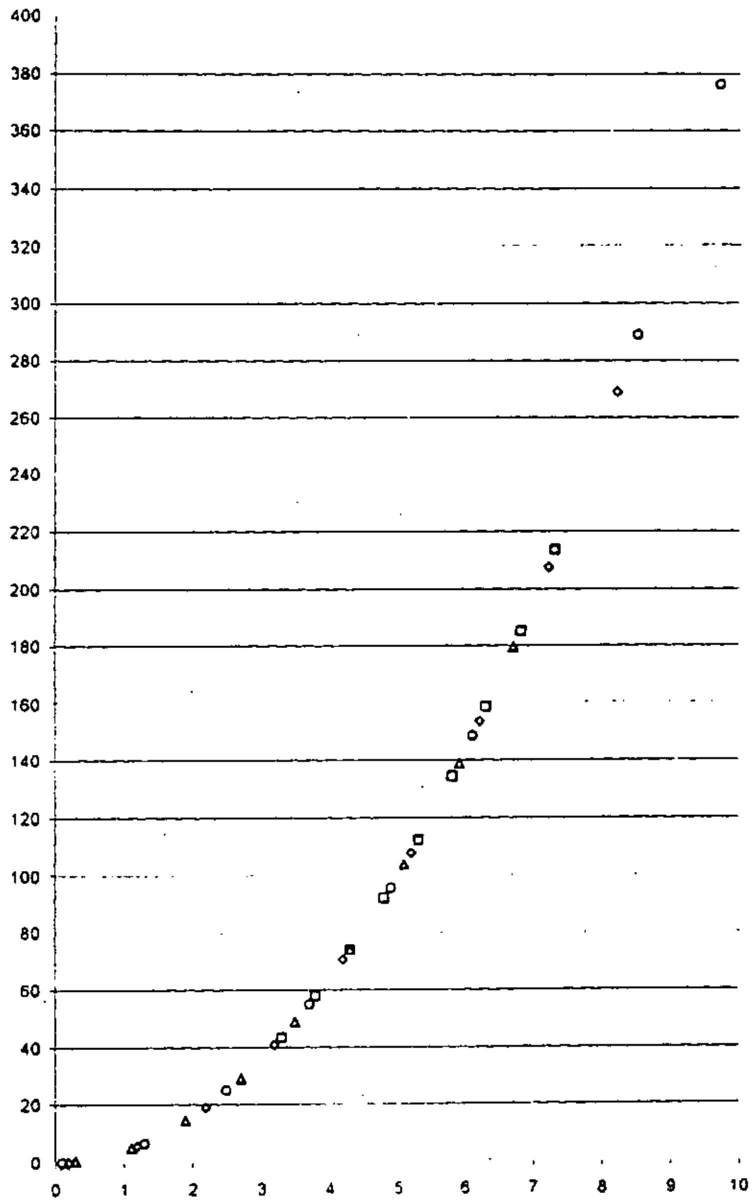
GRÁFICA DE LA FUNCIÓN ANCHO DE LA CAJA

$$f_2(x) = -2x + 20$$



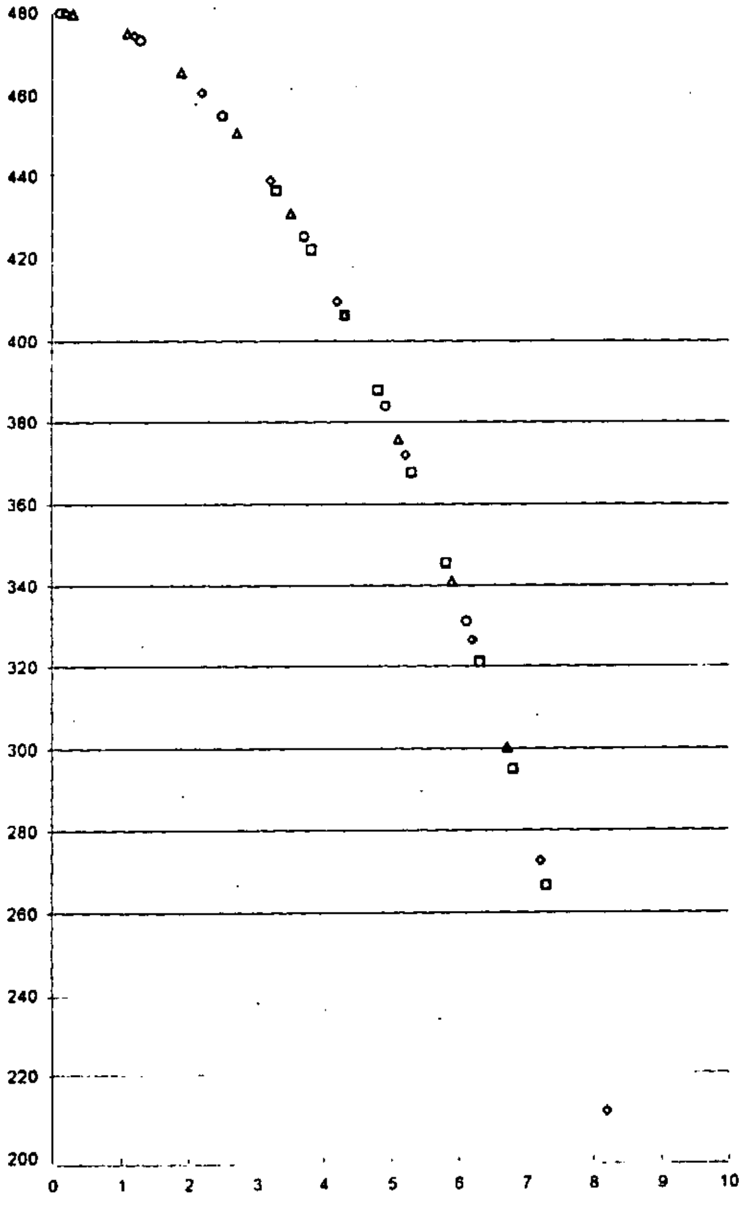
GRÁFICA DE LA FUNCIÓN ÁREA DEL PAPEL DESPERDICIADO

$$f_3(x) = 4x^2$$



GRÁFICA DE LA FUNCIÓN ÁREA DEL PAPEL DE LA CAJA

$$f_4(x) = -4x^2 + 480$$



Aspectos Innovativos

ASPECTOS INNOVATIVOS

1) Respecto a la metodología (talleres con guías, trabajo en grupo, plenarias, Derive).

En la primera parte del programa (relaciones y funciones) se trabajó con la metodología "tradicional", es decir el profesor explicaba y los estudiantes resolvían ejercicios similares a los hechos en clase aplicando los conceptos vistos. Para la parte de función lineal se elaboraron guías con los aspectos que a nuestro criterio son relevantes en el tema, los estudiantes discutían, unificaban sus puntos de vista y finalmente se hacia una puesta en común y se profundizaba en los aspectos mas complejos o que presentaban mayor dificultad para la mayoría de estudiantes.

Con esta forma de trabajo quisimos que los estudiantes participaran activamente en la clase, que aprendieran a identificar y corregir sus errores, así como también a saber escuchar las opiniones de los demás y a ser tolerantes con el grupo; creímos que además es importante que el estudiante aprendiera a confiar en sus propios argumentos, que buscara solución a los problemas y ejercicios y no estuviera esperando que sea el profesor el que siempre "transmita una información" que se asume como infalible.

También como parte de la metodología quisimos buscar ejemplos prácticos y cotidianos en los que se aplicaran los conceptos de función lineal (situaciones de proporcionalidad directa e inversa, ejemplos de función afin, aplicaciones en economía, etc.) que permitieran a los estudiantes relacionar los conceptos con la realidad.

Y por último usamos el computador como herramienta que puede facilitar la comprensión de los conceptos, para ello se usó el programa Derive, se explicaron algunos comandos y funciones del mismo; se utilizó para agilizar el trazado de gráficas de funciones lineales y afines y para reforzar los conceptos de pendiente, cortes con los ejes, paralelismo, perpendicularidad y traslación.

2) Respecto al contenido matemático.

Consideramos que existieron aspectos conceptuales en los que se hizo énfasis y que se abordaron de manera diferente a lo que usualmente se hace en clase:

- Concepto de pendiente.

  Comúnmente se hace énfasis simplemente en la fórmula para hallar su valor numérico $m = \frac{Y2-Y1}{X2-X1}$, en el proyecto se hizo énfasis en el significado gráfico como el resultado de efectuar dos desplazamientos: primero el vertical y luego el horizontal y se observo como la posición de la recta depende del signo de la pendiente. La fórmula apareció posteriormente como ayuda para agilizar el cálculo numérico.

  El concepto de pendiente se utilizó para caracterizar las líneas perpendiculares y paralelas.

- Trabajo con diversas representaciones.

  Se enfatizó en el paso de la representación gráfica a la simbólica, tradicionalmente se hace lo contrario; para ello se utilizó el concepto de pendiente descrito anteriormente y el concepto de corte en el eje *Y*, no se utilizó la tabla de valores como única fórmula para realizar la gráfica que es lo que comúnmente aparece en libros y en clase.

  La representación tabular se utilizó especialmente en lo relativo a magnitudes directa e inversamente proporcionales como medio para deducir la representación simbólica (o fórmula).

  También se trabajó la representación oral, entendida esta como situaciones que se pueden modelar por medio de funciones lineales y afines y en las cuales adquieren un significado especial los conceptos de pendiente y cortes con los ejes. De acuerdo a las condiciones de cada problema se paso a la representación simbólica y/o gráfica correspondiente, ubicando para ello las variables y la dependencia entre ellas, así como la representación tabular.

- Trabajo con sistemas numéricos ligados a problemas.
  Se diferenció el uso de números reales positivos o negativos de acuerdo al contexto de los problemas planteados, haciendo énfasis en que el contexto de una situación determina el uso de los sistemas numéricos y que en el sentido matemático si es posible utilizar todos los números reales; también se hizo un análisis similar para el uso de números decimales y fraccionarios.

3) Respecto al papel de los estudiantes.

Consideramos que logramos que los estudiantes fueran más autónomos y no dependieran tanto del profesor, esto se evidencia en la participación en los grupos de trabajo, en las plenarias, en el cumplimiento con las tareas y trabajos asignados, así como también en los comentarios que expresan cuando se les pregunta por la metodología implementada, ellos valoran el hecho de que se les permita participar, llegar a las conclusiones por sí mismos y que puedan descubrir los errores sin la presión de una mala nota.

La participación en los grupos de trabajo fue activa, la mayoría de estudiantes aportaban ideas y se ayudaban para resolver los problemas, probaban sus razonamientos y el hecho de revisar los apuntes o guías al finalizar cada actividad les ha permitido que adquirieran hábitos de responsabilidad y orden.

El papel del estudiante cambió en el sentido que ya no son los que reciben mecánicamente una información para reproducirla posteriormente, ahora analizan, leen comprensivamente un texto, y se aventuran a sacar conclusiones y juicios lógicos, además recuerdan con mayor facilidad los conceptos.

4) Respecto al papel del profesor.

Con la metodología de talleres en grupos se cambió radicalmente la concepción del profesor como transmisor de la información, ahora nuestra labor debió ser más activa y dinámica, exigió que motivásemos a los estudiantes a participar y a expresar sus razonamientos. Nuestro papel fue guiar el trabajo para que los estudiantes no se dispersaran y lograran la mayor claridad, solidez y precisión en los conceptos, aunque reconocemos que quizás las guías eran muy tradicionales, debíamos estar pendientes de las preguntas y dudas, así como de sacar el mayor provecho de las plenarias para profundizar en los temas.

Desde el punto de vista del contenido matemático debimos estudiar un poco más acerca de las funciones lineal y afín, de los diversas sistemas de representación y de la elaboración de mapas conceptuales buscando caracterizar las funciones dentro de cada sistema, esto fue fundamental pues se quería que los estudiantes hicieran la mayor cantidad de conexiones en los temas y esto solo era posible si nosotros teníamos la claridad suficiente a la hora de abordar los temas.

Consideramos que la primera parte del proyecto fue muy importante porque al hacer la reflexión acerca del contenido matemático involucrado y el hecho de elaborar los mapas conceptuales nos ayudo a comprender mejor la complejidad del tema y a pensar en la forma de lograr los objetivos propuestos.

Nuestra visión acerca de los procesos de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas ha cambiado durante todo este proyecto, tanto en aspectos metodológicos como de contenido matemático y del proceso de evaluación. Somos conscientes que para lograr que los estudiantes sean competentes en matemáticas debemos diseñar actividades que hagan la mayor cantidad de conexiones entre todos los conceptos, que exista una secuencia y no se vean los temas como islas independientes; además debemos hacer diseños didácticos de tal forma que el estudiante sea el constructor del conocimiento, que a partir de sus razonamientos pueda llegar a los conceptos.

Otro aspecto que nos parece importante dentro de este proceso de cambio en el que nos encontramos es reconocer que desconocemos muchas cosas del contenido matemático mismo que estamos enseñando y por eso el ejercicio de la elaboración de los mapas conceptuales al empezar cada año debe convertirse en una estrategia para comprender las relaciones entre los conceptos y poder hacer diseños didácticos completos.

5) Respecto a la evaluación.

- En el caso de la función lineal.

Para evaluar al estudiante se tuvo en cuenta fundamentalmente el trabajo no en forma individual como se venía haciendo sino como participes de un grupo, tampoco se evaluó el error como un hecho negativo, éste se aprovecho para explicar los conceptos con mayor profundidad.

Al finalizar cada guía o taller se recogía un cuaderno elegido al azar de un integrante de cada grupo, se revisaba el trabajo haciendo caer cuenta de los errores cometidos a través de comentarios, preguntas o sugerencias que llevaran a los estudiantes a hacer las correcciones necesarias.

También se tuvo en cuenta la participación en las plenarias y en los ejercicios propuestos en la case, así como las tareas y trabajos asignados. Se hicieron también unas pocas evaluaciones escritas con ejercicios muy similares a los realizados en clase, algunas de estas pruebas se anexan al final de este documento.

Con esta forma de trabajo disminuyó el número de estudiantes con logros pendientes, no pasaron aquellos que presentaban un récord alto de inasistencia, no hacian tareas ni participaban en los grupos y plenarias; además estos estudiantes reincidían cometiendo errores procedimentales en las evaluaciones escritas o ni siquiera presentaban dichas evaluaciones. Para nivelar estos logros se dejaron trabajos individuales de ejercicios como los realizados en clase, luego se hizo una sustentación de los mismos y aquellos estudiantes que no superaban sus deficiencias se les dio un nuevo plazo para presentar una evaluación escrita.

- En el caso de la función cuadrática.

La evaluación adquirió otra connotación, ya que los talleres y tareas no eran repetitivos, se siguió evaluando eso sí el trabajo en grupo pero desde una perspectiva más amplia, pues se tuvo más en cuenta los procedimientos utilizados para llegar a las conclusiones y su puesta a prueba.

Las tareas individuales consistieron en elaborar las tres cajas y desarrollar en cada taller la parte individual, el no realizarla hizo que en varios grupos se perdiera tiempo; también individualmente debieron terminar las gráficas de las 4 funciones y caracterizarlas desde lo gráfico, así como consultar como hallar el volumen de un cubo y aplicar este procedimiento en las tres cajas construidas.

Como tareas en grupo extraclase aquellos que no alcanzaban a terminar los talleres en las cuatro horas planeadas debían reunirse y completar los aspectos que faltaban así como la planeación de la exposición.

Para asignar notas a este trabajo se tuvo en cuenta la participación individual, el manejo del tiempo y la disciplina, entendida ésta como la actitud para trabajar responsablemente en los talleres, pues al principio algunos grupos charlaban de otros aspectos diferentes a la clase, perdían el tiempo, por lo general no terminaban los talleres y se limitaban a copiar; finalizando cada sesión de dos horas de clase se recogía un cuaderno o taller de cada grupo para analizar los avances y/o dificultades.

Para las exposiciones se seleccionaba uno o dos estudiantes al azar por cada grupo y se les asignaba una de las preguntas del taller la cual debían responder ante todo el auditorio y someter esa respuesta a discusión.

En esta parte de la innovación no se hizo ninguna evaluación individual escrita como las realizadas en la parte de función lineal y que se anexan en este documento.

Para la nivelación de aquellos estudiantes que perdieron los logros por no asistir a todos los talleres, no trabajar en grupo, no cumplir con las tareas mencionadas y hacer una exposición regular (no coherente con lo realizado en grupo) se tiene pensado diseñar un taller similar a los realizados en la primera y segunda parte, que fueron en los que mayor incumplimiento hubo.

6) Tipo de conocimiento privilegiado

- En el caso de la función lineal.

Reconocemos que en buena parte del tema se hizo énfasis en un conocimiento procedimental, es decir, los estudiantes aprendieron "algoritmos" para hallar el dominio, recorrido de una función, para encontrar el valor numérico de la pendiente aplicando la fórmula o su significado gráfico, la ecuación de una recta dados dos puntos, etc. y luego resolvían ejercicios similares a los hechos en clase.

En algunas de las guías y talleres se quiso dar un poco más de importancia a los conceptos ligándolos a problemas y se trató de privilegiar la interpretación y el análisis de situaciones, se busco que el estudiante relacionara los conceptos entre sí e hiciera traslación entre los diversos sistemas de representación.

- En el caso de la función cuadrática.

En esta parte se hizo más énfasis en los procedimientos para construir activamente los conceptos (funciones cuadrática, lineal, cúbica, dominio, recorrido, etc.) que en la parte algorítmica y se puso en juego conocimiento no solo con relación a las funciones sino con los números reales en general (densidad, orden, límite) y con los diversos sistemas de representación.

Se busco que los estudiantes llegaran por sus propias deducciones a las expresiones simbólicas y que a partir de ellas caracterizaran las funciones involucradas en los talleres. Los estudiantes no repetían mecánicamente algoritmos como en el caso de la función lineal sino que se privilegió el análisis y en cada taller se involucró un aspecto nuevo para el estudio de las funciones. Las preguntas elaboradas guiaban al estudiante para que se fuera profundizando en las características de los objetos matemáticos (funciones en este caso) y éstas se pudieran caracterizarse desde diversos sistemas de representación.

El permitir que el estudiante elaborara conjeturas a partir de los resultados obtenidos y pusiera a prueba hizo que el conocimiento involucrado fuera vivenciado por ellos y que los procesos de análisis, generalización, deducción y socialización adquirieran gran significado dentro del aprendizaje del contenido matemático involucrado.

DIFICULTADES DETECTADAS EN LA IMPLEMENTACION DE LA INNOVACION

- Falta continuidad para aplicar los talleres.

Esta se presentó especialmente después de la implementación del primer taller de función cuadrática, en algunas semanas no tuvimos clase con los cursos en los que se desarrolló la innovación, esto se debió a cambios en el horario de clase por jornadas pedagógicas, paros, reuniones de nivel, cambio de día en el horario, etc. Este hecho hizo que se perdiera el interés de los estudiantes y se necesitara más tiempo para retomar las actividades que quedaban suspendidas.

- Falta de espacios para reuniones de los profesores que participamos en el proyecto.

En algunas ocasiones debimos dejar cursos solos para cumplir con las actividades asignadas para la reunión de los viernes o para analizar los resultados, dificultades y posibles soluciones a las mismas en la aplicación de los talleres. La reunión de área es los días lunes y en ella se trabaja conjuntamente con el área de ciencias (biología, química y física) y por lo general se emplea para planear o discutir con actividades generales como: definición de objetivos y logros del área, análisis del rendimiento académico al finalizar cada trimestre, estrategias para la nivelación, revisión de aspectos del PEI, preparación del día de la ciencia, etc. por lo tanto tampoco se contó con este espacio.

- Cambio de profesor.

En uno de los cursos en el que se aplicó el proyecto existieron tres profesores en el transcurso del año y finalmente no se aplicó toda la secuencia diseñada.

- Problemas con los materiales para el proyecto.

Fue un poco difícil la actividad en la sala de sistemas con el programa DERIVE porque en ella se dictan clases de sistemas, tecnología y comercio (manejo de un paquete para contabilidad), entonces se tuvo que cuadrar un horario provisional que en ocasiones no se pudo cumplir, además existen pocos computadores en buen estado.

Luego tuvimos problemas para conseguir la póliza para las calculadoras y se retrasó la aplicación de la tercera parte del taller de cuadráticas, posteriormente se trabajó en cada curso con nuestra calculadora lo que hizo que se empleara más tiempo para que todos los grupos pudieran poner a prueba sus conjeturas.

- No se abordó el tema de funciones trigonométricas.

Aunque desde el inicio del proyecto sabíamos que este tema no se incluía consideramos que los estudiantes que no van a seguir en el plantel llegan en desventaja, pues en física se abordo el tema pero de manera muy superficial.

LOGROS DEL PROYECTO

- Se inició un proceso de cambio dentro del área de matemáticas con miras a lograr un cambio de metodología que repercuta en un mejor desempeño de los estudiantes en la misma.

- Los estudiantes tienen una participación activa en su proceso de adquisición del conocimiento matemático, no reciben pasivamente una información, trabajan en equipo y ellos mismos construyen el conocimiento, aprenden del ensayo, del error y de la socialización de ideas. Creemos que la visión que en este momento tienen de la asignatura a cambiado favorablemente.

- Sirvió como motivación para empezar un trabajo en equipo entre los profesores del área, no solo para cumplir con el proyecto, sino por la convicción de que es urgente un cambio en todos los niveles y que este solo se logra si hay comunicación e interés por parte de todos.

- Cambió nuestra visión a cerca del contenido matemático involucrado, se vio la necesidad de hacer diseños de aula que presenten los conceptos en forma secuencial e integradora. El conocer los sistemas de representación y caracterizar los conceptos en cada uno de ellos permite que éstos se construyan sólidamente.

- Se propició un mayor acercamiento entre profesores y estudiantes, pues al cambiar completamente la metodología de la clase se crearon espacios para intercambiar inquietudes y conocimiento, tanto la actitud de los estudiantes como la de nosotros es más espontánea y dinámica.

- Se reconoció la importancia de la tecnología en el aula y especialmente de la calculadora gráfica como herramienta para facilitar y consolidar la construcción de conceptos matemáticos. Aunque no se trabajó mucho con ellas en el aula los estudiantes están motivados por que han podido agilizar las actividades y pueden poner a prueba sus conjeturas.

- El estudiante y la comunidad educativa reconocen el esfuerzo que se está haciendo desde el área para mejorar el rendimiento académico y desmitificar que la matemática es la materia más difícil y aburrida del pensum.

PROYECTO DE INNOVACION-PEI Y PLAN DE ESTUDIOS

El eje del PEI del C.E.D Brasilia es la comunicación y creemos que con el proyecto está se mejora sustancialmente entre profesores-estudiantes, profesores del área y estudiantes-estudiantes.

Entre los estudiantes y profesor porque la metodología exige un mayor acercamiento para que por una parte el estudiante pueda expresar con confianza sus ideas, conjeturas, inquietudes, dudas, etc. y por otra parte para que el profesor por medio de preguntas y aclaraciones oriente efectivamente el trabajo y facilite la comprensión del contenido matemático involucrado.

Entre los estudiantes porque al trabajar en grupo deben ser claros en su expresión (escrita, gráfica y oral) para que los demás le comprendan y puedan así resolver entre todos las actividades propuestas y ponerse de acuerdo en las estrategias para realizar las exposiciones y escritos. También se mejora el proceso de comunicación porque la tolerancia, el respeto por las ideas de todas las personas involucradas y el saber escuchar se convierten en un elemento muy importante.

Entre los profesores del área porque cobra gran importancia el trabajo en equipo, para elaborar estrategias de enseñanza, afrontar en conjunto las dificultades surgidas y buscar soluciones, así como también para evaluar críticamente el trabajo de los estudiantes y el desempeño nuestro en las clases y actividades.

Respecto a la articulación del proyecto con el Plan de Estudios, actualmente el colegio se encuentra en la elaboración del mismo y por esta razón la participación en el proyecto nos permite hacer aportes significativos, no solo para diseñar nuestro currículo en matemáticas en grado décimo, sino para permear esta experiencia en los demás cursos.

La idea nuestra es hacer una reforma a nivel de contenidos desde grado 6° hasta grado 11° e impulsar la resolución de problemas como eje orientador del proceso y que el uso de la tecnología (cabri, Derive, calculadora gráfica) se convierta en una herramienta que permita acercarse al conocimiento desde otra perspectiva y haga éste más sólido y enriquecedor.

Por otra parte consideramos que nuestra visión acerca del proceso educativo en general ha cambiado, tenemos más conocimiento acerca de los procesos de enseñanza y aprendizaje, del papel del estudiante y del profesor; y por ello podemos hacer aportes para la construcción de un modelo de enseñanza en el C.E.D Brasilia o al menos en la parte matemática.

Evaluación de la Función lineal y la Función cuadrática.

Nombre: Curso: Fecha:

Esta es una evaluación que hace parte del Proyecto ICEP, asesorado por la Universidad de los Andes, en el cual participa su profesor de matemáticas. Con esta evaluación queremos que usted tenga la oportunidad de mostrar lo que ha aprendido sobre los temas estudiados.

Lea cuidadosamente todas las preguntas, contéstelas todas, en el orden que quiera, utilizando esfero. Escriba **todas** las ideas que piense en el proceso de solución. No borre ningún paso hecho y en caso de equivocarse encierre en un cuadrito el error. Si no puede contestar alguna de las preguntas, escriba por qué no lo puede hacer.

Preguntas

1) De la función f conocemos algunos de sus valores que se presentan en la siguiente tabla:

x	-2	3	4
y	-8	12	16

¿Es f una función lineal? Explique detalladamente su respuesta.

2) Un estudiante hace la siguiente afirmación:

El punto (-1, -1) pertenece a una línea recta que tiene pendiente 2 y corta al eje Y en el punto (0, 1).

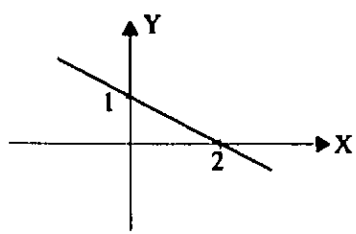
¿Está de acuerdo con la afirmación del estudiante? Escriba en qué se basa su acuerdo o desacuerdo con la afirmación del estudiante.

3) La tabla siguiente muestra algunos valores de una función lineal:

x	3	6	p
y	7	q	35

Encuentre los valores de p y q, escribiendo detalladamente lo que hizo para hallarlos.

4) La siguiente es la gráfica de una función:



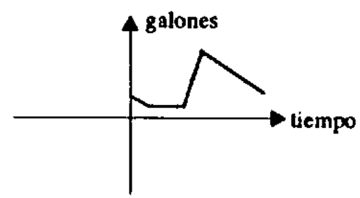
Escriba, al menos, tres afirmaciones verdaderas sobre la función, explicando en qué se basa para hacer cada afirmación.

5) En un periódico aparece la siguiente afirmación:

En Colombia, el desempleo aumentó proporcionalmente durante los últimos meses.

Usted quiere mostrar de la manera más clara posible a sus compañeros de clase, usando sus conocimientos de matemáticas, lo que entiende con tal afirmación. Escriba todos los detalles que incluiría en su explicación.

6) La siguiente gráfica muestra la cantidad de galones de metanol que había en el tanque del automóvil de Juan Pablo Montoya durante una parte del recorrido de las 500 millas de Indianápolis.



Escriba tres afirmaciones verdaderas respecto de la situación representada en la gráfica, explicando en qué se basa para hacer cada afirmación.

RESULTADOS DE LA EVALUACIÓN DE FUNCIÓN LINEAL

Curso 1002

Número de estudiantes evaluados: 45.

Pregunta 1.

- Un estudiante no contesto.
- 25 estudiantes realizaron la gráfica en el plano cartesiano para responder la pregunta, 22 de ellos afirmaron que sí era función lineal, algunas afirmaciones para sustentar la respuesta fueron:

  - "Al ubicar los puntos da una recta".
  - "Todos los elementos de X tienen una única imagen, además todos sus puntos forman una línea recta".
  - "El cociente de sus divisiones es 4, $K=4$ es decir es de directamente proporcional y también los elementos de X tiene y una y solo una imagen en Y".
  - "Por que cada una de las componentes X tienen una sola imagen en Y; además los puntos unidos forman una línea recta, y su punto de corte es el origen o sea (0,0)".
  - "Esta es función por que pasa por el origen".
  - "Si por que todos los números de X tienen una imagen en Y".

Las dos últimas afirmaciones fueron las que predominaron.

Tres estudiantes afirmaron que la función no es lineal (uno de ellos realizó mal la gráfica) por que:

- "Cuando pasa por (0,0) es de tipo proporcional".
- "Pasa por (0,0) y la lineal no tiene constante de proporcionalidad".
- "No es función por que no pasa por el punto".

- 19 estudiantes no realizaron la gráfica para contestar la pregunta, aunque algunos hacen alusión indirecta a ella. La mayoría sólo hace alusión a las condiciones vistas para una función en general y no propiamente a las características de linealidad, algunas de las respuestas fueron:

  - "Si por que pasa por (0,0)".
  - "Si por que todas tienen parejas".
  - "Si es función pues los elementos de X se relacionan una sola vez con los de Y".
  - "Si es función por que todos sus términos tienen una sola imagen".
  - "No por que no pasa por el punto (0,0) de corte".
  - "No todos los elementos de X se relacionan con Y solo dos elementos tienen imagen".

Pregunta 2.

- 10 estudiantes no contestaron.
- Están de acuerdo: 26.

  - 8 estudiantes hallan el valor numérico de la pendiente utilizando los puntos *(-1,-1)* y *(0,1)* y encuentran que efectivamente es 2.
  - 16 estudiantes realizan la gráfica y encuentran que *(-1,-1)* está en la recta, además todos ellos usan el concepto gráfico de pendiente y afirman que: "desde (-1,-1) puedo subir 2 y hacia la derecha 1 y corta al eje Y en el punto (0,1)", "si subo 2 y 1 a la derecha quedo en el punto (0,1)", "si estoy de acuerdo por que si me ubico en el punto (-1,-1) y subo 2 y corro 1 hacia la derecha, es decir 2/1 no solo me da pendiente positiva sino que el cociente de la división es igual a 2 hasta llegar al punto (0,1) cortando en Y".
  - Dos hallan la ecuación de la recta con pendiente igual a 2 y que pasa por *(-1,-1)* encontrando que el punto de corte es *(0,1)*.

- No están de acuerdo: 9.
  - No hallaron correctamente el valor de la pendiente (afirmaron que era 1 o 0), no realizaron bien la gráfica o escribieron afirmaciones que no son claras y no permiten deducir lo que querían decir: "el punto (-1,-1) tiene una pendiente de 2 y su punto de corte con el eje Y es de (0,1) con la constante de una variable", "no ya que en Y lo corta en (0,-1)", "no da una

recta y los puntos que dan no son lógicos como (-1,-1) y con la pendiente no coincide", "no es función lineal", "no porque no parte del origen y solo se desplaza en Y y en X negativos".

Pregunta 3

- No contestan: 12 estudiantes.
- Hallan lo valores correctos de *P* y *Q: 24*.

  - 5 realizan la gráfica teniendo en cuenta que la función es proporcional y por ello pasan la recta por los puntos *(3, 7)* y *(0, 0)* y luego leen las coordenadas respectivas para *P* y *Q*.
  - 5 realizan la gráfica y adicionalmente efectúan la división de 3 en 7 y buscan los valores de *P* y *Q* para obtener divisiones equivalentes, quizás lo hacen por ensayo y error porque no hay evidencias de los procedimientos utilizados.
  - 4 resuelven el ejercicio utilizando regla de tres.

- No hallan los valores correctos de *P* y *Q*: 9 estudiantes. De éstos 8 no realizan bien la gráfica, por el mal manejo de escalas o por no tener en cuenta que la función es proporcional. 1 estudiante dividió 3 en 6 y encontró que $Q=0.2$ y $P=0.5$.

Pregunta 4

- No contestan: 3 estudiantes.

Dentro de las características mencionadas los estudiantes hacen alusión a:

- La pendiente: Es negativa (otros afirman que es positiva) y hallan su valor numérico: *-½*, *1*, $-\dot{0}.5$, *½*, "es negativa porque está inclinada la recta hacia la izquierda".
- El punto de corte con Y: mencionan que es *(0, 1)* o *(0, 0)*.
- No es directamente proporcional: "no pasa por (0, 0)", "no pasa por el origen".
- Es función afín: "su punto de corte es (0, 1)", "la representación es una línea recta".
- Es función: "los componentes de *X* tienen una sola imagen en *Y*".

- El punto de corte en *X: (2, 0) o (0, 2).*
- Un punto es *(2, 1).*
- Ecuación *2x+1.*
- "El dos tiene una sola imagen".

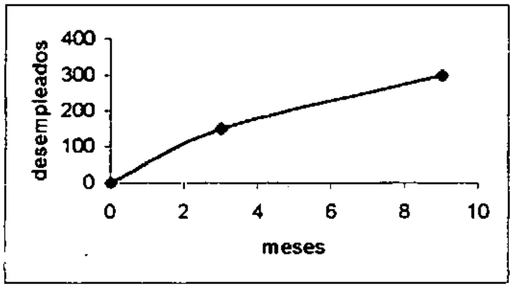
Pregunta 5

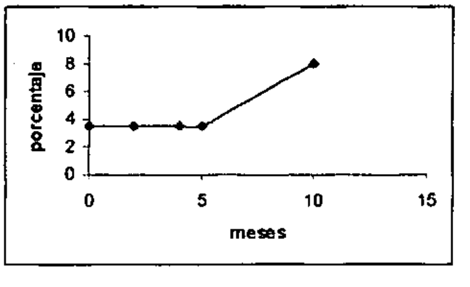
- No contestan: 14 estudiantes.

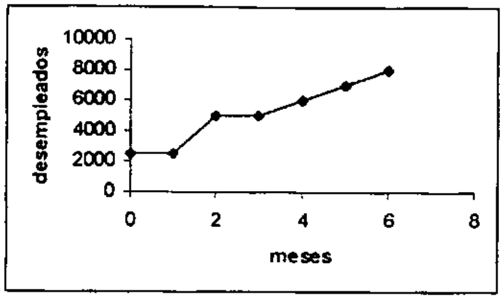
En este punto existe diversidad de respuestas que no son fáciles de interpretar por la poca información que tienen, las siguientes respuestas reúnen la variedad encontrada:

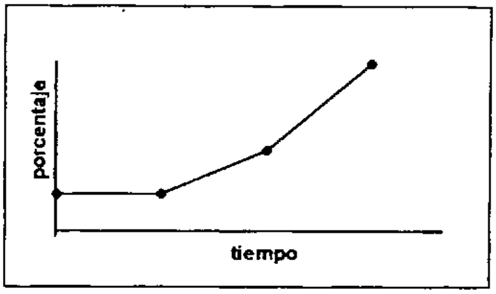
♦ Mencionan que se requiere más información:
  - "Se tendría que saber el número de desempleados".
  - "Miraría la suma de desempleados que había antes de que empezara a aumentar luego de los datos que halla conseguido calcularía de cuanto fue el aumento durante esos meses y si es necesario haría la gráfica".

♦ Realizan gráficas para sustentar, dentro de ellas existen algunas que pasan por *(0,0)* pero no especifican el significado de los ejes, en otras se invierten las variables (*X* desempleados *Y* meses), en otras se relacionan número de desempleados con fábricas cerradas o número de personas y número de desempleados. Algunas gráficas son:

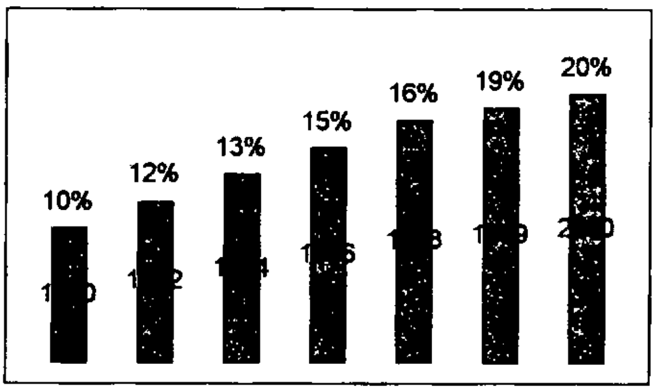








- Un solo estudiante realizó diagramas de barras teniendo en cuenta el tiempo en años y el porcentaje de desempleo, pero no se evidencia proporcionalidad.



- Un estudiante explico con un ejemplo relacionando empresas embargadas y número de desempleados: "200 empresas embargadas 100 desempleados, 100 empresas embargadas 50 desempleados, 50 embargadas y 25 desempleados", halló los cocientes y encontró la constante de proporcionalidad $K= 2$ pero no especificó el significado.

Pregunta 6

No contestan: 23 estudiantes.

- Contestan la pregunta: 22 estudiantes.

  - 7 estudiantes relacionan correctamente las variables tiempo y cantidad de gasolina, para hacer la descripción utilizan intervalos de tiempo, por ejemplo:

    "En el tercer intervalo aumentó la gasolina en poco tiempo, en el cuarto intervalo bajo el metanos y en el segundo intervalo se mantuvo el mismo gasto de metanol."

    "Durante un tiempo recorrió cierta distancia o sea que gastó gasolina, después se detuvo o sea que no gastó gasolina, después siguió su recorrido y allí pudo haber gastado todos los galones de metanol con el que había empezado".

    "Al principio tenía poco metanol estuvo quieto por un momento ya que no gasta metanol luego gasto absolutamente todo el metanol que anteriormente había hechado o cargado ".

    "Durante el primer tiempo los galones del automóvil bajaron, en el segundo tiempo se mantuvieron estables y en el tercer tiempo los galones subieron"

  - 4 estudiantes reconocen la dependencia entre las variables pero no especifican como es la variación en cada intervalo de tiempo presente en la gráfica. Algunas respuestas fueron:

    "Entre menos tiempo gaste más galones consume el vehículo"

    "Según la gráfica hubo un determinado tiempo en el que el carro tenía mayor cantidad de galones de metanol y entre más tuviera menos tiempo gastaria".

    "El tiempo depende de la cantidad de galones".

  - 2 estudiantes hacen alusión a las caracteristicas de la gráfica sin hacer mención directa de las variables:

    "No es directamente proporcional porque no sale del punto de origen, es de pendiente negativa, no es función".

    "La pendiente de esta gráfica es indefinida porque se desconocen las parejas en si o la escala correspondiente"

  - 9 involucran la velocidad para explicar la gráfica:

    "Entre menos galones tenga el carro no podría aumentar su velocidad por lo cual no utilizara demasiado tiempo".

"Cuando tenia dos galones bajo su velocidad, después la mantuvo estable, luego aumento su velocidad y también su combustible y por último bajo su velocidad".

"Al tener más combustible el tiempo que se empleara es menor ya que el automóvil aumentara la velocidad, pero se debe tener en cuenta que al aumentar la velocidad el combustible se agotará más rápido".

RESULTADOS EVALUACIÓN DE MATEMÁTICAS

FUNCIÓN LINEAL

CURSO 1103

PREGUNTA 1.

De La función f conocemos algunos de sus valores que se presentan en la siguiente tabla:

X	-2	3	4
y	-8	12	16

¿Es una función lineal? Explique detalladamente su respuesta.

RESPUESTAS

I. A. 15 Alumnos representan gráficamente la función y dan las siguientes afirmaciones:

- 1 estudiante, Si porque su resultado es una recta
- 4 estudiantes, Si porque pasa por el punto (0,0)
- 1 estudiante, Si es lineal porque sube 4 y avanza 1
- 1 estudiante. Si porque a cada número de x se le asigna un número en y
- 1 estudiante, Para que sea una función tiene que resolverse con lo siguiente $y = 4x$
- 1 estudiante. Si porque el punto de corte pasa por la pendiente –2 y –8
- 1 estudiante, Si porque tiene un punto de partida y pasa por (0,0)
- 1 estudiante. Si porque tiene un punto de partida y un punto de corte
- 1 estudiante, Si porque son puntos y al trazar una línea recta se unen sea el punto negativo o no.
- 3 estudiantes, No dan explicación tres alumnos

B. 3 estudiantes. hacen la gráfica pero utilizan mal las escalas y justifican pero que no es lineal.
C. 1 estudiante. No contesto porque no ley muy bien las guías
D. 1 estudiante. Trato de hacer la gráfica pero no termino
E. 3 estudiantes. Es función lineal porque a cada elemento de la x se le a asignado un elemento de la y.
F. 1 estudiante. No porque para que sea función lineal tiene que estar acompañada $f(x) = ax + b$
G. 1 estudiante. No entiende que es una función lineal
H. 1 estudiante Si porque analizando bien los números encontramos que el que los divide es 4 entonces realizando la gráfica pasa por el punto (0,0)
I. 1 estudiante, Si porque al unir los puntos podemos hallar su pendiente y su punto de corte así se convierte en una función lineal.
J. 1 estudiante. Si porque en todos los datos se esta haciendo una operación con el mismo número

PREGUNTA 2.

Un estudiante hace la siguiente afirmación:
El punto (-1, -1) pertenece a una línea recta que tiene pendiente 2 y corta al eje Y en el punto (0,1)
¿Esta de acuerdo con la afirmación del estudiante? Escriba en qué se basa su acuerdo o desacuerdo con la afirmación del estudiante.

RESPUESTAS

A. 8 Estudiantes hacen la representación gráfica correcta para verificar la información
B. 1 estudiante, No estoy de acuerdo porque la recta cortaría en el punto –2
C. 5 estudiantes Representa gráficamente los puntos de manera incorrecta negando la afirmación.
D. 1 estudiante, No estoy de acuerdo con la afirmación porque la recta numérica no parte el punto (0,1)
E. 1 estudiante, No porque en el ejercicio el eje y se corta en –1 y la pendiente es 1
F. 1 estudiante, No estoy de acuerdo porque el eje Y lo partimos en el punto 2
G. 1 estudiante, No estoy de acuerdo porque los puntos no concuerdan con la pendiente
H. 1 estudiante. Si, porque al hacer la gráfica y analizando muy bien los puntos da una línea totalmente recta

I. 1 estudiante, Si. porque en la gráfica coinciden los puntos
J. 1 estudiante, No es cierto lo que dice, porque no es pendiente y no pasa por 2
K. 1 estudiante, El estudiante tiene la razón en la pendiente más no en el punto de corte
L. 1 estudiante, Si el primer punto (-1.-1) y se desplaza como una línea recta no puede cortar en el eje Y con el punto (0,1)
M. 1 estudiante, No me acuerdo como solucionarlo

PREGUNTA 3

La tabla siguiente muestra algunos valores de una función lineal (proporcional)

X	3	6	P
y	7	Q	35

Encuentre los valores de p y q. escribiendo detalladamente lo que hizo para hallarlos.

RESPUESTAS

A. 15 estudiantes no contestaron porque no entienden la pregunta
B. 6 estudiantes representan gráficamente la función teniendo en cuenta que es proporcional y de esa manera hallan las coordenadas p y q de los puntos
C. Si me dan el número 3, el de abajo es la mitad + uno = 7
 # 6 motor + 1 = 13
 #35 lo −1 ÷2 =17
D. p = q porque va ascendiendo proporcionalmente de 3 en 3.
E. No se que ecuaciones hacer para resolverlo
F. 4 estudiantes obtuvieron valores errados de p y q multiplicando por diferentes números.

PREGUNTA 4

La siguiente es la gráfica de una función:

Escriba, al menos, tres afirmaciones verdaderas sobre la función. explicando en qué se basa para hacer cada afirmación.

RESPUESTAS

AFIRMACIONES DE LA GRÁFICA

- 4 estudiantes. que la función sube 1 y avanza 2
- 1 estudiante, que la línea es diagonal
- 5 estudiantes. que es una pendiente negativa
- 8 estudiantes que el punto de corte es (0,1)
- 2 estudiantes que su pendiente es −2
- 2 estudiantes que sube 1 y retrocede 2

- 2 estudiantes. la gráfica corta en el punto 1
- 5 estudiantes, tiene función 2 x + 1
- 1 estudiante, su grado de pendiente es 2
- 1 estudiante, su punto de corte no pasa por el cero
- 1 estudiante. proporcionalidad se necesita para ver hasta donde llega su inclinación
- 3 estudiantes, $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$
- 1 estudiante. aquella línea en el plano es única
- 3 estudiantes, la recta es negativa
- 2 estudiantes. es una función lineal
- 2 estudiantes, es positiva
- 2 estudiantes, corta al eje x y Y
- 3 estudiantes. pasa por 1 en Y y 2x
- 2 estudiantes, pendiente –1/2
- 1 estudiante. la función no es lineal no pasa por (0,0)
- 1 estudiante, tiene pendiente positiva
- 1 estudiante. la pendiente va en relación ½
- 1 estudiante, no me acuerdo de esto
- 5 estudiantes. no contestaron
- 1 estudiante, no se de que función viene por eso no puedo dar afirmación.

PREGUNTA 5.

En un periódico aparece la siguiente afirmación:

En Colombia, el desempleo aumentó proporcionalmente durante los últimos meses.

Usted quiere mostrar de la manera más clara posible a sus compañeros de clase, usando sus conocimientos de matemáticas. lo que entiende con tal afirmación. Escriba todos los detalles que incluiría en su explicación.

RESPUESTAS

- 9 estudiantes. realizan gráficas de funciones proporcionales, partiendo o pasando por el punto (0,0),
- 4 estudiantes, hacen la representación del aumento de desempleo pero no de forma proporcional, sino realizando una función escalonada
- 3 estudiantes. realizan una representación en diagramas de barras. con datos en porcentaje y en las barras van disminuyendo explicando la disminución de empleo
- 1 estudiante, realiza un diagrama de barras pero en aumento de desempleo
- 5 estudiantes no realizaron representación gráfica. sino que explican con las siguientes palabras:

- Les haría una gráfica colocando la disminución de desempleo en el país, haciendo una figura que explique como va disminuyendo últimamente el desempleo
- Yo entiendo por esa afirmación que entre más tiempo pase en Colombia. va haber más desempleo
- Una ecuación proporcional es aquella que pasa por su punto de eje mediante los cuales va su punto principal
- Pues primero según los datos que me den haría una gráfica, explicando las cifras de desempleo meses antes y como ha ido aumento gradualmente
- En Colombia el desempleo aumentó proporcionalmente durante los dos últimos meses al contrario del bimestre pasado, es decir que la tasa de desempleo a aumentado en cifras mucho más mayores dependiendo del nivel económico

* 6 estudiantes. no responden porque no la entienden

PREGUNTA 6.

La siguiente gráfica muestra la cantidad de galones de metanol que había en el tanque del automóvil de Juan Pablo Montoya durante una parte del recorrido de las 500 millas de Indianápolis.

Escriba tres afirmaciones verdaderas respecto de la situación representada en la gráfica, explicando en qué se basa para hacer cada afirmación.

RESPUESTAS

- 1 estudiante, no es una función lineal, no tiene una pendiente porque no es función lineal
- 1 estudiante, entre menor sea el tiempo mayor el número de galones consume; entre mayor sea el tiempo menor número de galones consume; la gráfica tiene 4 intervalos
- 1 estudiante, esta no es una ecuación lineal; no se cuántos galones tendría que meterle al carro para corres las 500 millas
- 1 estudiante, Su recorrido es una hipérbola porque es una curva
- 1 estudiante, al partir el auto gasto menos cantidad de gasolina y después se mantuvo un tiempo sin gastar gasolina. después de esto aumentó visiblemente el gasto de gasolina en no mucho tiempo. posteriormente a esto, gasto un poco cantidad de gasolina en un tiempo no muy mayor a la que gasto la gasolina y en este período se le fue agotando
- 1 estudiante, en el primer intervalo la gráfica se encuentra en coordenada (1,1) al comenzar la carrera gasto menos galones en menos tiempo. al ir más avanzando el tiempo gasto más galones
- 1 estudiante, yo entiendo que Juan Pablo gasto 2 galones en un segundo y 1 galón en 2 segundos: 6 galones en 5 segundos y 6 galones en 11 segundos menos tiempo más galones. entre más tiempo menos galones; más galones menos tiempo. menos galones más tiempo
- 1 estudiante. que había poca cantidad en el tanque para correr las millas
- 1 estudiante, no es una función lineal
- 1 estudiante, empezó con una cantidad después disminuye la cantidad de gasolina. corre un tiempo con la misma cantidad de gasolina después subió los galones de gasolina
- 1 estudiante. recta en el tercer intervalo. curva en el cuarto intervalo. bandera amarilla en el segundo intervalo. primer intervalo curva corta
- 1 estudiante. no es una función lineal porque va curva y no recta
- 1 estudiante. Montoya gasto un galón en un metro se siguió desplazando sin cambiar de galón luego gasto 3 galones en un metro subiendo, luego descendió 5 metro y gasto 1 galón y medio.
- 1 estudiante, en la partida sus galones disminuyeron demora un tiempo para gastar combustible, tuvo más combustible y tiempo
- 1 estudiante. Montoya. bajo la velocidad y gasto menos gasolina según el primer intervalo de tiempo. en el segundo no aceleró mucho y gasto la misma cantidad de gasolina, en el tercero subió la velocidad y gasto mucho más gasolina
- 1 estudiante, en 3 horas él gasto 5 galones de gasolina y con los 5 galones a recorrido 8 Km
- 1 estudiante. en galones 5 m avanza 1 en tiempo 3 avanza 7 m
- 1 estudiante, que no es una función lineal. que mientras recorría las 500 millas iba gastando galones de metanol que no sabía cuánto medía la pista en Indianápolis. para saber cuántos galones eran necesarios
- 1 estudiante. a medida del tiempo se va gastando metanol, no es una función lineal

- 1 estudiante. es una función proporcional ya que entre más metanol dura más tiempo, entre menos metanol durará en la pista menos tiempo, estoy confundida con la gráfica
- 1 estudiante, comenzando tenía dos galones, cuando recorrió 250 millas consumió un galón y en las otras 250 millas consumió el otro galón y luego entro a Pits
- 7 estudiantes no responden a la pregunta

POR ÚLTIMO SEÑALO QUE 13 ESTUDIANTES NO RESPONDIERON LA TOTALIDAD DE LA EVALUACIÓN ARGUMENTANDO QUE NO HABÍAN ESTUDIADO Y POR TAL RAZÓN NO ESTABAN PREPARADOS.

faltaron a clase 5 estudiantes

ANÁLISIS CONJUNTO DE LA EVALUACIÓN DE FUNCIÓN LINEAL

Total de estudiantes evaluados 119.

Pregunta 1

- No contestan 13 estudiantes.
- Predomina la representación gráfica para responder a la pregunta, algunos contestan mal por problemas con las escalas o por que no localizan correctamente los puntos.
- Aquellos que no realizan la gráfica hacen mención a las características de una función en general y no acerca de la linealidad.
- Solo unos pocos hallan la constante de proporcionalidad.
- Existe confusión para diferenciar las funciones afin y proporcional.

Pregunta 2

- No contestan 15.
- La mayoría para verificar la información realizó una gráfica, los que afirman no estar de acuerdo realizan mal dicha representación.
- Existe un alto número de estudiantes que hallan el valor de la pendiente tomando los dos puntos dados para verificar que es 2 y consideran que por ello la afirmación es correcta.

Pregunta 3

- No contestan 30.
- Nuevamente predomina la representación gráfica. Teniendo en cuenta que la función es proporcional toman los puntos (0,0) y (3,7) y hallan los valores de p y q leyendo las correspondientes coordenadas en la gráfica. Algunos encuentran valores diferentes por que realizan mal la gráfica.

- En la mañana y en el curso 1002 existen alumnos que hallan la constante de proporcionalidad y por ensayo y error encuentran los valores de p y q, otros lo hacen usando regla de 3.

Pregunta 4

- No contestan 23.
- Hacen afirmaciones respecto a la pendiente, algunos tienen en cuenta el significado gráfico que se utilizó en el proyecto (unos olvidan la convención y toman desplazamiento en x / desplazamiento en y), otros hallan su valor numérico (2,-2,-½,½) y mencionan su signo (la recta es negativa, es positiva).
- Hay afirmaciones respecto al punto de corte en y.
- Algunos mencionan que la función es afín o de dependencia lineal por que no pasa por (0,0).
- Muy pocos escriben la expresión simbólica correspondiente, escriben ecuaciones como: $2x+1$, $-0.5x+1$, $-\frac{1}{2}x+1$.

Pregunta 5

- No contestan 33.
- Realizan gráficas proporcionales tomando el tiempo en meses o en años.
- Realizan funciones escalonadas (lineales por trozos).
- Algunos pocos hacen diagramas de barras en los que no siempre existe proporcionalidad.
- Dan una explicación verbal presentando ejemplos, o afirmando que con los datos recogidos se elaboraría una gráfica pero no explican como sería esta y algunos mencionan que faltan datos.

Pregunta 6

- No contestan 43.

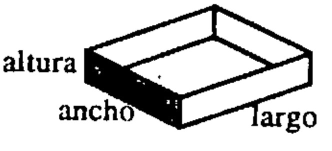
- Afirman que no es función lineal por que no tiene pendiente o porque no pasa por (0,0).
- Hablan de la dependencia entre las variables pero la mayoría no tiene en cuenta que esta se debe hacer de acuerdo a los intervalos de tiempo representados en la gráfica.
- Muchos no tuvieron en cuenta que la gráfica presentaba la cantidad de galones de metanol y en su lugar hablan del gasto del mismo.
- Algunos le asignan valores a los ejes y/o trabajan por intervalos.
- Existe una gran cantidad de estudiantes que incluyen la velocidad para hacer las afirmaciones.

NOTA: 13 estudiantes del curso 1003 no contestaron ninguna pregunta.

EVALUACIÓN ACERCA DEL TRABAJO EN FUNCIONES CUADRÁTICAS
SEPTIEMBRE DE 2000

Para responder esta evaluación deben trabajar en grupos de dos estudiantes, disponen de una (1) semana a partir de hoy, y pueden utilizar calculadora. Esta evaluación es una oportunidad para que ustedes demuestren lo que han comprendido a través de la realización de los talleres anteriores. Se espera que usen tablas, gráficas, ecuaciones; que utilicen datos de otras parejas; que hagan conjeturas; que den explicaciones; que examinen casos particulares; es decir, **que hagan todo lo necesario para responder de manera justificada sus respuestas**. Deben entregar un reporte que recoja sus respuestas a las tareas que aquí se plantean y todas las explicaciones y comentarios que consideren necesarios para **demostrar todo lo que han comprendido** acerca del asunto que se está evaluando.

En la evaluación van a continuar trabajando en el mismo contexto, es decir, con las cajas formadas a partir de cortar cuadrados de lado x en cada una de las esquinas de una hoja de papel de 24 cm. de largo, y de 20 cm. de ancho. En esta ocasión van a trabajar con la función que relaciona la medida del lado del cuadrado con la medida del área de una de las caras determinadas por el ancho de la caja. (Nos referimos a la cara sombreada en el dibujo que representa la caja).



Evaluación

1) Si x representa la medida del lado de cualquier cuadrado recortado en cualquiera de las cajas construidas y w representa la medida del área de la cara determinada por el ancho de la caja, escriban una ecuación que les permita calcular w a partir de x.

2) Determinen el conjunto de todos los valores que puede tomar la medida del área de la cara determinada por el ancho de cualquiera de las cajas que es posible construir en el contexto.

3) Utilizando la notación que se emplea para las funciones, en la que se expresa el hecho de que hay una variable de la que depende la función, expresen la función área de la cara determinada por el ancho de la caja y llámenla f_8. Describan algunas características de la expresion.

4) Describan el conjunto de valores que puede tomar la función f_8, teniendo en cuenta la mayor cantidad posible de características.

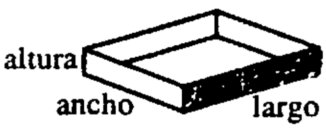
5) Hagan una gráfica cartesiana de la función f_8 y mencionen todas las características de la función que se pueden ver en dicha gráfica.

6) Si al comparar varias parejas de cajas se encuentra que las alturas difieren en la misma cantidad, ¿será cierto que sus respectivas áreas de una de las caras determinada por el ancho de la caja, también difieren en una misma cantidad?

EVALUACIÓN ACERCA DEL TRABAJO EN FUNCIONES CUADRÁTICAS
SEPTIEMBRE DE 2000

Para responder esta evaluación deben trabajar en grupos de dos estudiantes, disponen de una (1) semana a partir de hoy, y pueden utilizar calculadora. Esta evaluación es una oportunidad para que ustedes demuestren lo que han comprendido a través de la realización de los talleres anteriores. Se espera que usen tablas, gráficas, ecuaciones; que utilicen datos de otras parejas; que hagan conjeturas; que den explicaciones; que examinen casos particulares; es decir, **que hagan todo lo necesario para responder de manera justificada sus respuestas.** Deben entregar un reporte que recoja sus respuestas a las tareas que aquí se plantean y todas las explicaciones y comentarios que consideren necesarios para **demostrar todo lo que han comprendido** acerca del asunto que se está evaluando.

En la evaluación van a continuar trabajando en el mismo contexto, es decir, con las cajas formadas a partir de cortar cuadrados de lado x en cada una de las esquinas de una hoja de papel de 24 cm. de largo, y de 20 cm. de ancho. En esta ocasión van a trabajar con la función que relaciona la medida del lado del cuadrado con la medida del área de una de las caras determinadas por el largo de la caja. (Nos referimos a la cara sombreada en el dibujo que representa la caja).



Evaluación

1) Si x representa la medida del lado de cualquier cuadrado recortado en cualquiera de las cajas construidas y t representa la medida del área de la cara determinada por el largo de la caja, escriban una ecuación que les permita calcular t a partir de x.

2) Determinen el conjunto de todos los valores que puede tomar la medida del área de la cara determinada por el largo de cualquiera de las cajas que es posible construir en el contexto.

3) Utilizando la notación que se emplea para las funciones, en la que se expresa el hecho de que hay una variable de la que depende la función, expresen la función área de la cara determinada por el largo de la caja y llámenla f_7. Describan algunas características de la expresión.

4) Describan el conjunto de valores que puede tomar la función f_7, teniendo en cuenta la mayor cantidad posible de características.

5) Hagan una gráfica cartesiana de la función f_7 y mencionen todas las características de la función que se pueden ver en dicha gráfica.

6) Si al comparar varias parejas de cajas se encuentra que las alturas difieren en la misma cantidad, ¿será cierto que sus respectivas áreas de una de las caras determinada por el largo de la caja, también difieren en una misma cantidad?

CENTRO EDUCATIVO DISTRITAL BRASILIA

INFORME DE LA EVALUACIÓN FUNCION CUADRÁTICA

Curso 901 J.M.

TOTAL ALUMNOS 36

ASISTIERON 28

Respuestas a la pregunta 1

Largo.

X lado del cuadrado recortado

W área de la cara

* (20-2X)(X) 8 grupos
* 20X – $2X^2$ 1 grupo
* (20 + 2X)(X) 1 grupo

Ancho

X lado del cuadrado recortado

t área de la cara

* (24-2X)(X) 4 grupos

Respuestas a la pregunta 2

A esta pregunta todos los grupos realizaron una tabla de valores tomando valores entre 0.1 y 9.9 para luego dar respuestas como:

Largo

a) Máximo en 9.9 , 1.98

Mínimo en 0.1, 1.98

b) Máximo en 5 , 50

Ancho

Máximo en 9.9,

Mínimo en 0.1, 2.38

Máximo en 6 , 72

En este punto algunos grupos utilizaron la calculadora para analizar los valores y la gráfica dada.

Respuestas a la pregunta 3

En la notación de estas funciones todos los grupos utilizaron la dada en el taller 3 así:

$F7 = t = (24 - 2X)(X)$

$F8 = W = (24 - 2X)(X)$

Respuestas a la pregunta 4

La mayoría de grupos tomaron los mismos datos dados en el punto 2, solo 2 grupos anexaron mas valores a la tabla pero con los datos dados por la calculadora.

Respuestas a la pregunta 5

La grafica no la realizaron 3 grupos y los demás respondieron:

- Es una curva
- Máximo valor 50 con 5
- Es una función cuadrática porque x esta elevado a la dos
- No es lineal
- La pendiente es negativa
- Máximo es 72 y mínimo 2,38

Respuestas a la pregunta 6

Este punto lo contestaron solo 4 grupos , dando respuestas textuales como:

- Si porque si la altura se difiere también se difiere el ancho
- Entre mas altura menos ancho
- Si cambia en la misma cantidad como se observa en la tabla de valores
- Si porque al aumentar la altura cambia el área de una de las cajas respecto al ancho también aumenta o se difiere en la misma cantidad.
- Si porque el orden de las medidas no va afectar el área que es igual.

ALVARO RENE AREVALO RUIZ

C. E. D. BRASILIA

RESULTADOS DE LA EVALUACION DE FUNCION CUADRATICA

Curso 1002

RESPECTO AL ANCHO DE LA CAJA

Total de estudiantes: 26 distribuidos en 15 trabajos.

Pregunta 1

- 20 estudiantes escriben $20x-2x^2$ justificando que $20-2x$ es la medida del ancho de cualquier caja y x la medida del lado de cualquier cuadrado recortado, para llegar a esta expresión realizan la multiplicación $x.(20-2x)$ porque "para determinar el área de una cara determinada por el ancho y teniendo en cuenta el área para esta figura es lado por lado se multiplica la medida del ancho de cualquier caja por la variable x".
- 2 estudiantes dejaron la multiplicación indicada.
- Respuestas incorrectas: 3 trabajos (4 estudiantes):
  - $20-2x^2$
  - $20-x$
  - $2x^2$

  En ningún caso hay justificación de cómo se llego a dichas ecuaciones.

Pregunta 2

- 22 estudiantes (11 grupos) escribieron que el recorrido es *(0,50)*; todos hicieron una tabla de valores o reemplazaron distintas medidas de X en la ecuación y afirmaron que:

  "Menor: tiene que ser mayor a cero por que desde que la medida del cuadrado recortado tenga alguna magnitud la caja tendrá una cara. Mayor: como se puede ver en la caja de altura 5 es la caja cuyo valor es más alto y se puede verificar en la gráfica 50cm.^{2}. "

  "Este conjunto se determina por que se halla el área del ancho de varias cajas concluimos que el valor menor es cero y el mayor 50 por que después de 5 el área del ancho empieza a decrecer".

- Cuatro estudiantes (dos grupos) escribieron $(19.98\ cm.^2,\ 0.02\ cm.^2)$ y no sustentaron como llegaron a ese resultado, no hay tabla de valores ni reemplazos en la ecuación.

- Un estudiante escribió *(20,0)* y realiza un listado de valores que probablemente representan posibles anchos de cajas: *(19.8), (19.6).....(0.2)(0)*.

- Un estudiante no halló el recorrido escribió dominio *(0,10)*.

Pregunta 3

- 10 estudiantes (6 grupos) identifican que la función es cuadrática y no afín ni lineal, lo expresan así:

  "no es función afín, no cumple la función $f(x)= mx+b$, es una función cuadrática no es lineal".

  "esta no es afín por que X esta elevada al cuadrado, podemos decir que es una función cuadrática y en el momento de dibujarla en el plano cartesiano no nos dará una línea recta sino una curva".

- 9 estudiantes (5grupos) solo hacen mención a que la función no es lineal ni afín pero no hacen comentarios respecto a que f es cuadrática:

  "No es función lineal, no es afín, no cumple la función $f(x)= mx+b$".

  Estos estudiantes hacen alusión a las características de la gráfica, a las variables, al dominio y al recorrido:

  "Punto de corte *(0,0)*, la recta no puede ser menor a cero por que no hay centímetros negativos".

  "La variable dependiente es la magnitud de la cara determinada por el ancho y la independiente son los centímetros que vamos a tomar".

- 4 estudiantes (2 grupos) solo hacen alusión a las variables y al punto de corte:

  "El ancho depende del lado del cuadrado, el punto de corte es *(0,20)*".

- Respuestas incorrectas: el estudiante que escribió $f(x)= 20-X$ identificó "$f(x)= mx+b = 1*3 + 17 = 20$, la pendiente es positiva, X es igual al cuadrado recortado, b es igual al resultado de $X+H$" y hace una tabla de valores reemplazando en la formula $f(x)= 1X+3$.

Pregunta 4

- 1 estudiante no contesto.

- 4 estudiantes (2 grupos) explicaron que el recorrido es (0, 50) teniendo en cuenta varias características:

  - "A medida que aumenta la altura de 0 a 5, aumenta el valor de w".
  - "A medida que aumenta la altura de 5 a 9, disminuye el valor de w".
  - "Los únicos valores entre 1 y 2 no son 1.5, podemos tomar valores de 1.1 a 1.9 y así sucesivamente".
  - "Existen muchos valores intermedios, los cuales son calculados en la imaginación y por lo tanto no podemos graficarlos en el plano cartesiano".
  - "Los valores al aumentar hasta 5 son los mismos valores que toma la función f_8, cuando empieza ena disminuir, es decir si en 0.1 comienza en 1.98, en 9.8 termina en 1.98".
  - "Todos los valores que toma W = medida del área de la caja: $\{x>0$ y $x<50\}$".
  - "Más grande que cero y menor que 50"

- 8 estudiantes (4 grupos) afirman que el conjunto es *(0, 50)* sin hacer ninguna descripción.

- Respuestas incorrectas:
  - 4 estudiantes (2 grupos) no hacen alusión a las características del recorrido sino de la función o de la gráfica: "la pendiente es negativa, la pendiente es *-2*" para ellos la ecuación es $20-2x^2$. También escribe que "no es directamente proporcional, la función es creciente."
  - 1 estudiante afirma "mayor a cero y menor a cero (0, -5)" No hace ninguna explicación.
  - 1 estudiante afirma "la función f_8 puede llegar a tomar varios valores, ya que su recorrido es (0, 200) y su dominio (0, 10), porque a medida que va aumentando el área de cara, o sea es una función creciente. No es una función directamente proporcional, ya que no pasa por el punto de origen" este estudiante escribió que $f_8 = 2x^2$ *cm.*

Pregunta 5

- 3 estudiantes (2 grupos) no realizaron la gráfica, uno de ellos menciona que las características son las mismas del punto 3.

- 13 estudiantes (7 grupos)realizan la gráfica tomando más de 10 valores haciendo los respectivos reemplazos en la ecuación, en algunos se observa que para $x=10$ no le da gráficamente el valor correcto.

- 3 estudiantes (2 grupos) realizan la gráfica con poca precisión porque toman muy pocos valores y pareciera ser como si por el afán de cumplir la hubieran hecho a la carrera y mencionan que las características son la mismas que en el punto 3.

- 4 estudiantes (2 grupos) realizan dos gráficas, una de ellas es una recta que pasa por *(1, 18) y (5, 2)* creo que graficaron *20-2x*. Estos dos grupos se copiaron y tienen errores en las escalas, las unidades no tienen todas el mismo tamaño. La segunda gráfica realizada presenta también errores en la escala y corresponde a la gráfica de la parábola pedida.

- Gráfica incorrecta. Corresponde a la estudiante que escribió la ecuación $2x^2$.

  Respecto a las características observo que los estudiantes no diferencian entre aquellas propias de la representación simbólica y las de la representación gráfica, ellos mezclan las dos, por lo tanto la mayoría de las características están enunciadas en el punto 3. Mencionare aquellas distintas que incluyeron en este punto:

- "Es una parábola o una curva".
- "No es una recta".
- "La función es decreciente hasta 5 y creciente hasta 9" (Tenia bien y se ve que borro y cambio la afirmación).
- "Sus magnitudes no son directamente proporcionales".
- "La pendiente es curva" (se refiere ala gráfica).
- "No pasa por (0,0)".
- "La función es creciente y decreciente".

Considero que estos resultados reflejan lo hecho en clase, se hizo énfasis en las características desde lo gráfico y no de la representación simbólica.

Pregunta 6

- Dos estudiantes (2 grupos) no contestaron.

- Los estudiantes que contestaron la pregunta no la entendieron (yo intuía que eso iba a suceder por porque el estilo de pregunta no se había trabajado) y creyeron que se les estaba preguntando si dos cajas podrían tener la misma área en sus caras (determinadas por el ancho), esto se evidencia en respuestas como las siguientes:
  - "Si es cierto porque en los puntos 1 y 9, 2 y 8, 3 y 7 dan el mismo valor".
  - "Si es cierto puesto que la recta queda en forma de montaña porque el valor aumenta hasta 50 y comienza a disminuir es supremamente posible que dos cajas tengan un mismo resultado".

- Dos grupos (se copiaron) escribieron que "no difiere porque no da la misma cantidad".

- Solo dos estudiantes (1 grupo) compararon dos parejas de cajas así: de menor altura X= 4.6 y X= 5.6 encontrando valores de 49.68 y 49.28 respectivamente, afirmaron; " en la pareja de menor altura la diferencia es de 6.96 cm."; para cajas que llamaron de mayor altura compararon X= 8.6 y X= 9.6 encontrando valores de 24.04 y 7.68 y afirmaron "en la pareja de mayor altura la diferencia es de 7.68 cm.". No se entiende que quieran expresar con dichas afirmaciones.

RESPECTO AL LARGO DE LA CAJA

Total de estudiantes: 17 distribuidos en 9 trabajos.

Pregunta 1

- Trece estudiante (7 grupos) escriben la ecuación $24x - 2x^2$ y justifican en forma similar a lo mencionado para el caso del ancho: "el largo de cualquier caja es igual a *24 –2x*, lo multiplico por x por que el área de un rectángulo es base por altura."

- 4 estudiantes (2 grupos) dejan indicada la multiplicación (-2x +24)*x y no hace ningún tipo de comentario de cómo llegaron a la fórmula.

Pregunta 2

- 13 estudiantes (7 grupos) afirman que el recorrido es (0,72); 7 de ellos pidieron la calculadora prestada para corroborar sus conjeturas y una de estas estudiantes justificó de la siguiente manera "al verificar en la calculadora vi que el mínimo es cero y el número mayor no es el que hallamos anteriormente 41.58 para x= 9.9 sino que es 72 y es cuando la altura de la caja es 6 y de ahí en adelante el área del largo es decreciente hasta llegar nuevamente a cero".
  Los demás grupos tomaron varios valores de x y compararon las imágenes encontradas o se copian de quienes lo habían resuelto por calculadora, inclusive un grupo ni siquiera justificó la respuesta.

- 2 grupos hicieron una tabla de valores y afirmaron que "los valores se dan entre 0.1 hasta 6" no tuvieron en cuenta las imágenes sino los valores de las caras en las cuales se presenta menor área (x= 0.1) y mayor área (x= 6).

Pregunta 3

Responden similarmente al caso del ancho, pero todos afirman que la función o ecuación es cuadrática "hay un número elevado al cuadrado". En este punto hubo diferencia con el caso del ancho por que adicionalmente algunos grupos afirmaron que: "si la ecuación es cuadrática es ax^2 $+bx$ $+c$ entonces esto será igual a= 2, b= 24, c=0" y otros dicen que "la pendiente es positiva", seguramente se refieren a este hecho por que el coeficiente de x es 24.

Dos grupos afirman que "los valores del mínimo y el máximo ya no van de 0.1 a 9.9 sino de 0.1 hasta 6, los valores empiezan a disminuir de 6 hasta 9.9999..... " esto lo afirman apoyandose en la tabla que realizan.

Pregunta 4

Un grupo no contestó.

Para caracterizar al recorrido todos hacen una tabla de valores, con un incremento de 0.5 cm. y afirman únicamente que la gráfica es creciente hasta donde la altura de la caja es 6 y después la gráfica es decreciente. Otros hacen la tabla con valores de 0.1 hasta 6 y hacen relación al dominio y no al recorrido.

Pregunta 5

Todos realizan la gráfica. En su mayoría las gráficas están bien elaboradas y corresponden a lo pedido. Solo dos grupos prolongan la curva después de 10 cm. el resto tiene bien ubicado el valor correspondiente para este número.
No hay gráficas de rectas como en el caso del ancho pues todos hicieron bien la ecuación. Respecto a las características hacen una descripción similar al caso del ancho, las principales son:

- "La gráfica es una curva".
- "El área del largo de la caja esta en función con el lado del cuadrado recortado".
- "El punto de corte es (0,0)".
- "La gráfica primero es creciente y luego decreciente".
- "Es una función cuadrática".
- "Su ecuación es: $f_7(x)= -2x^2 +24x$".
- "Es directamente proporcional ya que pasa por el origen y x tiene una única imágen".
- "No es función lineal".
- "No se utiliza el cuadrante negativo ya que no se puede construir una caja negativa".
- "El recorrido es (0,72) y el dominio (0,10)".
- "La variable independiente es la medida del lado del cuadrado y la dependiente es la medida del área del largo de la caja".
- "No tiene pendiente puesto que es una curva y una función cuadrática". Estos mismos grupos habían afirmado que la pendiente es positiva.
- "La función es creciente hasta 6 y decreciente hasta 9".
- "Es de dependencia lineal".

Pregunta 6

2 grupos no respondieron.

- 1 grupo entendió que debía buscar 2 cajas en las cuales el área de la cara determinada por el largo fuera igual y escribieron que se cumplía en x=5 y x=7 "si es cierto que difieren en una misma cantidad porque al hacer dos procedimientos iguales con distintas cantidades nos da un mismo resultado".
- Los 6 grupos restantes tomaron x= 4.2 y x= 5.2, hallaron las respectivas áreas y escribieron "en las parejas de mayor altura hay diferencia de 20 cm.".

RESULTADOS EVALUACIÓN DE MATEMÁTICAS

CUADRATICA

CURSO 2003

PREGUNTA 1

Si x representa la medida del lado de cualquier cuadrado recortado en cualquiera de las cajas construidas y t representa la medida del área de la cara determinada por el largo de la caja, escriban una ecuación que les permita calcular t a partir de x. El otro tema difiere en que la variable que utiliza es w y pide expresar la ecuación del ancho de la caja.

RESPUESTAS

LARGO

X lado del cuadrado recortado
t área de la cara

$t = 24x - 2x^2$	7 grupos
$t = 10x$	1 grupo
$t = 24 - 2x$	1 grupo
$t = 24x$	3 grupos
$t = 24x^2 - 4$	2 grupos
$t = 24 - 2x^2$	1 grupo

ANCHO

X lado del cuadrado recortado
w área de la cara

$w = -2x^2 + 20x$	2 grupo
$w = 20x$	1 grupo
$w = 20x^2 - 4$	3 grupos
$w = -2x^2 + 20$	1 grupo

PREGUNTA 2

Determine el conjunto de todos los valores que puede tomar la medida del área de la cara determinada por el largo de cualquiera de las cajas que es posible construir en el contexto.

RESPUESTAS

LARGO

$t = 24 + 2x^2$ $0 < x > 10$ 1 grupo
(0.2398, 40.1598) 1 grupo
$t = -2x^2 + 24$ $0 < x < 10$ 5 grupos
Realizaron tabulación hallando valores entre 1 y 9.9 y dan el conjunto solución (0.72) 1 grupo
$t = 24x$ hicieron tabulación pero no dan el conjunto solución 3 grupos
$t = 24 - 2x$ hicieron tabulación pero no dan el conjunto solución 1 grupo
$t = 10x$ hizo tabulación pero no dan el conjunto solución 1 grupo
$t = 24x^2 - 4$ hicieron tabulación pro no dan el conjunto solución 1 grupo

ANCHO

$w = -2x^2 + 20x$ $0 < x < 10$ 2 grupos
(0.00004, ...) 1 grupo
$w = 20x^2 - 4$ hicieron tabulación pero no dan el conjunto solución 3 grupos
$w = 20x$ hicieron tabulación pero no dan el conjunto solución 1 grupo

PREGUNTA 3

Utilizando la notación que se emplea para las funciones, en la que se expresa el hecho de que hay una variable de la que depende la función, expresen la función área de la cara determinada por el largo de la caja y llámenla f 7. Describan algunas características de la expresión. El otro tema pide la función área determinada por el ancho de la caja y llamarla f 8.

RESPUESTAS

LARGO

- F 7 = $24x^2 - 4$ hicieron tabulación 2 grupos
- F 7 = 24 – 2X es una función lineal, la variable depende de la función 1 grupo
- F 7 (t) = 24 t 3 grupos
- F 7 (x) = $24x^2 + 24$ 2 grupos
- F 7 (x) = $-2x^2 + 24$. no pertenece a la función f (x) = mx + b, no es función lineal, es una función cuadrática 1 grupo
- La misma función anterior pero sin características lo hicieron 2 grupos
- F 7 (x) = $24x - 2x^2$ no es una función lineal, es proporcional. su punto de corte es $-2x^2$ tiene pendiente positiva 1 grupo
- No es una función lineal porque no pasa por el punto 0, es una curva 2 grupo
- En blanco a esta respuesta la dejaron 4 grupos

ANCHO

- F 8 = $20x - 2x^2$ no es una función lineal, su punto de corte es $-2x^2$, tiene pendiente positiva, su pendiente es 20x 1 grupo
- F (x) = w = $-2x^2 + 20x$ da línea recta, va aumentando la altura, no pasa por el punto (0,0) , no es función lineal 2 grupos
- F 8 = $20x^2 - 4$, no es lineal, sus resultados son diferentes, aumento la altura, no pasa por el punto (0,0), da una línea recta3 grupos
- En blanco 1 grupo

PREGUNTA 4

Describan el conjunto de valores que puede tomar la función f 7 teniendo en cuenta la mayor cantidad posible de características.

RESPUESTAS

LARGO

- No es función lineal, no pasa por el punto (0,0). y es una función directamente proporcional 2 grupos
- Toman la función f(x) = $-2x^2 + 24$ y tabulan nuevamente 2 grupos
- Toman la función f(x) = $-2x^2 + 24x$. tabulan nuevamente y describen que va en aumento pero en 8 disminuye 1 grupo
- Un intervalo que va de (4 , 24) los números que pueden tomar o los valores que son se pueden tomar de 4 en adelante teniendo en cuenta los decimales 4 grupos
- Responden el mismo intervalo anterior pero dan las siguiente características: la función toma valores crecientes y luego decrecientes, no es una recta, punto de corte en Y es (0.72), los valores posibles son 0. sin tomar 0 y 72 sin tomar 72, el conjunto se constituye mayor que cero y menor que 72 1 grupo
- En blanco 4 grupos
- Con la función 24 – 2x realiza tabulación pero no escribe características 1 grupo

ANCHO

- En blanco 5 grupos
- Toman la función $f(x) = -2x^2 + 20x$ y escriben: no pasa por el punto (0.0), y no es una función lineal 2 grupos

PREGUNTA 5

Hagan una gráfica cartesiana de la función f 7 y mencionen todas las características de la función que se pueden ver en dicha gráfica. el otro tema pide a graficar la función f 8

RESPUESTAS

GRAFICA DE FUNCIÓN F 7

- Obtiene una función lineal y las características que describen son: pasa por el punto (0,0). es una expresión de tipo cuadrática. va aumentando el área del largo de la caja en cuanto a la altura, sus magnitudes son proporcionalmente directas. 5 grupos
- Obtienen la gráfica de una función afín y no dan características 2 grupos
- Obtiene una gráfica de función cuadrática y las características que dan son: no pasa por el punto 0. es una gráfica en forma de curva. no es una función lineal porque no pasa por el punto 0. es una hipérbola.

GRÁFICA DE FUNCIÓN F 8

- Obtienen una parábola y su afirmación es que es una parábola 1 grupo
- Obtiene funciones lineales y las características que mencionan son: pasa por el punto (0,0) , son magnitudes proporcionalmente directas, va aumentando el área del largo de la caja en cuanto a la altura, 6 grupos

PREGUNTA 6

Si al comparar varias parejas de cajas se encuentra que las alturas difieren en la misma cantidad, ¿será cierto que sus respectivas áreas de una de las caras determinada por el largo de la caja, también difieren en una misma cantidad?

RESPUESTAS

Las respuestas son similares y no están diferenciadas entre los dos temas. es decir, entre el largo y el ancho. por tal razón se da la sumatoria total

- No necesariamente porque la altura es una variación lineal (longitud) mientras que la medida de la superficie de la cara tiene una variación con exponente. 10 grupos
- En blanco 4 grupos
- No difieren en la misma cantidad, pues en parejas de 0.5 en 0.5 la diferencia es igual pero de 1 en 1 la diferencia es 14. 1 grupo
- Todas van aumentando de a 24 pero al contar un término medio o sea 1.5 este término en cuanto a su área aumenta la mitad de lo dicho o sea 12. 5 grupos
- Si al porque al variar la altura obviamente cambian los demás datos ya que la caja depende de la altura 1 grupo
- Si difieren las cantidades de una y otra 1 grupo

ANÁLISIS CONJUNTO DE LA EVALUACIÓN DE FUNCIÓN CUADRÁTICA

Total de estudiantes evaluados 109.

Pregunta 1

- Expresiones algebraicas para la cara determinada por el ancho.
  - $w= -2x^2 +20x$ (13 grupos).
  - $w= (20-2x)x$ (9 grupos).
  - $w= 20x^2-4$ (2 grupos).
  - $w= 20x$ (1 grupo).
  - $w= (20+2x)x$ (1 grupo).
  - $w= 2x^2$ (1 grupo).

- Expresiones algebraicas para la cara determinada por el largo.
  - $t= -2x^2 +24x$ (14 grupos).
  - $t= (24-2x)x$ (6 grupos).
  - $t= 24-2x$ (1 grupos).
  - $t= 24x$ (3 grupo).
  - $t= 10x$ (1 grupo).
  - $t= 24x^2 -4$ (2 grupo).
  - $t= 24-2x^2$ (1 grupo).

Los que justifican afirman que el área respectiva es la medida del ancho 20-2x por la altura de la caja x (algo similar hacen para el largo).

Pregunta 2

- Para el ancho.
  - (0,50) (11 grupos).
  - No responden y solo tabulan (4 grupos).
  - (0,10) (3 grupos).

- (19.98,0.02) (2 grupos).
- (20,0) (1 grupo).
- Los estudiantes de la mañana hacen mención al máximo y al mínimo.

♦ Para el largo.

- (0, 72) (8 grupos).
- Tabulan pero no escriben el conjunto solución, o hacen alusión al dominio (8 grupos).
- Lo de la mañana hacen mención al máximo y al mínimo.

Pregunta 3

Las siguientes son las características que más mencionan:

- Es cuadrática (7 grupos).
- La mayoría escriben nuevamente las ecuaciones pero no las caracterizan.
- No es lineal no pasa por (0, 0), es una curva.
- La pendiente es positiva.
- Es lineal.

Pregunta 4

Respuesta similares a las dadas en la pregunta 2.

- Hacen alusión a los intervalos donde la función es creciente o decreciente.
- Se refieren al tipo de función: lineal, afin o cuadrática y mencionan el punto de corte en Y.
- Tienen en cuenta el recorrido sin hacer descripción del mismo.
- Solo en un curso especifican que la función es cuadrática con $a=2$, $b=24$ *y* $c=0$.

Pregunta 5

Todos realizan la gráfica respectiva y dentro de las características repiten las enunciadas para el punto 3, aquellos que no encontraron la expresión simbólica correcta realizan mal la gráfica y mencionan características de la misma. Las siguientes son otras de las expresiones que tienen en cuenta para caracterizar las gráficas:

- No pasa por 0.
- Es una curva.
- No es lineal.
- Es una parábola.
- Es creciente y decreciente.
- Tiene valor máximo en $x=6$ (o 5).
- Es cuadrática porque x está elevado al cuadrado.

Pregunta 6

No contestan: 16 grupos.

No se entendió la pregunta, pues solo en el curso 1003 diez grupos afirmaron que "no necesariamente porque la altura es una variación lineal mientras que la medida de la superficie de la cara tiene una variación con exponente".

NOMBRE: ____ CURSO:______

1. Sea $A=\{1,2,3,4,5,,6,7,8,9\}$

   $B=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15\}$

- Hallar el producto cartesiano AXB

- Escriba las parejas que cumplan la condición siguiente:

  $R_1=\{(x,y)\ /\ y\text{-}x=6\}$

- ¿Cuál es el dominio de R_1?

- ¿Es R_1 una función?. Justifique su respuesta.

- ¿Todos los elementos del dominio tienen imagen?. Explica la respuesta.

- Realice en un plano cartesiano la gráfica de R_1.

Exitos

Carmen Martínez

NOMBRE: ____ CURSO: ______

1. Sea $A=\{1,2,3,4,5,,6,7,8,9\}$

$B=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15\}$

- Hallar el producto cartesiano *AXB*

- Escriba las parejas que cumplan la condición siguiente:

  $R_1=\{(x,y)\ /\ y\text{-}x=5\}$

- ¿Es R_1 una función?. Justifique su respuesta.

- Realice en un plano cartesiano la gráfica de R_1.

- ¿Cuál es el dominio de R_1?

- ¿Todos los elementos del dominio tienen imagen?. Explica la respuesta.

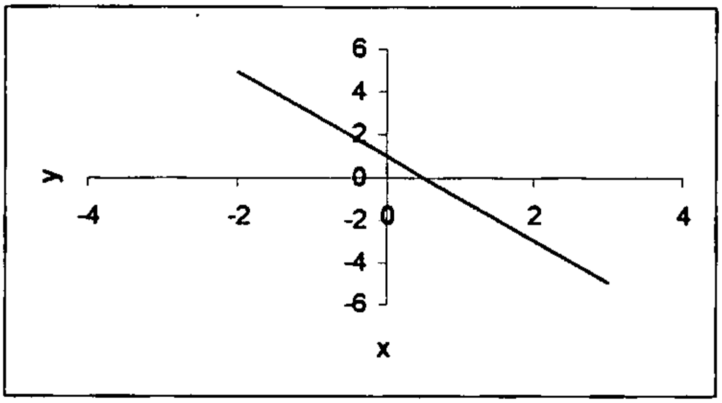
Exitos

Carmen Martínez

NOMBRE: ____ CURSO:______

1. Halle la ecuación de la recta que pasa por los puntos (-2,-3) y (7,6).

2. Escriba la ecuación de la siguiente función:



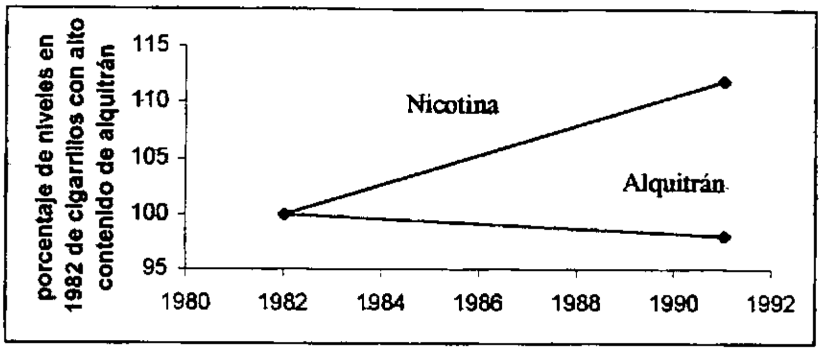
3. Escriba si la siguiente tabla representa una función de tipo lineal, justifique la respuesta.

x	-2	$-^1/_3$	3	5
$f(x)$	-6	-1	9	15

Exitos

Carmen Martínez

La siguiente gráfica apareció en la emisión de Barron's del 16 de mayo de 1994

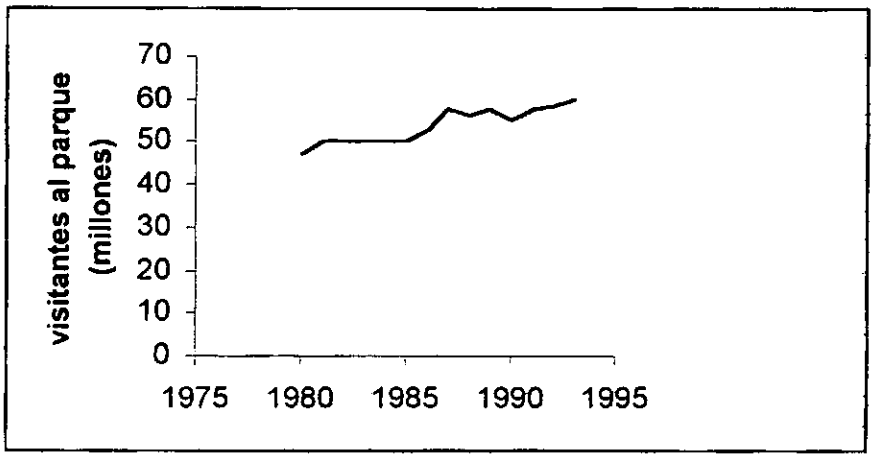


a) Determine la ecuación de la recta indicada en la gráfica de nicotina. Suponga una cantidad de 112 mg en 1991. Sea 1982 el año de referencia, de modo que el punto inicial es (0,100).

b) Determine la ecuación de la recta indicada en la gráfica de alquitrán.

c) Escriba el párrafo describiendo la tendencia en nicotina y el alquitrán de cigarros con alto alquitrán desde 1982 hasta 1991.

La siguiente gráfica del Servicio Nacional de Parques muestra el aumento de la admisión en los parques nacionales de 1980 a 1993.

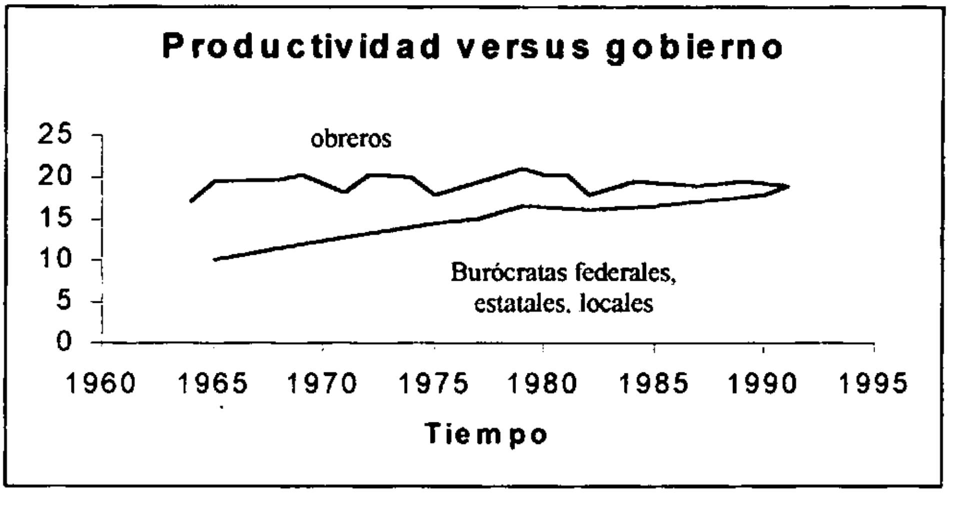


a) Dos puntos de la gráfica son (1980,47.2) y (1993,59.8). si 1980 representa el año 0, entonces 1993 sería el año 13 y los dos puntos se podrían representar como (0,47.2)y (13,59.8), respectivamente. Determine la pendiente de la recta que pasa por estos dos puntos, redondeada a centésimos. Después, escriba la ecuación de la recta que pasa por estos dos puntos.

b) Si suponemos que el crecimiento continúa con la misma rapidez constante, estime las visitas al parque en el año 2000.

c) Escriba un párrafo que describa la tendencia al parque de 1980 a 1993.

La siguiente gráfica del Departamento de Trabajo de Estados Unidos muestra el número de obreros y burócratas para los años 1962 a 1992.



a) ¿En qué año supera el número de burócratas al número de obreros por primera vez?.

b) Suponga que el número de burócratas en 1965 es de 10 millones y en 1990 es de 18 millones, y escriba la ecuación de la recta que pasa por estos dos puntos. Sea 1965 el año 0.

c) Si suponemos que el crecimiento en el gobierno continúa con la misma velocidad constante, estime el número de burócratas para el año 2000.

d) Escriba un párrafo describiendo el incremento de obreros y burócratas de 1962 a 1992.

4. la forma de hallar la pendiente de una recta apartir de su gráfico es mirando el p.c. desde alli cuantos desplazamientos se hacen en Y y en x es decir q' haya un desplazamiento horizontal

5. Significa que cuando yo subo me desplazo hacia la derecha y cuando bajo hacia la izquierdo, es decir $\frac{\text{Subo}}{\text{Derecha}}$ $\frac{\text{Bajo}}{\text{Izquierda}}$

además la recta va en el coordiante positivo

ACTIVIDAD

Pag 168
EJ 71, 72, 73
Algebra Intermedia

SOLUCIÓN -

71. Dos puntos de la gráfica son (1980, 47.2) y (1993, 59.8). Si 1980 representa el año 0, entonces 1.993 seria el año 13 y los dos puntos se podrían representar como (0, 47.2) y (13, 59.8) respectivamente. Determine la pendiente de la recta que pasa por estos dos puntos, redondeada a centesimos, después, escriba la ecuación de la recta que pasa por estos dos puntos.

$$\underset{x_1\ \ y_1}{(0, 47.2)} \qquad \underset{x_2\ \ y_2}{(13, 59.9)}$$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{59.8 - 47.2}{13 - 0} = \frac{12.6}{13} = 0.96$$

$f(x) = 0.96\,x + b$
$f(x) = 0.96\,x + 1$

$f(0) = 47.2$
$f(13) = 59.8$
$m = 0.96$
$f(0) = 47.2$
$f(x) = 0.96\,x + b$
$f(0) = 0.96 \cdot 0 + b = 47.2$
$0.96 \cdot 0 + b = 47.2$
$0 + b = 47.2$
$b = 47.2 - 0$
$b = 47.2$

$f(x) = 0.96\,x + 47.2$

b. Si suponemos que el crecimiento continua con la misma rapidez constante, estime las visitas al parque en el año 2000

RTA / Si continuo en una misma rapidez constante en el año 2000 el N° de visitas es de 66.4 millones de personas aproximadamente.

$0.96 \cdot 13 + 47.2 = 59.6$
$0.96 \cdot 10 + 47.2 = 56.8$
$0.96 \cdot 20 + 47.2 = 66.4$ ✓
$0.96 \cdot 5 + 47.2 = 52$

c. Escriba un parrafo que describa la tendencia en la asistencia al parque de 1980 a 1993

Exactamente no se sabe, pero mi punto de vista es que dia a dia la tecnologia avanza y asi tambien, avanza la publicidad que es un metodo de entusiasmar a las personas haciendo ver fantasias, Tambien los grandes avances en juegos o parque no en naturaleza.

1.72

a. ¿ En que año superó el Nº de burócratas al número de obreros por primera vez

RTA / A comienzos del año 91

b. Suponga que el número de burócratas en 1965 es de 10 millones y en 1990 es de 18 millones, y escriba la ecuación de la recta que pasa por estos dos puntos, sea 1965 el año 0.

$(0, 10)$ $\quad$ $(25, 18)$
$x_1 \; y_1$ $\quad$ $x_2 \; y_2$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{18 - 10}{25 - 0} = \frac{8}{25} = 0{,}32$$

$f(x) = 0{,}32x + b$
$f(0) = 10$
$f(25) = 18$
$m = 0{,}32$ $\qquad\qquad$ $f(x) = 0{,}32x + 10$
$f(0) = 10$
$f(x) = 0{,}32x + b$
$f(0) = 0{,}32 \cdot 0 + b = 10$
$0{,}32 \cdot 0 + b = 10$
$0 + b = 10$
$b = 10 - 0$
$b = 10$

c. Si suponemos que el crecimiento en el gobierno continuó con la misma velocidad constante, estime el número de burócratas para el año 2.000

RTA / Para el 2000 el número de burócratas sera de 26 millones, aproximadamente

$0{,}32 \cdot 50 + 10 = 26$

d. Escribe un párrafo describiendo el incremento de obreros y de burócratas de 1962 hasta 1992

Obreros <

burócratas >

El incremento de obreros ha sido menor que los burócratas ya que este lo supero aumentando su cantidad

73. la siguiente gráfica apareció en la emisión de Barron's del 16 de mayo de 1994.

a_ Determine la ecuación de la recta indicada en la gráfica de nicotina. Suponga una cantidad de 112 mp en 1991. Sea 1982 el año de referencia del modo que el punto inicial es (0,100).

(0,100) (9, 112)
x^1 y^1 x^2 y^2

$$\frac{y^2 - y^1}{x^2 - x^1} = \frac{112 - 100}{9 - 0} = \frac{12}{9} = 1.3$$

$f(x) = 1.3x + b$
$f(0) = 100$
$f(9) = 112$
$m = 1.3$
$f(0) = 100$
$f(x) = 1.3x + b$
$f(0) = 1.3 \cdot 0 + b = 100$
$1.3 \cdot 0 + b = 100$
$0 + b = 100$
$b = 100 - 0$
$b = 100$

$f(x) = 1.3x + 100$

b. Determine la ecuación de la recta indicada en la gráfica de alquitrán

(0,100) (9, 98)
x_1 y_1 x_2 y_2

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{98 - 100}{9 - 0} = \frac{-2}{9} = -0.2$$

$f(x) = -0.2x + b$
$f(0) = 100$
$f(0) = 98$
$m = -0.2$
$f(0)$ 100
$f(x)$ $-0.2 \cdot x + b$
$f(0)$ $-0.2 \cdot 0 + b = 100$
$-0.2 \cdot 0 + b = 100$
$0 + b = 100$
$b = 100 - 0$
$b = 100$

$f(x) = -0.2x + 100$

c. Escriba un párrafo describiendo la tendencia en nicotina y en alquitrán de cigarros con alto alquitrán desde 1982 hasta 1991.

RTA / la tendencia de Nicotina ha aumentado considerablemente con respecto al alquitrán que empieza a bajar desde el año 83. Hoy en día se utiliza la Nicotina para el uso de cigarro entre otros

Tarea

CENTRO EDUCATIVO DISTRITAL BRASILIA

EVALUACIÓN DE MATEMÁTICAS

GRADO DECIMO

Renata sale a la ciclovia con su perro, cuando menos piensa, el perro se suelta y sale ha correr, desplazándose una distancia de 6m. cada segundo, cuando Renata reacciona su perro ha recorrido 15m. Y ella comienza a correr desplazándose 8m. cada segundo.

1. Realice una gráfica de la distancia ***d*** recorrida por cada uno (eje y), en función del tiempo ***t*** (eje x).

2. ¿Qué distancia los separa cuando han transcurrido 4s?.

3. Determine las coordenadas del punto (***t*** , ***d***) donde las dos rectas se cruzan.

4. ¿Qué distancia han recorrido los dos al momento de encontrarse?.

5. ¿Cuánto tiempo tarda Renata en alcanzar al perro?

89

una empresa docente®

PROPUESTA CURRICULAR PARA LA INTRODUCCIÓN A LAS FUNCIONES REPRESENTADAS POR POLINOMIOS DE GRADO DOS

EDGAR ALBERTO GUACANEME Y PATRICIA INÉS PERRY

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
NOVIEMBRE DE 2000

Noviembre de 2000

Propuesta curricular para la introducción a las funciones
representadas por polinomios de grado dos
Documento de trabajo • primera versión
Autores: Edgar Alberto Guacaneme y Patricia Inés Perry

Realizado por "una empresa docente"
Financiado por el Instituto para la Investigación y
el Desarrollo Pedagógico

una empresa docente®
Universidad de los Andes
Cra. 1 Este # 18 A - 70
Apartado Aéreo 4976
Tel.: (57-1) 3 39 49 49, 3 39 49 99 ext. 2717
Fax: (57-1) 3 39 49 99 ext. 2709
Servidor WWW: http: //ued.uniandes.edu.co
Bogotá, Colombia

TABLA DE CONTENIDO

PRESENTACIÓN

Contexto de la experiencia de innovación ICEP

Entre los años 1999 y 2000 se desarrolló el proyecto "ICEP. Innovación curricular en precálculo para la educación media", trabajo coordinado por Cristina Carulla, Patricia Perry, Edgar Guacaneme y Gloria Neira, miembros de"una empresa docente"[1] y financiado por el Instituto para la Investigación Educativa y el Desarrollo Pedagógico (IDEP). En el proyecto participaron diez profesores de tres colegios: el Cento Educativo Distrital Miguel Antonio Caro (J.M.), el Centro Distrital Brasilia de Usme, (J.T.) y el Colegio Distrital La Amistad (J.T.).

Uno de los principales propósitos del proyecto era iniciar un proceso de innovación curricular en el curso de matemáticas de grado décimo, partiendo de la base de una innovación que "una empresa docente" llevó a cabo entre los años 1994 y 1997 en un curso de precálculo en la Universidad de los Andes.

Es en el marco de la experiencia de innovación vivida en el proyecto ICEP donde se gesta la propuesta curricular expuesta en este documento, que además fue implementada, por lo menos de forma parcial, por los profesores participantes en el proyecto. De tal implementación hay un registro sistemático que hace parte del reporte final entregado al IDEP.

1. "una empresa docente" es un centro de investigación en Educación Matemática de la Universidad de los Andes de Bogotá, Colombia.

Ideas guías de la innovación ICEP

Desde el inicio del proyecto ICEP se plantearon algunas ideas generales que serían guías para encaminar los cambios curriculares tanto en lo que se refiere a contenidos como al enfoque para tratarlos y a los aspectos metodológicos de la enseñanza.

Se quería centrar la atención en el estudio de cuatro tipos de funciones (lineales y afines, cuadráticas, exponenciales y logarítmicas) a través de lo cual se esperaba ir construyendo la comprensión del concepto de función en los estudiantes. Con respecto al enfoque, se quería enfatizar el uso de diversas representaciones y la traducción o transformación entre ellas como medio para construir una comprensión de los objetos matemáticos implicados, rica en conexiones; también se quería iniciar la construcción de una percepción estructural de las funciones estudiadas y, ligado a esto, cambiar el énfasis que tradicionalmente se hace en el conocimiento procedimental por un mayor énfasis en el conocimiento conceptual.

Con respecto a la forma de llevar a cabo la enseñanza para propiciar el aprendizaje significativo de los estudiantes y el desarrollo de sus competencias matemáticas, se pretendía que la resolución de problemas ocupara un lugar preponderante entre las tareas planteadas. También se veía como algo fundamental la creación de espacios y oportunidades para el trabajo tanto individual como en grupo y la comunicación oral y escrita de ideas matemáticas. Se veía el aporte potencial que la utilización de la tecnología portátil —usada de forma intencional desde la didáctica— podía hacer a la creación de situaciones que permitieran ver y hacer cosas que no es posible ver ni hacer con lápiz y papel.

Particularidades de la propuesta curricular

Se trata de una propuesta curricular para introducir elementos básicos del tópico *funciones representadas por polinomios de grados dos*. Está compuesta por seis talleres[2], los cuales hacen referencia a un contexto específico: una caja sin tapa, construida a partir de una hoja de papel de 24 cm. de largo por 20 cm. de ancho, a la que se recortan en las esquinas cuadrados congruentes cuyo lado mide x.

En los talleres se aborda el estudio de ocho funciones, dos de las cuales están representadas simbólicamente por polinomios de primer grado (largo y ancho de la caja); cinco, por polinomios de segundo grado (área del papel desperdiciado, área del papel de la caja, área de la base, área de las caras laterales de la caja); y una, por un polinomio de tercer grado (capacidad de la caja).

2. Para los talleres segundo, quinto y sexto hay dos versiones (A y B) que difieren entre sí solamente en la función sobre la cual se centra el trabajo. El sexto taller se puede utilizar como una evaluación para recoger indicios de cómo ha sido la evolución de la comprensión de los estudiantes acerca de las ideas estudiadas.

A lo largo del desarrollo de los talleres se plantean preguntas relativas al dominio de la variable y al recorrido de las funciones implicadas, y a la variación —vista como la característica principal que identifica a cada tipo de función y permite distinguir diferentes tipos de funciones. Aunque se aborda la representación gráfica de las funciones, se propone hacer su estudio después de haber trabajado en la variación a través de la representación tabular; ese es uno de los elementos innovadores en la propuesta pues no sólo nos detenemos a examinar y analizar cómo es la variación numérica en las diferentes funciones sino que además posponemos la representación gráfica para el final. Por otro lado, se aborda la conexión entre diferentes representaciones de las funciones al preguntarnos cómo se visualiza una determinada característica de la función en cada una de las tres representaciones que proponemos manejar.

La propuesta entera se puede catalogar como un trabajo de resolución de problemas ya que lo que plantea es abordar y resolver una serie de tareas y preguntas, acciones para las cuales el estudiante no cuenta con algoritmos o procedimientos previamente establecidos en clase. Desde esta perspectiva, la propuesta propicia oportunidades para la lectura e interpretación de textos, el manejo de datos, el manejo de casos particulares como instancia para llegar a generalidades, la descripción y contrastación de procesos, la formulación de hipótesis, la validación de resultados, la utilización de nociones estudiadas anteriormente, la argumentación y comunicación de ideas, etc.

A pesar de que el contexto utilizado para desarrollar la propuesta es bien conocido por los profesores de precálculo y cálculo, consideramos que ella puede resultar más bien novedosa por razón de los conocimientos y habilidades que pone en juego y la forma como pretende propiciar el aprendizaje: aprender haciendo sobre algo que no se conoce bien. Precisamente por lo diferente que puede parecer al ser comparada con lo que se hace de manera usual en los cursos superiores de la educación media, **es necesario estudiar esta propuesta cuidadosamente antes de pretender implementarla en el aula** —con o sin modificaciones—, intentando visualizar los supuestos y visiones acerca del conocimiento matemático escolar, del aprendizaje y la enseñanza de tal conocimiento, que la fundamentan y animan.

Invitamos al lector a reflexionar acerca de las siguientes preguntas —cuyas respuestas no son evidentes, pueden ser polémicas, y una posible respuesta insólita se pone en evidencia en la propuesta que aquí esbozamos acerca de la enseñanza de un tema muy puntual. Hacer tal ejercicio puede disponer al lector a un estudio crítico y minucioso de la propuesta.

1) ¿Qué tan imprescindible para el aprendizaje de los estudiantes de educación media es trabajar el contexto matemático formal, particularmente, qué tan fundamental es estudiar la función cuadrática como una función de reales en reales?

2) ¿Qué tanto se pierde y qué tanto se gana cuando se trabaja con una, dos o tres situaciones contextualizadas desde el punto de vista del aprendizaje de las matemáticas y particularmente desde el punto de vista del pensamiento matemático de los estudiantes?

3) ¿Qué es identificar una función cuadrática en términos de la variación atendiendo a los sistemas de representación? Por ejemplo, dada una tabla que presenta parejas ordenadas, ¿es posible reconocer si los datos describen una función cuadrática, ¿cómo?, ¿cuáles de las características de una función cuadrática se pueden ver en un representante gráfico en el plano cartesiano?

Acerca de esta publicación

Esta publicación —que es en realidad la primera versión de un documento de trabajo— está compuesta de dos partes. En la primera, se presentan los enunciados de los seis talleres y en la segunda parte, para cada uno de ellos (excepto para el último) se exponen consideraciones que pueden ser de utilidad para el estudio crítico y la comprensión de la propuesta. En dichas consideraciones hacemos referencia a la intencionalidad del taller en lo que concierne a la comprensión de los estudiantes; también incluimos consideraciones metodológicas para el desarrollo curricular y comentarios con respecto a algunas de las preguntas formuladas y a algunas posibles respuestas. Vemos imprescindible el estudio de tales consideraciones antes de la posible implementación de la propuesta.

Los autores agradecemos a los participantes del proyecto ICEP por sus valiosos aportes al compartir con nosotros sus comentarios antes y después de implementar la propuesta en sus aulas.

PRIMER TALLER

Para la actividad siguiente se van a organizar en grupos de 4 estudiantes. Inicialmente habrá un trabajo individual, luego un trabajo en el grupo de 4 y para terminar habrá una puesta en común en la que cada grupo expondrá un resumen del trabajo que realizó.

Trabajo individual

1) Con la hoja de papel cuadriculado, de 20 cm. por 24 cm. que cada uno de ustedes trajo y siguiendo la misma estrategia que les mostré para hacer una caja sin tapa, cada uno de ustedes va a construir su propia caja. Queremos que entre todos los alumnos de este curso haya mucha variedad en los tamaños de las cajas construidas; para ello, asegúrese de que su caja sea de diferente tamaño a las construidas por sus compañeros de grupo.
2) ¿Qué medida tiene el lado del cuadrado que recortó?
3) Con el dato anterior, calcule las medidas de la caja construida. Escriba una descripción de lo que hizo.
4) Mida el largo, el ancho y la altura de su caja. ¿Coinciden dichas medidas con los datos calculados en el punto anterior?
5) ¿Qué cantidad (área) de papel se desperdició al construir la caja de la manera como se hizo? Describa por escrito cómo llegó a su respuesta.
6) ¿Qué cantidad (área) de papel tiene la caja? Explique cómo llegó a su respuesta.

Trabajo en los grupos de 4

1) En la siguiente tabla registren los datos correspondientes a la caja de cada uno de los cuatro integrantes del grupo.

Nombre del estudiante	altura de la caja	largo de la caja	ancho de la caja	área del papel desperdiciado	área del papel de la caja

2) Cada uno de los integrantes del grupo debe explicar oralmente a sus compañeros cómo calculó las medidas de su caja registradas en las últimas cuatro columnas de la tabla. Para cada una de las medidas incluidas en la tabla, escriban qué similitudes y diferencias encontraron en los procedimientos expuestos.
3) Describan cómo podrían calcular los datos correspondientes a las últimas cuatro columnas de la tabla para la caja de cualquiera de los alumnos de otro grupo.

4) Si x representa la medida del lado de cualquier cuadrado recortado en cualquiera de las cajas construidas y l representa la medida del largo de la caja, escriban una expresión simbólica que les permita calcular l a partir de x.

5) Si x representa la medida del lado de cualquier cuadrado recortado en cualquiera de las cajas construidas y a representa la medida del ancho de la caja, escriban una expresión simbólica que les permita calcular a a partir de x.

6) Si x representa la medida del lado de cualquier cuadrado recortado en cualquiera de las cajas construidas y d representa el área del papel desperdiciado, escriban una expresión simbólica que les permita calcular d a partir de x.

7) Si x representa la medida del lado de cualquier cuadrado recortado en cualquiera de las cajas construidas y u representa el área del papel que tiene la caja, escriban una expresión simbólica que les permita calcular u a partir de x.

8) Pidan a otro grupo la tabla que registra los datos de sus cajas. Con estos datos, pongan a prueba las cuatro expresiones simbólicas que establecieron anteriormente. Es decir, usen las medidas de los cuadrados recortados para calcular l, a, d, u y comparen los resultados obtenidos con los datos de la tabla. Reporten por escrito el resultado de la prueba, ilustrando algunos de los cálculos realizados.

9) Determinen si el siguiente enunciado es falso o verdadero y expliquen su respuesta. Entre las cuatro expresiones simbólicas que quedaron determinadas en los puntos 4 a 7, hay algunas que representan funciones afines y otras no.

10) Con base en sus respuestas a los puntos 6 y 7, describan las expresiones simbólicas que representan el área del papel desperdiciado y el área del papel que tiene la caja.

11) Preparen una breve exposición del trabajo realizado por el grupo en la que destaquen la manera como llegaron a las expresiones simbólicas y las expresiones mismas, incluso si éstas no funcionaron al ponerlas a prueba en el punto anterior.

SEGUNDO TALLER (VERSIÓN A)

Para trabajar en la situación que se plantea a continuación van a seguir organizados en los mismos grupos que para el primer taller. También ahora se quiere lograr una gran variedad de tamaños de cajas, así que asegúrese de que el tamaño de sus dos cajas sea diferente al tamaño de las cajas de sus compañeros de grupo.

Trabajo individual

1) Con la misma estrategia usada en el primer taller y usando el mismo tamaño de papel (24 cm. por 20 cm.), construya una caja muy alta. Determine las tres medidas de la caja y calcule el área del papel de tal caja.
2) Con la misma estrategia usada en el primer taller y usando el mismo tamaño de papel (24 cm. por 20 cm.), construya una caja muy baja. Determine las tres medidas de la caja y calcule el área del papel de tal caja.

Trabajo en grupos de 4

Acerca de las cajas muy altas

1) En las filas 3 a 6 de la siguiente tabla registren los datos correspondientes a las cajas muy altas que cada uno de los cuatro integrantes del grupo construyó (organicen ascendentemente los datos correspondientes a la altura de la caja).

1	Nombre del estudiante	medidas de la caja construida			área del papel de la caja
2		altura	largo	ancho	
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					

2) Juan y Mercedes, alumnos que están realizando este taller, hacen respectivamente las siguientes afirmaciones:

"en el contexto en el que estamos trabajando, la caja de mayor altura que se puede construir, así sea en la imaginación, es la que tiene altura 11.9999 cm."

"en el contexto en el que estamos trabajando, la caja de mayor altura que se puede construir, así sea en la imaginación, es la que tiene altura 9.9999 cm."

¿Cuál de los dos alumnos tiene razón? Expliquen su respuesta.

3) ¿En el grupo de ustedes se ha construido la caja de mayor altura posible? Expliquen su respuesta.

4) En las filas 7 a 10 de la tabla anterior, registren en forma ascendente la medida de la altura de cuatro cajas (de tamaños diferentes) que se puedan construir, por lo menos en la imaginación, en el contexto dado y que tengan altura mayor que las ya construidas. Calculen también las otras medidas que están implicadas en el resto de la tabla.

5) Examinen la tabla que han elaborado y describan, en términos generales, cómo varían las medidas del largo, el ancho y el área del papel de la caja cuando la medida de la altura se hace cada vez más grande, en el contexto dado.

Acerca de las cajas muy bajas

6) En las filas 3 a 6 de la siguiente tabla registren los datos correspondientes a las cajas muy bajas que cada uno de los cuatro integrantes del grupo construyó (organicen descendentemente los datos correspondientes a la altura de la caja).

1	Nombre del estudiante	medidas de la caja construida			área del papel de la caja
2		altura	largo	ancho	
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					

7) Un estudiante de un grupo dice haber construido en su imaginación una caja de altura 0.001 cm. y afirma que esa es la caja de menor altura en el contexto en el que se está trabajando. Si consideran que el estudiante tiene razón, expliquen por qué; y si consideran que el estudiante no tiene razón, construyan un argumento para convencerlo de que no tiene razón.

8) ¿En el grupo de ustedes se ha construido la caja de menor altura posible? Expliquen su respuesta.

9) En las filas 7 a 10 de la tabla anterior, registren en forma descendente la medida de la altura de cuatro cajas (de tamaños diferentes) que se puedan construir, por lo menos en la imaginación, en el contexto dado y que tengan altura menor que las ya construidas. Calculen también las otras medidas que están implicadas en el resto de la tabla.

10) Examinen la tabla que han elaborado y describan, en términos generales, cómo varían las medidas del largo, el ancho y el área del papel de la caja cuando la medida de la altura se hace cada vez más pequeña, en el contexto dado.

Acerca de cualquier caja

11) Den dos valores (los llamaremos e y q) muy próximos entre sí, que sean las medidas de la altura de dos cajas en el contexto en el que se está trabajando. Para las dos cajas que quedan así determinadas, calculen las medidas del largo, el ancho y el área del papel. ¿Se podría construir una caja que tuviera altura w entre e y q? Den un valor para w. Hagan algún tipo de estimativo (no se les pide que hagan cálculos) para la medida del largo y el ancho de la caja de altura w y para el área del papel de tal caja.

12) Con respecto al punto anterior, ¿el valor que dieron a w es el único posible? Expliquen su respuesta.

13) En el contexto en el que estamos trabajando, ¿habría dos cajas de alturas diferentes entre las cuales no se pudiera encontrar una tercera caja de altura intermedia? Expliquen su respuesta.

14) Expresen el conjunto que representa todos los valores que podría tomar la medida del lado del cuadrado recortado para construir cualquier caja en este contexto.

15) Expresen el conjunto que representa todos los valores que podría tomar la medida del largo de cualquier caja construida en este contexto.

16) Expresen el conjunto que representa todos los valores que podría tomar la medida del ancho de cualquier caja construida en este contexto.

17) Expresen el conjunto que representa todos los valores que podría tomar el área del papel de cualquier caja construida en este contexto.

18) Preparen una breve exposición del trabajo realizado por el grupo en la que destaquen la manera como llegaron a determinar los conjuntos de valores en las preguntas 14 a 17 y los conjuntos mismos.

SEGUNDO TALLER (VERSIÓN B)

Para la situación que se plantea a continuación van a seguir organizados en los mismos grupos que para el primer taller. También en este caso se quiere lograr una gran variedad de tamaños de cajas, así que asegúrese de que el tamaño de sus dos cajas sea diferente al tamaño de las cajas de sus compañeros de grupo.

Trabajo individual

1) Con la misma estrategia usada en el primer taller y usando el mismo tamaño de papel (24 cm. por 20 cm.), construya una caja muy alta. Determine las tres medidas de la caja y calcule el área de papel desperdiciado.
2) Con la misma estrategia usada en el primer taller y usando el mismo tamaño de papel (24 cm. por 20 cm.), construya una caja muy baja. Determine las tres medidas de la caja y calcule el área de papel desperdiciado.

Trabajo en grupos de 4

Acerca de las cajas muy altas

1) En las filas 3 a 6 de la siguiente tabla registren los datos correspondientes a las cajas de altura muy grande que cada uno de los cuatro integrantes del grupo construyó (organicen ascendentemente los datos correspondientes a la altura de la caja).

1	Nombre del estudiante	medidas de la caja construida			área del papel desperdiciado
2		altura	largo	ancho	
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					

2) Juan y Mercedes, alumnos que están realizando este taller, hacen respectivamente las siguientes afirmaciones:

   "en el contexto en el que estamos trabajando, la caja de mayor altura que se puede construir, así sea en la imaginación, es la que tiene altura 11.9999 cm."

   "en el contexto en el que estamos trabajando, la caja de mayor altura que se puede construir, así sea en la imaginación, es la que tiene altura 9.9999 cm."

   ¿Cuál de los dos alumnos tiene razón? Expliquen su respuesta.

3) ¿En el grupo se ha construido la caja de mayor altura posible? Expliquen su respuesta.

4) En las filas 7 a 10 de la tabla anterior, registren en forma ascendente la medida de la altura de cuatro cajas (de tamaños diferentes) que se puedan construir, por lo menos en la imaginación, en el contexto dado y que tengan altura mayor que las ya construidas. Calculen también las otras medidas que están implicadas en el resto de la tabla.

5) Examinen la tabla que han elaborado y describan, en términos generales, cómo varían las medidas del largo, el ancho y el área del papel desperdiciado cuando la medida de la altura se hace cada vez más grande, en el contexto dado.

<u>Acerca de las cajas muy bajas</u>

6) En las filas 3 a 6 de la siguiente tabla registren los datos correspondientes a las cajas de altura muy pequeña que cada uno de los cuatro integrantes del grupo construyó (organicen descendentemente los datos correspondientes a la altura de la caja).

1	Nombre del estudiante	medidas de la caja construida			área del papel desperdiciado
2		altura	largo	ancho	
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					

7) Un estudiante de un grupo dice haber construido en su imaginación una caja de altura 0.001 cm. y afirma que esa es la caja de menor altura en el contexto en el que se está trabajando. Si consideran que el estudiante tiene razón, expliquen por qué; y si consideran que el estudiante no tiene razón, construyan un argumento para convencerlo de que no tiene razón.

8) ¿En el grupo se ha construido la caja de menor altura posible? Expliquen su respuesta.

9) En las filas 7 a 10 de la tabla anterior, registren en forma descendente la medida de la altura de cuatro cajas (de tamaños diferentes) que se puedan construir, por lo menos en la imaginación, en el contexto dado y que tengan altura menor que las ya construidas. Calculen también las otras medidas que están implicadas en el resto de la tabla.

10) Examinen la tabla que han elaborado y describan, en términos generales, cómo varían las medidas del largo, el ancho de la caja y el área del papel desperdiciado cuando la medida de la altura se hace cada vez más pequeña, en el contexto dado.

Acerca de cualquier caja

11) Den dos valores (los llamaremos e y q) muy próximos entre sí, que sean las medidas de la altura de dos cajas en el contexto en el que se está trabajando. Para las dos cajas que quedan así determinadas, calculen las medidas del largo, el ancho y el área del papel desperdiciado. ¿Se podría construir una caja que tuviera altura w entre e y q? Den un valor para w. Hagan algún tipo de estimativo (no se les pide que hagan cálculos) para la medida del largo y el ancho de la caja de altura w y para el área del papel desperdiciado al construir tal caja.

12) Con respecto al punto anterior, ¿el valor que dieron a w es el único posible? Expliquen su respuesta.

13) En el contexto en el que estamos trabajando, ¿habría dos cajas de alturas diferentes entre las cuales no se pudiera encontrar una tercera caja de altura intermedia? Expliquen su respuesta.

14) Expresen el conjunto que representa todos los valores que podría tomar la medida del lado del cuadrado recortado para construir cualquier caja en este contexto.

15) Expresen el conjunto que representa todos los valores que podría tomar la medida del largo de cualquier caja construida en este contexto.

16) Expresen el conjunto que representa todos los valores que podría tomar la medida del ancho de cualquier caja construida en este contexto.

17) Expresen el conjunto que representa todos los valores que podría tomar el área del papel desperdiciado para cualquier caja construida en este contexto.

18) Preparen una breve exposición del trabajo realizado por el grupo en la que destaquen la manera como llegaron a determinar los conjuntos de valores en las preguntas 14 a 17 y los conjuntos mismos.

TERCER TALLER

En el contexto en el que estamos trabajando hay otras dos funciones que queremos estudiar en este taller, ellas son: la función *área de la base de la caja* y la función *capacidad de la caja.*

Trabajo individual

1) Para las tres cajas que construyó en los dos talleres anteriores, calcule la medida del área de la base y la medida de la capacidad. Explique cómo calculó cada uno de los valores. En la tabla escriba, en cada caso, los procedimientos aritméticos realizados y su resultado.

altura	área de la base de la caja	capacidad de la caja

Trabajo en grupos de 4

1) Reunan los datos de las tablas individuales en la siguiente tabla. Atendiendo a la altura, ordénenlos ascendentemente. Describan algunas características de los datos registrados en cada una de las columnas de la tabla, para ello consideren, por ejemplo, si los datos están ordenados, el tipo de orden de los datos, en qué lugar de la columna se ubica el menor o el mayor de los datos y hacia qué valores se tiende en los extremos de las columnas.

altura	área de la base de la caja	capacidad de la caja

2) Teniendo en cuenta el(los) procedimiento(s) usado(s) para calcular la medida del área de la base y la medida de la capacidad de la caja en los casos particulares, escriban expresiones simbólicas que sirvan para calcular las medidas del área de la base y de la capacidad de cualquier caja en términos de la medida de la altura de la caja. Representen con x la altura de la caja, con b la medida del área de la base de la caja, y, con c la medida de la capacidad de la caja.

3) Para una caja cuya altura es 3.63 cm., la medida del área de la base es 213.27 cm^2 y la capacidad es 774.16 cm^3. ¿Las expresiones simbólicas que ustedes dieron en el ítem anterior corroboran esos valores?

4) Examinen la tabla elaborada en el punto 2 y la de otros grupos para hacer una conjetura acerca de cuáles son todos los valores que puede tomar la medida del área de la base. Usen la calculadora para verificar si su conjetura parece ser razonable. Describan por escrito los procesos utilizados. Expresen el conjunto que representa todos los valores que podría tomar la medida del área de la base de cualquier caja construida en este contexto.

5) Examinen las tablas de sus compañeros de grupo y de otros grupos para hacer una conjetura acerca de cuáles son todos los valores que puede tomar la medida de la capacidad. Usen la calculadora para verificar si su conjetura parece ser razonable. Describan por escrito los procesos utilizados (seguramente será necesario modificar las opciones TblStart y ΔTbl de TBLSET de manera que pueda tomar valores de x cada vez más juntos entre sí y más cercanos al valor que corresponde a la mayor capacidad). Expresen el conjunto que representa todos los valores que podría tomar la medida de la capacidad de cualquier caja construida en este contexto.

6) Con base en los resultados encontrados en los talleres anteriores y en éste completen la siguiente tabla. En la columna titulada "Expresión simbólica" utilicen la notación que se emplea para las funciones, en la que se expresa el hecho de que hay una variable de la que depende la función.

Nombre de la función	Expresión simbólica	Posibles valores de la función (todos)
largo de la caja		
ancho de la caja	$f_2(x) = a = -2x + 20$	
área del papel desperdiciado		(0, 400)
área del papel de la caja		
área de la base		
capacidad de la caja		

7) Preparen una breve exposición del trabajo realizado por el grupo en la que destaquen las expresiones simbólicas encontradas para calcular la medida del área de la base y de la capacidad de cualquier caja construida en el contexto, y la forma como llegaron a ellas. También deben hablar de la forma como llegaron a determinar los conjuntos de valores que pueden tomar la medida del área de la base y la medida de la capacidad de cualquier caja, y expresar cuáles son esos conjuntos.

CUARTO TALLER

En los talleres anteriores hemos comenzado el estudio de seis funciones que dependen de la altura de la caja, a saber: largo de la caja, ancho de la caja, área del papel desperdiciado, área del papel de la caja, área de la base de la caja, capacidad de la caja. Para tales funciones hemos encontrado una representación simbólica y el conjunto de valores de cada función, sabiendo que la altura de cualquier caja es un valor entre 0 y 10. A continuación presentamos una tabla de resumen de estos datos:

Nombre de la función	Expresión simbólica	Posibles valores de la función (todos)
largo de la caja	$f_1(x) = l = -2x + 24$	(4, 24)
ancho de la caja	$f_2(x) = a = -2x + 20$	(0, 20)
área del papel desperdiciado	$f_3(x) = d = 4x^2$	(0, 400)
área del papel de la caja	$f_4(x) = u = -4x^2 + 480$	(80, 480)
área de la base	$f_5(x) = b = 4x^2 - 88x + 480$	(0, 480)
capacidad de la caja	$f_6(x) = c = 4x^3 - 88x^2 + 480x$	(0, 774.1646...)

Trabajo en grupo

1) Para la función asignada al grupo, construyan una tabla de valores, donde TblStart = 0 y Δ Tbl = 0.5; y el valor máximo de x sea 10.

2) En medio pliego de cartulina, elaboren una gráfica cartesiana de la función asignada. Tengan en cuenta que en el contexto, el valor de la altura pertenece a (0, 10) y que tal intervalo no incluye los extremos; además, asuman que en la gráfica el eje horizontal representa los valores de la altura de la caja. A la vez que vayan haciendo la gráfica, recojan información que les permita preparar la exposición que se reporta en el ítem 4.

3) Respondan las preguntas relativas a la función para la que hayan hecho la gráfica.

<u>Función largo</u>

a. En los ejes marquen con color los posibles valores de la altura y de la función que tienen asignada.

b. El punto de coordenadas (3.25, 17.5) pertenece a la gráfica de la función. ¿Qué significa cada una de las dos coordenadas cartesianas del punto?

c. Determinen cuáles de los siguientes puntos expresados a través de sus coordenadas cartesianas pertenecen a la gráfica de la función: (11, 2); (6, 14); (14, -4). Expliquen sus respuestas.

d. Señalen un punto en el eje X, que represente la altura de una caja posible en el contexto. Sin realizar cálculos, determinen para dicho punto el correspondiente punto en el eje $f_1(X)$, que representa el largo de tal caja.

e. Señalen un punto en el eje $f_1(X)$, que represente el largo de una caja posible en el contexto. Sin realizar cálculos, determinen para dicho punto el correspondiente punto en el eje X, que representa la altura de tal caja.

f. Un grupo de estudiantes del curso afirma que es posible construir dos cajas de diferente largo que tengan la misma altura. Discutan si tal afirmación es verdadera o falsa; justifiquen su respuesta valiéndose de la tabla, la gráfica, o, la expresión simbólica correspondiente.

g. ¿Es válido afirmar que "de dos cajas de diferente altura, es más larga la más alta"? Utilicen la gráfica para argumentar su respuesta.

Función ancho

a. En los ejes marquen con color los posibles valores de la altura y de la función que tienen asignada.

b. El punto de coordenadas (3.25, 13.5) pertenece a la gráfica de la función. ¿Qué significa cada una de las dos coordenadas cartesianas del punto?

c. Determinen cuáles de los siguientes puntos expresados a través de sus coordenadas cartesianas pertenecen a la gráfica de la función: (11, -2); (6, 10). Expliquen sus respuestas.

d. Señalen un punto en el eje X, que represente la altura de una caja posible en el contexto. Sin realizar cálculos, determinen para dicho punto el correspondiente punto en el eje $f_2(X)$, que representa el ancho de tal caja.

e. Señalen un punto en el eje $f_2(X)$, que represente el ancho de una caja posible en el contexto. Sin realizar cálculos, determinen para dicho punto el correspondiente punto en el eje X, que representa la altura de tal caja.

f. Un grupo de estudiantes del curso afirma que es posible construir dos cajas de diferente ancho que tengan la misma altura. Discutan si tal afirmación es verdadera o falsa; justifiquen su respuesta valiéndose de la tabla, la gráfica, o, la expresión simbólica correspondiente.

g. ¿Es válido afirmar que "de dos cajas de diferente altura, es menos ancha la más alta"? Utilicen la gráfica para argumentar su respuesta.

Función área del papel desperdiciado

a. En los ejes marquen con color los posibles valores de la altura y de la función que tienen asignada.

b. El punto de coordenadas (3.25, 42.25) pertenece a la gráfica de la función. ¿Qué significa cada una de las dos coordenadas cartesianas del punto?

c. Determinen cuáles de los siguientes puntos expresados a través de sus coordenadas cartesianas pertenecen a la gráfica de la función: (11, 484); (6, 140). Expliquen sus respuestas.

d. Señalen un punto en el eje X, que represente la altura de una caja posible en el contexto. Sin realizar cálculos, determinen para dicho punto el correspondiente punto en el eje $f_3(X)$, que representa el área del papel desperdiciado para construir tal caja.

e. Señalen un punto en el eje $f_3(X)$, que represente el área del papel desperdiciado para construir una caja posible en el contexto. Sin realizar cálculos, determinen para dicho punto el correspondiente punto en el eje X, que representa la altura de tal caja.

f. Un grupo de estudiantes del curso afirma que es posible construir dos cajas para las que el área del papel desperdiciado es diferente y tienen la misma altura. Discutan si tal afirmación es verdadera o falsa; justifiquen su respuesta valiéndose de la tabla, la gráfica, o, la expresión simbólica correspondiente.

g. ¿Es válido afirmar que "de dos cajas de diferente altura, el área de papel desperdiciado es mayor en el caso de la caja más alta"? Utilicen la gráfica para argumentar su respuesta.

Función área del papel de la caja

a. En los ejes marquen con color los posibles valores de la altura y de la función que tienen asignada.

b. El punto de coordenadas (3.25, 437.75) pertenece a la gráfica de la función. ¿Qué significa cada una de las dos coordenadas cartesianas del punto?

c. Determinen cuáles de los siguientes puntos expresados a través de sus coordenadas cartesianas pertenecen a la gráfica de la función: (10.75, 17.75); (6, 332); (11, -4). Expliquen sus respuestas.

d. Señalen un punto en el eje X, que represente la altura de una caja posible en el contexto. Sin realizar cálculos, determinen para dicho punto el correspondiente punto en el eje $f_4(X)$, que representa el área del papel de tal caja.

e. Señalen un punto en el eje $f_4(X)$, que represente el área del papel de una caja posible en el contexto. Sin realizar cálculos, determinen para dicho punto el correspondiente punto en el eje X, que representa la altura de tal caja.

f. Un grupo de estudiantes del curso afirma que es posible construir dos cajas para las que el área del papel es diferente y tienen la misma altura. Discutan si tal afirmación es verdadera o falsa; justifiquen su respuesta valiéndose de la tabla, la gráfica, o, la expresión simbólica correspondiente.

g. ¿Es válido afirmar que "de dos cajas de diferente altura, el área del papel de la caja es menor en el caso de la caja más alta"? Utilicen la gráfica para argumentar su respuesta.

<u>Función área de la base</u>

a. En los ejes marquen con color los posibles valores de la altura y de la función que tienen asignada.

b. El punto de coordenadas (3.25, 236.25) pertenece a la gráfica de la función. ¿Qué significa cada una de las dos coordenadas cartesianas del punto?

c. Determinen cuáles de los siguientes puntos expresados a través de sus coordenadas cartesianas pertenecen a la gráfica de la función: (11, -4); (6, 98). Expliquen sus respuestas.

d. Señalen un punto en el eje X, que represente la altura de una caja posible en el contexto. Sin realizar cálculos, determinen para dicho punto el correspondiente punto en el eje $f_5(X)$, que representa el área de la base de tal caja.

e. Señalen un punto en el eje $f_5(X)$, que represente el área de la base de una caja posible en el contexto. Sin realizar cálculos, determinen para dicho punto el correspondiente punto en el eje X, que representa la altura de tal caja.

f. Un grupo de estudiantes del curso afirma que es posible construir dos cajas para las que el área de la base es diferente y tienen la misma altura. Discutan si tal afirmación es verdadera o falsa; justifiquen su respuesta valiéndose de la tabla, la gráfica, o, la expresión simbólica correspondiente.

g. ¿Es válido afirmar que "de dos cajas de diferente altura, la que tiene base de menor área es la más alta"? Utilicen la gráfica para argumentar su respuesta.

<u>Función capacidad</u>

a. En los ejes marquen con color los posibles valores de la altura y de la función que tienen asignada.

b. El punto de coordenadas (3.25, 767.8125) pertenece a la gráfica de la función. ¿Qué significa cada una de las dos coordenadas cartesianas del punto?

c. Determinen cuáles de los siguientes puntos expresados a través de sus coordenadas cartesianas pertenecen a la gráfica de la función: (11, -44); (6, 578). Expliquen sus respuestas.

d. Señalen un punto en el eje X, que represente la altura de una caja posible en el contexto. Sin realizar cálculos, determinen para dicho punto el correspondiente punto en el eje $f_6(X)$, que representa la capacidad de tal caja.

e. Señalen un punto en el eje $f_6(X)$, que represente la capacidad de una caja posible en el contexto. Sin realizar cálculos, determinen para dicho punto el(los) correspondiente(s) punto(s) en el eje X, que representa(n) la(s) altura(s) de tal caja.

f. Un grupo de estudiantes del curso afirma que es posible construir dos cajas de diferente capacidad que tengan la misma altura. Discutan si tal afirmación es verdadera o falsa; justifiquen su respuesta valiéndose de la tabla, la gráfica, o, la expresión simbólica correspondiente.

g. ¿Es válido afirmar que "de dos cajas de diferente altura, tiene volumen mayor la más alta"? Utilicen la gráfica para argumentar su respuesta.

4) Preparen una exposición en la que den información acerca de:

- cómo eligieron la escala sobre ambos ejes, el horizontal y el vertical;
- cómo asociaron un par de valores correspondientes de la tabla con un punto de la gráfica;
- por qué hicieron o no un trazo uniendo los puntos ubicados a partir de la tabla;
- cómo hicieron para determinar qué tipo de trazo habría que hacer entre dos puntos;
- cómo representaron los valores extremos de la función;
- cómo hicieron para determinar si un punto dado a través de sus coordenadas cartesianas pertenece o no a la gráfica de la función;
- cómo hicieron para ubicar el punto sobre el eje $f_n(X)$, correspondiente a un punto dado sobre el eje X;
- cómo hicieron para ubicar el punto sobre el eje X, correspondiente a un punto dado sobre el eje $f_n(X)$;
- cómo argumentaron la veracidad o falsedad de las afirmaciones de los puntos (f) y (g).

5) Luego de las exposiciones, realicen en una hoja de papel milimetrado una gráfica cartesiana de la función asignada. Saquen tantas fotocopias de esa gráfica como la mitad de grupos que haya conformados y entreguen una a cada uno de esos grupos. Después de esto, cada grupo deberá tener copia de una gráfica de cada una de las seis funciones con las que estamos trabajando.

6) Determinen algunas características que sean comunes a las gráficas de las seis funciones. Repórtenlas por escrito.
7) Determinen algunas características que permitan configurar grupos de gráficas de las seis funciones. Reporten cada característica seguida de la clasificación de las funciones por ella generada.
8) Determinen algunas características que permitan configurar grupos de expresiones simbólicas de las seis funciones. Reporten cada característica seguida de la clasificación de las funciones por ella generada.
9) Identifiquen si el resultado de alguna clasificación generada en el punto 7 se corresponde con alguna clasificación generada en el punto 8.

TABLA[3]

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	$f_5(x)$	$f_6(x)$
0	24	20	0	480	480	0
0.5	23	19	1	479	437	218.5
1	22	18	4	476	396	396
1.5	21	17	9	471	357	535.5
2	20	16	16	464	320	640
2.5	19	15	25	455	285	712.5
3	18	14	36	444	252	756
3.5	17	13	49	431	221	773.5
4	16	12	64	416	192	768
4.5	15	11	81	399	165	742.5
5	14	10	100	380	140	700
5.5	13	9	121	359	117	643.5
6	12	8	144	336	96	576
6.5	11	7	169	311	77	500.5
7	10	6	196	284	60	420
7.5	9	5	225	255	45	337.5
8	8	4	256	224	32	256
8.5	7	3	289	191	21	178.5
9	6	2	324	156	12	108
9.5	5	1	361	119	5	47.5
10	4	0	400	80	0	0

3. Esta tabla puede reemplazar parcialmente la información que se requiere para responder algunas preguntas del taller y que se plantean para ser respondidas con calculadora.

QUINTO TALLER (VERSION A)

En este taller seguiremos trabajando con las seis funciones establecidas en el taller anterior, las cuales dependen de la altura de la caja. En lo que sigue vamos a examinar con algún detalle la variación de estas funciones.

Trabajo individual en los grupos

1) En el contexto en el que estamos trabajando surgen dos cuestiones que queremos tratar de resolver con el trabajo de este taller.

   Si al comparar varias parejas de cajas se encuentra que su altura difiere en la misma cantidad, ¿será cierto que el largo de las cajas también difiere en una misma cantidad?

   Si al comparar varias parejas de cajas se encuentra que su altura difiere en la misma cantidad, ¿será cierto que el área del papel de las cajas también difiere en una misma cantidad?

   a. Sin utilizar más de cinco minutos, intente responder por escrito las dos preguntas anteriores.

   b. Si en los cinco minutos que tuvo no pudo responder, ¿qué estrategia seguiría para resolver tales cuestiones? Explique su respuesta.

Acerca de la función *largo de la caja* ($f_1(x) = -2x + 24$)

2) Cada uno de los integrantes del grupo va a examinar cómo varían los valores de $f_1(x)$ cuando la variable x varía con incrementos de un valor específico. Para ello, cada miembro del grupo debe completar la segunda fila de una de las cuatro tablas que aparecen a continuación (usando calculadora) y luego, con base en la información de su tabla, debe responder las preguntas 3 a 6.

   a.

diferencia en x

x	0.2	1.2	2.2	3.2	4.2	5.2	6.2	7.2	8.2
$f_1(x)$									

diferencia en $f_1(x)$

b.

diferencia en x

x	3.3	3.8	4.3	4.8	5.3	5.8	6.3	6.8	7.3
$f_1(x)$									

diferencia en $f_1(x)$

c.

diferencia en x

x	0.3	1.1	1.9	2.7	3.5	4.3	5.1	5.9	6.7
$f_1(x)$									

diferencia en $f_1(x)$

d.

diferencia en x

x	0.1	1.3	2.5	3.7	4.9	6.1	7.3	8.5	9.7
$f_1(x)$									

diferencia en $f_1(x)$

3) En la tabla, los valores dados a x están ordenados ascendentemente. Determine si la siguiente aseveración es verdadera o falsa: entre dos valores consecutivos cualesquiera de x (considerando primero el que está a la derecha) hay una diferencia constante (los valores de las diferencias son iguales). En la primera fila de óvalos registre los valores de las diferencias.

4) Para cada par de valores consecutivos de $f_1(x)$ registrados en su tabla, determine la diferencia (lo mismo que para los valores de x, considere primero el que está a la derecha); si lo considera necesario utilice la calculadora. En la segunda fila de óvalos,

escriba el valor de la diferencia obtenida. ¿Es cierto que los valores de las diferencias son el mismo?

5) Que la diferencia en valores consecutivos de x sea la misma en la tabla fue decisión de quien escogió los valores. ¿Puede dar alguna explicación o alguna justificación de por qué la diferencia entre valores consecutivos de $f_1(x)$ resultó negativa y por qué esa diferencia es la misma en todos los casos considerados?

6) ¿Las respuestas a los ítems 3, 4 y 5 se modifican si la diferencia entre valores consecutivos de la tabla se calcula considerando primero el valor que está a la izquierda (y no a la derecha como se especifica en los ítems 3 y 4)? Explique su respuesta.

<u>Acerca de la función *área del papel de la caja*</u> ($f_4(x) = -4x^2 + 480$)

7) Cada integrante del grupo va a examinar cómo varían los valores de $f_4(x)$ cuando la variable x varía con diferencias de un valor específico. Para ello, cada miembro del grupo debe completar la tercera fila de una de las cuatro tablas que aparecen a continuación (usando calculadora) y luego, con base en la información de su tabla, debe responder las preguntas 8 a 9.

e.

diferencia en x

x	0.2	1.2	2.2	3.2	4.2	5.2	6.2	7.2	8.2
$f_4(x)$									

diferencia en $f_4(x)$

f.

diferencia en x

x	3.3	3.8	4.3	4.8	5.3	5.8	6.3	6.8	7.3
$f_4(x)$									

diferencia en $f_4(x)$

g.

diferencia en x

x	0.3	1.1	1.9	2.7	3.5	4.3	5.1	5.9	6.7
$f_4(x)$									

diferencia en $f_4(x)$

h.

diferencia en x

x	0.1	1.3	2.5	3.7	4.9	6.1	7.3	8.5	9.7
$f_4(x)$									

diferencia en $f_4(x)$

8) También en este caso, al considerar dos valores consecutivos en la tabla, la diferencia en x es constante. En la primera fila registre el valor de dicha diferencia.

9) Para cada par de valores consecutivos de $f_4(x)$ registrados en su tabla, utilizando calculadora, determine su diferencia. En la segunda fila de óvalos, escriba el valor de la diferencia obtenida. ¿Es cierto que los valores de las diferencias son el mismo? Describa la mayor cantidad de detalles acerca del comportamiento de los valores de las diferencias que obtuvo.

Trabajo en grupos de 4

Acerca de la función *largo de la caja* ($f_1(x) = -2x + 24$)

10) En la respectiva gráfica cartesiana, entregada por el profesor, identifiquen y marquen con un mismo color los puntos correspondientes a los valores de la tabla (a.) que elaboraron en el trabajo individual. Con el mismo color, representen en esa gráfica las diferencias que calcularon. Describan las características que se pueden observar al mirar el dibujo obtenido.

11) Con tres colores diferentes al utilizado antes, realicen las actividades propuestas en el ítem 10 para las tablas (b., c., d.) respectivamente.

12) De las características que identificaron en las gráficas de cada una de las tablas, ¿cuáles son comunes y cuáles no lo son?

13) En la siguiente tabla, registren un resumen de los resultados obtenidos en el trabajo individual.

Nombre del estudiante	Diferencias entre valores consecutivos de x	Diferencias entre valores consecutivos de $f_1(x)$

14) Con base en el trabajo individual y en la tabla anterior, si dos cajas difieren en su altura en 1.5 cm., ¿se puede averiguar en cuánto difieren los correspondientes largos? Expliquen cómo dan respuesta a esa pregunta.

Acerca de la función *área del papel de la caja* ($f_4(x) = -4x^2 + 480$)

15) En la respectiva gráfica cartesiana, entregada por el profesor, identifiquen y marquen con un mismo color los puntos correspondientes a los valores de la tabla (e.) que elaboraron en el trabajo individual. Con el mismo color, representen en esa gráfica las diferencias que calcularon. Describan las características que se pueden observar al mirar el dibujo obtenido.

16) Con tres colores diferentes al utilizado antes, realicen las actividades propuestas en el ítem 10 para las tablas (f., g., h.) respectivamente.

17) De las características que identificaron en las gráficas de cada una de las tablas, ¿cuáles son comunes y cuáles no lo son?

18) En la siguiente tabla, registren un resumen de los resultados obtenidos en el trabajo individual.

Nombre del estudiante	Diferencias entre valores consecutivos de x	Diferencias entre valores consecutivos de $f_4(x)$

19) Con base en el trabajo individual y en la tabla anterior, si dos cajas difieren en su altura en 1.5 cm., ¿se puede averiguar en cuánto difieren las correspondientes áreas del papel de las cajas? Expliquen cómo dan respuesta a esa pregunta.

20) Discutan las respuestas que cada quien dio al ítem 1. Atendiendo a lo discutido y a lo realizado en el taller, elaboren una nueva respuesta del grupo para las preguntas:

Si al comparar varias parejas de cajas se encuentra que su altura difiere en la misma cantidad, ¿será cierto que el largo de las cajas también difiere en una misma cantidad?

Si al comparar varias parejas de cajas se encuentra que su altura difiere en la misma cantidad, ¿será cierto que el área del papel de las cajas también difiere en una misma cantidad?

QUINTO TALLER (VERSIÓN B)

En este taller seguiremos trabajando con las seis funciones establecidas en el taller anterior, las cuales dependen de la altura de la caja. En lo que sigue vamos a examinar con algún detalle la variación de estas funciones.

Trabajo individual

1) En el contexto en el que estamos trabajando, surgen dos preguntas que queremos tratar de responder con el trabajo de este taller.

   Si al comparar varias parejas de cajas se encuentra que su altura difiere en la misma cantidad, ¿será cierto que el ancho de las cajas también difiere en una misma cantidad?

   Si al comparar varias parejas de cajas se encuentra que su altura difiere en la misma cantidad, ¿será cierto que el área del papel desperdiciado también difiere en una misma cantidad?

   a. Sin utilizar más de cinco minutos, intente responder por escrito las dos preguntas anteriores.

   b. Si en los cinco minutos que tuvo no pudo responder, ¿qué estrategia seguiría para resolver tales cuestiones? Explique su respuesta.

<u>Acerca de la función *ancho de la caja*</u> ($f_2(x) = -2x + 20$)

2) Cada uno de los integrantes del grupo va a examinar cómo varían los valores de $f_2(x)$ cuando la variable x varía con incrementos de un valor específico. Para ello, cada miembro del grupo debe completar la segunda fila de una de las cuatro tablas que aparecen a continuación (usando calculadora) y luego, con base en la información de su tabla, debe responder las preguntas 3 a 6.

   a.

diferencia en x

x	0.2	1.2	2.2	3.2	4.2	5.2	6.2	7.2	8.2
$f_2(x)$									

diferencia en $f_2(x)$

b.

diferencia en x

x	3.3	3.8	4.3	4.8	5.3	5.8	6.3	6.8	7.3
$f_2(x)$									

diferencia en $f_2(x)$

c.

diferencia en x

x	0.3	1.1	1.9	2.7	3.5	4.3	5.1	5.9	6.7
$f_2(x)$									

diferencia en $f_2(x)$

d.

diferencia en x

x	0.1	1.3	2.5	3.7	4.9	6.1	7.3	8.5	9.7
$f_2(x)$									

diferencia en $f_2(x)$

3) En la tabla, los valores dados a x están ordenados ascendentemente. Determine si la siguiente aseveración es verdadera o falsa: entre dos valores consecutivos cualesquiera de x (considerando primero el que está a la derecha) hay una diferencia constante (los valores de las diferencias son iguales). En la primera fila de óvalos registre los valores de las diferencias.

4) Para cada par de valores consecutivos de $f_2(x)$ registrados en su tabla, determine la diferencia (lo mismo que para los valores de x, considere primero el que está a la derecha); si lo considera necesario utilice la calculadora. En la segunda fila de óvalos,

escriba el valor de la diferencia obtenida. ¿Es cierto que los valores de las diferencias son el mismo?

5) Que la diferencia en valores consecutivos de x sea la misma en la tabla fue decisión de quien escogió los valores. ¿Puede dar alguna explicación o alguna justificación de por qué la diferencia entre valores consecutivos de $f_2(x)$ resultó negativa y por qué esa diferencia es la misma en todos los casos considerados?

6) ¿Las respuestas a los ítems 3, 4 y 5 se modifican si la diferencia entre valores consecutivos de la tabla se calcula considerando primero el valor que está a la izquierda (y no a la derecha como se especifica en los ítems 3 y 4)? Explique su respuesta.

Acerca de la función *área del papel desperdiciado* ($f_3(x) = 4x^2$)

7) Cada integrante del grupo va a examinar cómo varían los valores de $f_3(x)$ cuando la variable x varía con diferencias de un valor específico. Para ello, cada miembro del grupo debe completar la tercera fila de una de las cuatro tablas que aparecen a continuación (usando calculadora) y luego, con base en la información de su tabla, debe responder las preguntas 8 a 9.

a.

diferencia en x

x	0.2	1.2	2.2	3.2	4.2	5.2	6.2	7.2	8.2
$f_3(x)$									

diferencia en $f_3(x)$

b.

diferencia en x

x	3.3	3.8	4.3	4.8	5.3	5.8	6.3	6.8	7.3
$f_3(x)$									

diferencia en $f_3(x)$

c.

diferencia en x								

x	0.3	1.1	1.9	2.7	3.5	4.3	5.1	5.9	6.7
$f_3(x)$									

diferencia en $f_3(x)$								

d.

diferencia en x								

x	0.1	1.3	2.5	3.7	4.9	6.1	7.3	8.5	9.7
$f_3(x)$									

diferencia en $f_3(x)$								

8) También en este caso, al considerar dos valores consecutivos en la tabla, la diferencia en x es constante. En la primera fila registre el valor de dicha diferencia.

9) Para cada par de valores consecutivos de $f_3(x)$ registrados en su tabla, utilizando calculadora, determine su diferencia. En la segunda fila de óvalos, escriba el valor de la diferencia obtenida. ¿Es cierto que los valores de las diferencias son el mismo? Describa la mayor cantidad de detalles acerca del comportamiento de los valores de las diferencias que obtuvo.

Trabajo en grupos de 4

Acerca de la función *ancho de la caja* ($f_2(x) = -2x + 20$)

10) En la respectiva gráfica cartesiana, entregada por el profesor, identifiquen y marquen con un mismo color los puntos correspondientes a los valores de la tabla (a.) que elaboraron en el trabajo individual. Con el mismo color, representen en esa gráfica las diferencias que calcularon. Describan las características que se pueden observar al mirar el dibujo obtenido.

11) Con tres colores diferentes al utilizado antes, realicen las actividades propuestas en el ítem 10 para las tablas (b., c., d.) respectivamente.

12) De las características que identificaron en las gráficas de cada una de las tablas, ¿cuáles son comunes y cuáles no lo son?

13) En la siguiente tabla, registren un resumen de los resultados obtenidos en el trabajo individual.

Nombre del estudiante	Diferencias entre valores consecutivos de x	Diferencias entre valores consecutivos de $f_2(x)$

14) Con base en el trabajo individual y en la tabla anterior, si dos cajas difieren en su altura en 1.5 cm., ¿se puede averiguar en cuánto difieren los correspondientes anchos? Expliquen cómo dan respuesta a esa pregunta.

<u>Acerca de la función *área del papel desperdiciado* ($f_3(x) = 4x^2$)</u>

15) En la respectiva gráfica cartesiana, entregada por el profesor, identifiquen y marquen con un mismo color los puntos correspondientes a los valores de la tabla (e.) que elaboraron en el trabajo individual. Con el mismo color, representen en esa gráfica las diferencias que calcularon. Describan las características que se pueden observar al mirar el dibujo obtenido.

16) Con tres colores diferentes al utilizado antes, realicen las actividades propuestas en el ítem 10 para las tablas (f., g., h.) respectivamente.

17) De las características que identificaron en las gráficas de cada una de las tablas, ¿cuáles son comunes y cuáles no lo son?

18) En la siguiente tabla, registren un resumen de los resultados obtenidos en el trabajo individual.

Nombre del estudiante	Diferencias entre valores consecutivos de x	Diferencias entre valores consecutivos de $f_3(x)$

19) Con base en el trabajo individual y en la tabla anterior, si dos cajas difieren en su altura en 1.5 cm., ¿se puede averiguar en cuánto difieren las correspondientes áreas del papel desperdiciado? Expliquen cómo dan respuesta a esa pregunta.

20) Discutan las respuestas que cada quien dio al ítem 1. Atendiendo a lo discutido y a lo realizado en el taller, elaboren una nueva respuesta del grupo para las preguntas:

Si al comparar varias parejas de cajas se encuentra que su altura difiere en la misma cantidad, ¿será cierto que el ancho de las cajas también difiere en una misma cantidad?

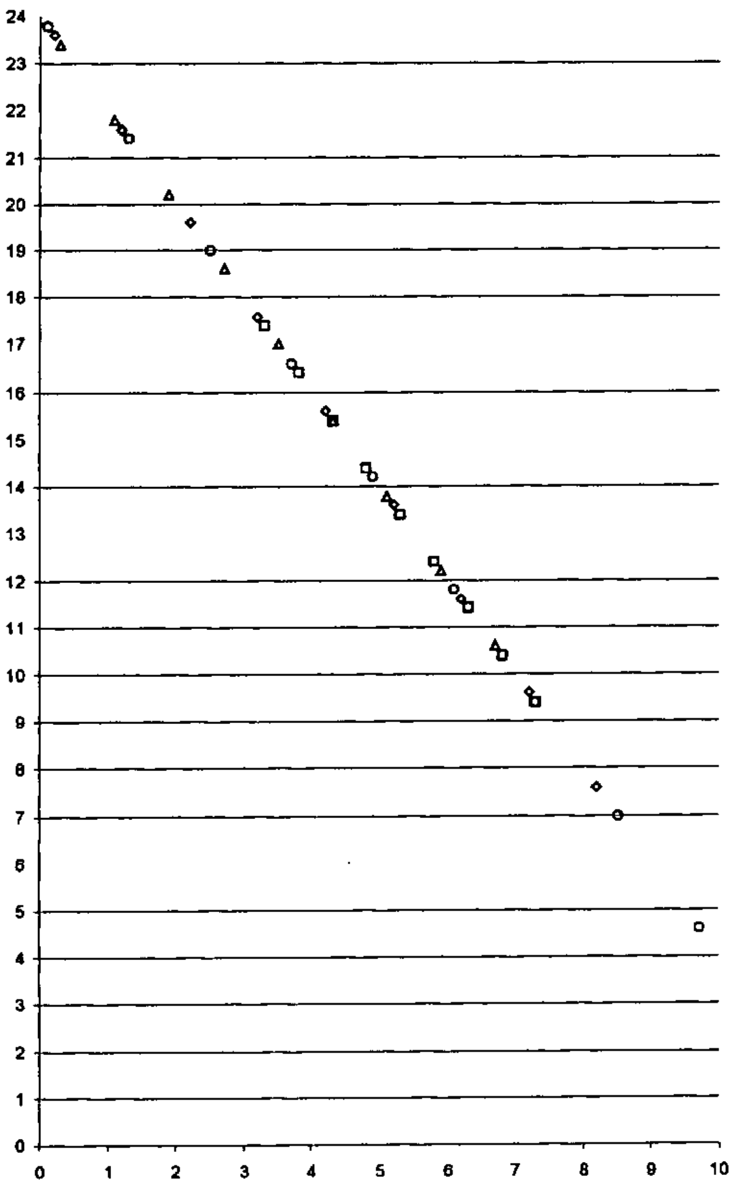
Si al comparar varias parejas de cajas se encuentra que su altura difiere en la misma cantidad, ¿será cierto que el área del papel desperdiciado también difiere en una misma cantidad?

de algunas preguntas planteadas en la sección de trabajo en grupo. Esperamos que los estudiantes identifiquen que para las funciones afines la diferencia de los valores de la variable dependiente es constante, en tanto que para las funciones cuadráticas la diferencia de valores de la variable dependiente es lineal, es decir que conforman una sucesión aritmética.

5) En el trabajo en grupo se propone inicialmente un trabajo sobre las gráficas cartesianas de los valores implicados en las respectivas tablas; se trata entonces de poder visualizar, en un sistema de representación gráfico la regularidad de las variaciones tanto de las funciones afines como de las cuadráticas. Por supuesto, que esta actividad pone en juego nuevos elementos a los vinculados en la representación tabular; por ejemplo, el proceso de comparación de dos variaciones o incrementos, puede implicar la medida de los segmentos que las representan.

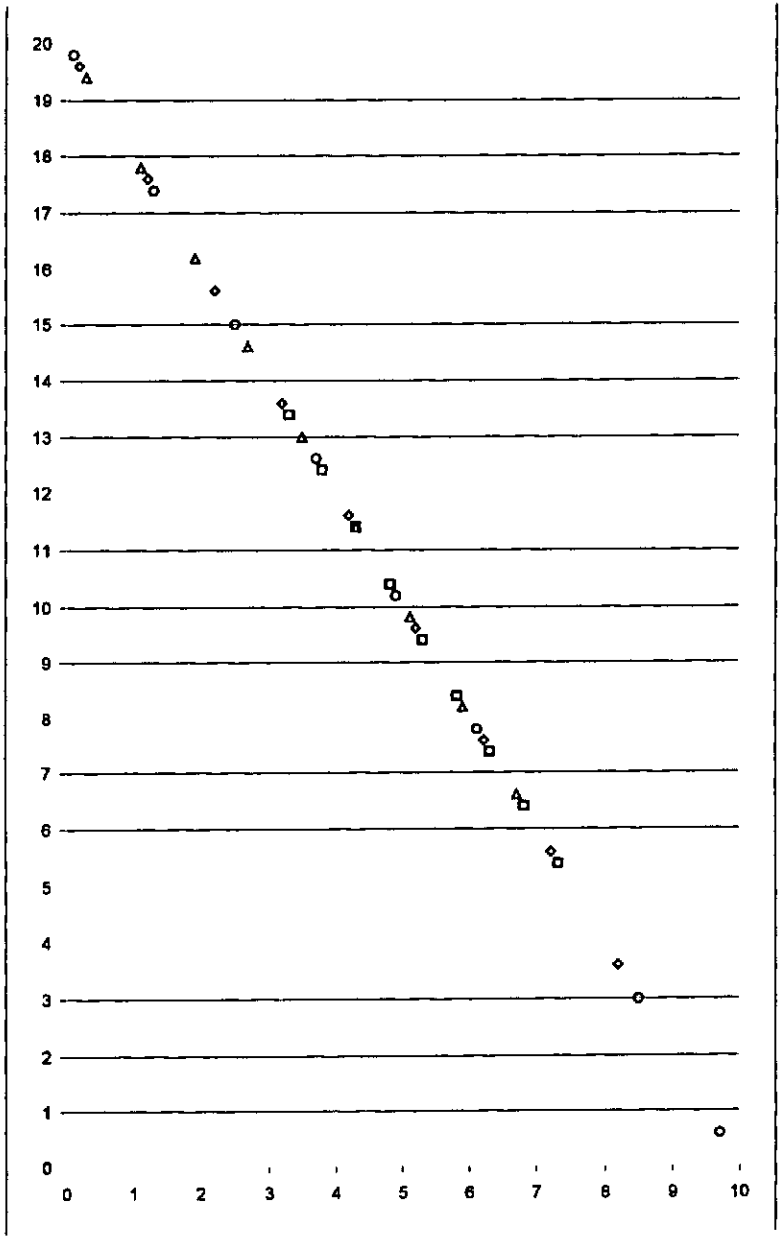
GRÁFICA CARTESIANA DE LA FUNCIÓN LARGO DE LA CAJA

$$f_1(x) = -2x + 24$$



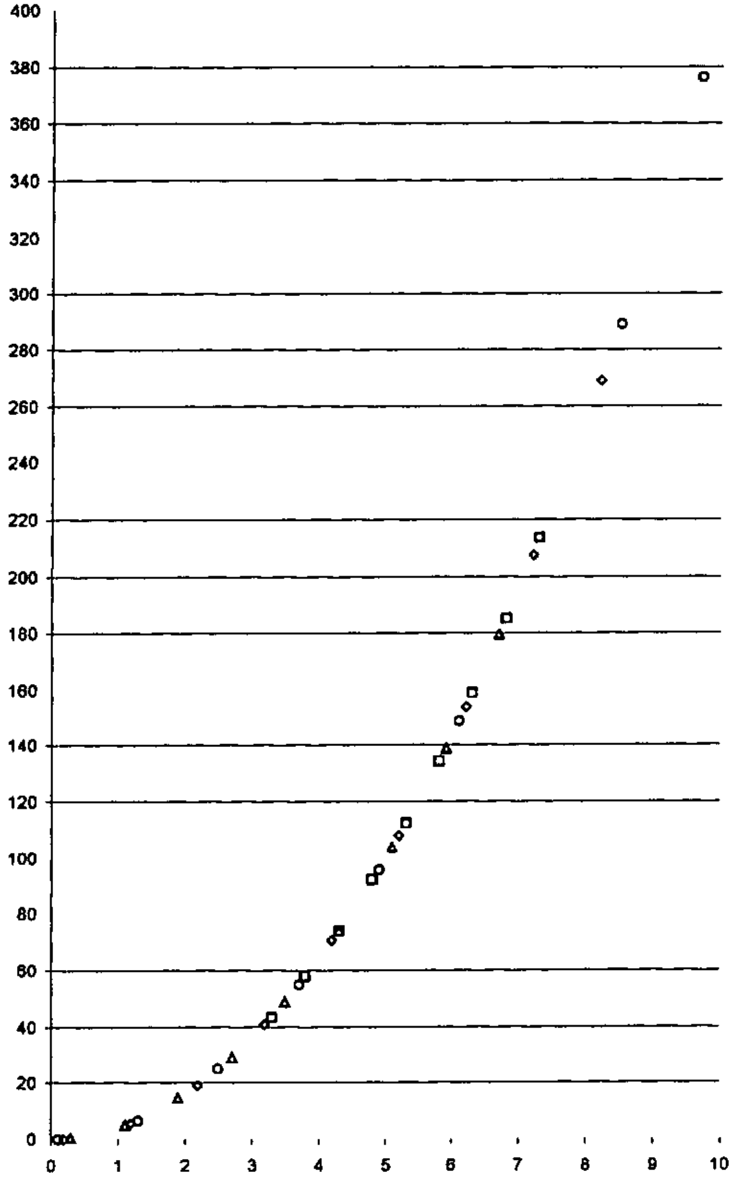
GRÁFICA CARTESIANA DE LA FUNCIÓN ANCHO DE LA CAJA

$$f_2(x) = -2x + 20$$



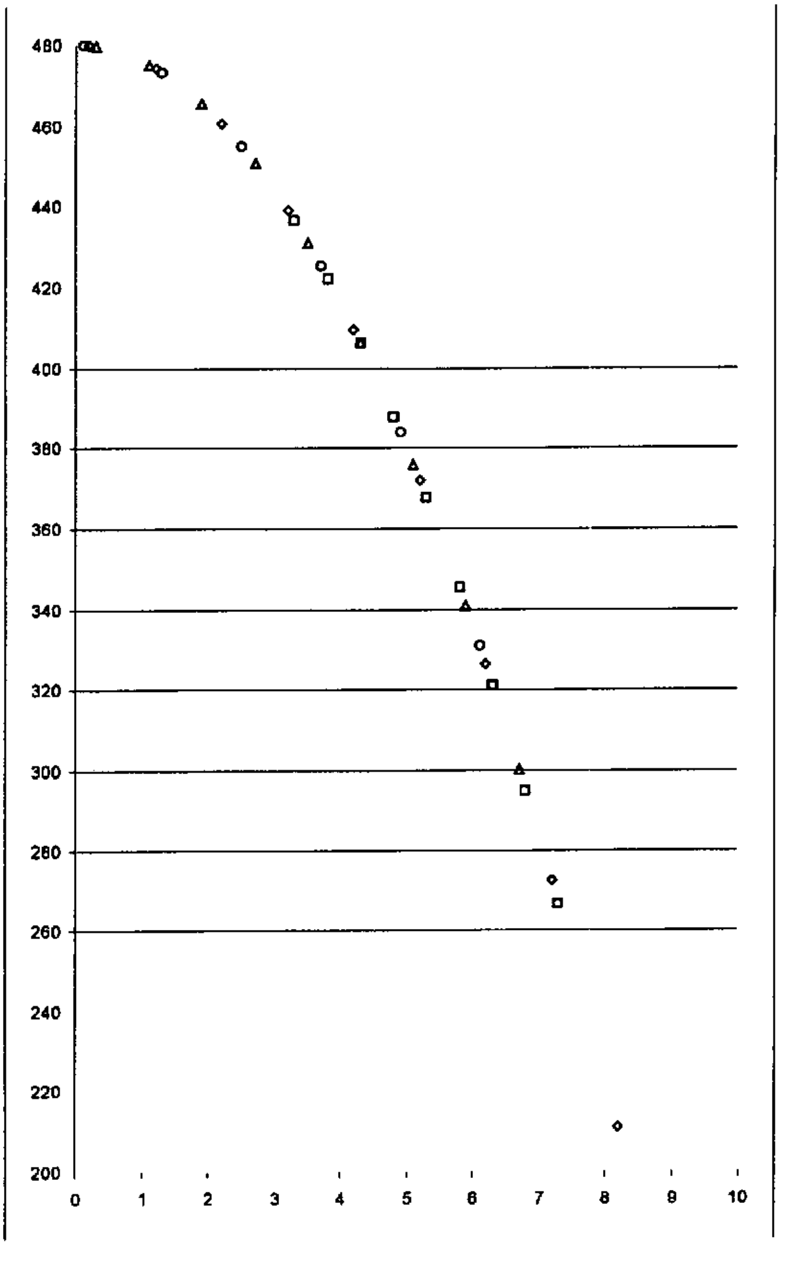
GRÁFICA CARTESIANA DE LA FUNCIÓN ÁREA DEL PAPEL DESPERDICIADO

$$f_3(x) = 4x^2$$



GRÁFICA CARTESIANA DE LA FUNCIÓN ÁREA DEL PAPEL DE LA CAJA

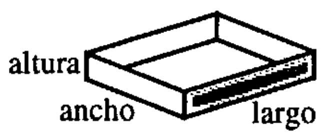
$$f_4(x) = -4x^2 + 480$$



SEXTO TALLER (VERSIÓN A)

Para responder esta evaluación deben trabajar en grupos de dos estudiantes, disponen de una (1) semana a partir de hoy, y pueden utilizar calculadora. Esta evaluación es una oportunidad para que ustedes demuestren lo que han comprendido a través de la realización de los talleres anteriores. Se espera que usen tablas, gráficas, expresiones simbólicas; que utilicen datos de otras parejas; que hagan conjeturas; que den explicaciones; que examinen casos particulares; es decir, **que hagan todo lo necesario para responder de manera justificada sus respuestas**. Deben entregar un reporte que recoja sus respuestas a las tareas que aquí se plantean y todas las explicaciones y comentarios que consideren necesarios para **demostrar todo lo que han comprendido** acerca del asunto que se está evaluando.

En la evaluación van a continuar trabajando en el mismo contexto, es decir, con las cajas formadas a partir de cortar cuadrados de lado x en cada una de las esquinas de una hoja de papel de 24 cm. de largo, y de 20 cm. de ancho. En esta ocasión van a trabajar con la función que relaciona la medida del lado del cuadrado con la medida del área de una de las caras determinadas por el largo de la caja. (Nos referimos a la cara sombreada en el dibujo que representa la caja).



Evaluación

1) Si x representa la medida del lado de cualquier cuadrado recortado en cualquiera de las cajas construidas y t representa la medida del área de la cara determinada por el largo de la caja, escriban una expresión simbólica que les permita calcular t a partir de x.

2) Determinen el conjunto de todos los valores que puede tomar la medida del área de la cara determinada por el largo de cualquiera de las cajas que es posible construir en el contexto.

3) Utilizando la notación que se emplea para las funciones, en la que se expresa el hecho de que hay una variable de la que depende la función, expresen la función área de la cara determinada por el largo de la caja y llámenla f_7. Describan algunas características de la expresión simbólica.

4) Describan el conjunto de valores que puede tomar la función f_7, teniendo en cuenta la mayor cantidad posible de características.

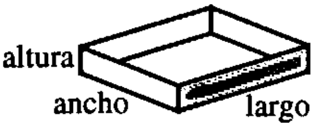
5) Hagan una gráfica cartesiana de la función f_7 y mencionen todas las características de la función que se pueden ver en dicha gráfica.

6) Si al comparar varias parejas de cajas se encuentra que las alturas difieren en la misma cantidad, ¿será cierto que sus respectivas áreas de una de las caras determinada por el largo de la caja, también difieren en una misma cantidad?

SEXTO TALLER (VERSIÓN B)

Para responder esta evaluación deben trabajar en grupos de dos estudiantes, disponen de una (1) semana a partir de hoy, y pueden utilizar calculadora. Esta evaluación es una oportunidad para que ustedes demuestren lo que han comprendido a través de la realización de los talleres anteriores. Se espera que usen tablas, gráficas, expresiones simbólicas; que utilicen datos de otras parejas; que hagan conjeturas; que den explicaciones; que examinen casos particulares; es decir, **que hagan todo lo necesario para responder de manera justificada sus respuestas.** Deben entregar un reporte que recoja sus respuestas a las tareas que aquí se plantean y todas las explicaciones y comentarios que consideren necesarios para **demostrar todo lo que han comprendido** acerca del asunto que se está evaluando.

En la evaluación van a continuar trabajando en el mismo contexto, es decir, con las cajas formadas a partir de cortar cuadrados de lado x en cada una de las esquinas de una hoja de papel de 24 cm. de largo, y de 20 cm. de ancho. En esta ocasión van a trabajar con la función que relaciona la medida del lado del cuadrado con la medida del área de una de las caras determinadas por el ancho de la caja. (Nos referimos a la cara sombreada en el dibujo que representa la caja).



Evaluación

1) Si x representa la medida del lado de cualquier cuadrado recortado en cualquiera de las cajas construidas y w representa la medida del área de la cara determinada por el ancho de la caja, escriban una expresión simbólica que les permita calcular w a partir de x.
2) Determinen el conjunto de todos los valores que puede tomar la medida del área de la cara determinada por el ancho de cualquiera de las cajas que es posible construir en el contexto.
3) Utilizando la notación que se emplea para las funciones, en la que se expresa el hecho de que hay una variable de la que depende la función, expresen la función área de la cara determinada por el ancho de la caja y llámenla f_8. Describan algunas características de la expresión simbólica.
4) Describan el conjunto de valores que puede tomar la función f_8, teniendo en cuenta la mayor cantidad posible de características.
5) Hagan una gráfica cartesiana de la función f_8 y mencionen todas las características de la función que se pueden ver en dicha gráfica.

6) Si al comparar varias parejas de cajas se encuentra que las alturas difieren en la misma cantidad, ¿será cierto que sus respectivas áreas de una de las caras determinada por el ancho de la caja, también difieren en una misma cantidad?

CONSIDERACIONES ACERCA DEL PRIMER TALLER

Intencionalidad

Con esta tarea se pretende propiciar una oportunidad para que los estudiantes tengan un acercamiento a lo que significa la dependencia entre variables y que esa dependencia se puede representar simbólicamente. Además, se pretende que los estudiantes vean que hay situaciones de la realidad que no se describen con polinomios de grado uno.

Consideraciones metodológicas

Materiales requeridos: tres hojas de papel cuadriculado de 24 cm. por 20 cm., tijeras, cinta pegante, regla. El día anterior a la clase, se pide a los estudiantes traer esos materiales.

Estrategia: Se organizan los estudiantes en grupos de cuatro y a cada estudiante se le da una hoja con las instrucciones y las preguntas correspondientes al primer taller.

Para comenzar, como la idea es que cada alumno construya una caja de un modelo dado, utilizando una estrategia específica, el profesor la indicará a medida que él mismo construye una de tales cajas, a manera de ilustración para todo el curso. La estrategia para construir la caja sin tapa consiste en recortar cuadrados congruentes de las esquinas, con lo cual queda determinado el tamaño de la caja; luego hacer los correspondientes cuatro dobleces; y, finalmente hacer las uniones con cinta pegante. Se quiere que el profesor haga delante de sus alumnos todo el proceso que se espera que ellos hagan para construir la caja. Así, pues, en la ilustración del proceso —dado que el profesor trabajará con una hoja en blanco— tendrá que dar cuenta de, por ejemplo, (a) la elección de un valor para la medida de los cuadrados que va a recortar; (b) el trazado de las líneas guías para saber por dónde recortar; (c) la forma de armar la caja. Se recomendará a los estudiantes no botar los pedazos de papel que se han recortado; la razón para esto es que los estudiantes se puedan valer de ese material concreto en el caso de que hayan olvidado la fórmula del área de un cuadrado.

Puesto que no se pretende que la construcción de la caja distraiga en demasía la atención de los estudiantes, se restringirá la estrategia a utilizar a una específica (la que el profesor muestre) y además, se les pedirá trabajar en papel cuadriculado, de las medidas indicadas.

Se espera que entre todos los alumnos del curso se tengan construidas cajas de diversos tamaños —para lo cual se dará una instrucción que apunte a este hecho— que permitan ver que la altura de la caja es una variable de la que dependen las otras dos dimensiones de la caja y en consecuencia, de dicha variable también dependen las variables sobre las que se enfocarán los demás talleres.

Una vez cada alumno haya construido su caja y haya respondido a ciertas preguntas relativas a ella, habrá un trabajo en el grupo de 4. Se espera que teniendo más información (la de los compañeros) y teniendo que enfocar la atención sobre semejanzas y diferencias en los procedimientos personales, los estudiantes puedan describir verbalmente la generalidad y luego haya espacio para que hagan conjeturas (representadas simbólicamente) que podrán poner a prueba en otros casos específicos para los cuales tienen la información obtenida por alumnos de otros grupos.

Consideraciones acerca de algunas preguntas y respuestas

1) En el trabajo individual (segunda pregunta) la descripción pedida para el caso del largo de la caja podría ser algo del estilo: «como recorté cuadrados de lado 4 cm. en las esquinas, para calcular el largo de la caja tengo que restar 2 veces 4 a 24». En la segunda pregunta del trabajo en grupo se pide establecer las similitudes y diferencias encontradas en los procedimientos expuestos; con ello se pretende abrir la oportunidad para que los alumnos que hayan usado el mismo procedimiento se den cuenta de que para cajas diferentes todos han hecho una sustracción donde el minuendo es 24 (semejanza) y la cantidad restada en cada caso es diferente (diferencia) pero en todos los casos hay algo común: el sustraendo es el doble del lado del cuadrado recortado (semejanza). Es decir, consideramos que responder a la segunda pregunta del trabajo en grupos exige en el nivel de lo concreto, buscar un patrón en el comportamiento de casos específicos y llegar a una generalización válida para los casos que se están tratando. La tercera pregunta pide, sin más información que la de los casos tratados por el grupo, una generalización para calcular las medidas de cualquiera de las cajas posibles en el contexto, con lo que se espera algo del estilo «para calcular el largo de cualquier caja restamos a 24, 2 veces lo que mida el lado del cuadrado recortado». Esta afirmación, aunque es general para el contexto en el que se está trabajando, tiene un grado de concreción dado por la verbalización de la idea implicada. En cambio, lo que se espera que hagan los estudiantes como respuesta a la cuarta pregunta, no sólo es general en el contexto en cuestión sino que también es abstracto por el uso de símbolos matemáticos.

2) Es importante advertir que aunque las expresiones $x^2 4$, $4x^2$, $(2x)^2$, $(4x)x$ (que representan el área de papel desperdiciado) son equivalentes desde el punto de vista matemático, no lo son desde un punto de vista cognitivo. Es posible considerar la situación de varias maneras: (a) hay 4 cuadrados de lado x, es decir, cuatro cuadrados de área x^2, lo que puede conducir a la expresión $4 \times x^2$, que se obtiene de sumar cuatro veces el área de un cuadrado; (b) se pueden ubicar los cuatro cuadrados uno al lado del otro para formar un rectángulo, hallar las medidas de los lados del rectángulo y calcular su área, con lo que se obtiene el producto $4x \times x$; (c) se puede configurar con los cuatro cuadrados un cuadrado de lado $2x$ y al calcular su área queda determinada la expresión $(2x)^2$. Cada una de las cuatro expresiones anotadas

corresponde a acciones físicas diferentes e implica acciones de pensamiento diferentes para la comprensión y significación; además, cada expresión representa un proceso más que un resultado razón por la cual los estudiantes pueden tener dificultad para asumirlas como equivalentes.

3) Queremos resaltar la complejidad del conocimiento matemático que se pone en juego en este taller; ello se evidencia al menos parcialmente al examinar en las diferentes preguntas y tareas que hacen parte del trabajo individual las habilidades y conocimientos que se requieren:

   - medir una longitud o contar bordes de cuadrados del papel cuadriculado para cumplir con las dimensiones solicitadas del papel;
   - poder reproducir, en la construcción de la caja, las características geométricas y métricas de un cuadrado;
   - advertir que el tamaño del papel con el que se va a trabajar impone alguna restricción a la medida del lado del cuadrado que se va a recortar;
   - identificar el lado del cuadrado recortado con la altura de la caja;
   - identificar uno de los lados de un rectángulo como su largo y el otro (adyacente) como su ancho;
   - darse cuenta de que hay una relación entre el ancho (largo) de la caja, el ancho (largo) de la hoja y el lado del cuadrado que se recortó;
   - expresar una igualdad para establecer la relación entre el ancho (largo) de la caja, el ancho (largo) de la hoja y el lado del cuadrado que se recortó (dichas relaciones se pueden escribir de tres maneras);
   - calcular el área de un cuadrado conocida la medida de su lado;
   - usar correctamente las unidades de área;
   - calcular el área de un rectángulo conocidos su largo y su ancho;
   - reconocer que el área de papel que tiene la caja es la suma de las áreas laterales con el área de una de las bases; o que es el área de la hoja de papel menos el área de papel desperdiciado al recortar los cuadrados.
   - comunicar por escrito las ideas relativas a lo que se hace para obtener una cierta respuesta.

Desarrollar el trabajo en grupos de 4 exige:

- explicar a otros la forma de proceder para obtener los resultados registrados en la tabla;
- reconocer (expresarlo verbalmente) el patrón de comportamiento (la regularidad) en la forma de proceder de los cuatro miembros del grupo al calcular una de las medidas implicadas en la tabla; (hay dos formas de proceder para calcular el área del papel de la caja);
- representar simbólicamente las regularidades percibidas con respecto a las cuatro medidas consideradas en la situación planteada;

- poner a prueba las cuatro expresiones simbólicas lineales planteadas para calcular respectivamente el largo, el ancho, el área de papel desperdiciado y el área de papel que tiene la caja, en términos del lado del cuadrado recortado;
- reconocer funciones afines;
- darse cuenta de que las expresiones simbólicas $y = x^2$, $y = 480 - x^2$ no representan funciones lineales ni afines;
- identificar rasgos de las funciones cuadráticas en su representación simbólica.

CONSIDERACIONES ACERCA DEL SEGUNDO TALLER

Intencionalidad

Con esta situación se pretende que los estudiantes puedan identificar la existencia del dominio y rango para cada una de las funciones implicadas, y además las características de tales conjuntos.

Consideraciones metodológicas

Para la segunda parte del taller hemos preparado dos versiones (A y B) que difieren entre sí porque una de ellas (A) aborda la función que representa el área del papel de la caja, mientras que la otra (B) aborda la función que representa el área de papel desperdiciado. A través de las dos versiones queremos poder cubrir simultáneamente el estudio de dos funciones cuadráticas, originadas en el mismo contexto, empleando para ello menor tiempo que el que sería necesario si se hiciera como dos actividades consecutivas.

Para optimizar el tiempo de la sesión de clase, sugerimos que el trabajo individual planteado se proponga como tarea para la casa. Suponemos que el trabajo puede requerir de dos sesiones de clase (4 horas de clase) y eventualmente algo de tiempo adicional extraclase. La plenaria debería no tomar más de una sesión de clase.

En la realización del trabajo en grupo, probablemente los estudiantes tendrán varias y diversas inquietudes con respecto a las preguntas del taller. Proponemos que el papel del profesor ante tales inquietudes esté encaminado a plantear preguntas que ayuden a los estudiantes a encontrar sus propias respuestas y no a formular respuestas correctas y definitivas. Esta actitud del profesor aporta principalmente a dos cuestiones que consideramos fundamentales. Por un lado, en el debate que se genera a partir de la discusión de las diferentes ideas se hacen unas exigencias más cercanas a la forma científica de la construcción de conocimiento, que a la manera dogmática implicada en situaciones en las que lo importante es responder correctamente a las preguntas. Por otro lado, la participación del profesor a través de preguntas lo despoja de su papel de validador de la verdad; en ese caso, es posible y necesario construir la verdad entre quienes participan del debate.

En la plenaria, se sugiere que el papel del profesor sea guiar las posibles discusiones surgidas por las diferencias en las exposiciones de los grupos, o, proponer objeciones, inquietudes, preguntas, afirmaciones que puedan generar discusión entre los alumnos. De nuevo, no creemos que lo importante sea que el profesor siente cátedra.

Comentarios acerca de algunas preguntas y respuestas

1) En una versión preliminar de este taller, se pedía "... construya la caja que tenga mayor/menor altura posible". Para la versión definitiva, se cambió tal enunciado por "... construya una caja muy alta/muy baja". Vimos la conveniencia de hacer el cambio porque consideramos que podíamos aprovechar la situación no sólo para

evidenciar la inexistencia de unos casos extremos que determinan los límites del dominio de la variable independiente (altura de la caja) y el rango de variación de las variables dependientes (largo y ancho de la caja y área del papel de la caja y área del papel desperdiciado), sino también para evidenciar características generales de la variación de cada una de tales variables con respecto a la variación de la variable independiente. Es decir, con la serie de preguntas planteadas no estamos tratando de justificar solamente el por qué de los extremos del dominio y recorrido de las funciones implicadas; también estamos tratando de justificar por qué están incluidos **todos** los reales entre ciertos valores extremos.

2) Para la pregunta 5, la respuesta esperada es algo del estilo: «cuando la medida de la altura se hace cada vez más grande (tendiendo a 10), la medida del largo de la caja se hace cada vez más pequeña tendiendo a 4 y la medida del ancho, también se hace cada vez más pequeña tendiendo a 0; el área del papel de la caja se hace cada vez más pequeña, tendiendo a 80; y el área de papel desperdiciado se hace cada vez más grande, tendiendo a 400».

3) Para la pregunta 10, la respuesta esperada es algo del estilo: «cuando la medida de la altura se hace cada vez más pequeña (tendiendo a 0), la medida del largo de la caja se hace cada vez más grande tendiendo a 24 y la medida del ancho, también se hace más grande tendiendo a 20; el área del papel de la caja se hace cada vez más grande, tendiendo a 480; y el área de papel desperdiciado se hace cada vez más pequeña, tendiendo a 0».

4) Hemos adoptado la convención anglosajona que emplea "punto" en vez de "coma" para la notación de números decimales; con esto queremos adoptar la misma convención que utilizan las calculadoras que se van a usar en los cursos. Sin embargo, para evitar la posible confusión en la lectura de los números (leer un decimal como entero) decidimos usar cuatro dígitos a la derecha del punto decimal cuando fue necesario.

5) En una versión del taller —preliminar a la definitiva— se había planteado el siguiente trabajo individual para realizar en la casa:
Imagine que ya no estamos trabajando en el contexto de las cajas y que en el contexto de las matemáticas no aplicadas, encuentra usted las expresiones simbólicas $u = 480 - 4x^2$ y $l = 24 - 2x$ (versión A) $d = 4x^2$, $a = 20 - 2x$ (versión B).

   a. Para cada una de tales expresiones simbólicas, ¿hay algún valor real que no pueda asignar a la variable x? Explique su respuesta.

   b. ¿Qué tipo de valores para l se obtienen al asignarle a x los valores que es posible asignarle? Explique su respuesta.

   c. ¿Qué tipo de valores para u se pueden obtener al asignarle a x los valores que es posible asignarle? Explique su respuesta.

Como se puede ver, decidimos suprimir tal tarea al intentar responder a las siguientes inquietudes:

¿A partir del trabajo realizado por los estudiantes en el contexto específico, habrán podido construir los elementos necesarios para lograr un manejo significativo de la generalidad que implican las funciones en el contexto de los números reales?

¿La intención fundamental del aprendizaje de las matemáticas escolares está ligada al manejo de las funciones cuadráticas en el contexto de las funciones de variable real, o al desarrollo de las posibilidades de pensamiento matemático que exige y promueve el manejo de modelos matemáticos en contextos particulares con referente concreto?

6) El desarrollo del taller exige:

- usar las expresiones simbólicas ($l = 24-2x$, $a = 20-2x$, $u = 480-x^2$, $d = 4x^2$, obtenidas en el taller anterior para calcular el largo y el ancho de la caja construida, y el área del papel de la caja (área del papel desperdiciado) para valores determinados de la altura de la caja;
- ordenar números racionales no enteros;
- operar (elevar al cuadrado, multiplicar, restar) con números racionales no enteros;
- reconocer y explicitar verbalmente regularidades en el comportamiento de conjuntos ordenados de datos;
- hacer estimativos con base en las regularidades que se han reconocido;
- usar una noción de densidad de los racionales;
- usar una noción de límite de una función cuando la variable independiente tiende a un cierto valor;
- usar tablas para registrar datos correspondientes a casos particulares;
- establecer generalidades a partir del examen de varios casos particulares y de la consideración, en términos abstractos, del asunto.

CONSIDERACIONES ACERCA DEL TERCER TALLER

Intencionalidad

Este taller pretende introducir dos funciones que enriquecen las posibilidades de análisis y contrastación del tipo de variación exhibido por funciones descritas por diversos tipos de polinomios. Este enriquecimiento se expresa fundamentalmente en:

- la existencia de una expresión simbólica que involucra un polinomio de segundo grado con sus tres coeficientes reales diferentes de cero,
- la existencia de una función cuadrática decreciente (con coeficiente principal positivo) en el dominio significativo en el contexto de trabajo,
- la existencia de una función cuya expresión simbólica es un polinomio de grado tres,
- la existencia de una función que no es monótonamente creciente o decreciente en el dominio significativo en el contexto de trabajo,
- la existencia de rango no definido por los valores correspondientes a los extremos del dominio de variación en el contexto,
- la existencia de una variación no lineal que no es del tipo cuadrático.

Para estas dos funciones se pretende inferir y representar su expresión simbólica correspondiente, así como identificar el rango de variación significativo.

De otra parte, el taller puede asumirse simultáneamente como una actividad que permita visualizar y, en cierto sentido, evaluar el desempeño de los estudiantes frente a la identificación de un patrón procedimental en las operaciones aritméticas implicadas en el cálculo de algunas medidas, frente a la identificación de una expresión algebraica que dé cuenta de dicho patrón, y frente a la identificación del comportamiento de datos numéricos y su consecuente determinación de conjuntos o intervalos numéricos.

Consideraciones acerca de algunas preguntas y respuestas

1) En el ítem del trabajo individual se pide que los estudiantes escriban los procedimientos aritméticos empleados para calcular las medidas objeto de estudio. Se trata, con esto, de facilitar la identificación de los términos y las operaciones y la relación que configurarían una expresión simbólica que represente la manera de calcular cualquier medida y la medida misma.

2) En el primer ítem del trabajo en grupos se propone ordenar los datos. La intención de esta instrucción no es otra que la de permitir una mejor visualización del comportamiento de las medidas del área de la base y de la capacidad de la caja. Al respecto se quiere que los estudiantes puedan identificar tanto el decrecimiento monótono de los valores de la medida del área de la base de la caja, mientras que la medida de la

altura de la caja aumenta; como el crecimiento y posterior decrecimiento de la medida de la capacidad de la caja cuando la medida de la altura aumenta (o disminuye). De igual manera se quiere que los estudiantes reconozcan que el máximo valor reportado para la medida del área de la base de la caja se ubica al inicio de la columna y el mínimo al final; en tanto que para la medida de la capacidad de la caja, el valor máximo reportado muy probablemente no se ubica en los extremos de la columna. También se quiere que los estudiantes adviertan que para medidas de la altura muy pequeñas o muy grandes, los correspondientes valores para ambas funciones tienden a un cierto valor.

3) En el segundo ítem del trabajo en grupos se pide la escritura de expresiones simbólicas que permitan generalizar el procedimiento aritmético. Para el caso del *área de la base de la caja* se pueden presentar dos estrategias de solución procedimental que conducirían a sendas expresiones algebraicas matemáticamente equivalentes. La primera posibilidad es el cálculo del área a partir del producto de las longitudes del largo y ancho de la caja; en este caso la expresión algebraica es $(24-2x)\ (20-2x)$. La segunda posibilidad se obtiene al restar del área del papel de la caja, el área de las cuatro caras laterales, en cuyo caso la expresión resultante podría ser la expresión siguiente o alguna "procedimentalmente equivalente"[1] $(480-4x^2)-(2\,(20-2x)\,(x)+2(24-2x)\,(x))$'. Para el caso del volumen sólo prevemos una estrategia, el producto de las medidas del largo, ancho y altura de la caja; sin embargo, puede darse el caso que este producto se realice y se obtenga un polinomio de grado tres.

4) No es difícil advertir que la intención del tercer ítem es permitir un dato para corroborar la validez de las expresiones simbólicas planteadas en el ítem inmediatamente anterior. Al respecto de este dato vale la pena mencionar que el valor de la altura seguramente no aparecerá en la tabla construida por los estudiantes, dado que éste tiene dos cifras decimales; de otra parte, el cálculo con este valor pretende, además, exigir el uso de la calculadora; finalmente, el valor dado para la altura es muy cercano al valor relativo a la máxima medida de la capacidad de la caja, o —de manera más intuitiva— a la altura de la caja más grande.

5) La determinación del recorrido de las funciones, objeto de estudio de los ítems (4 y 5), implica identificar tres

---

1. Empleamos la expresión "procedimentalmente equivalente" para representar la equivalencia entre diferentes expresiones que impliquen el procedimiento de restar las medidas de las áreas de las cuatro caras laterales, cualquiera sea el orden o la configuración de esta resta. Queremos, a la vez, diferenciarla de la expresión "matemáticamente equivalentes", que implicaría la existencia de una identidad (numérica) entre expresiones algebraicas de diferente estructura. En ese sentido las expresiones $(480-4x^2)-(2\,(20-2x)\,(x)+2\,(24-2x)\,(x))$ y $(24-2x)\,(20-2x)$ son matemáticamente equivalentes, pero no procedimentalmente equivalentes.

elementos. En primer lugar, es necesario advertir el comportamiento relativo al orden de los datos de las dos columnas de resultados numéricos, respecto del comportamiento de los datos de la primer columna; este aspecto debió haber sido referenciado en el ítem 1, como característica de los datos. En segundo lugar, se debe reconocer la posible existencia de valores extremos, es decir, de tendencias hacia ciertos valores; advertimos que en sentido estricto, el valor mínimo no existe para ninguna de las dos funciones consideradas, pues el dominio de variación (significativo) de la altura es un intervalo abierto, el que se transforma a través de las funciones en un intervalo abierto que sí tiene extremos inferior (Inf), pero no mínimo. Para el caso de la función área de la base, tampoco existe el máximo, pero sí el extremo superior (Sup). Mientras que para la función capacidad, existe el máximo, pero la determinación de su valor, aun con ayuda de la calculadora sólo es aproximado. En tercer lugar, se debe reconocer la continuidad de la variación, hecho que puede ser algo intuitivo y no explícito.

CONSIDERACIONES ACERCA DEL CUARTO TALLER

Intencionalidad

La representación gráfica de funciones polinómicas se ha asumido como un procedimiento matemático relativamente simple y no siempre ha sido objeto de estudio por parte de los profesores de matemáticas. Sin embargo, la elaboración y comprensión de este sistema de representación exige y promueve una buena cantidad y variedad de objetos, relaciones y conocimientos matemáticos, que habitualmente pueden pasar desapercibidos para profesores y estudiantes.

A través de este taller pretendemos, entonces, generar un ambiente en el que, de un lado, los estudiantes pongan en juego, revelen y mejoren su nivel de manejo y comprensión acerca de los procesos de elaboración, interpretación y uso de las gráficas de funciones (en un contexto específico); y de otro, los profesores puedan advertir algunas particularidades de los conocimientos matemáticos implicados en el aprendizaje de estos procesos.

Consideraciones metodológicas

El desarrollo de este taller se planea a través de cinco momentos. En el primero, el profesor asignará a cada grupo de estudiantes una de las seis funciones que se están trabajando; en esta distribución es necesario tener en cuenta que al menos dos grupos trabajen por separado la misma función para garantizar la posibilidad de confrontación de resultados y facilitar que luego todos los grupos dispongan de las gráficas de las seis funciones.

En la segunda parte se espera que con la función asignada, cada uno de los grupos desarrolle los cuatro primeros ítems, uno de los cuales —ítem (3)— presenta versiones diferentes para cada una de las funciones pero equivalentes entre sí; esta actividad podría sugerirse como trabajo extraclase —en cuyo caso se perdería la posibilidad de observar e intervenir los desarrollos que realicen los estudiantes— sin embargo consideramos más pertinente que se realice durante la clase y que el profesor cumpla tanto el papel de observador del trabajo de sus estudiantes como el rol de cuestionador de la validez del mismo.

La realización de una exposición de tales desarrollos y sus resultados, constituirá el tercer momento. En éste es muy importante brindar la posibilidad de confrontación de ideas y resultados, y la posibilidad de realizar preguntas que permitan evidenciar y esclarecer dudas respecto del proceso adelantado por cada grupo en las diferentes funciones.

Posteriormente, en un cuarto momento, cada grupo reconstruirá y distribuirá copias de la gráfica de la función asignada. Con las copias de las seis gráficas de sendas funciones los grupos desarrollarán las actividades registradas en los ítems (6) a (9). El profesor deberá interactuar con los grupos para que puedan identificar la mayor cantidad de características acerca de las gráficas y puedan generar una buena cantidad de clasificaciones de las mismas.

Sugerimos que en un quinto y último momento se desarrolle una plenaria, orientada por el profesor, en la que se pongan en juego las diversas características identificadas y sus respectivas taxonomías.

Consideraciones acerca de algunas preguntas y respuestas

Respecto del contenido que precede los ítems que orientan el trabajo en grupo, señalemos que si bien la tabla que aparece al inicio del taller reporta de manera sintética algunos resultados obtenidos en los anteriores talleres, también introduce una nueva notación, pues, de un lado, usamos los símbolos $f_n(x)$ con $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ para denotar cada una de las seis funciones objeto de estudio, y de otro, escribimos los polinomios que describen las funciones en su forma estándar, que difiere (no desde el punto de vista matemático) de las expresiones utilizadas en los anteriores talleres. Igualmente, advertimos sobre la posibilidad de malinterpretación, por parte de los estudiantes, de la notación de intervalos; ellos podrían llegar a pensar que la expresión (4, 24) no representa un intervalo abierto en los reales, sino que representa una pareja de números reales de las medidas de la altura de la caja y el largo de la misma, que podría hacerse corresponder con un punto del plano.

A través del ítem (1) se pretende la obtención rápida de una buena cantidad de valores para cada una de las funciones, para lo cual se sugiere el uso de la calculadora. Sin embargo, si no se dispone de ésta, podría obviarse la construcción de la tabla y simplemente entregar una tabla con los valores establecidos y proponer la verificación de la validez de algunos de los datos.

Para el ítem (2), el cual propone la realización de la gráfica de la función en un tamaño que permita su visualización al momento de la exposición bajo unas condiciones, sugerimos que el profesor centre su atención en los diversos procedimientos y decisiones que están involucrados en la elaboración de la gráfica y que se revelan en el actuar de los estudiantes. Se podrían observar—entre otras: la estrategia que usan para trazar ejes perpendiculares; la manera como los estudiantes eligen la escala para cada uno de los ejes; el criterio (paralelismo o perpendicularidad respecto de los ejes) que utilizan para trazar un punto dadas sus coordenadas; la estrategia usada para determinar la ubicación de la abcisa o la ordenada cuando el valor numérico no coincide con los valores explícitos en el eje; el criterio utilizado para decidir si se hace un trazo "uniforme" que contenga a todos los puntos, si se hace un trazo "segmentado"[2], o si no se hace trazo alguno; o, la manera como se representan las parejas de valores de los extremos de la tabla, que en el contexto no pertenecen a la función.

Las actividades y preguntas que configuran el ítem (3) tienen intenciones diversas. Con el numeral (a) pretende explorarse la manera como los estudiantes están entendiendo las características de los intervalos que definen el dominio y recorrido de la función (ser denso, continuo y abierto); se espera que los estudiantes

2. Las palabras "uniforme" y "segmentado" se utilizan aquí bajo una significación intuitiva. Sin embargo, podrían guardar alguna relación con ideas y conceptos de la geometría diferencial o con la idea de diferenciabilidad del cálculo.

tracen segmentos continuos y abiertos en cada uno de los ejes, o que marquen sobre cada eje un número finito de puntos que corresponden a las respectivas coordenadas dadas en la tabla. Con el numeral (b) pretendemos cuestionar el significado de las coordenadas de un punto con relación al contexto de trabajo; al respecto, suponemos que en las respuestas no todos los estudiantes expresen que la primera componente de la pareja ordenada representa la medida de la altura de una caja y la segunda la medida de la magnitud respectiva a la función objeto de estudio (largo, ancho, área, capacidad). A través del numeral (c) intentamos abordar el estudio de las estrategias utilizadas para determinar si un punto pertenece o no a la gráfica de una función en un determinado dominio y recorrido de variación; para lograr esto, hemos propuesto el análisis de: parejas coordenadas que si bien pertenecen a la función, no pertenecen al dominio y recorrido significativo de la función, y parejas coordenadas que no pertenecen a la función. Con las actividades de los numerales (d) y (e) se pretende enfrentar a los estudiantes a una actividad que les exija hacer un uso significativo de la representación gráfica, a la vez que le permite al profesor un ámbito para evidenciar el significado que los estudiantes manejan de ésta; advertimos que la respuesta al numeral (e) para la función capacidad de la caja proporciona una información adicional a las ofrecidas por las otras funciones ya que ésta no es inyectiva. La identificación de la característica de unicidad de las imágenes para cada uno de los elementos del dominio es el objeto de estudio del numeral (f); consideramos que es necesario enfatizar este rasgo esencial al concepto de función. Finalmente, con el numeral (g) queremos abordar una aproximación al comportamiento del orden de la variación, es decir, reconocer consecuencias de la variación creciente y/o decreciente de las funciones; sugerimos que se exija que la argumentación se apoye fuertemente en la gráfica de la función.

El listado que aparece en el ítem 4 pretende marcar un derrotero para la exposición que realicen los grupos. Todos los aspectos vinculados a las preguntas expresadas en el listado están relacionados con las actividades y preguntas contenidas en los tres ítems anteriores; por tanto esta actividad deberá permitir a los estudiantes no sólo presentar sino también cualificar su trabajo. Es pues importante que el profesor permita a los demás grupos —y se permita— observar, valorar, criticar, etc. los resultados presentados por cada grupo.

La actividad presentada en el ítem 5 pretende constituirse en un espacio en el que los grupos de estudiantes puedan mejorar el resultado de su trabajo a partir de la cualificación del mismo.

Creemos que algunas de las semejanzas que los estudiantes deberían reportar en el desarrollo del ítem 6 tienen que ver con el hecho de que todas las gráficas representan funciones continuas y diferenciables, definidas de un conjunto abierto y absoluto en otro similar. Este hecho se refleja en el carácter continuo del trazo, en la "uniformidad" de las curvas trazadas, en la identificación de los extremos de la gráfica como puntos no pertenecientes a la función, en el uso exclusivo del primer cuadrante para representar la función, entre otras. Por supuesto que no se espera que las descripciones involucren nombres y conceptos matemáticos en su presentación formal; sin embargo, sí se espera que impliquen una interpretación intuitiva de estos conceptos.

Dentro de las características esperadas como respuesta al ítem 7 quisiéramos que surgiera —entre otras: el tipo de trazo (rectilíneo o curvo), el tipo de orden en la variación (creciente, decreciente, o combinado) y la consecuente existencia o no de máximos y mínimos relativos, el tipo de recorrido (intervalo abierto o semiabierto), la ubicación de los extremos de la gráfica (ambos, alguno o ninguno, ubicado(s) sobre el eje de las abscisas), el tipo de concavidad del trazo (sin concavidad, cóncavo o convexo). Nuevamente, se espera una descripción intuitiva, no formal, de estos rasgos. Es muy importante que no sólo se describan las características, sino que éstas permitan hacer taxonomías de todas las funciones objeto de estudio.

Los grupos que surjan de la clasificación de las funciones a través de sus expresiones podrían considerar: el valor del exponente del monomio principal del polinomio que describe la función, el valor algebraico del coeficiente principal del polinomio, o la cantidad de términos explícitos del polinomio.

Con el ítem 9 pretendemos que se pueda establecer alguna identificación entre grupos generados en el desarrollo de los dos ítem anteriores; particularmente podría surgir el reconocimiento del valor del exponente con el del tipo de gráfica. También, interesa establecer algunas relaciones que no siempre son válidas, por ejemplo la identificación del signo algebraico del coeficiente principal del polinomio con el carácter decreciente de la gráfica.

CONSIDERACIONES ACERCA DEL QUINTO TALLER

Intencionalidad

Un elemento importante en el trabajo con las funciones es la idea de *variación*. Su importancia radica, entre otras, en la clasificación de las funciones que genera, ya que dependiendo del tipo de variación es posible configurar particiones del conjunto de las funciones de variable real (*v.g.*, constante, proporcional o lineal, afín, cuadrática, cúbica, exponencial, logarítmica, etc.). Así, identificar el tipo de variación que comporta la función permite caracterizarla, distinguirla, y —en consecuencia— clasificarla. Esta identificación, presenta rasgos y procedimientos especiales en cada uno de los sistemas de representación en los que se trabaje.

Con este taller pretendemos generar un ambiente (en el sistema de representación tabular y en el gráfico cartesiano) en el cual sea posible, inicialmente, identificar cómo varían los valores de una la variable dependiente, a partir de generar variaciones en los valores de la independiente, para cada una de las cuatro funciones abordadas en el primer taller. A partir de esta identificación esperamos que se advierta la diferencia que existe entre la variación afín y la no afín, de las funciones polinómicas de grado uno y dos, respectivamente; además, que se reconozca esta característica como un elemento de clasificación de las funciones objeto de estudio. Igualmente, queremos dar cuenta de cómo las variaciones no lineales tienen un comportamiento muy particular, que puede advertirse en el estudio de los patrones de variación de las diferencias usadas para cuantificar la variación.

Consideraciones acerca de la metodología implicada

El taller contempla el desarrollo de una actividad individual, en los grupos de trabajo, y un trabajo en grupo. Aunque de manera explícita no aparece reportado, creemos conveniente que luego de estas actividades se organice una sesión plenaria en la cual se presenten y discutan algunos de los resultados del trabajo en grupo.

Para responder a la primera pregunta del trabajo individual sugerimos que se dé un cierto tiempo (cinco a diez minutos) y enseguida se haga una puesta en común que se centre en ver qué comprendieron los estudiantes de la situación planteada y qué estrategias ven adecuadas. Es probable que la situación planteada se malinterprete, es decir, que crean que se trata de varias parejas de cajas diferentes, pero todas de tamaños a y b; en la puesta en común podría hacerse claridad a este respecto, induciéndolos a pensar en las múltiples posibilidades de parejas de cajas cuyas alturas difieran en 1.5 (por ejemplo, en 1.5: 3 y 4.5; 3 y 1.5; 5.2 y 6.7; 8.95 y 7.45, etc.).

La estructura del conjunto de preguntas del trabajo individual permite que los estudiantes puedan reconocer el tipo de variación, sin recurrir a las ideas de razones o proporciones; por ello, recomendamos no sugerir ni conminar al uso de estos objetos matemáticos.

Recomendamos que en el trabajo en grupos se esté muy atento a las diversas maneras como se identifican los "puntos" que representan los datos de cada tabla, así como la manera como representan los incrementos de las variables independientes y dependientes.

Advertimos que la pregunta final del trabajo en grupo, recapitula las preguntas planteadas al inicio de este taller. En este sentido, su respuesta es una fuente de valoración del trabajo en el taller.

Finalmente, sugerimos que se realice un trabajo similar al realizado con estas funciones, con la función que describe la capacidad de la caja. Dado que esta función está representada por un polinomio de grado tres, la variación de los valores de la variable dependiente tendrá una variación cuadrática, lo cual exigirá poner en juego los aprendizajes logrados en este taller.

Consideraciones acerca de algunas preguntas y respuestas

1) En las funciones, no sólo el valor de una variable está en relación con el valor de su correspondiente; además, el tipo de variación de una variable está en correspondencia con el tipo de variación de la otra, de lo cual se sigue que la cuantificación de una de estas variaciones permite calcular la cuantificación de la otra.

2) La primera pregunta del trabajo individual en la que se formula un enunciado relativo al contexto en el que se ha estado trabajando tiene un propósito específico: propiciar en el estudiante una motivación que le permita ver algún sentido, alguna justificación al trabajo que debe realizar posteriormente. Queremos que el estudiante tenga la oportunidad de imaginar y explicitar qué estrategia seguiría para resolver la situación que se le plantea y haya una oportunidad en el curso, antes de continuar con la segunda pregunta del trabajo individual, de explorar las respuestas dadas y de aclarar cuestiones importantes para el trabajo posterior.

3) Las siguientes preguntas del trabajo individual asumen tablas de valores para las funciones consideradas, a través de las cuales ponemos en juego unos números muy particulares de la variable independiente que dejen entrever los patrones de variación de la variable dependiente. El hecho de que los valores de la variable independiente impliquen incrementos iguales en cada una de las tablas, pero diferente entre las tablas, es completamente intencionado y necesario; esto será aprovechado a través de las preguntas que constituyen el trabajo en grupos de 4. Además, si los estudiantes recurren al uso de las calculadoras podrán observar que las tablas generadas automáticamente en éstas implican la condición de variación constante de la variable independiente.

4) En cada una de las dos versiones del taller, y para cada alumno, se ha previsto que estudien una función afín (el largo o el ancho de la caja) y una función descrita por un polinomio de grado dos (el área del papel de la caja o del papel desperdiciado); el cálculo de las diferencias de valores consecutivos permitirá reconocer e inferir un comportamiento que permite diferenciar estos dos tipos de funciones. Esta inferencia se contrastará con la de los demás integrantes del grupo, a través

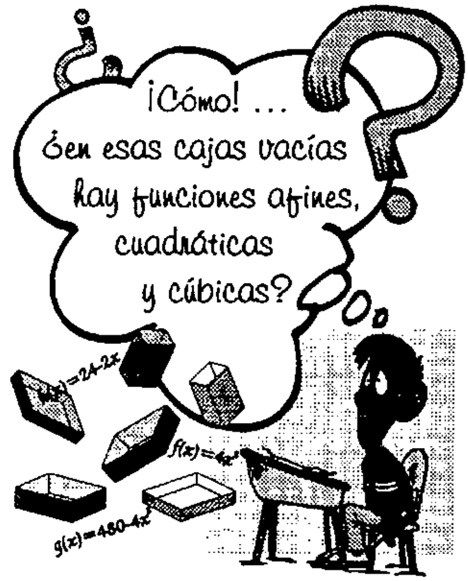
PREGUNTAS Y RESPUESTAS

MATERIALES SOCIALIZACIO

IDEP - BIBLIOTECA LUIS A. A.

Innovación Curricular en Precálculo

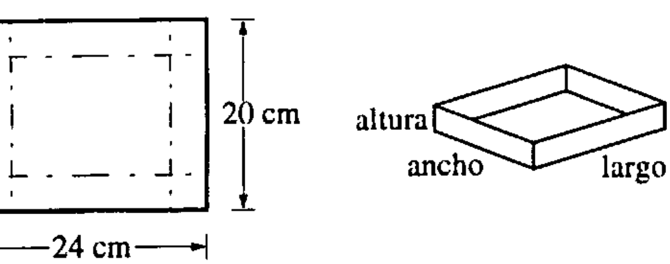
89



En el marco del proyecto ICEP, un grupo de investiga-
dores de "una empresa docente", diseñamos una pro-
puesta curricular para la introducción a la noción de
función representada por un polinomio de grado dos.
Esta incluye tanto el conjunto de talleres diseñados,
como sus respectivas consideraciones metodológicas y
didácticas. La propuesta curricular en la actualidad está
compuesta por seis talleres, a saber:

Taller 1

En este taller se presenta el contexto donde surgen las funciones; éste tiene que ver con la construcción de una caja sin tapa a partir de un rectángulo al que se le han recortado cuadrados congruentes de cada una de las esquinas (ver figura siguiente).



A través de este contexto se identifican, inicialmente algunas expresiones que representan: la altura de la caja $f_0(x) = x$, el largo de la caja $f_1(x) = -2x+24$, el ancho de la caja $f_2(x) = -2x+20$, el área del papel desperdiciado $f_3(x) = 4x^2$, y el área del papel de la caja $f_4(x) = -4x^2+480$.

Taller 2 (versiones A y B)

A través de este taller se aborda el estudio del dominio y rango de las funciones cuadráticas; particularmente se proponen actividades para determinar los valores extremos que determinan dominios y rangos, la correspondencia en el orden de valores del dominio y del rango, y la densidad del dominio y el rango.

Taller 3

Con este taller se propicia la identificación y trabajo con dos nuevas expresiones que representan el área de la base de la caja $f_5(x) = 4x^2 - 88x + 480$ y la capacidad de la caja $f_6(x) = 4x^3 - 88x^2 + 480x$. De estas se estudia los dominios y rangos definidos por el contexto.

Taller 4

Las actividades propuestas en este taller abordan el estudio de las gráficas de las funciones; particularmente se indaga por el significado de un punto y de sus coordenadas, y se propende por la identificación de características de la función a partir de la gráfica.

Taller 5 (versión A y B)

El objeto de estudio de este taller es la co-variación definida por las funciones que aparecen en el contexto. La identificación y caracterización de dos tipos de co-variación en la representación tabular y en la representación gráfica son aspectos específicos que a través de éste se abordan.

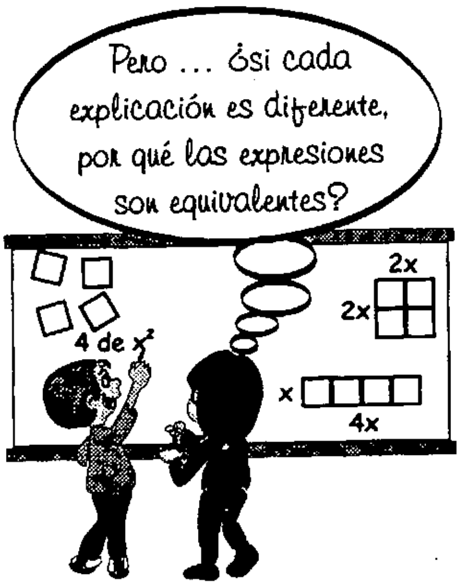
Taller 6

Este es un taller de evaluación. En éste se pretende que se desarrolle un estudio general de dos nuevas funciones, similar al de los cinco talleres anteriores. Las funciones propuestas son las que surgen de considerar el área de la cara de la caja determinada por el largo $f_7(x) = -2x^2 + 24x$ y el área de la cara de la caja determinada por el ancho $f_8(x) = -2x^2 + 20x$.

Universidad de los Andes - "una empresa docente"
Tel.: 3394949 Ext. 2717 • Fax: 3394999 Ext. 2709
A. A. 4976 • http://ued.uniandes.edu.co
Bogotá - Colombia

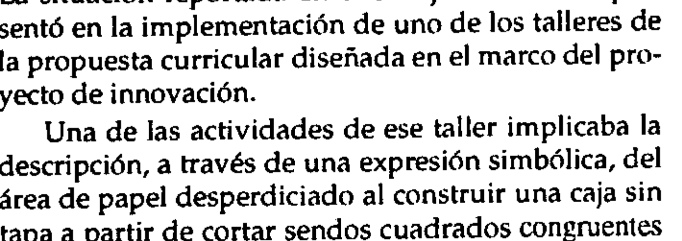
Noviembre de 2000

Innovación Curricular en Precálculo



La situación reportada en el dibujo anterior se presentó en la implementación de uno de los talleres de la propuesta curricular diseñada en el marco del proyecto de innovación.

Una de las actividades de ese taller implicaba la descripción, a través de una expresión simbólica, del área de papel desperdiciado al construir una caja sin tapa a partir de cortar sendos cuadrados congruentes de las esquinas de un rectángulo de papel (ver gráfica siguiente).



Como puede advertirse, se intentaba que los estudiantes identificaran la expresión simbólica $f(x) = 4x^2$, o una equivalente desde el punto de vista matemático, como una forma de representar la cantidad de papel de los cuatro cuadrados recortados.

La socialización de los hechos sucedidos en la implementación de esta actividad, por parte de los profesores involucrados en la innovación, nos permitió reconocer que si bien los estudiantes identificaban expresiones equivalentes —desde el punto de vista matemático— a la descrita arriba, no mostraban seguridad para reconocerlas como equivalentes. Creemos que ello se debía a que cada expresión era el resultado de procesos diferentes sobre la misma situación y que, en consecuencia, conllevaban "explicaciones" diferentes.

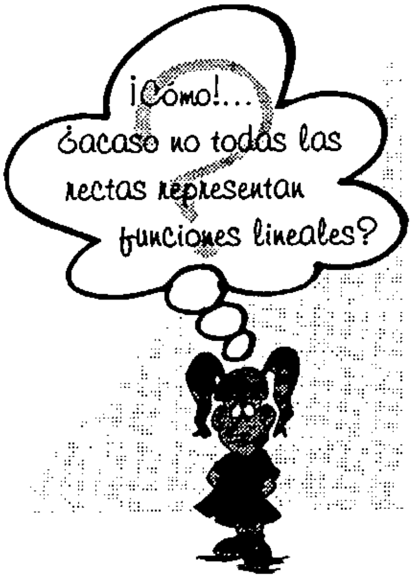
Algunos estudiantes consideraban la situación de la siguiente manera: "hay 4 cuadrados de lado x, es decir, cuatro cuadrados de área x^2". lo cual les conducía a la expresión $4 \times x^2$; para ellos, esta expresión se obtenía al sumar cuatro veces el área de un cuadrado. Otros estudiantes ubicaban los cuatro cuadrados uno al lado del otro para formar un rectángulo, luego procedían a hallar las medidas de los lados del rectángulo y a calcular su área; así obtenían el producto $4x \times x$. Otros estudiantes configuraban un cuadrado con los 4 cuadrados, determinaban la expresión del lado de este nuevo cuadrado y calculaban su área; ellos obtenían la expresión $(2x)^2$.

Por supuesto que no es difícil justificar que todas estas expresiones son matemáticamente equivalentes, pero no habíamos advertido que no son cognitivamente equivalentes, es decir, que cada una de ellas está implicando acciones de pensamiento diferentes para su comprensión y significación. Igualmente, reconocimos que para los estudiantes cada una de estas expresiones estaba representado un proceso, más que un resultado, y que esto no permitía que se pudieran asumir como equivalentes.

Este hecho, es un argumento adicional para reconocer la necesidad de observar cuidadosamente registrar y analizar las respuestas de los estudiantes como un aspecto fundamental no sólo del quehacer docente, sino de los procesos de innovación en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Universidad de los Andes - "una empresa docente"
Tel.: 3394949 Ext. 2717 • Fax: 3394999 Ext. 2709
A. A. 4976 • http://ued.uniandes.edu.co
Bogotá - Colombia

Innovación Curricular en Precálculo



Esta pregunta surgió en el proceso de estudio de las representaciones correspondientes a la función lineal. En éste analizamos tanto la manera como una función lineal es representada gráficamente a través de una recta no vertical que contiene al origen de coordenadas, así como la manera como las rectas pueden —o no—representar funciones lineales.

Nuestra respuesta consiste en afirmar que sólo las rectas no verticales que pasan por el origen de coordenadas podrían considerarse representantes de funciones lineales.

Para abordar la justificación a la respuesta enunciada antes, clasifiquemos las rectas que se pueden trazar en un plano cartesiano en tres grupos, a saber: las paralelas al eje Y, las paralelas al eje X, y las no paralelas a ninguno de los ejes coordenados.

Las rectas verticales

Consideremos las rectas verticales, es decir aquellas paralelas al eje Y. Dado que estas rectas describen relaciones de la forma $\{(x, y) \in \Re^2 | x = a\}$, se sigue que el valor de las imágenes es cualquier real para el mismo x, que la relación sólo contiene parejas cuya primera coordenada es a, o que para un mismo valor de la abcisa tiene más de un valor en la ordenada. Esto contradice la condición implicada en el concepto de función, que se refiere a que a cada elemento del dominio le corresponde uno y sólo uno del codominio. Por tanto, este tipo de rectas ni siquiera representa funciones, y en consecuencia no tiene sentido hablar de si son o no funciones lineales.

Las rectas horizontales

Las paralelas al eje X tienen a $f(x) = b$ como expresión simbólica asociada, es decir que para cualquier abcisa x su imagen es la misma. Para determinar si estas rectas representa o no funciones lineales , precisemos el concepto de función lineal; para ello evoquemos la definición de linealidad:.

> Se dice que una función de variable real f es lineal si y sólo si satisface la homogeneidad $f(kx) = kf(x)$ y la aditividad $f(x+y) = f(x) + f(y)$

Desde el punto de vista de esta definición, es fácil verificar que excepto la recta que coincide con el eje X —es decir la recta que representa la función f de expresión $f(x) = 0$—, todas la demás rectas paralelas al eje X no representan funciones lineales.

Las rectas no horizontales ni verticales

Para este tipo de rectas establezcamos una nueva separación: auquellas que contienen al origen de coordenadas, y las que no.

Las primeras tienen como representación simbólica general a $f(x) = mx$. En este caso se satisfacen las dos condiciones, veamos:

$$f(x+y) = m(x+y) = mx + my = f(x) + f(y) \text{ y}$$

$$f(kx) = m(kx) = k(mx) = kf(x)$$

Las segundas tienen como representación simbolica general a $g(x) = mx + b$ con $b \neq 0$. A través de un sencillo proceso se puede mostrar que estas funciones no satisfacen ninguna de las propiedades que definen la linealidad:

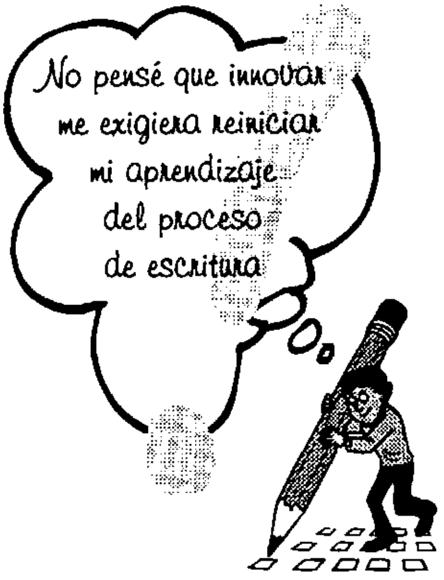
$$g(x) + g(y) = (mx + b) + (my + b) = (mx + my + b) + b = g(x+y) + b \neq g(x+y) \text{ y}$$

$$k \cdot g(x) = k(mx + b) = kmx + kb \neq kmx + b = g(kx)$$

Universidad de los Andes - "una empresa docente"
Tel.: 3394949 Ext. 2717 • Fax: 3394999 Ext. 2709
A. A. 4976 • http://ued.uniandes.edu.co
Bogotá - Colombia

Noviembre de 2000

Innovación Curricular en Precálculo



Dadas las características de la práctica en la que está inmerso el trabajo del profesor —el sinnúmero de decisiones que debe tomar en su quehacer diario, la cantidad y diversidad de asuntos a los que debe atender de manera inmediata, el poco tiempo disponible para actividades propias de su práctica que se realizan fuera del aula (*e.g.*, planeación y evaluación de la enseñanza y sus efectos), etc.— llevar un registro escrito es imprescindible si quiere poder avanzar en la comprensión y en la reflexión de los asuntos que le preocupan o despiertan su interés. Al no hacerlo, hay una alta probabilidad de que el profesor olvide los detalles de lo que ha hecho en un determinado momento con relación a un cierto asunto, los resultados obtenidos, los problemas y dificultades encontrados, los esbozos de ideas para hacer modificaciones que fueron surgiendo durante la acción. Así, en el mejor de los casos, cuando el profesor vuelva a considerar el asunto sobre el que ya ha trabajado, sobre el que ha tenido ya experiencias, se encontrará en situación y actitud de iniciar una reflexión, un trabajo, en vez de retomarlos en el punto donde los había dejado, con la consecuencia natural de repetirse en ideas, errores y concepciones, de permanecer estancado en su comprensión del asunto.

Llevar un registro escrito —con miras a que otro pueda leerlo y entenderlo— es importante para quien lo hace no sólo porque le sirve como memoria sino también porque le abre una oportunidad de reflexión que incluye identificar las ideas relevantes, organizarlas, relacionarlas, analizarlas, explicitar supuestos, sacar conclusiones, etc., acciones estas a través de las cuales se logra comprender mejor el asunto que centra la reflexión.

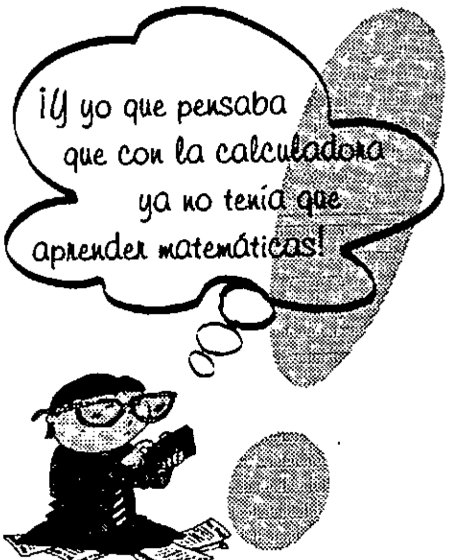
Si la innovación tiene un carácter institucional, es decir, si se pretende que permanezca en el tiempo y no dependa totalmente de quienes la iniciaron sino que a ella puedan vincularse otros docentes es entonces indudable la importancia de tener un registro que dé cuenta de detalles del proceso y de los resultados que se fueron encontrando durante el mismo, de manera que sirva como fundamento para la integración de los docentes que se vayan involucrando sobre la marcha en la innovación.

Por otra parte, no es desconocido para quienes trabajamos en el sistema educativo (investigadores, formadores de profesores, funcionarios públicos del sistema educativo y los profesores mismos) que el profesor de matemáticas no tiene como prácticas sistemáticas el reflexionar ni el escribir acerca de su quehacer docente. Así, no obstante reconocer la importancia de llevar un registro escrito sobre la experiencia de innovación, somos conscientes de que realizar tal tarea exige un gran esfuerzo y una gran dedicación del profesor, en parte porque no se trata sólo de saber escribir, de saber redactar ideas de acuerdo con ciertas normas y estándares y de sacar un tiempo para hacerlo. La exigencia tiene que ver principalmente con las ideas y conceptos que se tienen y usan para dar cuenta, explicar y problematizar lo que constituye el quehacer docente y también tiene que ver con las exigencias que impone ser un practicante reflexivo.

Por lo expresado arriba, los profesores vinculados a procesos de innovación se ven enfrentados a reiniciar su proceso de aprendizaje de la escritura, aspecto que todo docente ha vivido cuando se propone como intencionalidad de vida la profesionalización de su quehacer docente.

Universidad de los Andes - "una empresa docente"
Tel.: 3394949 Ext. 2717 • Fax: 3394999 Ext. 2709
A. A. 4976 • http://ued.uniandes.edu.co
Bogotá - Colombia

Innovación Curricular en Precálculo



[Te]cnología y matemáticas escolares

[L]a tecnología ha ido incorporándose en todos los ámbi[t]os sociales, y la escuela —en tanto espacio social— no [h]a podido ser la excepción. Particularmente, las clases de matemáticas no han podido mantenerse al margen de esta expresión caracterizadora de una nueva cultura.

Al respecto del uso de la tecnología en las matemá[t]icas escolares, existen muchos interrogantes y argumentos planteados por padres de familia, profesores de matemáticas y estudiantes. Algunos de estos interrogantes y argumentos cuestionan la pertinencia del uso de las calculadoras en el aprendizaje de las matemáticas (*v.g.*, "quienes usan las calculadoras para realizar operaciones aritméticas —aún las más sencillas—, ya no son capaces de realizarlas mentalmente", "con la calculadora ya no hay que aprender matemáticas"); sin embargo, en general, los interrogantes y argumentos, sólo cobijan la realización de operaciones algorítmicas, y casi nunca referencian otros aspectos del conocimiento matemático igualmente importantes en la formación matemática de un individuo (*v.g.*, el razonamiento matemático, la solución de problemas, la comunicación de ideas matemáticas, la conceptualización). Esto parece obedecer a una causa relativamente generalizada: estos otros aspectos casi nunca son objeto intencional de aprendizaje en las instituciones escolares y, en consecuencia, se cree que aprender matemáticas es lograr ejecutar procedimientos algorítmicos de manera rápida y segura.

En este sentido, se ha hecho necesario explorar —con rigor científico— las posibles repercusiones del uso de la tecnología, tanto en la enseñanza de las matemáticas, como en el aprendizaje del conocimiento matemático.

Calculadoras y precálculo

En el estudio escolar de las funciones, las calculadoras están día a día ganándose un terreno importante; ello debido a que algunas de éstas han sido diseñadas específicamente para trabajar con -y entre- las diferentes representaciones de las funciones.

Por ejemplo, graficar en un plano cartesiano la función f expresada por un polinomio de grado dos, puede parecer una tarea relativamente sencilla si se dispone de una calculadora. En términos generales, se cree que es suficiente con ingresar adecuadamente la expresión que define la función y dar la orden de graficar a través de un click o de oprimir una tecla, para obtener una imagen muy aproximada de la función; sin embargo, no es tan sencillo. En la mayoría de las ocasiones es necesario, como mínimo, ajustar la ventana de visualización en pantalla para poder observar un "buen dibujo" de la función, lo cual implica conocer aspectos conceptuales ligados a la función cuadrática y a su gráfica. En el caso de la función f, es necesario, por ejemplo el reconocimiento de la existencia de un mínimo o un máximo, o el uso del significado gráfico de los parámetros de la expresión.

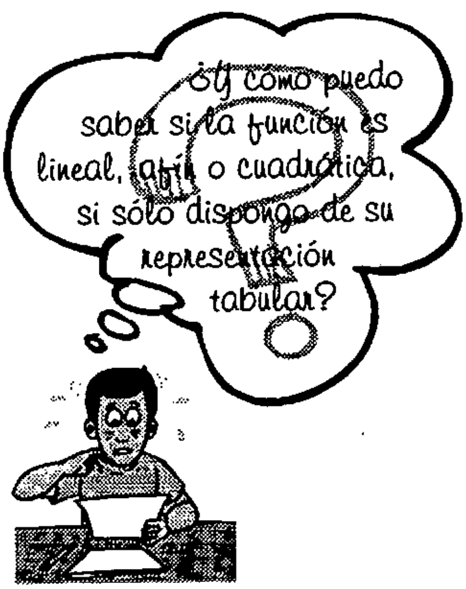
Por otra parte, hacer una tabla de valores de una función es una tarea realizada eficaz y eficientemente por la calculadora, o por un software matemático; esta actividad exige del individuo un exiguo conocimiento matemático. Sin embargo, reconocer patrones de variación de los valores de las imágenes calculadas, es una tarea que requiere un conocimiento algebraico y variacional que casualmente puede ser promovido a través de la elaboración y estudio de tablas en la calculadora.

Este par de ejemplos proporcionan elementos para contrastar la idea de que "con el uso de las calculadoras ya no se requiere aprender matemáticas". Afortunadamente, aún —y seguramente por siempre— la tecnología no suplanta la capacidad humana de pensar.

Universidad de los Andes - "una empresa docente"
Tel.: 3394949 Ext. 2717 • Fax: 3394999 Ext. 2709
A. A. 4976 • http://ued.uniandes.edu.co
Bogotá - Colombia

Noviembre de 200[0]

Innovación Curricular en Precálculo



ɛsta pregunta surgió en el proceso de búsqueda de resɪuesta a una pregunta más general: ¿qué significa recoɪocer los elementos conceptuales y procedimentales de ɪna función polinómica?, o más brevemente, ¿qué sigɪifica reconocer una función polinómica?

En el proceso de aproximación a una respuesta, asuɪnimos que un concepto matemático se expresa a través le sus diferentes representaciones. En esta dirección, las xpresiones simbólicas, las gráficas, y las tablas, se conɪirtieron en los objetos visibles —y en cierto sentido, oncretos— a través de los cuales reconocer o identifiar las funciones polinómicas. Particularmente, asumiɪnos la identificación del tipo de función, a través de la abla de valores.

Observamos entonces que el reconocimiento de la unción lineal, a través de su tabla, hace parte de los emas trabajados escolarmente, y —en consecuencia— eníamos una respuesta conocida por nosotros: "es sufiiente hacer los cocientes entre el valor de cada imagen su respectiva preimagen, para verificar que todos son guales"; sin embargo, pudimos advertir que este criteio no es cabalmente aplicable si en la tabla aparece la magen del número cero.

Igualmente, reconocimos que no se puede aplicar el riterio de la igualdad de todos los cocientes $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, dado que esto si bien permite reconocer que la tabla representa una función afín, no garantiza que ésta sea a la vez una función lineal, pues puede no contener el par (0,0).

Reparamos entonces que no es muy usual plantear la pregunta para tablas de funciones no lineales (ni afines). Así, procedimos a construir una tabla de una función cuadrática, para explorar alguna estrategia para reconocerla en esta representación.

x	-0.8	-0.15	0.5	1.15
$f(x)$	2.56	0.09	1	5.29

Inspirados en el procedimiento utilizado para las funciones afines, decidimos calcular las diferencias entre los valores sucesivos de $f(x)$, y entre los valores sucesivos de x; con ellos armamos una tabla adicional que resaltamos con un fondo diferente.

	0.65	0.65	0.65	
x	-0.8	-0.15	0.5	1.15
$f(x)$	2.56	0.09	1	5.29
	-2.47	0.91	4.29	

Como puede observarse, el comportamiento de los datos de la fila de diferencias entre las preimágenes es constante, en tanto que entre las imágenes es lineal. Pareciera entonces que de alguna manera estos datos están describiendo la variación de la pendiente de la recta tangente asociada a la curva que representa la función. Este último hecho parece relacionarse con la aserción de que la derivada de una función cuadrática es una función afín. Se infiere entonces que la función representada en la tabla inicial es cuadrática.

Esta suposición parece ser válida al examinar otros casos específicos de funciones cuadráticas con valores de preimágenes en sucesión aritmética. En todos ellos la fila que expresa la diferencia de dos valores sucesivos de las imágenes, exhibe un comportamiento lineal.

Más aún, al examinar tablas que representan funciones cúbicas, y proceder de manera semejante, obtenemos que la fila que expresa la diferencia de dos valores sucesivos de las imágenes, exhibe un comportamiento cuadrático.

Universidad de los Andes - "una empresa docente"
Tel.: 3394949 Ext. 2717 • Fax: 3394999 Ext. 2709
A. A. 4976 • http://ued.uniandes.edu.co
Bogotá - Colombia

Noviembre de 2000

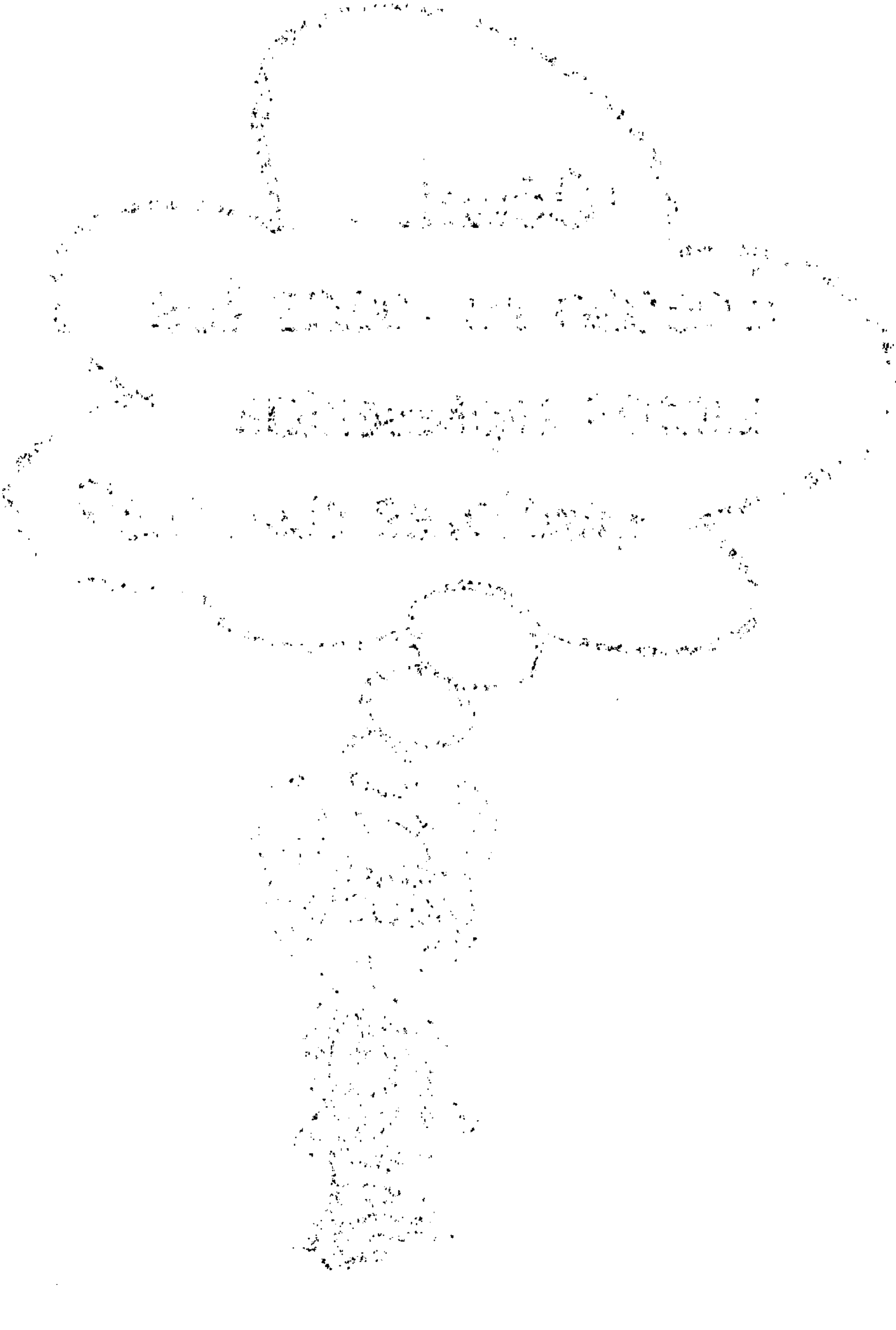
POSTERS
MATERIALES SOCIAL.
IDEP - BLAA.

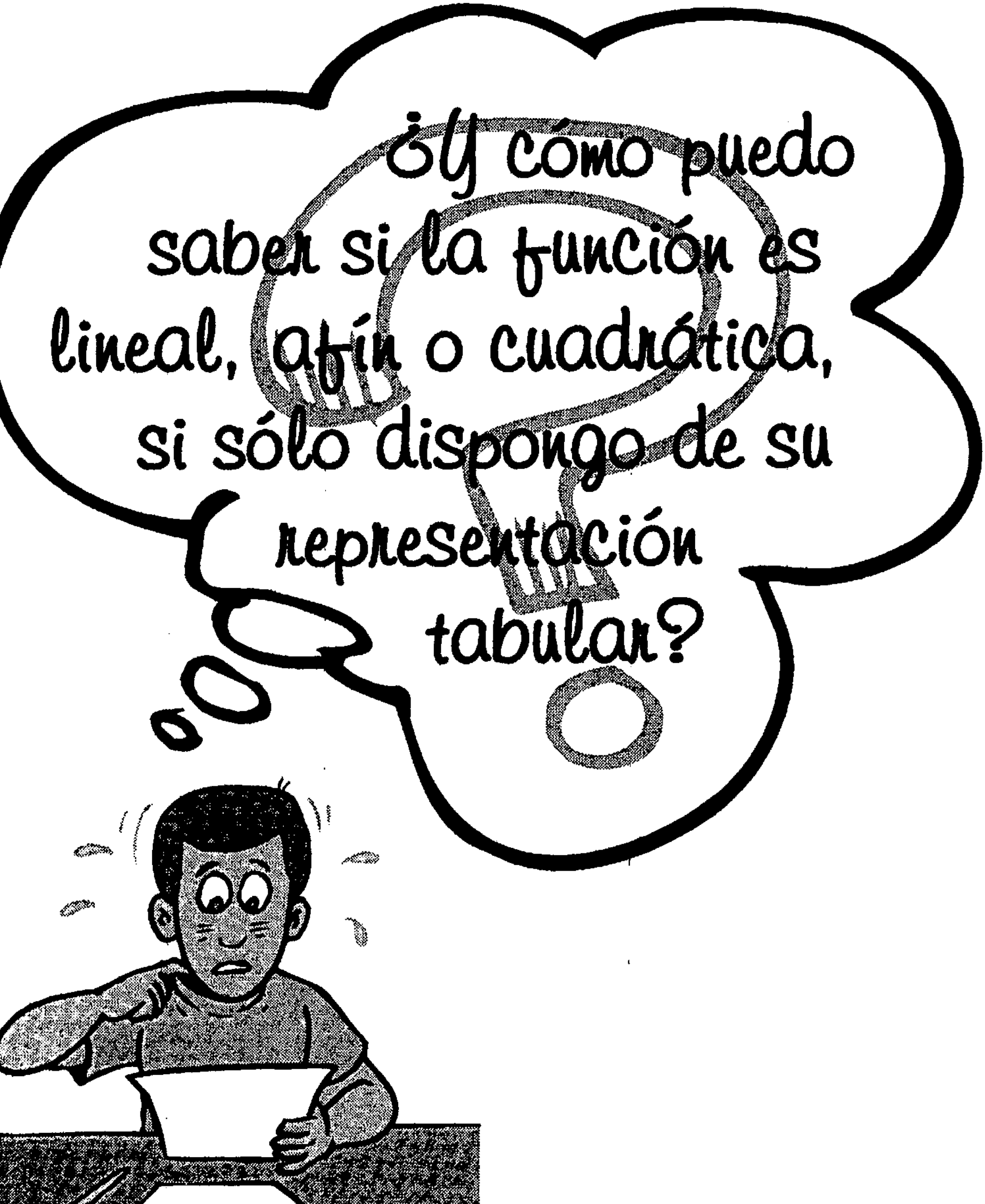
presa docente ®

empresa docente ®

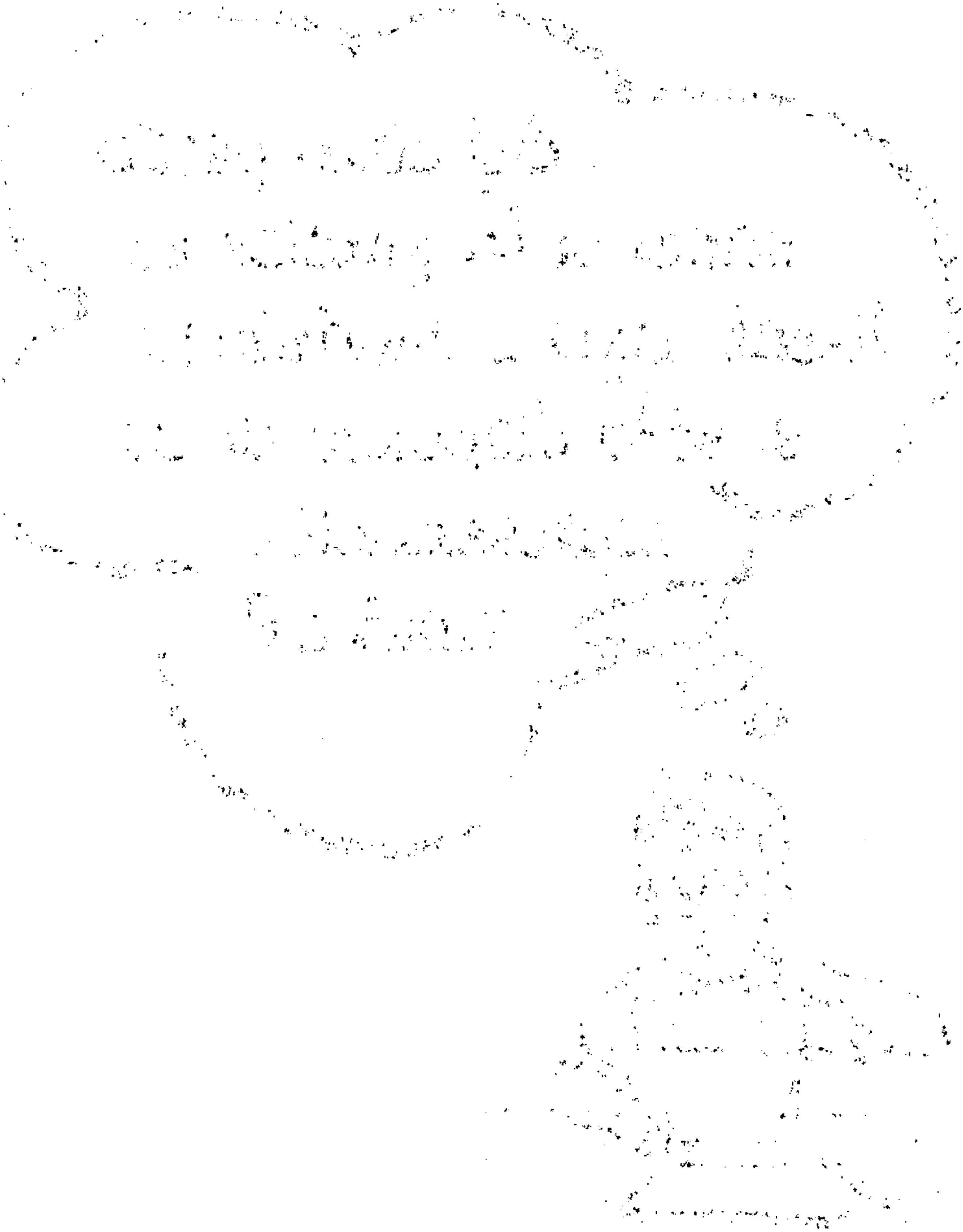

Pero ... ¿si cada explicación es diferente, por qué las expresiones son equivalentes?
2x
4 de x^2
2x
x
4x

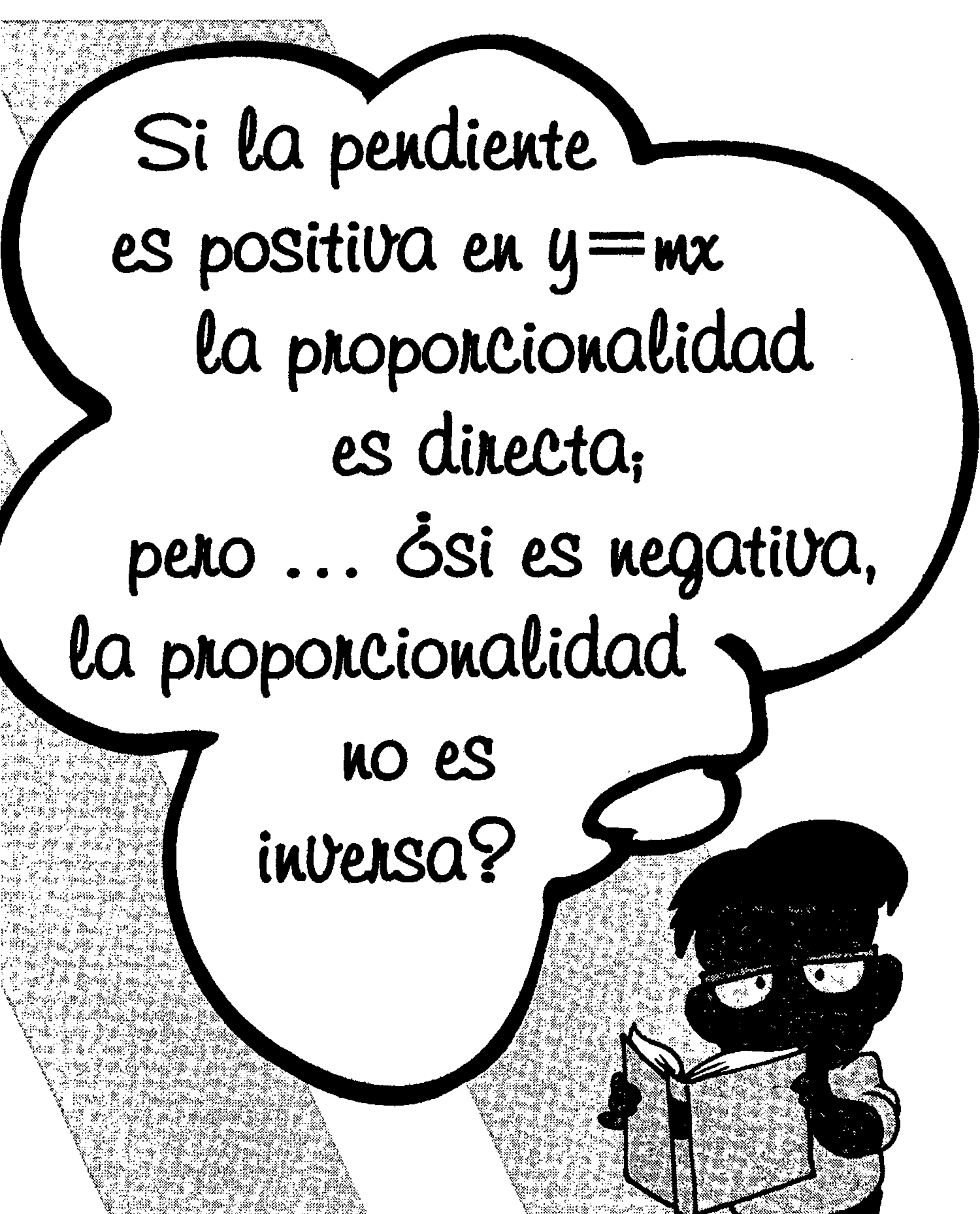
una empresa docente

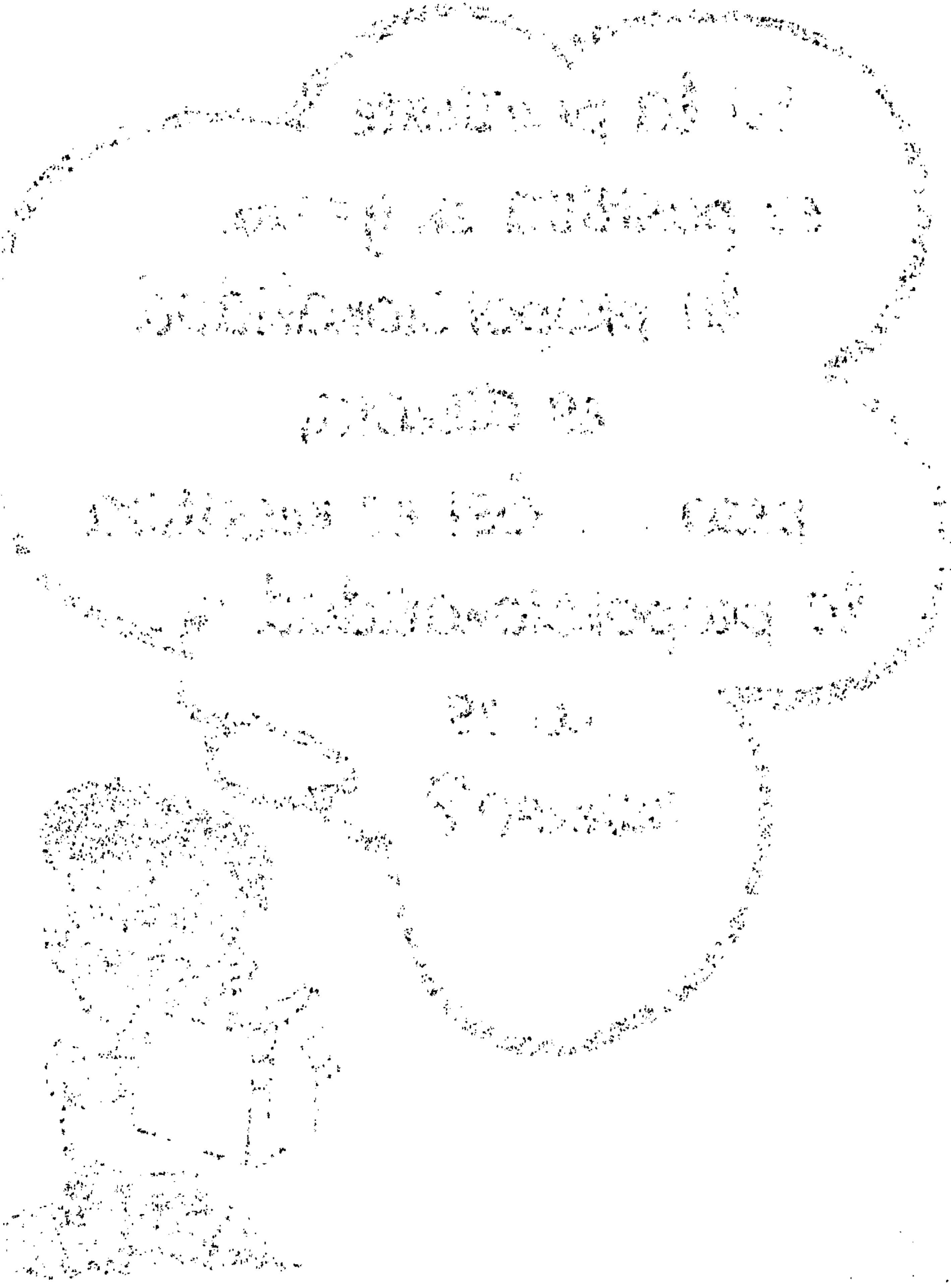


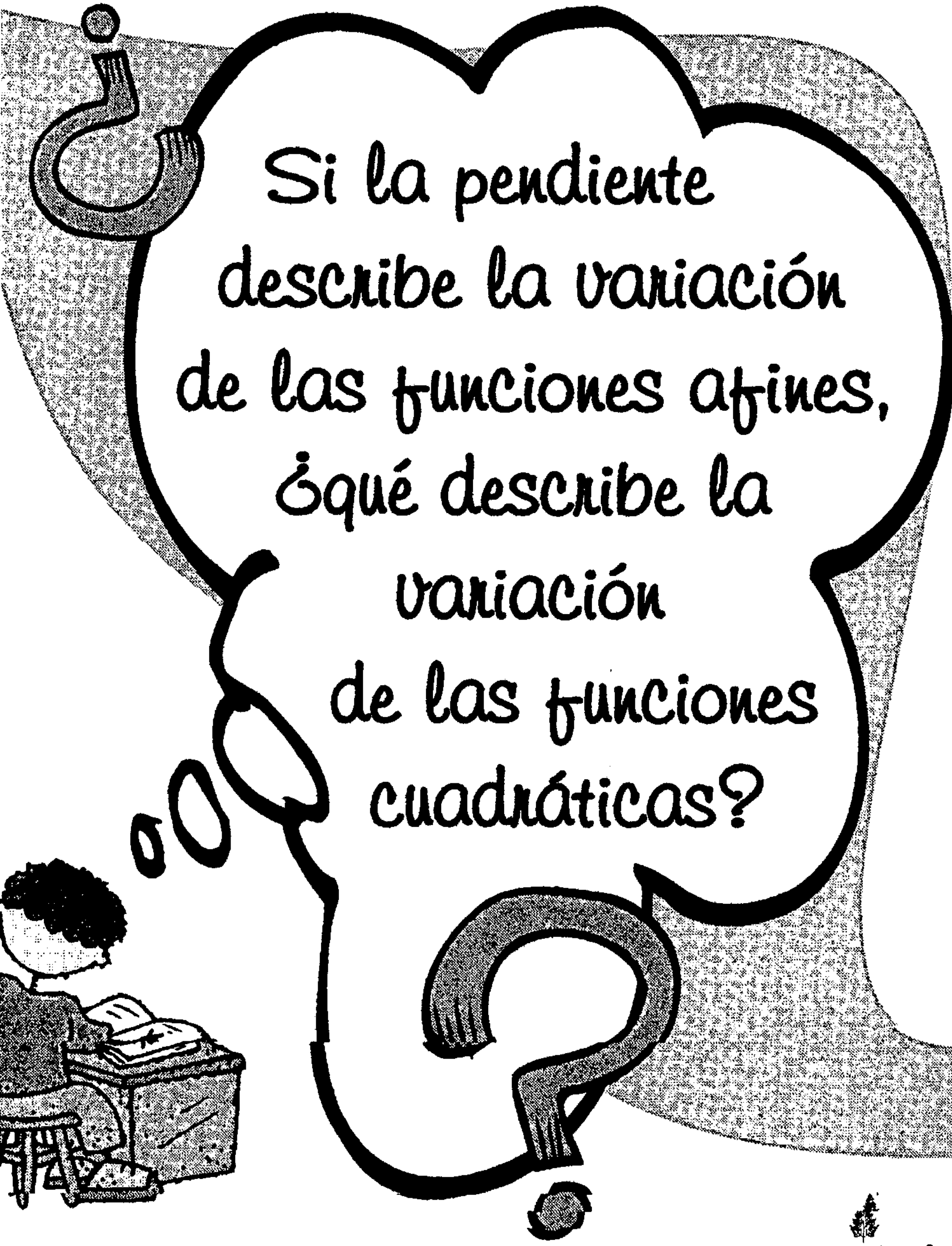


una empresa docente



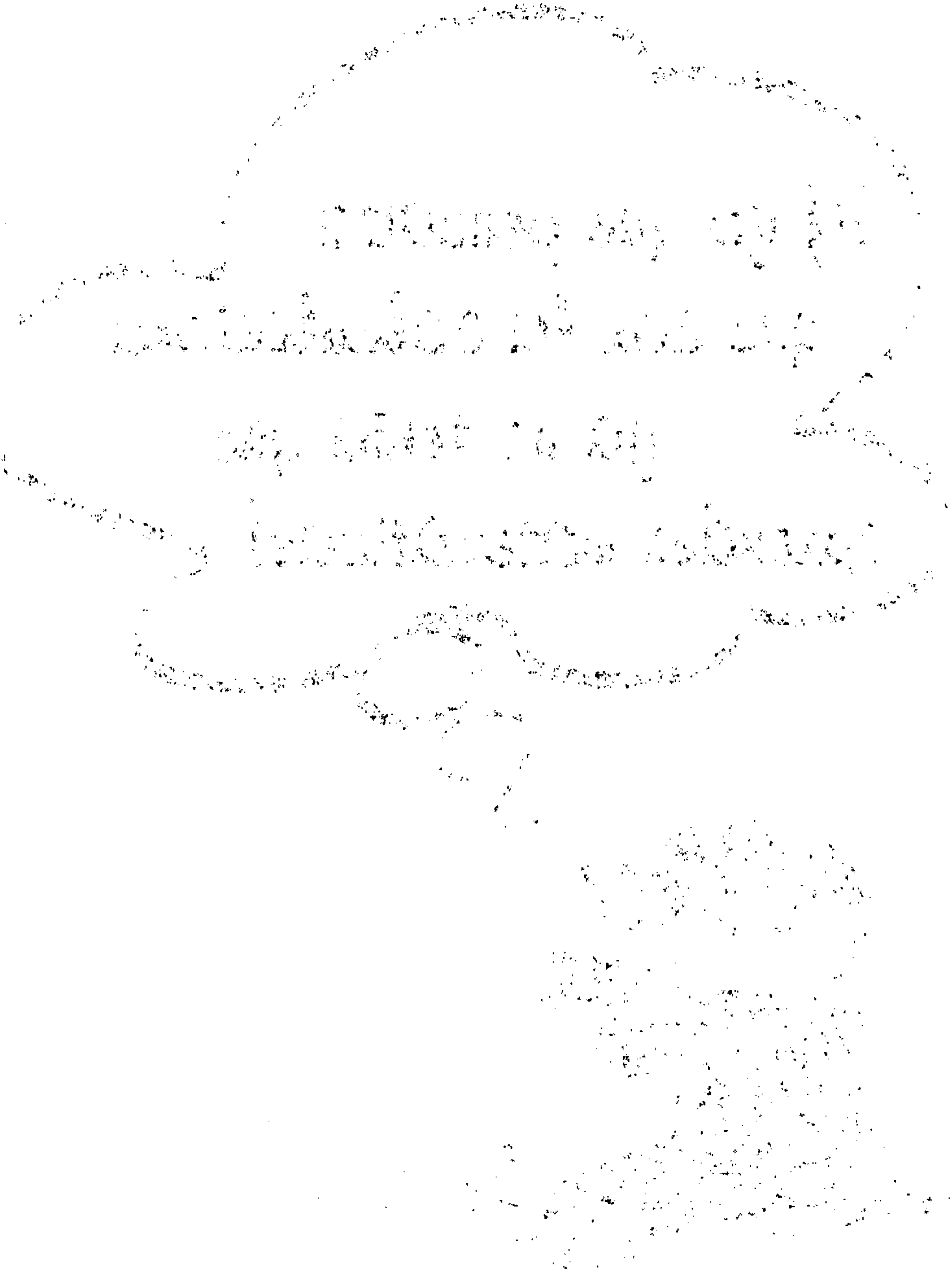

Si la pendiente
es positiva en y=mx
la proporcionalidad
es directa;
pero ... ¿si es negativa,
la proporcionalidad
no es
inversa?





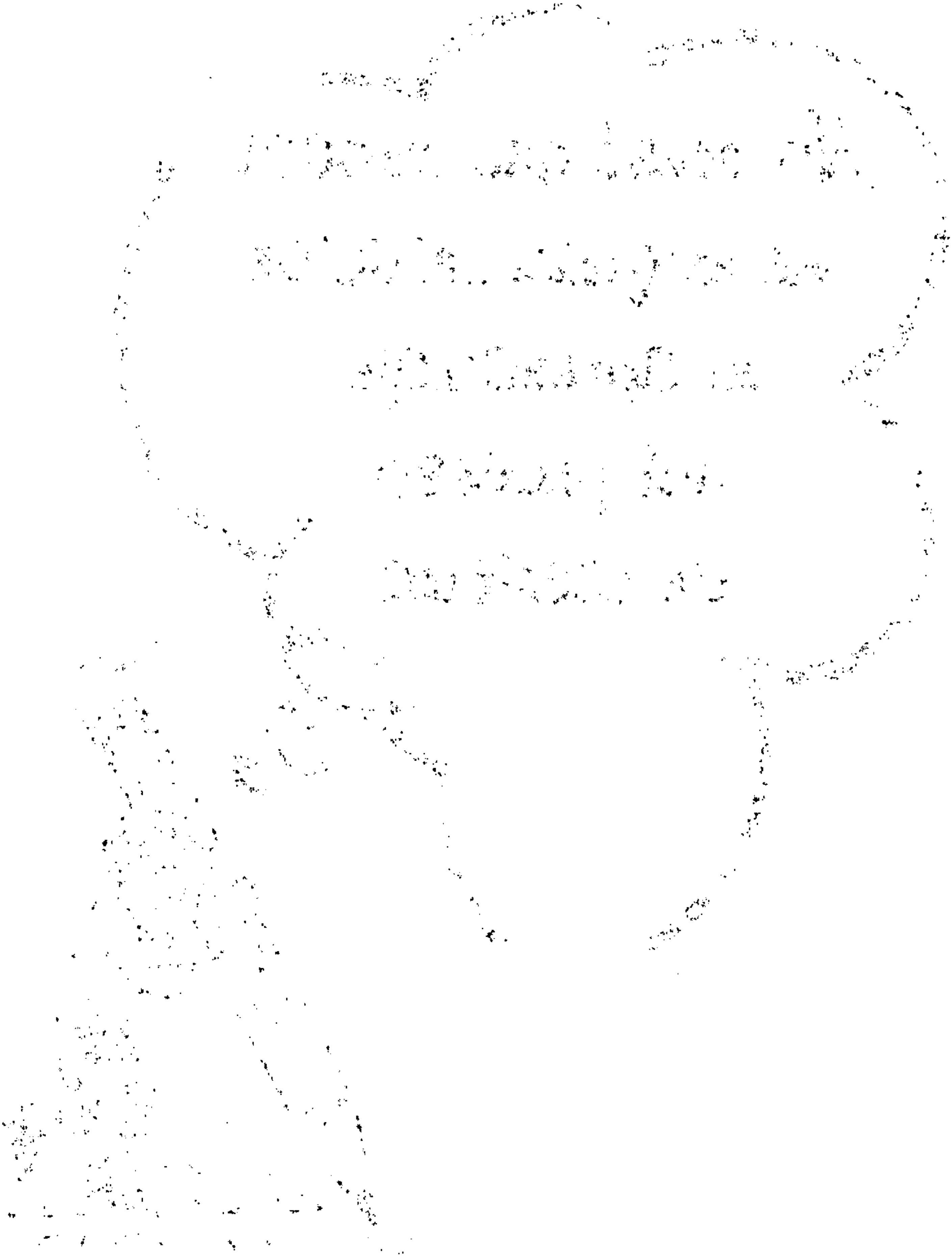
una empresa docente

una empresa docente®




No pensé que innovar me exigiera reiniciar mi aprendizaje del proceso de escritura

esa docente®




¿Por qué al innovar no alcanzo a enseñar todos los temas del programa?

TALLER
SOCIALIZACIÓN
MALOKA

INNOVACIÓN CURRICULAR EN PRECÁLCULO

PROPUESTA CURRICULAR PARA LA INTRODUCCIÓN A LA NOCIÓN DE FUNCIÓN REPRESENTADA POR UN POLINOMIO DE GRADO DOS

Presentación

Este proyecto ICEP (Innovación curricular en precálculo), desarrollado entre los años 1999 y 2000, estuvo coordinado por cuatro miembros de "una empresa docente", centro de investigación en Educación Matemática de la Universidad de los Andes, y financiado por el IDEP (Instituto para la investigación educativa y el desarrollo pedagógico). En el proyecto participaron once profesores de tres colegios distritales: el Colegio Distrital Miguel Antonio Caro (J.M.), el Centro Distrital Brasilia de Usme, (J.M.) y el Colegio Distrital La Amistad (J.T.).

En el marco del proyecto ICEP, los investigadores Edgar A. Guacaneme y Patricia I. Perry, diseñaron una propuesta curricular para la introducción a la noción de función representada por un polinomio de grado dos. En la actualidad, esta propuesta está siendo editada para su publicación. Ésta incluye tanto el conjunto de talleres diseñados, como sus respectivas consideraciones metodológicas y didácticas. El quinto taller, que configura las siguientes páginas, hace parte de esta propuesta curricular.

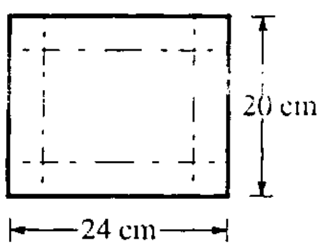
Recomendamos que el taller no sea utilizado con los estudiantes sin el estudio previo del contexto general de la propuesta y de las consideraciones generales y específicas del mismo. Adicionalmente "una empresa docente" prohibe la reproducción parcial o total del taller.

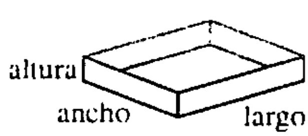
Contexto del taller

La propuesta curricular en la actualidad está compuesta por seis talleres, a saber:

Taller 1

En este taller se presenta el contexto donde surgen las funciones: éste tiene que ver con la construcción de una caja sin tapa a partir de un rectángulo al que se le han recortado cuadrados congruentes de cada una de las esquinas.





A través de este contexto se identifican, inicialmente algunas expresiones que representan: la altura de la caja $[f_0(x) = x]$, el largo de la caja $[f_1(x) = -2x + 24]$, el ancho de la caja $[f_2(x) = -2x + 20]$, el área del papel desperdiciado $[f_3(x) = 4x^2]$, y el área del papel de la caja $[f_4(x) = -4x^2 + 480]$.

Taller 2 (versiones A y B)
A través de este taller se aborda el estudio del dominio y rango de las funciones cuadráticas; particularmente se proponen actividades para determinar los valores extremos que determinan dominios y rangos, la correspondencia en el orden de valores del dominio y del rango, y la densidad del dominio y el rango.

Taller 3
Con este taller se propicia la identificación y trabajo con dos nuevas expresiones que representan el área de la base de la caja $[f_5(x) = 4x^2 - 88x + 480]$ y la capacidad de la caja $[f_6(x) = 4x^3 - 88x^2 + 480x]$. De estas se estudia los dominios y rangos definidos por el contexto.

Taller 4
Las actividades propuestas en este taller abordan el estudio de las gráficas de las funciones; particularmente se indaga por el significado de un punto y de sus coordenadas, y se propende por la identificación de características de la función a partir de la gráfica.

Taller 5 (versión A y B)
El objeto de estudio de este taller es la co-variación definida por las funciones que aparecen en el contexto. La identificación y caracterización de dos tipos de co-variación en la representación tabular y en la representación gráfica son aspectos específicos que a través de éste se abordan.

Taller 6
Este es un taller de evaluación. En éste se pretende que se desarrolle un estudio general de dos nuevas funciones, similar al de los cinco talleres anteriores. Las funciones propuestas son las que surgen de considerar el área de la cara de la caja determinada por el largo $[f_7(x) = -2x^2 + 24x]$ y el área de la cara de la caja determinada por el ancho $[f_8(x) = -2x^2 + 20x]$.

QUINTO TALLER (VERSIÓN B)

En este taller seguiremos trabajando con las seis funciones establecidas en el taller anterior, las cuales dependen de la altura de la caja. En lo que sigue vamos a examinar con algún detalle la variación de estas funciones.

Trabajo individual

1) En el contexto en el que estamos trabajando, surgen dos preguntas que queremos tratar de responder con el trabajo de este taller.

   Si al comparar varias parejas de cajas se encuentra que su altura difiere en la misma cantidad, ¿será cierto que el ancho de las cajas también difiere en una misma cantidad?

   Si al comparar varias parejas de cajas se encuentra que su altura difiere en la misma cantidad, ¿será cierto que el área del papel desperdiciado también difiere en una misma cantidad?

   a. Sin utilizar más de cinco minutos, intente responder por escrito las dos preguntas anteriores.

   b. Si en los cinco minutos que tuvo no pudo responder, ¿qué estrategia seguiría para resolver tales cuestiones? Explique su respuesta.

Acerca de la función *ancho de la caja* ($f_2(x) = -2x + 20$)

2) Cada uno de los integrantes del grupo va a examinar cómo varían los valores de $f_2(x)$ cuando la variable x varía con incrementos de un valor específico. Para ello, cada miembro del grupo debe completar la segunda fila de una de las cuatro tablas que aparecen a continuación (usando calculadora) y luego, con base en la información de su tabla, debe responder las preguntas 3 a 6.

   a.

diferencia en x									
x	0.2	1.2	2.2	3.2	4.2	5.2	6.2	7.2	8.2
$f_2(x)$									
diferencia en $f_2(x)$									

b.

diferencia en x

x	3.3	3.8	4.3	4.8	5.3	5.8	6.3	6.8	7.3
$f_2(x)$									

diferencia en $f_2(x)$

c.

diferencia en x

x	0.3	1.1	1.9	2.7	3.5	4.3	5.1	5.9	6.7
$f_2(x)$									

diferencia en $f_2(x)$

d.

diferencia en x

x	0.1	1.3	2.5	3.7	4.9	6.1	7.3	8.5	9.7
$f_2(x)$									

diferencia en $f_2(x)$

3) En la tabla, los valores dados a x están ordenados ascendentemente. Determine si la siguiente aseveración es verdadera o falsa: entre dos valores consecutivos cualesquiera de x (considerando primero el que está a la derecha) hay una diferencia constante (los valores de las diferencias son iguales). En la primera fila de óvalos registre los valores de las diferencias.

4) Para cada par de valores consecutivos de $f_2(x)$ registrados en su tabla, determine la diferencia (lo mismo que para los valores de x, considere primero el que está a la derecha); si lo considera necesario utilice la calculadora. En la segunda fila de óvalos, escriba el valor de la diferencia obtenida. ¿Es cierto que los valores de las diferencias son el mismo?

5) Que la diferencia en valores consecutivos de x sea la misma en la tabla fue decisión de quien escogió los valores. ¿Puede dar alguna explicación o alguna justificación de por qué la diferen-

cia entre valores consecutivos de $f_2(x)$ resultó negativa y por qué esa diferencia es la misma en todos los casos considerados?

6) ¿Las respuestas a los ítems 3, 4 y 5 se modifican si la diferencia entre valores consecutivos de la tabla se calcula considerando primero el valor que está a la izquierda (y no a la derecha como se especifica en los ítems 3 y 4)? Explique su respuesta.

<u>Acerca de la función *área del papel desperdiciado*</u> ($f_3(x) = 4x^2$)

7) Cada integrante del grupo va a examinar cómo varían los valores de $f_3(x)$ cuando la variable x varía con diferencias de un valor específico. Para ello, cada miembro del grupo debe completar la tercera fila de una de las cuatro tablas que aparecen a continuación (usando calculadora) y luego, con base en la información de su tabla, debe responder las preguntas 8 a 9.

e.

diferencia en x

x	0.2	1.2	2.2	3.2	4.2	5.2	6.2	7.2	8.2
$f_3(x)$									

diferencia en $f_3(x)$

f.

diferencia en x

x	3.3	3.8	4.3	4.8	5.3	5.8	6.3	6.8	7.3
$f_3(x)$									

diferencia en $f_3(x)$

g.

diferencia en x

x	0.3	1.1	1.9	2.7	3.5	4.3	5.1	5.9	6.7
$f_3(x)$									

diferencia en $f_3(x)$

h.

diferencia en x

x	0.1	1.3	2.5	3.7	4.9	6.1	7.3	8.5	9.7
$f_3(x)$									

diferencia en $f_3(x)$

8) También en este caso, al considerar dos valores consecutivos en la tabla, la diferencia en x es constante. En la primera fila registre el valor de dicha diferencia.

9) Para cada par de valores consecutivos de $f_3(x)$ registrados en su tabla, utilizando calculadora, determine su diferencia. En la segunda fila de óvalos, escriba el valor de la diferencia obtenida. ¿Es cierto que los valores de las diferencias son el mismo? Describa la mayor cantidad de detalles acerca del comportamiento de los valores de las diferencias que obtuvo.

Trabajo en grupos de 4

<u>Acerca de la función *ancho de la caja* (</u> $f_2(x) = -2x + 20$)

10) En la respectiva gráfica cartesiana, entregada por el profesor, identifiquen y marquen con un mismo color los puntos correspondientes a los valores de la tabla (a.) que elaboraron en el trabajo individual. Con el mismo color, representen en esa gráfica las diferencias que calcularon. Describan las características que se pueden observar al mirar el dibujo obtenido.

11) Con tres colores diferentes al utilizado antes, realicen las actividades propuestas en el ítem 10 para las tablas (b., c., d.) respectivamente.

12) De las características que identificaron en las gráficas de cada una de las tablas, ¿cuáles son comunes y cuáles no lo son?

13) En la siguiente tabla, registren un resumen de los resultados obtenidos en el trabajo individual.

Nombre del estudiante	Diferencias entre valores consecutivos de x	Diferencias entre valores consecutivos de $f_2(x)$

14) Con base en el trabajo individual y en la tabla anterior, si dos cajas difieren en su altura en 1.5 cm., ¿se puede averiguar en cuánto difieren los correspondientes anchos? Expliquen cómo dan respuesta a esa pregunta.

Acerca de la función *área del papel desperdiciado* ($f_3(x) = 4x^2$)

15) En la respectiva gráfica cartesiana, entregada por el profesor, identifiquen y marquen con un mismo color los puntos correspondientes a los valores de la tabla (e.) que elaboraron en el trabajo individual. Con el mismo color, representen en esa gráfica las diferencias que calcularon. Describan las características que se pueden observar al mirar el dibujo obtenido.

16) Con tres colores diferentes al utilizado antes, realicen las actividades propuestas en el ítem 10 para las tablas (f., g., h.) respectivamente.

17) De las características que identificaron en las gráficas de cada una de las tablas, ¿cuáles son comunes y cuáles no lo son?

18) En la siguiente tabla, registren un resumen de los resultados obtenidos en el trabajo individual.

Nombre del estudiante	Diferencias entre valores consecutivos de x	Diferencias entre valores consecutivos de $f_3(x)$

19) Con base en el trabajo individual y en la tabla anterior, si dos cajas difieren en su altura en 1.5 cm., ¿se puede averiguar en cuánto difieren las correspondientes áreas del papel desperdiciado? Expliquen cómo dan respuesta a esa pregunta.

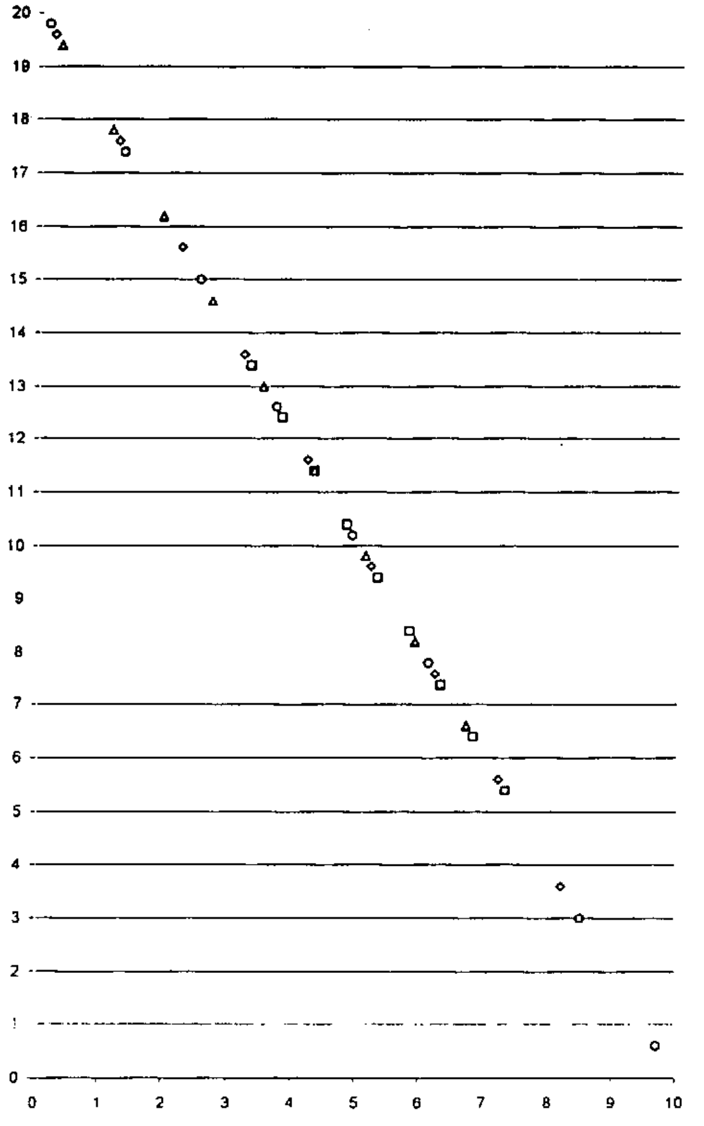
20) Discutan las respuestas que cada quien dio al ítem 1. Atendiendo a lo discutido y a lo realizado en el taller, elaboren una nueva respuesta del grupo para las preguntas:

Si al comparar varias parejas de cajas se encuentra que su altura difiere en la misma cantidad, ¿será cierto que el ancho de las cajas también difiere en una misma cantidad?

Si al comparar varias parejas de cajas se encuentra que su altura difiere en la misma cantidad, ¿será cierto que el área del papel desperdiciado también difiere en una misma cantidad?

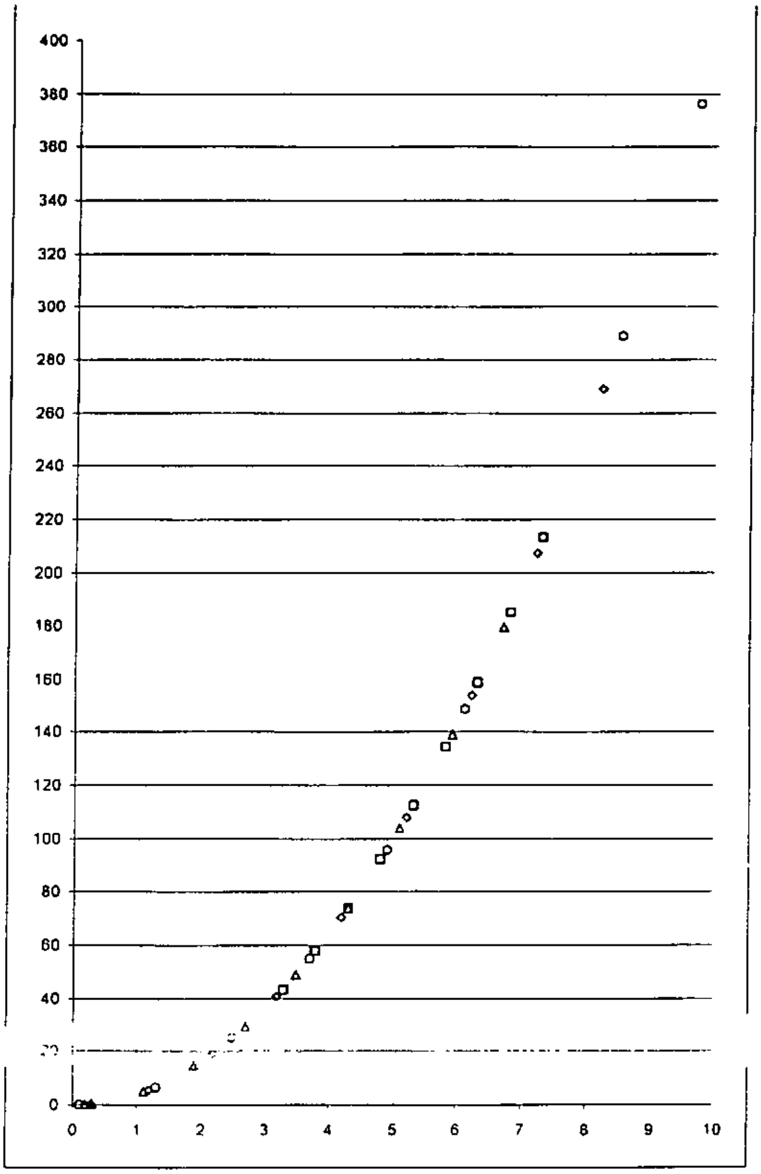
GRÁFICA DE LA FUNCIÓN ANCHO DE LA CAJA

$$f_2(x) = -2x + 20$$



GRÁFICA DE LA FUNCIÓN ÁREA DEL PAPEL DESPERDICIADO

$$f_3(x) = 4x^2$$



89

1-11

MEDIACIÓN: UN PROCESO INNOVATIVO PARA GENERAR INNOVACIÓN

CRISTINA CARULLA, EDGAR GUACANEME,
GLORIA NEIRA, PATRICIA PERRY

Este artículo presenta una revisión de la noción de innovación de la cual se extraen algunos elementos que sirven para describir una innovación en precálculo y un proceso de transferencia de ésta a contextos diferentes. Se describe un proceso de interacción entre investigadores innovadores y profesores con poca experiencia innovativa en vías a generar un nuevo currículo. Fue necesario, a lo largo de la experiencia, crear situaciones de desestabilización, situaciones de mediación y de transferencia para lograr un primer paso hacia la innovación.

INTRODUCCIÓN

Durante el año 2000, "una empresa docente" realizó el proyecto *ICEP. Innovación en precálculo para la educación media* gracias al apoyo del Instituto para la Investigación Educativa y el Desarrollo Pedagógico, IDEP. En años anteriores, algunos investigadores de "una empresa docente" lideraron un proceso de innovación cuyo resultado más visible fue un conjunto de situaciones didácticas diferentes a las formas tradicionales que perduraban en el currículo. De esta experiencia, el grupo adquirió un saber didáctico en torno al tema de precálculo. Se decidió entonces transmitir este conocimiento a profesores de matemáticas de instituciones escolares públicas.

En este artículo intentaremos describir el proceso vivido durante el proyecto con el fin de cuestionar la posibilidad de forzar procesos innovativos en instituciones que tienen contextos didácticos y sociales bien diferentes a las condiciones de la Universidad de los Andes.

El artículo está dividido en tres partes. En la primera, Procesos innovativos, trataremos de definir y presentar algunos elementos conceptuales acerca de la noción de innovación. En la segunda, Innovación en precálculo de la Universidad de los Andes, pretendemos mostrar cuáles son las características esenciales de la vivencia en la Universidad, para mostrar porque creemos que fue algo innovativo y destacar los ejes conceptuales que sirvieron de hilo conductor durante el trabajo posterior con las instituciones escolares. En la tercera, Mediación: un proceso innovativo para generar innovación, quisimos describir lo sucedido en la interacción y propiciar un cuestionamiento acerca de la posibilidad o no de forzar procesos innovativos "desde afuera" y no "desde adentro". La convocatoria del IDEP explicitaba en sus términos de referencia la idea de transferencia de Innovaciones. Nosotros considerábamos en nuestra propuesta la idea de que esto no es posible ya que los contextos son diferentes. En esta última parte trataremos, a partir de lo vivido, precisar algunas ideas conceptuales que surgieron en el proceso.

PROCESOS INNOVATIVOS

Aportes de la literatura a una definición de innovación

A partir de la lectura de diferentes textos que definen la innovación, hemos querido buscar los elementos que parecen definir la innovación. Este trabajo nos servirá más tarde para contextualizar la innovación de precálculo en la Universidad de los Andes, enriquecer nuestra noción de innovación y cuestionar el proceso de mediación como generador de nuevas innovaciones.

A través de las diferentes lecturas revisadas y en las cuales se trata de dar definición al término innovación, destacamos como eje principal *la existencia de algo que se quiere transformar de manera explícita en algo cualitativamente diferente*. Para Barnet (citado en Restrepo (1996)) "innovación es cualquier pensamiento o cosa que es nuevo porque es cualitativamente diferente de formas existentes.". Restrepo (1996) define la innovación en educación "como procesos, conductas, objetos, que son nuevos porque son cualitativamente diferentes de formas existentes, han sido propuestos deliberadamente en campos específicos para mejorar la calidad de la educación, son diferentes de pequeños ajustes acumulativos, y llevan un tiempo de aplicación y desarrollo suficiente para medir su eficacia y juzgar sus impactos y consiguiente poder de supervivencia relativa."p. 61. El "algo" que mencionamos previamente, se convierte en procesos, conductas, objetos o, como dice Aguilar (2000), en componentes de la relación pedagógica o, tal como lo menciona Riberos (2000) en el aula, la institución escolar y el maestro. Otros elementos importantes, y que vale la pena destacar en esta revisión, son: la intención deliberada de cambio, es decir que se identifique ese "algo" que se quiere transformar con un fin predeterminado, no de manera arbitraria; que exista un proceso permanente de reflexión o sistematización de la vivencia y que, por consiguiente, se hagan generalizaciones y conceptualizaciones; que el proceso de cambio sea algo duradero, no circunstancial a un momento específico, lo cual implica el mantenerse frente a todas las fuerzas opuestas que encuentre, que perdure en el tiempo, que tenga en sí capacidad de supervivencia; y, que se pueda validar y medir su eficacia e impacto. Aguilar (2000) sintetiza estas ideas al definir innovación como "Cambios deliberados, sistemáticos, duraderos, en algunos de los componentes de la relación pedagógica y/o de su contexto de realización, que estructuran de una manera diferente o novedosa lo que se considera tradicional o convencional de un espacio formativo específico."

Hablábamos de la importancia de reconocer "algo" que merece la pena ser cambiado. En este sentido Riberos (2000) identifica como elemento importante dentro del proceso innovador, la "problematización". Describe este aspecto como la necesidad de que la innovación se genere por una "crisis que desestabiliza" la cual llama "crisis fundante". Existe una identificación de carencias, de procesos que no conducen al lugar deseado y se genera una desestabilización de la vivencia, una incomodidad frente a lo que se hace. En su ponencia dijo: "Esa crisis se percibe mediada por la reflexión sobre la práctica. Si esa reflexión no tiene lugar, todo parece bien, no tengo crisis, no hay necesidad de cambio, no hay conceptos que problematicen. En tanto hay reflexión, tiene lugar una intencionalidad de cambio, cambio que se vuelve protagonista en la práctica docente." p. Riberos (2000)

Otro aspecto importante es la socialización. El trabajo que surge en el proceso innovativo debe poderse presentar a pares. Como planteamos anteriormente, un elemento de la innovación es la reflexión permanente que conduce al individuo a una cierta generalización del proceso vivido. Puede destacar aspectos de su realidad docente que fueron cambiados y el resultado de afectar sus propios procesos. Este conocimiento le permite transmitir a otros el proceso vivido. Aparece entonces la posibilidad de identificar deficiencias y destacar aspectos positivos, de recibir críticas de otros que aporten al mejoramiento de lo existente, de que el otro encuentre resonacia frente a las ideas presentadas. Riberos (2000) presenta la socialización como transferencia y la define como "la capacidad de socializar y poner en común a otros sectores de la comunidad educativa, la experiencia vivida para que otros grupos o personas puedan tomar de ella elementos significativos para sus propias experiencias innovadoras." Según ella, no se trata de transferir conceptos o metodologías puntuales, "sino la vivencia y la experiencia innovadora y sus resultados, conclusiones y reflexiones." Riberos (2000).

Aportes a la definición desde nuestra experiencia

Destacaremos elementos conceptuales que no están presentes en la reflexión anterior y que consideramos importantes.

En las definiciones anteriores no se menciona explícitamente al individuo o a los individuos que realizan la innovación. Esta omisión es tanto más importante por cuanto todo proceso innovador es generado por un individuo, o por un grupo de individuos, que tiene unas características especiales. Para Gardier (1996) el proceso innovativo está ligado con el pensamiento creativo. "La innovación exige que las ideas se realicen, de manera que el pensamiento creativo,..., debe ser seguido del proceso de innovar, de ponerse en marcha y producir resultados tangibles". Según él, todas las personas, en un contexto determinado y con un desarrollo psicológico normal, poseen un potencial creativo. Agrega que este potencial no es uniforme para todas las personas. Para ser innovador, se debe haber desarrollado, en algún grado, su potencialidad creativa en el campo de la educación. Pensamos que es igualmente importante el que la persona sea capaz de ver su práctica como una complejidad en medio de la cual hay elementos y relaciones que se pueden identificar y transformar y por consiguiente crear mecanismos para lograr un cambio. En el proceso de evaluación el individuo innovador deberá ser capaz de identificar lo logrado frente a lo que existía e iniciar un nuevo proceso de reflexión acerca de lo que hará en el futuro.

Aunque acabamos de mencionar las características de un individuo innovador, tal función puede también ser generada por un grupo de individuos. En este caso, las exigencias para cada una de las personas que conforman al grupo no son tan elevadas como cuando se trata de un individuo aislado, importando empero que la unión de las distintas partes resulte, además de complementaria, armónica. De este modo las fortalezas individuales se suman y las debilidades de cada quien se ven compensadas por las competencias de los otros.

Estas condiciones de funcionamiento democrático, en el cual cada uno de los integrantes hace un aporte equivalente al de los demás, se dan en la realidad pocas veces. Constituyen lo que Bion denomina "grupo de trabajo". Con mayor frecuencia se encuentran empero grupos que requieren de un líder, de su presencia, para lograr construir la experiencia innovadora, conformando lo que el mismo autor denomina "grupos de supuesto básico". La función de dicho líder será la de conducir el proceso innovador, impulsando a los distintos participantes del grupo, apoyando sus fortalezas y llevándolos a enfrentar sus debilidades, con el fin de que puedan superarlas progresivamente. Aunque uno de los riesgos mayores de los grupos que funcionan de este modo es la dependencia consecuente de la figura del líder, pueden hallarse variantes, cuando el líder que asume bien su función busca generar a más largo plazo la autonomía progresiva de cada uno de los miembros, teniendo como objetivo el alcanzar en algún momento un funcionamiento como el que denominamos anteriormente democrático y sin que el grupo se destruya por el mismo proceso de autonomización de sus miembros.

Gibb (1954) (citado en Whittaker J. (1980)) dice que "el liderazgo es un fenómeno de interacción. El que un individuo tome el papel de líder no sólo depende de las necesidades de tal papel en el grupo y de los atributos de la personalidad de ese individuo, sino de que los miembros consideren que satisface las necesidades del papel." p. 110. Algunos grupos que hacen innovaciones necesitan para llegar a su fin de una cierta estructura de funcionamiento que incluya un sujeto o varios que ejerzan un papel de liderazgo. Este aspecto será retomado para analizar el proceso de mediación.

Dificultades inherentes al proceso innovativo

Varios autores han identificado dificultades frente al proceso de cambio. Lo que hasta ahora hemos presentado son ideas generales acerca de procesos innovativos que tienen éxito. Si pensamos que el cambio en el aula es necesario para generar una mejor calidad en la educación, o para mejorar algún aspecto que identificamos como deficiente en nuestro trabajo con los estudiantes, entonces podríamos suponer que es importante que todo maestro tenga algo de esa capacidad innovativa y que se involucre en procesos innovativos. Sin embargo, esto no es evidente. En efecto, "Los sujetos que concurren a un centro educativo también están constituidos por aquello que se resiste al cambio, aquello que los tiene acomodados a la situación, de tal manera que no les resulta necesario cambiarla, así digan lo contrario en determinados contextos..." pgs. 151-152 (Bustamante, (2000)). Para este autor, "la pretensión de innovar no garantiza nada" y señala la importancia de que exista la inquietud de saber por qué "las cosas en la institución son como son".

Por otro lado están las dificultades, que no son propias al individuo, y que consisten en presiones que el medio —ya sea la escuela misma, o las políticas del gobierno y los exámenes de estado o los mismos compañeros de trabajo y la tradición en los currículos— ejerce sobre las acciones de los individuos. En la innovación se debe tener en cuenta metas que los mismos autores no se han propuesto "pero que en últimas se convierten en parámetros de juicio desde el sistema educativo y para la sociedad" (Segura et al. (1999)). El proceso creativo esta lleno de tensiones que jalonan al maestro a su estado inicial, ya que a sus ojos está cumpliendo con las normas que la sociedad le impone y que tradicionalmente se ha sostenido. Romper con la tradición es un reto difícil.

INNOVACIÓN DE PRECÁLCULO EN LA UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

La innovación que describiremos se inicia dentro de un proyecto de investigación que pretendía explorar el impacto de la calculadora gráfica en un curso de precálculo de la Universidad de los Andes. El equipo de investigación estaba conformado por cinco personas que jugaban al tiempo dos roles diferentes: ser investigador de alguna temática relacionada con el problema de indagación HACER CITAS DE LOS REPORTES DE INVESTIGACIÓN DE CADA TEMÁTICA y ser profesor de un curso de precálculo en el cual debía utilizar la calculadora gráfica. De esta manera surgen dos procesos simultáneos, uno de investigación y otro de innovación. Las ideas que presentaremos a continuación pretenden dar cuenta del proceso de innovación que vivió el grupo y no de los resultados de la investigación.

Identificación de lo que cambió

El curso de precálculo, al iniciar la innovación, se caracterizaba por una manera de organizar el contenido matemático a enseñar, cuyo tema central era el de funciones. Para cada tipo de función se veían los mismos tópicos: resolución de ecuaciones y desigualdades, representación simbólica y su relación con la representación gráfica, resolución de problemas para citar algunos.CITAR Y MEJORAR CON LO ESCRITO EN EL LIBRO DE SITUACIONES PROBLEMÁTICAS. Esta organización era el resultado de otro proceso de innovación del cual quedó un texto (Echevery et al. 1990), que seguían todos los alumnos que tomaban precálculo en la Universidad. Algunas de las ideas centrales, al rededor de las cuales giraba el curso, eran: herramientas conceptuales como traslaciones y dilataciones, cuya finalidad era que los estudiantes pudieran dibujar la gráfica de una función al mirar una expresión simbólica e identificar los elementos de ésta que generaban ciertos efectos en la gráfica; analizar el comportamiento de las funciones a través de métodos algebraicos; y, resolver ecuaciones y desigualdades por medio de un método que combinaba lo gráfico y simbólico. Existía un programa que detallaba día a día lo que los estudiantes y profesores debían hacer. En él se especificaba la teoría a leer en casa y los ejercicios a resolver para discutir en clase. El profesor revisaba los ejercicios, colocaba eventualmente otros y ponía talleres especiales, diseñados por el coordinador del curso. Durante un par de semestres se utilizó la calculadora durante las clases, los estudiantes no la llevaban a su casa y era prohibido utilizarla durante las evaluaciones. Se realizaban algunos talleres para el uso de la calculadora, pero no se generaron cambios radicales en los diferentes componentes del currículo.

En un momento dado, se tomó la decisión de que los estudiantes llevaran la calculadora gráfica a la casa —o tuvieran la propia— y la utilizaran durante las evaluaciones (Gómez y Carulla (1995)). Entonces se generó en nosotros una "crisis fundante". Aparece la problemática que propició la desestabilización en los profesores. El currículo existente no servía. La calculadora daba el resultado de desigualdades y ecuaciones; pintaba, de manera rápida y segura, las gráficas de las funciones; y, mostraba el comportamiento de las funciones. Una de las profesoras que vivieron el momento lo describió como lo feo (Mesa, 1995) LEER LO BUENO LO MALO Y LO FEO ARTICULO DE VILMA. ¿Qué se les debía entonces enseñar a los estudiantes, si todo lo que se les pedía que aprendieran lo hacía la calculadora?

Caracterización, permanencia y sistematización

Se inicia entonces un proceso intencionado y sistemático. El grupo de profesores se reunía semanalmente para diseñar actividades, discutir acerca de los objetivos de aprendizaje, compartir experiencias positivas y negativas con los estudiantes. Cada uno tenía un rol diferente. Uno era el líder, dirigía permanentemente el rumbo, daba tareas específicas a cada uno. Era el director del proyecto de investigación. Cada quien hacía su propio proceso de diseño, pero las personas de más experiencia fueron las que diseñaron los problemas —que llamamos situaciones problemáticas y de las cuales se seleccionaron 100 para hacer un libro.

Durante algunos semestres siguió evolucionando el curso, se utilizaba como texto principal el libro de Situaciones problemáticas de precálculo de manera regular y se inició un nuevo proyecto de investigación que pretendía estudiar el rol de los problemas en el aprendizaje de los estudiantes (ver Carulla, Gómez).

Sin embargo, la innovación no se dio en todos los cursos de precálculo de la Universidad y, con el tiempo, las personas que estaban en el proyecto no dictaron más esa materia y, más tarde, el departamento suprimió el curso. Los estudiantes hoy en día entran directamente al curso de cálculo. Esto no significa que la innovación no haya perdurado. De los proyecto de investigación y de la sistematización permanente salió un conocimiento que hemos utilizado en programas de formación de docentes, en proyectos financiados internacionalmente para capacitación de docentes en el uso adecuado de la tecnología en el aula y en particular, en el proyecto *ICEP. Innovación en precálculo para la educación media* que pretendía atender a un llamado del IDEP para hacer "transferencia de innovaciones pedagógicas".

Ejes de la innovación

El grupo sufrió durante el proceso una serie de cambios y el currículo se afectó. Por un lado, las visiones de los profesores participantes acerca de las matemáticas escolares, de la enseñanza y del aprendizaje se transformron. Se pasa de ver las matemáticas como un conocimiento estático a verlas como un conocimiento en permanente cambio y en construcción. El profesor se ve como uno más del grupo de estudiantes que facilita situaciones didácticas para propiciar el aprendizaje, ya no como un resolutor de ejercicios, poseedor de todo el conocimiento. El salón de clase deja de verse como el sitio para transmitir un conocimiento rígido y estático, para verse como un sitio en el que un conjunto de personas trabajan para dar solución a problemas matemáticos. El estudiante se ve como gestor de su propio aprendizaje y no como un imitador de comportamientos. (Gómez, Carulla)

Resaltaremos aquellos cambios que se generaron en el currículo y que sirvieron de guía para el proceso de mediación. Los nombraremos ejes de la innovación.

El primer eje que describiremos es *Resolución de Problemas*. Como lo mencionábamos, los estudiantes debían resolver problemas. Estos eran diseñados con un intención específica para cada tema y para la totalidad del curso. Podían ser resueltos con la ayuda de calculadora gráfica —pero no por ella. Se caracterizaron por: no ser rutinarios, no tener una estrategia predeterminada de solución, que los algoritmos matemáticos fueran herramientas para llegar a su solución, pero no el ejercicio en sí (Gómez et al.). El rol de la calculadora era el de ayudar al estudiante a generar y validar conjeturas, a encontrar rápidamente resultados y a controlar sus respuestas. El maestro deja de ser la única autoridad que conoce la respuesta para juzgar si está bien o mal.

El segundo eje lo llamamos *Sistemas de representación* y sus *Conexiones*. Aunque, como lo mencionamos antes, el curso inicial hacía un fuerte énfasis en la relación entre lo gráfico y lo simbólico, como resultado de la innovación se enfatizó aun más en la existencia de los diferentes sistemas de representación y las conexiones entre ellos. Por ejemplo, tradicionalmente se pasaba de una representación simbólica a una gráfica. En el nuevo curso, se buscaba igualmente que el estudiante pasara de una representación gráfica a una simbólica, identificando aspectos de las gráficas y haciendo una traducción a lo simbólico. Se dio una mayor importancia a lo gráfico a través del análisis de familias de funciones y se le dio a parámetro el rol de variable del parámetros como variables en la representación simbólica. La calculadora gráfica facilitaba la observación del fenómeno matemático ya que se podían dibujar varias funciones al tiempo. Por otro lado se acentuó la importancia de representar y modelar, mediante funciones, fenómenos de la realidad. Se pedía a los estudiantes que hicieran un proyecto de investigación como si fueran diseñadores de cajas de una empresa y el gerente les pusiera una serie de condiciones para el diseño. para tomar decisiones acerca de lo que deberían diseñar como caja, tenían que hacer el análisis de una serie de funciones que modelaban ciertas relaciones de las dimensiones de la caja y el área y el volumen así como el costo de materiales y de producción de la caja.

El tercer eje Visión Funcional, tiene que ver con la manera como se enfocaba el tema general. Se trataba de manejar la función como un objeto que se podía manipular y representar de diferentes maneras y, además que las expresiones simbólicas se podían interpretar de manera diferente. Ya no eran expresiones algebraicas donde se quería buscar incógnitas sino una comparación entre funciones en donde lo que se buscaba era el punto en común de las dos. las expresiones algebraicas representaban relaciones entre las funciones. Por otro lado, el eje central del curso y que daba la distribución de los temas, era el de función. Aunque esto estaba ya presente al iniciar el curso, se acentuó aun más, desaparecieron algunos temas que se salían del esquema, y se aumentaron otras funciones que no se veían.

MEDIACIÓN: UN PROCESO INNOVATIVO PARA GENERAR INNOVACIÓN

Hemos descrito hasta ahora algunas de las características del proceso vivido por un grupo de individuos en la Universidad de los Andes, que dio nacimiento a una innovación. En este apartado queremos analizar la vivencia de un grupo de investigadores en educación matemática, de los cuales algunos habían vivenciado el proceso innovativo anterior, que interactuó con un grupo de profesores de matemáticas de tres instituciones escolares del Distrito Capital, cuya experiencia innovativa era muy poca, en busca de vías nuevas para la generación de innovación en el aula.

Descripción del proceso

En un primer tiempo, el grupo trabajó en el análisis de la innovación en precálculo, el contexto en medio del cual surgió y en la descripción de los ejes centrales de su currículo. Los profesores de cada institución estudiaron los contextos de sus instituciones y describieron el currículo que se estaba realizado en los grados 10º y 11º. A raíz de las ideas que surgieron, se trazó una ruta para la interacción y para la construcción de un nuevo currículo.

Nos reunimos semanalmente una hora y media. En este espacio se presentaban reflexiones de los maestros, actividades, objetivos de aprendizaje, temas para el currículo y en general aspectos didácticos relacionados con la temática que se iba trabajando. Los investigadores y en particular la coordinadora guiaban el proceso en busca de que se posibilitara una nueva creación.

Desestabilización, transferencia y mediación

Desestabilizar, transferir y mediar fueron las acciones que el grupo de "una empresa docente" llevó a cabo para tratar de propiciar en los profesores la función creativa.

En el Diccionario de la lengua española encontramos la definición de estabilidad como "permanencia, duración en el tiempo" y desestabilidad como "Comprometer o perturbar la estabilidad". Los profesores de matemáticas de las instituciones venían funcionando de manera estable. En el grado 10 tenían: una lista de temas a enseñar, acorde con los libros de texto de las editoriales más conocidas; una manera de hacer clase, el profesor que da una teoría y los alumnos que hacen unos ejercicios; y, y unas ideas organizadas acerca de su función en el aula y la de sus estudiantes. Al estudiar con ellos la innovación original, analizar los contextos didácticos y sociales de las instituciones y determinar una serie de acuerdos acerca del currículo para 10, se preparó el terreno para iniciar la primera parte de toda innovación, la desestabilización. Se buscó perturbar la estabilidad de cada profesor. La problemática para los profesores consistía en que debían apropiarse de conceptos y estrategias impuestas por otros, para modificar su práctica.

La selección de los temas fue el primer elemento desestabilizador. Al centrar el currículo en el estudio de la función lineal, cuadrática, exponencial y logarítmica, los profesores perdían la posibilidad de utilizar los textos comunes. Había que buscar en diferentes fuentes.

Otros elementos fueron los ejes de la innovación original, que se pusieron como articuladores del currículo. Para ellos no había significado para todas las palabras y sobre todo no sabían como crear situaciones didácticas que tuvieron en cuenta esos ejes.

Transferencia es acción y efecto de transferir según el Diccionario de La Lengua Española. En el caso que nos ocupa, lo que se busca transferir son unas herramientas, unos conceptos y un saber hacer. la reflexión realizada durante la innovación original generó una serie de conceptos y teorías sustentadas en estudios de investigadores internacionales, que podían ser transferidos en el sentido que lo define Riberos. Se inicia un proceso de comprensión y adecuación a su medio, de los conceptos tratados.

La mediación es vista como la estrategia para estabilizar lo desestabilizado. La interacción durante las reuniones semanales, pretendía ayudar a los maestros a encontrar una nueva estabilidad y una nueva desetabilización. Los tres procesos estuvieron presentes a lo largo del año.

BIBLIOGRAFÍA

Aguilar J. F. (2000). Ponencia presentada en el encuentro de innovaciones. Bogotá: IDEP.

Bion

Bustamante G., (2000). *Ensayos sobre educación en Colombia*. Bogotá: Sociedad Colombiana de Pedagogía (SOCOLPE).

Gardié Omar (1996). Investigación e Innovación educativa bajo un enfoque creativo. En *Encuentro entre investigadores e innovadores en educación. Procesos Pedagógicos alrededor de los Proyectos Institucionales*. Bogotá: CAB. Convenio Andrés Bello.

Gómez P. et al. (199?). *Situaciones problemáticas de precálculo*. Bogotá: "una empresa docente".

Gómez y Carulla C. (199?). *Efectos en el diseño curricular*.

Real Academia Española (1992). *Diccionario de la Lengua Española*. Madrid: Real Academia Española.

Restrepo Bernardo (1996). La Colaboración Entre Investigadores E Innovadores, Clave Para Potenciar El Desarrollo y La Productividad De la Innovación. En *Encuentro entre investigadores e innovadores en educación. Procesos Pedagógicos alrededor de los Proyectos Institucionales*. Bogotá: CAB. Convenio Andrés Bello.

Riberos, E. (2000). Ponencia presentada durante el encuentro de saberes. En *Memorias del encuentro Teoría y Práctica en educación matemática. Encuentro de saberes en precálculo y tecnología*. Bogotá: "una empresa docente".

Segura D. et al. (1999). *La construcción de la confianza. Una experiencia en proyectos de aula*. Colección Polémica Educativa. Bogotá: Escuela Pedagógica Experimental.

Whittaker J. O. (1980). La psicología social en el mundo de hoy. México: Editorial Trillas.