Rutas pedagógicas de las matemáticas escolares. Una mirada a la práctica del profesor

Reporte final

Contrato N° 21 del 28 de agosto de 2001
firmado entre la Universidad de los Andes y el Instituto para la Investigación Educativa y el Desarrollo Pedagógico, IDEP

Luisa Andrade, Patricia Perry, Felipe Fernández y Edgar Guacaneme
"una empresa docente"
Universidad de los Andes
Bogotá, noviembre de 2002

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
APARTADO AÉREO 4976
BOGOTÁ - COLOMBIA
TELÉFONOS: 3394949 - 3520466 EXT. 2717 FAX: 3520466 EXT. 2709
LANDRADE@UNIANDES.EDU.CO

Tabla de contenido

Introducción

En el período comprendido entre finales de septiembre de 2001 y octubre de 2002, "una empresa docente" de la Universidad de los Andes adelantó el proyecto de investigación "Rutas pedagógicas de las matemáticas escolares. Una mirada a la práctica del profesor" con el propósito de acopiar información que contribuyera a lograr descripciones de la práctica del profesor de matemáticas en instituciones de educación de básica secundaria de Bogotá. Tales descripciones, por la gran y variada cantidad de aspectos que consideran— pueden ayudar a conocer y comprender cómo suceden la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en tanto prácticas socioculturales.

Se recogió información relativa a la práctica del profesor de matemáticas, de dos maneras: por un lado se aplicó un cuestionario a un grupo de sesenta y tres profesores y por otro lado, para seis profesores[1], representantes de cinco colegios, se observaron directamente cuatro o cinco de sus clases en un determinado curso de uno de los grados de sexto a noveno, con lo cual se concretaron cinco estudios de caso. Se recogió información relativa a los estudiantes, desde la perspectiva de ellos, aplicándoles un cuestionario.

Este documento contiene el reporte final del proyecto. Los capítulos a continuación introducen el estudio y presentan la conceptualización construida para mirar la práctica del profesor de matemáticas, el marco metodológico del trabajo realizado, las descripciones y discusiones elaboradas para cada uno de los cinco casos tratados en el proyecto, la visión de la enseñanza proveniente de los casos, los análisis de las respuestas a los dos cuestionarios aplicados y la visión de la enseñanza y el aprendizaje derivada de allí y unas consideraciones finales.

Come anexos se adjuntan las versiones finales de los cuestionarios del profesor y del estudiante, el formato de registro elaborado, el documento de pautas para el diligenciamiento de este formato, los reportes estadísticos producidos luego de procesadas las respuestas a estos cuestionarios y los guiones de las entrevistas realizadas con cada profesor.

1. Uno de los cursos en el que se observaron clases es atendido por dos profesoras.

Agradecimientos

Queremos en primer lugar agradecer al numeroso grupo de profesores de matemáticas de colegios de Bogotá que respondieron el cuestionario del profesor, su disposición a dedicar el tiempo necesario para cumplir con esta tarea, que en muchos casos implicó más de una sesión. Incluimos aquí a los profesores que nos ayudaron con la prueba piloto, respondiendo el cuestionario y haciendo comentarios. La colaboración de todos fue indispensable para recoger la información requerida con el fin de dar cuenta de la caracterización que aquí se presenta. Además hacemos extensivos estos agradecimientos a las directivas de los colegios respectivos que accedieron a que los profesores contaran con ese tiempo.

En particular, expresamos nuestros más sinceros agradecimientos a los seis profesores que colaboraron más estrechamente con nosotros y que permitieron pacientemente que sus clases se vieran perturbadas por nuestra presencia en ellas. Su actitud generosa posibilitó que este estudio pudiera llevarse a cabo. Sus comentarios y aportes fueron invaluables para contribuir a la mejor comprensión y a la ampliación de la caracterización construida. También, reconocemos el valioso apoyo de las directivas de estas instituciones al aceptar la participación cercana de los profesores.

Agradecemos a los estudiantes de estos profesores por su dedicación, esfuerzo y honestidad al contestar el cuestionario del estudiante.

A Cristina Gómez por su guía y luces en el desarrollo del estudio, pero principalmente por las ideas en el análisis y para la escritura de los documentos finales.

A nuestras colaboradoras Carmenza Moreno, Marivel Acosta y Rubiela Nomezqui por su empeño, iniciativa y colaboración efectiva en la coordinación de las actividades, la digitación de los datos de los cuestionarios y en su análisis. A Wilson Moreno por su apoyo y eficiencia con la filmación de las clases.

Finalmente queremos agradecer al Instituto para la Investigación Educativa y el Desarrollo Pedagógico, IDEP, por el apoyo financiero a este proyecto.

Presentación

Justificación del estudio

En Colombia es claro que el problema de la deficiente calidad de la formación matemática de los estudiantes en el nivel escolar, persiste y es grave, sin importar las definiciones de "calidad" y de "formación matemática" que se acojan (Gómez, Perry, Valero, Castro y Agudelo, 1998, p. 105; Perry, Valero, Castro, Gómez y Agudelo, 1998).

Aunque la deficiente calidad de la formación matemática de los estudiantes está involucrada en una problemática compleja que compromete visiones, decisiones, acciones y prácticas de los actores en diferentes niveles del sistema educativo (Perry, Valero, Castro, Gómez y Agudelo, 1998, pp. 13-15), en la construcción de rutas pedagógicas es sin duda el profesor de matemáticas el actor principal. El profesor es quien de manera más natural, legítima y directa tiene la autonomía y las oportunidades para buscar e implementar alternativas de solución que propendan por unos resultados más efectivos de su quehacer profesional. El profesor con su conocimiento, sus creencias, sus hábitos de pensamiento y de acción, sus intereses y valores, etc., crea, gestiona y evalúa las situaciones de enseñanza que propician un determinado ambiente de aprendizaje en el que los estudiantes llevan a cabo unas determinadas tareas y se involucran en una serie de actividades a través de las que se va construyendo su conocimiento de las matemáticas lo mismo que su visión acerca de lo que es hacer matemáticas. Amaya (1997, p. 45) señala el papel preponderante de la acción del profesor[2] en los resultados que se obtienen en los estudiantes:

> *La calidad de la educación que reciben los jóvenes en la escuela tiene una íntima relación con la acción del maestro, ya que es él quien propone y orienta las mediaciones con el conocimiento de los distintos saberes, con la formación ético-social del ciudadano, con las posibilidades y los retos de la creatividad y la invención en todos los campos.*

En relación con los reiterados esfuerzos de reforma educativa emprendidos con el propósito de mejorar los resultados de aprendizaje en los estudiantes, Osterman y Kottkamp (1993, p. 2) señalan que la forma como se ha abordado el cambio educativo es deficiente por cuanto se ha centrado en imponer cambios, desde fuera, a aspectos particulares que parecen no estar funcionado adecuadamente —e.g., los libros de texto, el currículo, la cantidad de tiempo de estudio, etc.— cuando lo que se requiere es el cambio de las personas implicadas en las situaciones para que las situaciones mismas cambien. En consonancia con la idea de esos autores, en el contexto de la reforma educativa que se está llevando a cabo en nuestro país se exige una participación renovada y activa de todos los docentes, sin la que sería imposible lograr una relación de articulación entre las implicaciones de la descentralización curricular y los lineamientos generales propuestos por el Ministerio de Educación Nacional.

Centrar la atención en el profesor como uno de los responsables directos de la calidad de la educación de los estudiantes, implica necesariamente examinar su práctica cualquiera sea el significado que se dé a este concepto. Aun considerando las diferencias entre los varios significados y las diversas restricciones de contexto que en la literatura se le hayan podido asignar, la práctica del profesor en ejercicio alude a las acciones y, en general, a la actividad que el profesor realiza tendientes a, y relacionadas con, la enseñanza y el aprendizaje de los estudiantes. Según Perry, Andrade, Fernández y de Meza (2000,

2. Aunque la educadora se refiere a la educación en general, sus palabras se pueden aplicar sin mayor problema al caso de la educación matemática.

p. 10) la práctica del profesor en ejercicio incluye una variedad de acciones relativas a la enseñanza de las matemáticas propiamente dicha, como son el diseño y desarrollo curricular, la evaluación y diagnóstico del aprendizaje de los estudiantes, la realización de proyectos de indagación e innovación como medios para comprender y mejorar su práctica, etc.; pero también abarca acciones diversas que hacen parte de la carga laboral del profesor como son la atención a los padres de familia, la participación en actividades institucionales, la participación en actividades del grupo de profesores, y acciones como la interacción y cualificación profesional.

RP 2

En este estudio a pesar de que tomaremos como foco principal el salón de clase, somos conscientes de que es imperativo dar cuenta de otros aspectos de la práctica que también hacen parte de las rutas pedagógicas y que son de importancia en la medida en que inciden en la problemática y pueden dar luces sobre los caminos a seguir en busca de introducir cambios. Consideramos entonces necesario conocer información acerca del tipo y desarrollo de las actividades en las que los profesores participan dentro de su labor en la institución, que hacen parte de su práctica y que aunque algunas no estén directamente relacionadas con sus clases, sí determinan e influyen su actuar en ellas y por consiguiente inciden en lo que allí pasa.

RP (3)

Con el fin de poder comparar lo que sucede en el aula en términos de las acciones que el profesor realiza, con las caracterizaciones que de la práctica tradicional se han hecho, es indispensable observar las clases de los profesores desde esta perspectiva, y construir de manera descriptiva una caracterización propia de nuestro medio. Esto posibilita, así mismo, obtener información acerca de la práctica, distinta de la conocida a través de los estudios aludidos, que no obstante haber sido confirmada de manera informal en muchas de nuestras instituciones educativas, es primordial develar de forma más sistemática. En particular, se requiere aportar a la claridad y precisión de lo que se denomina enseñanza tradicional de las matemáticas en nuestra comunidad, ya que es usual que los profesores no reconozcan su práctica como tradicional y más bien cuando pueden compararla con casos de prácticas innovadoras, identifican similitudes con ellas. Es posible que esto también tenga que ver con el hecho de que en los últimos años se han promovido procesos de innovación en el aula y en consecuencia hay prácticas a medio camino entre lo que se denomina tradicional y lo innovador.

Justificación de la investigación

Conocer en nuestra realidad la práctica del profesor de matemáticas y tener una idea más certera de ella contribuye en la planeación de la formación de profesores y determina los aspectos a enfatizar en ella. Brown, Cooney y Jones (1990, citados en Nickson, 1992) anotan que la investigación interpretativa puede proveer una comprensión más profunda de los procesos del profesor y en consecuencia puede proporcionar una base para plantear programas de formación de docentes. En particular, esta información es vital para el grupo proponente que desde hace varios años ha estado comprometido con la formación de profesores de matemáticas en ejercicio como medio para incidir, indirectamente y a largo plazo, en la calidad de las matemáticas escolares del sistema educativo del que hace parte.

RP

De manera similar, ante las numerosas reformas y propuestas innovativas para la práctica y frente a las exigencias de la reforma educativa de 1994 en Colombia, es imprescindible acrecentar el conocimiento de la comunidad acerca de lo que constituye la práctica docente actual del profesor de matemáticas. Es indiscutible que los nuevos planteamientos deben provenir del estudio y contrastación de la forma como los profesores han venido haciendo y suponiendo las cosas en nuestro medio, de la identificación de características que nos puedan ser propias y que sitúen la problemática en el contexto social y cultural que vivimos, que indiquen cuál es el cambio que hay que hacer.

Problema de estudio

Este estudio atiende a la necesidad y el interés de contar con descripciones de la práctica del profesor de matemáticas en instituciones de educación de básica secundaria de Bogotá. Dichas descripciones provienen de un proceso formal y sistemático de indagación en el que se abarcaron diversos aspectos del objeto de estudio, la enseñanza de las matemáticas.

En el contexto amplio de la institución, nos interesaba conocer detalles acerca de las actividades primordiales en las que los profesores se involucran como parte de su carga laboral. Esta información incluyó cuáles son dichas actividades y qué características esenciales definen cómo se llevan a cabo.

En el contexto del salón de clase, nos interesaba conocer las acciones que de manera más predominante realiza el profesor allí, describir el contenido matemático abordado y su didáctica, los rasgos más característicos del discurso que se da en la interacción entre los integrantes del grupo, la relación del profesor y los estudiantes con la autoridad sobre el conocimiento matemático que se pone en juego.

Podemos concretar el problema de estudio a través de algunas hipótesis que hemos establecido:

Hipótesis

A.- La actividad principal del profesor es "dictar clase". Esto incluye asistir a un aula en la que se reune sólo con los alumnos del curso, con un propósito específico y unos planes —no demasiado elaborados— acerca de lo que quiere que ocurra en el salón para lograr el propósito. Incluye también el desarrollo de los planes y/o modificación de ellos con base en la información que arroje la interacción entre el profesor y los alumnos en el momento mismo de la clase y la importancia que el profesor dé a dicha información. Los planes están en su cabeza (no los ha escrito) y de una a otra clase, son muy similares en lo que respecta a la secuencia de actividades a través de las que se realiza la clase; se diferencian principalmente en términos del contenido matemático particular que se trata. La secuencia de actividades consiste en: revisar las respuestas de los estudiantes a tareas asignadas en la clase anterior (en ocasiones lo que se revisa es si el estudiante hizo o no la tarea) y aclarar dudas o errores que se vislumbren en la revisión; continuar con la presentación del tema matemático que se está tratando, para lo cual el profesor expone a través de ejemplos la teoría que considera necesaria para que los estudiantes entiendan; luego proponer ejercicios de aplicación del tema tratado; y finalmente hacer algún tipo de comprobación para explorar si los estudiantes aprendieron el tema.

B.- Otra actividad primordial en la que se involucra el profesor en la institución es la asistencia a las reuniones de área. Dicha actividad se da en forma sistemática porque en la programación y la carga laboral del profesor hay un espacio destinado para tal efecto. Sin embargo, en la mayoría de los casos tales reuniones no tienen un propósito académico claro que guíe el curso de su desarrollo a través del año lectivo; tampoco hay definidas unas tareas propias del profesor que puedan centrar el trabajo en tales reuniones. Hay quizás algunas excepciones: la planeación de los programas a desarrollar en los diferentes cursos, al comienzo del año; la identificación de logros e indicadores de logros para la evaluación de sus alumnos. Ese espacio de reunión se utiliza, en el mejor de los casos, para tratar asuntos relativos a lo que sucede en los cursos; de resto, se tratan asuntos administrativos u organizativos de la institución.

C.- Hay otras actividades varias, algunas de las cuales están programadas y otras no, en las que el profesor empeña su esfuerzo y gasta el resto del tiempo de su jornada laboral. Estas actividades son la revisión y calificación de trabajos de los estudiantes; la dirección de grupo, la participación en reuniones generales de profesores, la organización y gestión de diversos tipos de actividades institucionales que se realizan con los estudiantes, la atención a padres de familia. La mayoría de estas actividades implican de parte del profesor un trabajo de preparación y de participación en el desarrollo de la actividad misma.

D.- Con respecto a su cualificación profesional, el profesor se involucra en actividades de capacitación y desarrollo profesional en las que la institución tiene poco que ver en el sentido de que no promueve dichas acciones, no las apoya asignando tiempo de la jornada laboral para que ocurran y sólo en contadas ocasiones les da apoyo económico. En particular, entendiendo que la realización sistemática de actividades encaminadas a preparar de manera cuidadosa sus clases (e.g., la elección o diseño de tareas para sus alumnos y la identificación de puntos claves sobre los cuales estar pendiente durante la implementación) y a revisar los resultados obtenidos al implementar los planes, genera una actividad de desarrollo profesional, se puede decir que tal actividad no ocupa un lugar preponderante en el quehacer docente del profesor en la institución.

E.- Hablar en forma asertiva es la acción del profesor que más predomina en la clase; hablar para exponer, ilustrar, aclarar los contenidos matemáticos que se tratan, para dar instrucciones relativas a la metodología de trabajo, para enunciar las tareas que propone a sus estudiantes, para hacer énfasis y recordar acerca de puntos que considera importantes. Las preguntas que formula oralmente a todo el grupo suelen ser muy generales e imprecisas porque no incluyen información que haga parte del contexto de la tarea o del asunto acerca del que se está hablando. Escucha sobre todo las ideas de los estudiantes cuando ellas parecen coincidir con las suyas o coinciden con lo correcto o lo esperado. Cuando hay un intercambio oral en el que participan uno o más alumnos, con frecuencia es el profesor quien lo coordina, le da dirección y decide cuándo terminarlo; por lo general, no propicia oportunidades para que un estudiante exprese a todo el grupo un argumento construido por una secuencia de varias ideas. Escribir en el tablero es también una acción predominante para el profesor, pero se limita al uso de símbolos matemáticos o de representaciones gráficas.

F.- El profesor es principalmente quien determina en la clase lo que es correcto o razonable desde el punto de vista de las matemáticas, usando predominantemente como criterios la puesta en acción de los algoritmos que ha presentado previamente sin una conexión clara y estrecha con los conceptos asociados. En relación con los errores típicos de los estudiantes que tienen que ver con el conocimiento matemático, usualmente el profesor es quien los detecta, los señala e identifica y enfatiza lo que es correcto repitiendo enunciados generales que expresan la verdad que está contraviniendo el error.

Descripción general del estudio

La actividad de construcción del marco conceptual para mirar la práctica del profesor de matemáticas fue simultánea a todas las demás actividades del estudio. Este marco surgió inicialmente a partir de la literatura revisada y de nuestra experiencia como profesores de matemáticas y en el trabajo con profesores. No obstante, a lo largo de todo el proceso y a medida que se recogía la información y se consultaba nueva literatura el marco se fue modificando; aún en la fase de análisis, los asuntos definidos como categorías fueron refinándose.

Antes de realizar las observaciones de clase se llevó a cabo la elaboración del cuestionario del profesor. Para esta actividad se concretó previamente una primera caracterización de la práctica que permitió formular las preguntas en coherencia con ella. Las primeras versiones del cuestionario fueron puestas a prueba con varios profesores, cuyos aportes contribuyeron a producir una versión final más afinada. A continuación el cuestionario fue aplicado a sesenta y tres profesores de matemáticas de básica secundaria, de distintas instituciones de Bogotá, tanto privadas como distritales. Las respuestas a este cuestionario fueron la base para avanzar en la construcción del marco conceptual y para la definición de nuevas categorías más específicas a las matemáticas.

63 profes encuestados

Luego se comenzó la elaboración del cuestionario del estudiante, actividad que se desarrolló en paralelo con las observaciones de clase. Este cuestionario apunta recoger información sobre algunas de las acciones y tareas implicadas en el proceso de aprendizaje del estudiante, desde la perspectiva del propio estudiante. La base de este trabajo fueron tanto las respuestas de los profesores al cuestionario del profesor y las observaciones de clase, como el cuestionario utilizado en el estudio TIMSS. También en este caso se hizo una prueba piloto con varios estudiantes cuyos comentarios contribuyeron a mejorar la versión definitiva. Un total de sesenta y cinco estudiantes de los profesores observados, respondieron el cuestionario.

Para cada uno de los cinco profesores participantes se realizaron al menos cuatro observaciones de clase, las cuales se grabaron en audio y video y contaron con la asistencia de dos investigadores que tomaron notas de campo. Una vez finalizadas las observaciones se llevó a cabo una entrevista semiestructurada con el profesor, que se desarrolló de acuerdo a un guión predefinido pero también involucró preguntas de los investigadores que surgieron en el momento. Estos profesores leyeron y comentaron los documentos que los investigadores elaboraron sobre cada uno de ellos, de manera que fue posible no sólo corroborar lo dicho sino también profundizarlo y ampliarlo.

El análisis de contenido efectuado permitió organizar y clasificar la información en las categorías establecidas, afinar tales categorías y por lo tanto, precisar el marco conceptual y llegar así a las interpretaciones y comparaciones pertinentes.

Marco conceptual construido para mirar la práctica docente del profesor de matemáticas

En la primera sección de este capítulo presentamos ideas generales relativas a la práctica del profesor de matemáticas con el fin de contextualizar este estudio; en la siguiente sección damos cuenta del marco conceptual al que finalmente se llegó para describir la práctica del profesor, circunscrita a su actividad en el aula, que se percibió en las clases observadas.

La práctica del profesor de matemáticas

Vemos la práctica docente del profesor de matemáticas como el conjunto de las actividades que realiza con el propósito de contribuir a la formación matemática de los estudiantes en una institución educativa. Incluye variedad de actividades relacionadas con la enseñanza en el salón de clase y fuera de él. En primer lugar, están las labores del profesor directamente vinculadas a la clase, que diversos autores (Schön, 1983; Mason, 1996) ubican en tres momentos en el tiempo y que conforman un ciclo donde el último y primer momento llegan a confundirse: antes de la clase (v.g., la preparación de clase, la preparación de evaluaciones, la reflexión sobre lo sucedido), durante la clase (v.g., la organización de los estudiantes, el manejo del orden y la disciplina, las tareas propuestas, los cambios o desviaciones en la trayectoria trazada, el discurso y la comunicación que propicia, etc.), y después de la clase (v.g., la revisión de tareas, la reflexión sobre lo sucedido).

En segundo lugar, están otras labores que aunque ligadas más indirectamente a la enseñanza también la determinan, en concordancia con la conceptualización de la práctica de Llinares (2000), para quien la práctica no está inscrita únicamente en lo que sucede en el aula. Son éstas: las actividades de desarrollo profesional, formal o no, que el profesor realiza, la participación en las reuniones de área y departamento y en general en las actividades que la institución programa, la organización de actividades relativas a las matemáticas por fuera de la clase, etc., prácticas que hacen parte de lo que Perry, Valero, Castro, Gómez y Agudelo (1998), llaman la cultura profesional de los profesores de matemáticas de una institución.

Estas labores que el profesor debe desempeñar de manera comprometida y relacionada, implica atender a una gran diversidad de asuntos, tomar decisiones que tienen repercusiones en sus estudiantes, y actuar bajo unas condiciones altamente restrictivas. Sanders y McCutcheon (1984) destacan cuatro características de la práctica de enseñar que ayudan a ver la complejidad inmersa en este fenómeno y que se describen a continuación. Como primera medida, la enseñanza involucra un trabajo activo, intencional y cargado de valores; el trabajo es activo no sólo físicamente, sino también emocional y mentalmente, dada la cantidad de cuestiones, acciones y decisiones que es necesario atacar permanentemente; es intencional porque hay que actuar con metas establecidas; los valores y visiones del profesor permean su trabajo. En segunda instancia, hay imperativos de tiempo para la enseñanza que la moldean y restringen. Como tercera medida, hay otros factores presentes en la situación de enseñar que también influyen en las resultados, lo que hace imposible prever totalmente los efectos de la enseñanza. Por último, las consecuencias del actuar del profesor dependen igualmente de cómo los estudiantes perciben y construyen ese actuar.

Marco

Acerca de la caracterización de la práctica del profesor en este estudio

En el intento de caracterizar entonces un fenómeno tan complejo como la enseñanza de las matemáticas, objetivo principal de este estudio, resulta imprescindible construir un marco conceptual descriptivo que permita mirar y comprender cómo hace el profesor lo que hace. Se ve como inevitable que al asumir la perspectiva que provea este marco se dejarán de percibir aspectos que afectan y determinan tal fenómeno.

En este estudio se elaboró una caracterización de la práctica docente del profesor de matemáticas con base en la descripción que los profesores mismos —obtenida mediante el cuestionario que contestaron— hacen de las actividades y acciones visibles que llevan a cabo en los distintos momentos de su quehacer. Se construyó adicionalmente una caracterización de la práctica centrada en el aula a partir tanto de observaciones de clase como de lo que los profesores dijeron, en donde se intenta detallar más algunos aspectos como el del contenido del discurso matemático, con el ánimo de aportar a una comprensión más profunda de la enseñanza. Ambas caracterizaciones son descriptivas en principio, no pretenden ser evaluativas y por tanto se elaboraron lo más desprendidas de juicios que nos fue posible. Si en alguna instancia se hacen comentarios evaluativos sobre las prácticas encontradas, es en una fase de discusión posterior a la de caracterización, en donde los investigadores presentamos nuestras interpretaciones y visiones acerca de la información recolectada.

Con base en las respuestas al cuestionario del estudiante se hizo también una descripción de algunos aspectos del trabajo del estudiante desde su perspectiva. Las categorías definidas para el cuestionario del profesor y del estudiante se describen en el capítulo 'Marco metodológico' y se pueden consultar en los cuestionarios que hemos adjuntado (ver Anexos Nº 1 y Nº 2). Enseguida presentamos el marco conceptual que emergió a lo largo del estudio con el cual se caracterizó la enseñanza en la clase.

Luego de un proceso cíclico de definición y afinamiento de categorías fundamentado en nuestra experiencia, en la literatura revisada, en el análisis de la información recogida y en nuestra reflexión, se establecieron cuatro grandes categorías estrechamente relacionadas que separan los asuntos relativos a la práctica del profesor con el fin de simplificar la mirada a dicha práctica. No obstante que es posible ver algunos de estos asuntos como apropiados para hablar de la enseñanza de asignaturas diferentes, se intentó considerarlos siempre desde una perspectiva vinculada con las matemáticas que se abordan. Somos conscientes de que esta clasificación difiere en la forma, de propuestas recientes de autores como Sfard (2000a, 2000b, 2001), Cobb y Yackel (1996), Yackel y Cobb (1996), Yackel (2000), Gravemeijer, Cobb, Bowers y Whitenack (2000) donde el foco primordial para mirar la clase es el discurso y en particular el discurso matemático que allí se da. Sin importar las distintas concepciones que tales autores le asignan al discurso en la cultura de la clase, todos consideran el intercambio social como la principal circunstancia donde el estudiante puede construir o modificar significados matemáticos (Cobb, 2000). Esto refleja el cambio que ha habido en la Educación Matemática acerca de la visión sobre el aprendizaje de las matemáticas, el cual ha pasado de ser visto como una actividad individual a verse como una actividad inherentemente social y cultural (van Oers, 1996, (Schoenfeld, 1987, Bauersfeld, Krummheuer y Voigt, 1988, citados en Yackel, 2000; Brown, Collins y Duguid, 1989, Greeno, 1991, Sfard, 1994, citados en Gravemeijer et al., 2000; Cobb y y Yackel, 1996). Creemos que la distinción de nuestra conceptualización atiende solamente a la forma de abordar y relatar, pues en los asuntos descritos están contemplados entre otros, los elementos involucrados en las varias concepciones de discurso, tales como las normas que lo regulan, el contenido de éste, las prácticas matemáticas que se ponen en juego, las reglas matemáticas que se emplean, la autoridad que se reconoce frente al conocimiento matemático, etc. Damos cuenta así en nuestra caracterización del contenido del discurso matemático, de las tareas matemáticas que se proponen y del tipo de conocimiento matemático que se moviliza (categoría 'Visión panorámica de los temas tratados'), del discurso no matemático (categoría 'Interacción a través de la cual...'), de la manera en que se da la comunicación en el salón de clase (categoría 'Interacción a través de la cual...'), de la autoridad que se reconoce y lo que se considera válido frente al trabajo de los estudiantes (categoría 'Valoración de las producciones de los estudiantes'). Además describimos el esquema usual para las clases en términos de las actividades que se llevan a cabo.

A continuación hacemos una descripción que precisa, dimensiona y delimita tales asuntos: los relacionados con el esquema general de las clases, los relativos al contenido matemático mismo que se trató en las clases, los que tienen que ver con la interacción que se da en la clase, y los que hacen referencia a lo que se aprueba o desaprueba en clase.

Esquema de las clases

Aunque la enseñanza es un fenómeno dinámico que cada día puede tener muchas variaciones, y de acuerdo con Schön (1983) es un fenómeno complejo, incierto, inestable, singular y que contiene una carga de valor, las investigaciones que al respecto se han hecho muestran que existen tendencias marcadas en la forma en que los profesores desarrollan sus labores.

En particular, esto es aun más cierto con respecto a las clases de un mismo profesor, en donde es habitual que como reflejo de su conocimiento, visiones y creencias, el profesor reproduzca actuaciones visibles, tales como las acciones que realiza, el tipo de actividades que propone, la manera en que se dirige a los estudiantes, etc. Gregg (1995) describe un patrón de comportamiento del profesor común a muchas de las clases observadas en su estudio, con el que coinciden las descripciones de una clase tradicional hechas por otros autores (Romberg y Kaput, 1999, Fey, 1981, Stein, Smith, Henningsen y Silver, 2000, citados en Gregg, 1995). El profesor empieza por revisar con todo el grupo de alumnos las respuestas a las tareas previas, luego explica y escribe el tema a tratar, introduce material nuevo, trabaja con algunos ejemplos para ilustrar lo que ha explicado y asigna trabajo para ser realizado individualmente en clase o como trabajo para la casa. En el caso de Colombia, Perry et al. (1998) reportan que según los mismos profesores participantes en un estudio realizado, sus actividades típicas en una hora de clase son actividades a través de las cuales se desarrolla la clase, y pocas son de introducción o de cierre de la sesión. Estos profesores aluden con frecuencia aun menor a actividades centradas en los estudiantes.

En nuestro estudio las actividades llevadas a cabo en clase por los profesores observados, se miraron entonces con el propósito de detectar regularidades en su ocurrencia, tanto con respecto a la forma y a su propósito, como a la repetición en el tiempo, que permitieran aproximarnos al esquema usual de cada profesor para hacer su clase. Este esquema debería dar cuenta de actividades generales en las que caben no sólo las relativas al trabajo con matemáticas como las tareas que el profesor propone para la enseñanza de un contenido particular, sino también las que no son específicas de las matemáticas pero que se relacionan indirectamente, como los espacios dedicados a informar sobre fechas, evaluaciones, notas, actividades extraclase, etc., las actividades de motivación, las dinámicas de integración, que en conjunto con las anteriores componen la clase. Así mismo se debe incluir el orden en que de las actividades se llevan a cabo, las intenciones que se perciben para cada actividad y el relato de cómo es la participación de los integrantes en la clase.

Visión panorámica de los temas abordados

Con el fin de que la caracterización construida sobre la enseñanza de las matemáticas atienda a la especificidad de esta asignatura y de que no se quede en descripciones que podrían dar cuenta de la enseñanza en cualquier área, se tomaron en cuenta diversos aspectos relativos al contenido matemático y su didáctica que ayudan en este sentido, y que consideramos que imprimen un sello que distingue esta caracterización de otras hechas en términos más de los comportamientos del profesor. Además, aun cuando estos aspectos se refieren a temas concretos, podrían en alguna medida describir lo que pasa en clase para la enseñanza de casi todos los temas matemáticos.

Aunque en principio se consideró establecer una lista de los temas tratados, identificar el tipo de tareas matemáticas puntuales que promueve el profesor en clase y esbozar el camino que utiliza para la enseñanza del tema, luego de un escrutinio más detallado de lo observado, se percibieron aspectos igualmente relevantes, algunos de los cuales podían adicionalmente contribuir a determinar si el conocimiento que se enfatiza en la clase es de tipo conceptual o procedimental de acuerdo a la organización propuesta por Rico (1995, 1997) de los hechos, conceptos y estructuras conceptuales como constituyentes del conocimiento conceptual, caracterizado tanto por la cantidad de unidades de información como por la riqueza de relaciones entre tales unidades; y de las destrezas, razonamientos y estrategias como el conocimiento procedimental que hace referencia a los modos de ejecución ordenada de una tarea. Diversos estudios, entre ellos el de Gregg (1995), han encontrado que en muchos casos las visiones de los profesores con respecto a la naturaleza de las matemáticas y del aprendizaje, que están implícitas en sus actuaciones, se reflejan en que las matemáticas en la escuela sean presentadas como una colección de hechos y procedimientos, situación que se refuerza según el mismo autor, porque las preguntas que el profesor hace son casi siempre directas y sobre hechos, de tal forma que las respuestas pueden ser producidas de memoria.

Se concibió por lo tanto hablar aquí de las ideas matemáticas que son abordadas en clase y de las tareas que el profesor propone para su enseñanza, concebidas estas últimas como el conjunto de acciones e intervenciones orales, escritas o gestuales que se dan en torno a cada idea. La expresión 'idea matemática' se considera en matemáticas, o en su didáctica, de manera rigurosa como el conjunto de conceptos y relaciones involucrados en una conceptualización compleja de algún tópico puntual matemático que debería ser el centro de la clase de matemáticas. En este documento la expresión 'idea matemática' se refiere simplemente a la mención que se hace en clase de tópicos matemáticos concretos, de algunos de sus aspectos, de enunciados o de procedimientos. Esta salvedad tiene origen en el tratamiento parcial de los temas matemáticos y en el énfasis en los símbolos que es común percibir en las escolaridad, que imposibilita muchas veces ver esto como ideas completas. Además, el ajustar así el nivel de las expectativas con respecto a las matemáticas enseñadas tiene en cuenta los contextos y circunstancias que conforman la realidad escolar y que por variadas razones afectan lo que pasa en el aula, y en particular inciden en la forma y el contenido matemático que termina siendo el objeto de discusión en el aula.

También es indispensable dar cuenta en esta visión panorámica, de los términos, nociones y conceptos que se mencionan y de las definiciones que para éstos se trabajan; de los enunciados matemáticos que se esgrimen y de los que se tratan como resultados; de las notaciones y convenciones utilizadas; de las representaciones empleadas; de los énfasis que se hacen y acerca de qué. Así mismo se vio como requisito describir los algoritmos y procedimientos que se ilustran y se usan en clase, incluyendo los pasos que los componen.

Se espera igualmente detectar el empleo de las representaciones, como herramientas externas para el trabajo con las ideas matemáticas en concordancia con lo estipulado por Hersh (1986, citado en Yackel, 2000): "El trabajo matemático es trabajo con ideas. Los símbolos son usados como ayudas tal y como las notas musicales son usadas como ayudas de la música". Evidenciar también si hay énfasis en algún sistema de representación y cuál es su significado; cómo es el tratamiento de la resolución de problemas; los tipos de razonamientos que se ejercitan en clase; las cuestiones que se tratan de forma arbitraria siendo de naturaleza necesaria según la división que se puede establecer para el currículo de matemáticas presentada en Hewitt (2002a, 2002b, 2000c), donde distingue los nombres y convenciones —asuntos arbitrarios adoptados por una comunidad que son imposibles de descubrir y por tanto deben ser comunicados— de las propiedades y relaciones entre objetos matemáticos, que los estudiantes pueden explorar y llegar a descubrir; las ideas abordadas que en un sentido estricto no son matemáticas; si para referenciar temas ya vistos se recurre a las ideas matemáticas involucradas o a anécdotas; si hay uso de materiales didácticos o tecnológicos.

Interacción a través de la cual discurren la enseñanza y el aprendizaje

Desde tiempo atrás se ha observado que con frecuencia en las clases de matemáticas, impera una forma de instrucción conocida como 'instrucción centrada en el profesor' donde el profesor es la figura central y es el que domina la instrucción (ver Gregg, 1995; Cuban, 1984, Romberg y Carpenter, 1986 y Richards, 1991, citados en Gregg, 1995). Es natural esperar que en este ambiente el tipo de interacción que se da sea alrededor del profesor y sea él la persona que habla principalmente y determina cómo se usa el tiempo en la clase; además no es de extrañar entonces que el trabajo que prevalece en tales entornos sea con toda la clase más que el trabajo individual o en grupos pequeños, y que los estudiantes se sienten en filas en frente del profesor. Perry et al. (1998) confirman estos resultados al indicar que en el desarrollo de la clase predomina una interacción controlada por el profesor a través de actividades como la presentación del contenido, la resolución de ejercicios individuales propuestos por el profesor y la resolución de dudas de los estudiantes por parte del profesor.

Se quiere en consecuencia de acuerdo a los distintos escenarios a través de los cuales transcurre la clase, identificados con las grandes actividades que allí se llevan a cabo —los cuales han sido establecidos en la categoría 'Esquema de las clases' y en los que el intercambio que ocurre se manifiesta de diferentes maneras—, dar cuenta de la interacción entre profesor y estudiantes, y entre los estudiantes mismos. Además, se busca describir cómo es esa interacción, es decir si tiene forma de preguntas y respuestas cortas, dirigidas, puntuales, que inducen a explorar; si se exigen explicaciones y justificaciones; cuál es la razón que motiva el intercambio o quién lo inicia; sobre qué versa éste, pues es frecuente que en muchos salones de clase tal y como Hewitt (2002c) lo describe, la conversación gire principalmente alrededor de cuestiones de control y de administración, de enunciados descriptivos o de la enumeración de las acciones realizadas, pero muy poco en torno a lo que guía las acciones y a las matemáticas necesarias, que es lo que se requiere como base de la interacción; cuáles son las intenciones del intercambio.

Se persigue también detectar si la interacción se da en forma de diálogo en el que participan en igualdad de condiciones los estudiantes y el profesor, si hay oportunidad para que ambas partes respondan, si el tiempo dedicado a las intervenciones es similar en ambos casos, si todas las intervenciones son tenidas en cuenta, si las intervenciones dentro de cierto lapso de tiempo se refieren a un mismo objeto de discusión, si se cuenta con la participación de varios de los estudiantes, si los aportes de ellos se dan por iniciativa propia. O si como lo señala Gregg (1995) las interacciones en el aula se estructuran a medida que la información se transfiere del profesor al estudiante, y asume así el docente un papel de proveedor de la información, es decir, es el encargado de presentar, o de suministrar en conjunto con el libro de texto, el contenido necesario para el trabajo de los estudiantes en clase.

Valoración de las producciones de los estudiantes

Es usual que mediante algunos de los comportamientos del profesor en el salón de clase se pongan de presente sus visiones acerca de por ejemplo, lo que es importante aprender, lo que considera una respuesta apropiada, su papel con respecto al conocimiento y al discurso que se manejan en el aula, quién o qué tiene autoridad sobre el conocimiento.

Es importante entonces a través de describir los comportamiento observados del profesor hablar de estos aspectos de la práctica docente que marcan definitivamente trayectorias posibles para la enseñanza. Se debe dar cuenta en primer lugar de las respuestas y producciones de los estudiantes que el profesor considera y acepta como correctas y válidas, y lo que tiene en cuenta de ellas: si estas respuestas deben incluir los procedimientos o pasos realizados, si es necesario explicarlas, si deben argumentarse, si se requiere que estén presentadas en una notación y con convenciones especiales; también es relevante determinar las respuestas que se consideran como una solución o estrategia diferente, lo que es objeto de énfasis por parte del profesor ligado con las respuestas, lo que el estudiante considera apropiado como respuesta y si parece conocer lo que el profesor espera de sus producciones. Para Ernest (1986) otro de los criterios que pueden usarse para diferenciar la enseñanza, se refiere a la forma de considerar el cuerpo de conocimientos matemáticos que se abordan en la enseñanza como hechos y dominios de tareas centradas en el éxito y la respuesta correcta, o como conocimientos significativos, comprendidos y unificados. Gregg (1995) argumenta que con frecuencia para el profesor los estudiantes comprenden cuando pueden seguir instrucciones procedimentales para obtener las respuestas correctas, lo que es corroborado por Cooney (1994) al apuntar que los profesores no pueden conceptualizar distintos niveles de respuestas de los estudiantes a menos que sea decir hasta qué grado siguen un procedimiento conocido, y por consiguiente los análisis de estas respuestas están basados en una orientación procedimental de las tareas.

En segundo lugar, es indispensable identificar quién es la autoridad en la clase con respecto al conocimiento que se trata, es decir quién es para los estudiantes el encargado de aprobar o desaprobar su trabajo, si el libro de texto juega un papel preponderante en este sentido, si existe la posibilidad de que sean los mismos estudiantes quienes en algunas situaciones manifiestan esta aprobación. De acuerdo a lo encontrado por Gregg (1995), el profesor y el libro de texto son vistos como las autoridades en la clase.

De otra parte, hay que describir cómo y en qué momentos se juzgan las producciones de los estudiantes; es decir, determinar por medio de qué tipo de acciones, gestos o frases se manifiestan los juicios al respecto, si en las expresiones verbales se emplean palabras directas que califican explícitamente el trabajo o si son indirectas, si se escriben o son orales; si en lugar de ver los errores como respuestas inadecuadas, éstas se ven como oportunidades para cuestionar a los estudiantes y como lo sugiere Hewitt (2002c) para trabajar en la consciencia del estudiante; si en los juicios que se hacen se indica o aborda el problema detrás del error o solamente se señala éste, pues es común que la evaluación de las respuestas de los estudiantes por parte del profesor se limite a mirar si ellas son correctas o no, tal y como Gregg (1995) lo manifiesta. Para Hewitt (2002c) una respuesta de este tipo involucra solamente la consciencia del profesor con respecto a las matemáticas y no tiene en cuenta la consciencia relacionada con la enseñanza y el aprendizaje y la consciencia del estudiante; el profesor estaría así fallando en su trabajo y el estudiante estaría abandonado a su suerte para tratar de trabajar en el por qué de su error.

Igualmente se quiere reconocer si los estudiantes parecen conocer e interpretar las formas definidas y usadas en la cultura de la clase para indicar aprobación o desaprobación de su trabajo.

Marco metodológico

A continuación se describen los aspectos relativos a la metodología que se empleó para el trabajo en el estudio.

Perspectiva teórica en la que se inscribe el estudio

De una tradición de investigación cualitativa principalmente etnográfica usada en la investigación antropológica[1] y en otras ciencias sociales desde comienzos del siglo pasado, en décadas recientes se han derivado investigaciones en educación que han dado un viraje no sólo a los objetos de estudio sino también a la perspectiva y supuestos de la misma investigación.

Las ideas de la etnografía provienen de una corriente filosófica conocida como *interpretativismo*, que plantea que toda actividad humana es fundamentalmente una experiencia social que pretende darle sentido al mundo desde la perspectiva de los participantes, que la investigación relevante sobre la vida humana es un intento de reconstruir esa experiencia, y que los métodos para investigar la experiencia deben ser moldeados o aproximados por ella. Estas ideas se han utilizado en consecuencia como base para diversas formas de investigación educativa que las han acomodado a la situación de cada estudio. Han surgido así estudios de investigación y evaluación que emplean múltiples métodos e incluyen combinaciones de datos cualitativos y cuantitativos que se complementan. Denzin y Lincoln (1998) señalan que un estudio cualitativo como conjunto de prácticas interpretativas no privilegia una sola metodología, es multimetódico en sus focos, e involucra una aproximación interpretativa y naturalista al fenómeno en cuestión. Esto significa que quienes hacen investigación cualitativa estudian las cosas en su entorno natural, con la intención de darle sentido o interpretar los fenómenos en términos de los significados que las personas le dan. De acuerdo con Eisenhart (1988) aunque muchos investigadores prefieren los métodos descriptivos cuando se buscan características relevantes y para valorar el impacto de distintos tratamiento, los métodos estadísticos y experimentales son preferidos porque sugieren tendencias, la relación de características y la generabilidad de tratamientos exitosos.

Para los autores mencionados y otros como Quinn (2002), Emerson, Fretz y Shaw (1995), los estudios cualitativos tienen entonces diversas fuentes de información e involucran la recolección y el estudio de una variedad de materiales empíricos: la observación directa, las entrevistas de profundización, la interacción, el análisis de documentos escritos como las guías y evaluaciones propuestas a los estudiantes por parte de los profesores, las preparaciones de clase suministradas, la experiencia personal, la introspectiva, historia de la vida, la historia y textos visuales que describen momentos rutinarios y problemáticos y los significados de la vida de los individuos. También son usados en la recolección de datos, cuestionarios, etc., que permiten contestar preguntas que no pueden ser respondidas únicamente con los métodos etnográficos y que contribuyen a la triangulación (Eisenhart, 1988). En concordancia, en las investigaciones cualitativas se emplea un amplio rango de métodos interconectados, con la esperanza siempre de poder entender mejor el asunto en cuestión. La observación consiste de descripciones detalladas de las actividades de las personas, conductas, acciones, interacciones personales y procesos organizacionales que son parte de la experiencia humana observable, citas textuales de las personas, comentarios sobre sus experiencias y opiniones.

El alto volumen de datos que se recoge, se organiza en descripciones narrativas legibles y con ilación, que a su vez se clasifican en temas principales, categorías y ejemplos

1. Donde para Pelto y Pelto (1974, citados en Eisenhart, 1988) se enfatizan los sistemas sociales integrados en los que viven los humanos, la necesidad de contacto cercano y de involucrarse en un grupo.

ilustrativos extraídos de un análisis de contenido previo que se hace. Los temas, patrones, comprensiones e iluminaciones que emergen del trabajo de campo y del subsecuente análisis son los frutos de la indagación cualitativa. Los procedimientos de análisis usualmente incluyen definir unidades significativas (para el investigador o los participantes) de material y compararlas con otras unidades. Agrupar las unidades en categorías, compararlas entre sí y formular relaciones entre ellas. Las categorías y las relaciones son consideradas y reconsideradas a la luz del material que ya se tiene y del nuevo que se va recogiendo (Denzin, 1978, Goetz y LeCompte, 1984, Spradley, 1979, 1980, citados en Eisenhart, 1988). La recolección de datos y el análisis proceden juntos. La recolección de nuevo material puede generar nuevas preguntas de investigación y lleva a iluminaciones que se incorporan o a veces redireccionan radicalmente el estudio, otra recolección de datos y el análisis (Eisenhart, 1988).

El investigador, sus habilidades, experiencia e integridad juega un papel del que depende la calidad de los datos cualitativos y las interpretaciones. La observación rigurosa involucra más que estar presente y mirar alrededor, las entrevistas requieren más que sólo hacer preguntas, y el análisis de contenido implica más que sólo leer para ver que hay ahí. Para entender la actividad humana el investigador debe hacer un compromiso serio de entrar en los mundos de los individuos (Denzin y Lincoln, 1998) y de involucrarse en un proceso interpretativo, pero también debe ser capaz de dar un paso atrás de la escena de actividad inmediata y de reflexionar qué está ocurriendo desde su perspectiva y experiencia (Eisenhart, 1988).

Generar resultados creíbles y útiles de un estudio cualitativo a través de la observación, entrevistas, y análisis de contenido requiere disciplina, conocimiento, entrenamiento, práctica, creatividad y trabajo duro (Quinn, 2002). El producto de esta labor es una creación compleja, densa, reflexiva, como un *collage* que representa las imágenes del investigador, sus comprensiones e interpretaciones del fenómeno bajo análisis; conecta las partes al todo, resaltando las relaciones relevantes que operan en la situación y el mundo social estudiado (Weinstein y Weinstein, 1991, citados en Denzin y Lincoln, 1998).

Otra posibilidad para capturar y reportar los resultados cualitativos es ilustrada por la indagación de Patton (1997a, citado en Quinn, 2002), quien construye paradigmas alternativos ideales y típicos para comparar y contrastar lo que aprende. Este tipo de contrastes polares puede algunas veces establecer una dialéctica hegeliana de tesis y antítesis que lleva a una nueva síntesis. En investigación cualitativa tales contrastes temáticos emanan de y están basados en el trabajo de campo (Quinn, 2002).

Atendiendo a toda la descripción anterior sobre la investigación cualitativa, este estudio se ubica como un estudio cualitativo, consistente con la orientación interpretativista.

Participantes

Para las observaciones de clase se contó con la colaboración de seis profesores de básica secundaria provenientes de cinco colegios distritales, cinco mujeres y un hombre, tres de grado 6°, uno de grado 7°, uno de 8° y uno de 9°. Como ya se mencionó en uno de estos cursos la asignatura está a cargo de dos profesoras. En cada colegio se observaron entre cuatro y seis clases seguidas en un determinado curso; así, se observaron clases de aritmética en los grados 6° y 7°, álgebra en los grados 8° y 9°, y geometría en el grado 6°. Con esto se concretaron cinco estudios de caso. La selección de estos profesores se hizo entre ocho colegios que declararon estar interesados en participar en el estudio, luego de recibir una carta de invitación que se envió a 51 instituciones distritales y privadas que no hubieran trabajado en proyectos anteriores con "una empresa docente". Después de realizar entrevistas con los profesores, coordinadores de área y rectores de estos ocho colegios, donde se proporcionó más información sobre el estudio, mantuvieron su interés de participar, solamente las cinco instituciones con las que finalmente se trabajó.

Para responder el cuestionario del profesor las instituciones fueron invitadas telefónicamente a participar con el diligenciamiento del cuestionario. Se invitaron cerca de 30 colegios de los cuales las directivas de 17 instituciones accedieron a que sus profesores cooperaran en el estudio de esta forma. Colaboraron así sesenta y tres profesores de matemáticas de básica secundaria pertenecientes a 17 colegios distintos, tanto distritales como privados. Los profesores que fueron observados también contestaron el cuestionario y están incluidos en estos sesenta y tres. El 54% de los profesores encuestados fueron mujeres y las edades de más o menos la mitad de ellos oscilan entre los 30 y los 49 años. También más o menos la mitad de estos profesores ha hecho una Licenciatura en Matemáticas y el 24% sólo ha cursado estudios hasta terminar el bachillerato. El 38% ha hecho una especialización, el 11% tiene una maestría y ninguno ha hecho estudios de doctorado. Para la prueba piloto del cuestionario cinco profesores adicionales contactados por "una empresa docente" contestaron el cuestionario.

De los cursos en los que se hizo la observación de clase, se tomaron trece estudiantes al azar que contestaron el cuestionario del estudiante, para un total de sesenta y cinco estudiantes. También otros cinco estudiantes cooperaron en la prueba piloto de este cuestionario.

De parte de "una empresa docente" en el estudio participaron cuatro investigadores que tuvieron a su cargo todo el trabajo. Cada investigador se encargó de uno de los profesores observados y por tanto de un colegio; el quinto se tomó entre dos investigadores. A las observaciones de clase siempre asistió además del investigador encargado, otro de los investigadores.

Tanto a los profesores participantes de estos colegios como a varios de los coordinadores de área de los mismos, se les informó sobre algunos aspectos relacionados con la ética de investigación en el estudio. Los profesores firmaron una carta en que manifestaron su acuerdo con el hecho de que sus clases fueran observadas y descritas, y de que las respuestas y aportes proporcionados por ellos con motivo de su participación en el trabajo propuesto durante el proyecto, fueran usados como citas textuales en los reportes escritos por los investigadores. Se hizo además la aclaración de que en dichos reportes no se mencionarían los nombres de las personas, y aunque habría un reconocimiento general a su colaboración en el proyecto, no sería como autores o coautores del proyecto mismo ni de los documentos que al respecto se produjeran.

Fuentes de datos e instrumentos de recolección de información

La información recogida para la caracterización de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas provino de cuatro fuentes principales: el cuestionario del profesor, las observaciones de clase, las entrevistas realizadas con los profesores observados y el cuestionario del estudiante.

Los cuestionarios del profesor y del estudiante se utilizaron como instrumentos para obtener información directa de los profesores y estudiantes. El cuestionario del profesor (ver Apéndice N° 1) está compuesto de cuatro secciones tituladas 'Clase' que agrupa quince preguntas relativas a la clase y las actividades y tareas que allí se llevan a cabo, 'Preparación de la clase' (dieciocho preguntas), 'Planeación anual institucional' (cinco preguntas) e 'Información general' que consta de doce preguntas sobre datos generales del profesor con respecto a su práctica, las cuales permiten adicionalmente caracterizar el grupo de profesores encuestados como una muestra. Siete preguntas de este cuestionario son abiertas en el sentido de que para ellas no se sugieren respuestas posibles y los encuestados podían expresarse libremente, escribiendo un texto. Las otras preguntas plantean una serie de posibilidades, a cada una de las cuales se espera que el profesor responda, y para ello debe elegir una opción de varias planteadas (e.g., 'nunca', 'a veces', 'siempre o casi siempre'); en algunos casos, con respecto a tales posibilidades, se consideran dos o tres aspectos, con sus respectivas opciones.

El cuestionario del estudiante (ver Apéndice N° 2) consta de dos partes, una sobre su opinión de sí mismo y con respecto al trabajo matemático llamada 'Información general' con seis preguntas, y otra sobre lo que pasa y hace él en clase, denominada 'Clase', con veinticinco preguntas. Este cuestionario contiene en total treinta y un preguntas, una de las cuales es abierta. Las treinta preguntas restantes del cuestionario son preguntas de escogencia múltiple que plantean una serie de posibilidades, a cada una de las cuales se espera que el estudiante responda, y para ello debe elegir una opción de varias indicadas (e.g., 'nunca', 'a veces', 'casi siempre', 'siempre', o en otras situaciones 'si' o 'no') o indicar el tiempo en minutos con un número.

Versiones preliminares de ambos cuestionarios se pusieron a prueba con cuatro o más profesores y estudiantes respectivamente; estas pruebas permitieron detectar problemas de claridad, inconsistencia y relevancia de las preguntas y llevaron a modificaciones para producir las versiones definitivas.

En la clase de geometría, se hizo una prueba piloto de la observación con el fin de probar un instrumento de registro que se había diseñado. Del cuestionario del profesor se tomaron tres de las preguntas consignadas en la sección de la clase, que aluden a las actividades que el profesor propone y desarrolla en clase (e.g., revisión de tareas, exposición de temas, realización de guías o talleres, realización de evaluaciones), a las tareas matemáticas que se proponen y que el profesor y los estudiantes realizan, y a las interpelaciones que el profesor y los estudiantes hacen. Se construyó así un formato (ver Apéndice N° 3) para cada una de las tres categorías que agrupan los aspectos mencionados y que se presentan en forma de tablas para registrar la información pertinente de cada clase. Además se elaboró un documento (ver Apéndice N° 4) que establece pautas comunes para el diligenciamiento de los formatos con el fin de contribuir a facilitar y clarificar el registro de la información. En este documento se precisa el significado del tipo de acciones, tareas e interpelaciones definidas en los formatos mencionados y denominadas con palabras que se usan en múltiples situaciones educativas, cuyo uso se consideró necesario unificar así como el contexto dentro del cual se utilizan. Este fue un intento por definir un lenguaje común entre los investigadores que observaban las clases, por establecer una interpretación compartida de lo que hace el profesor y pasa en la clase, por dar ideas más concretas de las circunstancias que rodean una acción o tarea que ocurre en la clase y por suministrar pistas de qué registrar al respecto, no solamente si sucede la acción sino también por ejemplo, cuál es y qué se hace en torno a ella. En la prueba piloto se vio la dificultad de registrar la información en los formatos durante la observación misma y se decidió entonces que los observadores tomaran notas de campo acerca de lo que sucediera en la clase sin restricciones dadas por unos aspectos específicos. Los formatos se emplearon posteriormente para clasificar y organizar la información de cada clase, a partir de la transcripción de las grabaciones de audio y de las notas de campo.

En las clases observadas se recolectó información por diferentes medios: dos grabaciones de audio obtenidas mediante grabadoras ubicadas en lugares distintos de la clase, una grabación en video y las notas de campo que los observadores tomaron durante la observación de la clase, en las que intentaron registrar lo que pasó allí enfatizando acciones, gestos visibles e intervenciones de los participantes.

Con los profesores cuyas clases fueron observadas se llevaron a cabo entrevistas posteriores a la última observación, de dos o más horas de duración, realizadas en las instalaciones de la Universidad y algunas, en las sedes de los propios colegios. Fueron entrevistas semiestructuradas pues se habían definido guiones específicos (ver Apéndice N° 7) para cada profesor, los cuales se entregaron al comienzo a los profesores y se siguieron durante la entrevista, pero en los que se intercalaron otras preguntas surgidas en el momento; además los profesores se extendieron en sus respuestas tanto como quisieron y hablaron también de otros asuntos relacionados o que consideraron relevantes. Aunque para el diseño de estos guiones se consideraron los asuntos o categorías ya definidas, y algunas preguntas atendieron a esto, otras apuntaron a aspectos particulares sobre las actividades y comportamientos de los profesores y estudiantes en las clases observadas. También al definir los guiones se tuvo en cuenta que se quería confirmar algunas de las interpretaciones hechas, ahondar en la información recolectada y recolectar nueva información pertinente para el propósito del estudio. Las entrevistas se grabaron en audio y posteriormente se transcribieron.

Con base en las transcripciones de audio de las clases, los investigadores que asistieron a cada clase, elaboraron un documento sobre ésta, que se complementó con información proveniente de las notas de campo y del video. Este documento se utilizó como fuente primera de datos. El documento consiste en primera instancia de una narración, que obviamente no es exhaustiva —nunca podrá serlo— pero que pretende registrar de la manera más completa y objetiva posible lo que pasó en la clase; se da cuenta allí de las intervenciones, diálogos y palabras utilizadas tanto por el profesor como por los estudiantes, y se trata de describir no sólo las acciones y gestos de los participantes sino también lo que se escribe en el tablero y en los cuadernos y papeles de los estudiantes. Este documento fue revisado por los investigadores encargados del colegio, pero también por los demás investigadores.

Esquema metodológico

La dinámica de trabajo de los investigadores participantes en el estudio combinó el trabajo individual con el trabajo en grupo en reuniones periódicas. Cada semana se llevaron a cabo reuniones con la asistencia de los investigadores donde se compartía el trabajo individual realizado, se tomaban decisiones al respecto de asuntos operativos y académicos, se establecían lineamientos generales de trabajo, se definían nuevos criterios y categorías y se reelaboraban los ya considerados, se asignaban tareas y compromisos individuales y para todo el grupo. De cada reunión se llevó una bitácora que intentaba dar cuenta de lo sucedido allí, con el mayor detalle posible.

mantener la bitácora disponible pa consult pública.

Los investigadores desempeñaron un papel individual importante y creativo. El trabajo individual y en parejas consistía en propuestas de categorías, en lecturas críticas de documentos y de literatura, en la elaboración de documentos con transcripciones, descripciones, análisis, clasificaciones e interpretaciones sobre las clases observadas en el colegio a su cargo. Dicho trabajo se compartía con anterioridad a las reuniones, a través de la lectura por parte de los otros investigadores de los documentos producidos, quienes los comentaban críticamente y eran así modificados por los autores.

Las categorías y su evolución

La primera aproximación a las categorías

Para empezar el trabajo en torno a la elaboración del marco conceptual se consultaron diversas fuentes bibliográficas, especialmente autores que han estudiado la práctica docente. Al mismo tiempo se hizo una primera aproximación, fundamentada en la experiencia de los investigadores, a establecer cuáles podían ser a grandes rasgos los aspectos relevantes a mirar en la práctica docente del profesor de matemáticas. Como resultado de las ideas provenientes de estas dos acciones y a partir de la idea general de lo que se buscaba observar, surgió una lista inicial de actividades docentes clasificadas de acuerdo a los momentos en que usualmente éstas son realizadas por el profesor.

Se consideraron dos momentos distintos pero intrínsecamente relacionados entre sí, que han sido identificados por autores como Jackson (1975, citado en Llinares, 2000), Schön (1983) y Mason (1996): las fases preactiva y activa que corresponden a las labores del profesor en la preparación de clase y en la clase misma respectivamente. También para Schoenfeld (1996) en el estudio de las prácticas de los profesores, es indispensable explorar estas áreas o fases de su labor; propone este autor indagar sobre asuntos que conciernen la naturaleza de dichas prácticas, tales como la 'imagen' que el profesor tiene de la clase antes de realizarla, la cual incluye mucho más que lo que contiene un plan de clase escrito o un parcelador; captura, además de la estructura planeada para la clase, la secuencia de tareas, las formas de interacción previstas en cuanto a la flexibilidad que se puede o no tener, cómo debe desarrollarse la discusión, los planes de acción con sus correspondientes propósitos, así como también las secuencias de acción que se dan en el aula, que comúnmente pueden agruparse en unidades o segmentos pequeños, a su vez contenidos en unidades más grandes y que se organizan de acuerdo a la intencionalidad de las acciones. De manera similar, Llinares (2000) destaca dos grupos de tareas, entre otros, que configuran el trabajo de enseñar del profesor y que pueden verse a nivel de una clase particular: tareas que hacen parte de una fase de planificación y organización de las matemáticas tales como diseñar, elegir o modificar los problemas que propone a sus estudiantes, determinar la organización del contenido y de los problemas durante la clase, definir los problemas y las cuestiones de evaluación; y tareas que hacen parte de la gestión del proceso de enseñanza aprendizaje para un clase determinada, tanto específicas del contenido matemático y relativas a la interacción entre los estudiantes y el conocimiento matemático que subyace al problema propuesto, como de carácter general ejemplificadas por la coordinación de los distintos segmentos de la clase, del trabajo en grupo, de la discusión en todo grupo, la interpretación y respuesta a las ideas de los estudiantes, la construcción y uso de representaciones, la introducción de material didáctico o de entornos informáticos. En el mismo sentido, en NCTM (1991) se destacan la elección o diseño de tareas que el profesor propone a sus estudiantes, la orquestación del discurso de la clase y la creación de ambientes de aprendizaje, como áreas centrales del trabajo del profesor que dan forma a lo que pasa en la clase de matemáticas. Se establecieron por lo tanto dos grandes categorías para aglutinar estos dos tipos de actividades, denominadas como 'Clase' y 'Preparación de clase'.

Igualmente, en esta lista se tuvieron en cuenta actividades que se llevan a cabo en otros momentos, que se agruparon bajo la categoría llamada 'Actividades extraclase', que también según Llinares (2000) hacen parte de una conceptualización amplia de la práctica del profesor —ya que ésta no está inscrita únicamente en lo que sucede en el aula— como por ejemplo, las actividades que en la institución se programan para los profesores y otras actividades que con frecuencia realizan por fuera de la clase pero que están vinculadas a ella, como tutorías, reuniones de área y departamento, actividades de formación, etc. De las actividades normalmente programadas en la mayoría de las instituciones se quiso destacar las reuniones de área y lo que pasa allí, dado que en ocasiones son un espacio para la reflexión sobre las clases que puede tener incidencia en ellas. Por otro lado, se contemplaron actividades que pueden constituir un grupo aparte de las mencionadas por la intención común que tienen, pero que no necesariamente se ejecutan o abordan en momentos distintos de los ya especificados; son las actividades relativas a la evaluación de los estudiantes y del proceso de enseñanza en sí mismo, y las actividades que el profesor efectúa con referencia a las tareas para desarrollar en la casa que propone a sus estudiantes, las cuales se consideraron bajo dos categorías independientes: 'Tareas para la casa' y 'Evaluación'. Bajo otra categoría se incluyeron, por último, actividades concernientes a la formación y el desarrollo profesional del profesor.

Al revisar las actividades incluidas en la lista para la categoría 'Clase', se vio que eran básicamente actividades que se traducen en acciones visibles del profesor y que en consecuencia son observables externamente por otra persona, obviamente con las limitaciones que impone la imposibilidad de estar presente en toda la jornada laboral del profesor. Estas acciones apuntaban a elementos diferentes de la clase: las primeras eran relativas a las actividades a través de las cuales el profesor desarrolla la clase; algunas aludían a la organización de los estudiantes; otras tenían que ver con los recursos disponibles para el trabajo en clase, y unas últimas eran relativas a la asignación de tareas para la casa. Aun así, estas acciones no se vieron en un sentido restringido de la acción por la acción sino que se intentó mirarlas en compañía de su intencionalidad —manifiesta o no—, del cumplimiento de ésta, de los eventos que las inician y finalizan, del conocimiento matemático que se pone en juego en la clase a través de ellas, etc. Había, además, en esa lista unos pocos aspectos que aludían al discurso o la socialización de las ideas en clase, destacada por muchos autores como el principal espacio de aprendizaje para los estudiantes. Nickson (1992) la señala como el proceso universal mediante el cual se forman los significados compartidos que son aceptados y que constituyen la llamada cultura de la clase, en términos de conocimiento, creencias y valores, y normas que gobiernan sus interacciones en ella.

Se decidió por consiguiente, considerar dos subcategorías para la categoría 'Clase', una que diera cuenta de las acciones y otra, del discurso. Aunque inicialmente el término 'discurso' se había pensado en una concepción amplia sugerida por Sfard (2000a, 2001) que abarca cualquier forma de comunicación, bien sea escrita, oral, gestual, e incluso mental de una persona consigo misma al leer o reflexionar, o por otros autores como Ponte, Boavida, Graça y Abrantes (1997)[2], en ese momento de la discusión y por razón de facilitar la obtención de la información, dicho término se tomó significando solamente las intervenciones orales o escritas, y los gestos, del profesor y de los estudiantes, posibles de observar o registrar. Este uso del término 'discurso' está más en concordancia con el que se hace en los Estándares del NCTM (1989, 1991, 2000), referido a las formas de representar, pensar, hablar, escribir, llegar a acuerdos y disentir que los profesores y los estudiantes usan, es decir, a las formas de intercambiar ideas, y también a lo que conllevan las ideas mismas. Se pensó en considerar también aquí, información con respecto a la relación de poder o autoridad con el conocimiento que se reconoce en clase: lo que se considera actividad matemática legítima y lo que cuenta como respuesta correcta, elementos presentes en la cultura de la clase y resaltados por Sfard (2000a), Carpenter y Lehrer (1999), Ponte, Boavida, Graça y Abrantes (1997), NCTM (1991), como valores fundamentales involucrados en el discurso que allí se maneja. Se optó por considerar otra subcategoría independiente dentro de la categoría 'Clase' para poder discriminar detalles sobre cómo se da esa relación en la clase, cómo se construyen las reglas que gobiernan la interacción y el comportamiento, si éstas son conocidas por todos los participantes o no, cuáles son los valores que se transmiten —explícita o implícitamente— y se perpetúan mediante las prácticas cotidianas en las clases, quién y qué es lo que se acepta cómo respuesta adecuada en clase.

Para organizar las intervenciones del profesor se sugirió utilizar la clasificación propuesta por Jaworski (1994) en un estudio que caracteriza una aproximación investigativa de la enseñanza, y mirar si dichas intervenciones son asertivas, instruccionales, relativas a los estudiantes mismos, retadoras. Sin embargo, a medida que se recogían los datos se detectó que la identificación en estos tipos no era fácil y que por lo menos los dos últimos parecían no existir en las clases. Además, el objetivo de nuestro estudio no necesariamente estaba ligado a una aproximación investigativa de la enseñanza, y no era probable que esa fuera la situación que se encontrara en las instituciones.

Qué distancia hay entre la investigación de la Quintana y la de los R.P.

En la categoría 'Evaluación' las actividades definidas puntualizaban acciones diversas. Unas se referían a la utilización de instrumentos y recursos para hacer la evaluación, mientras que otras aludían al proceso mismo de análisis de resultados que el profesor

2. El quehacer principal que estos autores cobijan con el término 'discurso' hace referencia al modo en que los participantes en clase negocian y atribuyen significados a las ideas matemáticas.

lleva a cabo, que interesa mirar con detenimiento pues es común que en nuestro medio éste se reduce a verificar si la respuesta es correcta o no.

En la Figura N° 1 se presenta la lista elaborada hasta ese momento.

Actividades extraclase
- Reuniones generales
- Actividades institucionales relacionadas con las matemáticas (e.g., olimpíadas, clubes)
- Actividades institucionales esporádicas (e.g., ferias, bazares)
- Actividades institucionales permanentes (e.g., tiendas, bancos)
- Dirección de grupo
- Atención a padres de familia

Reuniones de área

No está al día con la presentación discursiva de los pp. anteriores

Desarrollo profesional
- Jornadas pedagógicas
- Asistencia a cursos, seminarios o talleres
- Participación en programas de formación
- Participación en especializaciones o maestrí
- Asistencia a eventos de Matemáticas o Educ
- Reuniones de discusión con colegas
- Dictar cursos o charlas para sus colegas
- Lectura de documentos relativos a su profesión
- Escritura de documentos
- Observación de sí mismo u observación por otros
- Participación en proyectos de innovación o investigación

Preparación de clase
- Repaso del tema en el libro de texto
- Determinación de una agenda para la sesión de clase
- Lectura de documentos
- Elaboración de guías para los estudiantes
- Reuniones con colegas
- Consideración de lo sucedido en la clase previa
- Utilización de recursos tecnológicos

Clase

Acciones
- Revisión de tareas
- Escritura de máximas
- Explicación del profesor
- Escritura en el tablero
- Presentación de ejemplos de ejercicios y su resolución
- Presentación con acetatos
- Organización en grupos
- Asignación de trabajo individual para la clase
- Asignación de trabajo a grupos para la clase
- Uso de guías u hojas de trabajo
- Asignación de tareas para la casa

Discurso
- Discusiones en grupos
- Discusiones en toda la clase
- Interpelaciones al estudiante en preguntas generales
- Interpelaciones al estudiante en preguntas puntuales

Figura N° 1.

Autoridad
Hace juicios en clase
Utiliza los errores para proponer nuevas tareas
Permite que los estudiantes determinen la validez de las respuestas
Acepta respuestas distintas

Tareas para la casa

Evaluación
Usa forma escrita, oral, observaciones de clase, entrevistas
Qué mira o tiene en cuenta
Avisa a los estudiantes
Permite la consulta del libro de texto, apuntes
Permite el uso de calculadora
Indaga después con los estudiantes
Utiliza la autoevaluación de los estudiantes
Cómo define indicadores de logro
Cómo presenta la información de la evaluación a los estudiantes
Cómo realiza las actividades de recuperación de logros
Hace seguimiento a lo que pasa con sus propuestas

Enfoques
Enfoque privilegiado en clase para la aritmética
Enfoque privilegiado en clase para el álgebra
Reconocimiento de patrones y generalización
Estudio y reconocimiento de estructuras
Estudio de relaciones entre cantidades
Resolución de problemas
Enfoque privilegiado en clase para la geometría
Estudio del espacio
Visualización de conceptos y procesos matemáticos
Modelización de la teoría matemática

Figura N° 1.

El estudio detenido de las categorías elaboradas, permitió afinarlas y complementarlas con algunas nuevas actividades dentro de las categorías establecidas, como la participación de los profesores en proyectos de investigación o innovación dentro del desarrollo profesional; la definición de indicadores de logro, la presentación de la información de la evaluación a los estudiantes, la realización de las actividades de recuperación de logros y el seguimiento que hace a lo que pasa con sus propuestas, dentro de la categoría 'Evaluación'.

También se añadió una nueva categoría que respondía a la preocupación de los investigadores con respecto a la especificidad de las matemáticas que se podía reflejar en la caracterización que se construía y en la que se quería recoger aspectos más puntuales acerca de la forma en que se trata el contenido matemático que se enseña en las diferentes asignaturas. Muchos investigadores han resaltado las características particulares de la enseñanza de las matemáticas comparada con otras asignaturas[3]. Se pensó en consecuencia, dar cuenta aquí del enfoque que se privilegia al enseñar un tema o asignatura, y de los objetivos de aprendizaje. Aun sin saber si sería posible observar esto por razón de que ya no necesariamente todo se traduciría en acciones visibles del profesor, porque la observación iba a ser de sólo unas cuantas clases, y porque para la aritmética no se contaba con una propuesta que guiará la observación, se indicaron posibles enfoques para el álgebra y la geometría, que se querían determinar en las clases. Se consideraron entonces, las distintas conceptualizaciones del álgebra que el profesor puede enfatizar en su enseñanza propuestas por Usiskin (1988) y de las cuales se desprende la importancia relativa que se da a los usos de la variable: el álgebra como aritmética generalizada, el álgebra como el estudio de estructuras, el álgebra como el estudio de relaciones entre cantidades, y el álgebra como el estudio de procedimientos para resolver problemas; se contemplaron los planteamientos de Alsina, Fortuny y Pérez (1997) sobre posibles enfoques complementarios en la enseñanza de la geometría: la geometría como ciencia del espacio, la geometría como encuentro entre la teoría y los modelos matemáticos, y la geometría como el estudio de la visualización de conceptos y procedimientos.

El cuestionario del profesor

Con el fin de comenzar a formular las preguntas para el cuestionario del profesor, se estudiaron el cuestionario del profesor empleado en el Tercer Estudio Internacional de Matemáticas y Ciencia (TIMSS, 1994a) y el modelo para entender la clase propuesto por Doyle (1977) y recogido por Flores (2001) en sus documentos de trabajo. Tal modelo está compuesto por cinco componentes: la estructura de las tareas académicas, es decir cómo organiza el profesor el trabajo de los estudiantes en clase, qué tipo de tareas les asigna y cómo las secuencia, qué valor les da; la estructura social de participación que atiende a organizar los estudiantes para que realicen las tareas en grupo o individualmente, lograr y mantener la cooperación de los estudiantes en la realización de las tareas, la gestión de clase, las fuentes de información que necesitan los estudiantes para definir las tareas y para descubrir como realizarlas; los materiales de enseñanza y el uso que se hace de ellos, las demandas cognitivas que suponen y de qué manera se pueden usar para facilitar el aprendizaje; la historia de las clases como recurso para completar el trabajo académico; y el clima evaluativo, por ejemplo los juicios acerca de las ejecuciones de los estudiantes, la estructura de recompensas.

Se encontró que este modelo y el utilizado en el TIMSS (ver Schmidt, McKnight, Valverde, Houang y Wiley, 1996) para fundamentar la mirada a la práctica del profesor que en dicho estudio se hace, eran similares. Se intentó por lo tanto mirar la lista de categorías que habíamos construido desde estos modelos para enriquecerla. Se contemplaron entonces otras alternativas para agrupar las actividades ya consideradas, de acuerdo a los modelos mencionados. Se optó por elaborar una tabla sustentada por la lista construida, en que se tomaron los momentos de la labor del profesor para mirar a través de cada uno de ellos la presencia de los aspectos y actividades definidas. Surgió aquí un nuevo momento antes no considerado, que se denominó 'Planeación anual' en el que se tuvieron en cuenta actividades en las que participa el profesor para planear cosas a nivel de la institución. Fue evidente que no necesariamente las actividades estipuladas en cada celda eran excluyentes y también que pensar en el desarrollo profesional y en las actividades extraclase como parte de la tabla podía no tener sentido. Las actividades relacionadas con la evaluación se consideraron en todos los momentos y se distribuyeron en las columnas de 'Planeación anual', 'Preparación de clase' y 'Clase' según el momento en que se llevan a cabo. La tabla fue otro intento por organizar las ideas sobre los aspectos que se podrían mirar acerca de la práctica docente de los profesores de matemáticas. En la Figura N° 2 se presenta la tabla elaborada.

3. Como lo anota Sfard (2000b), para Russell (1904, citado en Sfard, 2000b) en las matemáticas 'el no saber de qué se esta hablando' es una característica única que ubica el discurso matemático aparte que cualquier otro discurso. Para la misma Sfard (2000b), esta diferencia tiene que ver con las formas en que los significados son construidos y comunicados. En matemáticas la mediación perceptual en el discurso es escasa y sólo es posible con la ayuda de lo que se conoce como substitutos simbólicos de los objetos que se consideran, mientras que en otras asignaturas la comunicación puede estar mediada perceptiblemente por los objetos mismos que están siendo discutidos.

	Planeación anual	Preparación de clase	Clase	Desarrollo profesional
Organización	participantes tiempo dedicado cuándo horarios carga laboral, cargos	quiénes participan cuándo, en dónde, cuántas horas laborales y no laborales le dedican frecuencia planeación semanal o clase a clase planeación de la organización de la clase	participantes en las actividades organización en grupos pequeños trabajo en todo el grupo trabajo individual quién lo determina	
Recursos	recursos disponibles (computadores, calculadoras, libros, materiales didácticos, etc.), cómo se definen	usa el texto, otros documentos considera el currículo inicialmente planeado, la clase anterior, las respuestas de los estudiantes, prepara o adapta guías o talleres planea el uso del texto, computadores, calculadoras, materiales didácticos	usa la tecnología para qué cuál software materiales didácticos guías o talleres libros de texto documentos de consulta	
Acciones de participantes	papel de los participantes en la planeación	consulta el texto, otros textos o documentos revisa tareas considera lo sucedido en la clase anterior	revisa tareas motiva a los alumnos expone el tema ilustra la resolución de problemas propone problemas	
Discurso	quién es la autoridad en la determinación del currículo (documentos, lineamientos, personas) autonomía del profesor	cómo usa el texto qué tiene en cuenta de él consultas en documentos de tipo histórico, matemático, didáctico	quién tiene la autoridad en la clase quién define la validez de las ideas matemáticas cómo se hace explícita las normas de clase alude a la disciplina hace preguntas, cuestiona	
Rutas	se definen los temas y la secuencia de temas se determina el enfoque al que obedece la secuencia		qué tipo de tareas propone y para qué qué temas se tratan qué representaciones se usan	

Figura Nº 2.

	Planeación anual	Preparación de clase	Clase	Desarrollo profesional
Evaluación	se planea la recuperación de logros, las condiciones para la pérdida de año, los exámenes institucionales, los exámenes de las asignaturas en fechas previstas	propósito de la evaluación, tipos de evaluación planeados, preve algo para verificar si lo que pretendió se cumplió	qué instrumentos de evaluación usa cómo los utiliza qué tiene en cuenta de las respuestas de los estudiantes	
Actividades extra	se planean actividades extra (entrega de informes, bazares, tienda, otras no relacionadas con las matemáticas)			
Objetivos	se establecen los indicadores de logro, el objetivo y razón del enfoque	define objetivos específicos de aprendizaje para la clase influencia de éstos en lo que prepara, de dónde salen	explícita los objetivos los estudiantes conocen los objetivos, cómo	

Figura N° 2.

Las columnas definidas en la tabla determinaron al principio la estructura del cuestionario; se definieron así tres secciones del cuestionario y se empezaron a formular las preguntas. A pesar de que en un comienzo no se había hablado de recoger información personal sobre los profesores mismos y su experiencia, algunas de las preguntas que al respecto se plantean en el cuestionario del profesor y del colegio del estudio TIMSS (1994a; 1994b) se vieron como relevantes para describir la muestra de los profesores que participan en el proyecto. Se definió así una nueva sección de 'Información general' en el cuestionario. Adicionalmente, para las secciones ya establecidas se seleccionaron preguntas de dichos cuestionarios, adaptadas a la realidad que se queríamos mirar. Dos preguntas acerca del desarrollo profesional de los profesores se incluyeron en la sección de información general; el cuestionario quedó en definitiva con una sección de preguntas sobre la clase, una sección sobre la preparación de clase, una sección sobre la planeación institucional y la sección de información general.

Los enfoques que se habían definido para el álgebra y la geometría a través de las aproximaciones antes presentadas, no fueron lo suficientemente convincentes ni desde el punto de vista de la facilidad para observarlos ni por razón de que se ajustaran a la realidad de lo que el profesor hace. Se decidió entonces mirar con el cuestionario la forma en que se trata el contenido matemático mediante varias preguntas que intentaran describir los contenidos que el profesor trata, el orden en que lo hace, y el tipo de tareas matemáticas que propone. Se pensó en estipular los tipos de tareas según uno de los criterios propuestos por Ernest (1989) para diferenciar la enseñanza, que se relacionan con la forma en que el profesor concibe las matemáticas[4]: sin son tareas de carácter instrumental y básicas, o más bien creativas y con fines exploratorios, pero finalmente se consideraron ideas de la categorización general de tipos de tareas que Doyle (1977, citado en Flores, 2001) presenta, la cual diferencia las tareas por las demandas cognitivas que éstas exigen: tareas de memoria que exigen memorizar o reproducir información; tareas de rutina o procedimiento que exigen la aplicación de una fórmula estándar o algoritmo; tareas de comprensión o entendimiento, en las que se espera que el estudiante transfor-

4. Ernest propuso en sus primeros trabajos, tres posibles posturas del maestro: utilitarista, platónica y constructivista. Relaciona estas posturas con conocidas concepciones extremas del aprendizaje y de la autonomía que se concede al alumno en la enseñanza que van desde el extremo platonista —alumno sumiso y complaciente que recibe pasivamente el conocimiento— al extremo constructivista —alumno autónomo que construye de manera activa el conocimiento.

me versiones de información y decida y aplique procedimientos a nuevos problemas que exigen conocer por qué y cuándo se usan; tareas de opinión que exigen establecer preferencias. De acuerdo con los señalamientos de Bishop y Goffree (1986, citados en Ponte, Boavida, Graça y Abrantes, 1997) cuando hablan de la simetría que debe existir entre las tareas que el profesor hace y las que llevan a cabo los estudiantes (e.g., el profesor debe preguntar y responder preguntas, dar razones y pedir razones, clarificar y pedir clarificaciones, describir y pedir descripciones, dar y pedir analogías, dar y pedir contraejemplos, explicar y pedir explicaciones, dar y recibir ejemplos, etc.), se vio la necesidad de identificar los participantes en cada una de tales tareas.

Igualmente en las preguntas del cuestionario se consideraron aspectos del manejo de la clase o gestión del proceso de enseñanza aprendizaje, no directamente alusivos al contenido matemático pero determinantes para la enseñanza, según las ideas sugeridas por Doyle (1986), en particular con respecto al orden de la clase[5], por Llinares (2000), como la organización de los estudiantes, y por Schoenfeld (1996) en la identificación de los segmentos de clase[6] asociados a las acciones del profesor de acuerdo con su modelo para mirar la enseñanza, antes descrito. La utilización de recursos como material didáctico o tecnología, también se tuvo en cuenta.

Así el cuestionario elaborado consta de cuatro secciones de acuerdo al contendido de las preguntas (ver Apéndice N° 1). La sección de la 'Clase' donde se concentran la mayoría de las preguntas. Estas aluden a las acciones que el profesor lleva a cabo, los recursos que utiliza y que exige, las tareas matemáticas que propone, las interpelaciones que hace, la forma en que corrige las respuestas de los estudiantes, los contenidos que aborda, las innovaciones que ha trabajado. La sección de 'Preparación de clase' cuyas preguntas se refieren a la manera en que el profesor prepara las clases, si establece objetivos específicos de aprendizaje y los hace conocer, los recursos que emplea para esa preparación, los propósitos y la forma de las evaluaciones que planea y realiza, los indicios del aprendizaje que considera. La sección de 'Planeación anual institucional' que agrupa preguntas sobre la forma y el contenido de la planeación anual institucional que se lleva a cabo en el colegio, y acerca del papel del profesor en ella. La sección de 'Información general' que abarca preguntas sobre datos personales de los profesores, sobre su educación y experiencia laboral, acerca de su desarrollo profesional permanente y de las dificultades que enfrenta en su quehacer. En cada pregunta se presentan diversas posibilidades de respuesta para las cuales hay tres opciones que indican la frecuencia con la que suceden: *nunca, a veces* y *casi siempre o siempre*. En otros casos hay adicionalmente opciones para indicar un orden con números, opciones para indicar tiempos, o simplemente las opciones para las distintas posibilidades son *si* o *no*. Las distintas posibilidades deben marcarse todas a menos que se indique lo contrario.

Evolución de las categorías hacia una clasificación de normas

Con la aplicación del cuestionario a algunos profesores fue evidente que sus respuestas daban una idea de lo que hacen en términos de las actividades que realizan o no, pero que no era posible a través de dichas respuestas hacerse una idea concreta del discurso del profesor en matemáticas y se tenía poca información acerca de las particularidades de la enseñanza en matemáticas y de su distinción entre las diferentes asignaturas consideradas: aritmética, álgebra y geometría. Los datos sobre los temas matemáticos abor-

5. El orden de la clase es definido por Doyle (1986) como la fuerza, duración y armonía de las acciones con estructura y propósito en las que se involucran los estudiantes y el profesor; no es una condición estática ni implica ausencia de acción.
6. Para Doyle (1986) es importante tener en cuenta estos segmentos de clase pues representan unidades naturales de acción organizada que posibilitan detectar cuándo ocurren cambios en el flujo de la clase, bien sea planeados o que emergen sorpresivamente.

dados y la secuencia de éstos, según se habían pensado y preguntado en el cuestionario del profesor eran poco ilustrativos.

Aun menos, se tenía la información requerida para dar cuenta del enfoque usado para la enseñanza en términos de la manera en que se aborda el contenido matemático, los conceptos, procedimientos y representaciones tratadas, las conexiones que se hacen, las definiciones propuestas, qué se hace explícito, qué se menciona brevemente, la pertinencia e intenciones de las tareas que se proponen, el conocimiento que parece ser el centro de la enseñanza, etc.

Igualmente se notó que a pesar de que la información recogida mediante el cuestionario del profesor y a través de las observaciones, que estaba ya clasificada en los formatos de registro, incluía algo sobre la aprobación del trabajo matemático de los estudiantes y por tanto, algo acerca de la autoridad y la cultura de la clase, era necesario extractar de los documentos y de las grabaciones de video, así como obtener en las entrevistas, más información al respecto que permitiera dar cuenta de la forma de aprobación que se provee en la clase, los gestos y palabras que se esgrimen, etc. Con referencia a la forma en que se organiza la clase para el trabajo, se necesitaba determinar cómo, quién y para qué se organiza de esa manera la clase, cómo y cuál es el discurso que se da en clase, quién habla y para quién dice lo que dice, cómo el profesor escoge los estudiantes que pasan al tablero, cuál es la razón de su permisividad con los estudiantes.

También se vio que de las clases emergía nueva información sobre aspectos no considerados anteriormente, que en conjunto podían suministrar una mirada más profunda y relevante de la enseñanza del profesor de matemáticas, es decir que permitiría hacer una caracterización más diciente, complementaria a lo que se diga en términos de las acciones o tareas que se llevan a cabo.

Se vio que la manera en que se dan ciertas cosas en las clases, como el comportamiento de los estudiantes y en particular de ciertos estudiantes, la interacción del profesor con los estudiantes, las preguntas que son contestadas o no por los estudiantes y la forma en que son contestadas, sugieren que puede haber por detrás normas, no necesariamente explicitadas, que regulan su funcionamiento. Es decir, que se percibían algunas reglas con las que se maneja la clase y en especial el discurso, que podrían encajar dentro de la propuesta del llamado 'contrato didáctico' de Brousseau (1993), o de las denominadas prácticas normativas que según Carpenter y Lehrer (1999) gobiernan la naturaleza de la interacción que se da en el aula y forman la base para establecer la manera en que las tareas se usan para aprender; también que podrían interpretarse dentro del marco desarrollado por Cobb y Yackel (1996; Yackel y Cobb, 1996) en sus estudios sobre la clase de matemáticas para analizar la actividad de profesores y estudiantes en el salón de clase. Estos dos últimos autores han encontrado útil hacer una distinción entre los diferentes constructos que denotan tres aspectos de la microcultura de clase: las normas sociales de clase, las normas sociomatemáticas de clase y las prácticas matemáticas de clase[7]. O bien, podrían verse como las reglas de nivel superior (metarreglas) que regulan el flujo del discurso y las reglas a nivel objeto que surgen del contenido matemático mismo, definidas por Sfard (2000a, 2001)[8] para analizar el discurso del salón de clase.

7. Las normas sociales para Cobb y Yackel están relacionadas con las creencias acerca del papel del profesor y los estudiantes, de la naturaleza de la actividad matemática escolar; por ejemplo, la necesidad de explicar y justificar las soluciones que se presenten durante la clase. Las normas sociomatemáticas aluden a lo que cuenta en clase como una solución matemática diferente, una solución sofisticada, una solución eficiente, y una solución aceptable o válida. Las prácticas matemáticas de clase se refieren a la actividad matemática misma que se da en clase comúnmente y a las concepciones que se ponen en juego.

8. Para Sfard (2000a) las metarreglas del discurso regulan el flujo del intercambio y son reglas poco explicitadas de las acciones de comunicación en el género humano que cuentan como las maneras apropiadas de conducir un tipo particular de discurso. Las reglas a nivel objeto del discurso matemático gobiernan el contenido del intercambio y son específicas a las matemáticas. Hacen parte del contenido del discurso donde también se ubican las proposiciones y demás elementos del contenido matemático.

Con el objeto de determinar la pertinencia de acoger estos marcos para el estudio, se pasó entonces a pensar qué asociaciones se podrían establecer con la información de lo que se había observado en las clases y a intentar especificar qué normas, tanto implícitas como explícitas, se percibían como reguladoras del funcionamiento de las clases y eran posibles de situar dentro de dichas clasificaciones. Se empezó a hacer así un repaso detallado de los documentos elaborados y de los videos con el fin de identificar los eventos donde podían verse normas que de alguna manera determinan lo sucedido en la clase; se rescataron comportamientos y acciones regulares del profesor y de los estudiantes que se veían como recurrentes o parecían ser habituales, y otras regularidades de las cuales emergieron nuevos aspectos a tener en cuenta, que precisamente por su continua ocurrencia se imponen como útiles a la hora de describir tales clases.

Se estableció una primera clasificación de las normas que se percibe que operan en la clase, bien sea de forma tácita o explícita, y se elaboró una propuesta de categorías de normas influidas por las ideas de estos autores, donde se clasificó la información encontrada; se diferenciaron allí normas relativas al comportamiento de los estudiantes en términos de la disciplina y del manejo que el profesor le da, de lo que se atreven o no a hacer y el momento en que lo hacen que indiscutiblemente parece estar ligado a la actividad que se desarrolla en la clase; normas relativas a la interacción entre los estudiantes y con el profesor; normas relativas a la forma en que se organizan los estudiantes para desarrollar el trabajo académico y a los recursos utilizados; el contenido del discurso en términos de lo que se dice se aprueba o se desaprueba, de lo que se considera una respuesta apropiada o no apropiada, una respuesta diferente, una respuesta eficiente, un argumento válido, qué dice o hace el profesor para aclarar dudas o para validar el trabajo de los estudiantes, etc.; normas relativas a cómo se aprueba o se desaprueba el trabajo y lo que se dice, a quién lo hace; el contenido del discurso desde el punto de vista matemático en términos de las reglas matemáticas que se utilizan y del enfoque o ruta de enseñanza para la asignatura —con base en el tema que se ha tratado en las clases observadas— que se percibe a través de los conceptos y procedimientos abordados, los no abordados, las conexiones que se hicieron y las que faltó hacer, las definiciones propuestas y las posibles deficiencias en ellas, los supuestos que se hicieron sobre el conocimiento de los estudiantes, las cosas en las que enfatizó el profesor y las que sólo mencionó rápidamente, las cosas que planteó pero que no utilizó; una mirada global al discurso desde el punto de vista matemático para intentar identificar una tendencia. También se añadieron otros sucesos de las clases, para los que no es claro si están o no regulados por normas, como por ejemplo a quién escoge el profesor para pasar al tablero, a quién le contesta la pregunta y a quién desconoce, cómo se deben hacer las preguntas para captar la atención del profesor. Por otro lado, se contemplaban otros aspectos como la relación que puede haber en la aparición de la regla con el momento o la actividad que se desarrolla en la clase y una mirada global al discurso surgido para intentar establecer una tendencia. Se ubicaron ejemplos de eventos o sucesos observados que llamaron la atención en las distintas clases, y que podían ser reflejo de tales normas, y se seleccionaron citas textuales de lo expresado en clase y en las entrevistas que sustentaran esta interpretación de la información. La Figura N° 3 contiene esta propuesta.

Otros aspectos a tener en cuenta para el análisis de la información registrada en las observaciones de clase

- Normas que tienen que ver con el comportamiento de los estudiantes con respecto a la disciplina, puntualidad, ubicación en los puestos, levantarse de sus puestos para buscar al profesor, levantarse de sus puestos para ir donde otros compañeros, hablar entre sí, reírse, gritar, llamar al profesor, el trato que dan al profesor, acatar las órdenes que el profesor da relativas a la disciplina, hacer las tareas planteadas en la clase, hacer las tareas que se dejan para la casa.
- Normas relativas a la interacción entre los estudiantes y con el profesor en torno al trabajo académico, acerca de cómo escoge el profesor los estudiantes que pasan al tablero, qué estudiante contesta las preguntas que el profesor hace, cómo saben los estudiantes qué preguntas contestar y cuáles no, cómo preguntan los estudiantes o aclaran dudas, a quién le contesta el profesor y a quién desconoce, cómo son las interpelaciones que captan la atención del profesor, cuándo puede el estudiante preguntar o no, cómo valida el estudiante lo que dice o hace, cuál es el papel que deben asumir los estudiantes en las discusiones, qué se espera que hagan los estudiantes cuando el profesor o sus compañeros hablan, etc.
- Normas que tienen que ver con la forma en que se organizan los estudiantes en clase.
- La relación de estas normas con la actividad (acción) que se desarrolla en la clase.
- La explicitación y/o negociación de las normas.
- La claridad o ambigüedad de las normas.
- El contenido del discurso en términos de la validez de lo que se habla o se dice: qué de lo que se dice se aprueba o se desaprueba, qué se considera una respuesta apropiada o no apropiada, una respuesta diferente, una respuesta eficiente, un argumento válido, qué dice o hace el profesor para aclarar dudas o para validar el trabajo de los estudiantes, etc.
- El contenido del discurso desde el punto de vista matemático en términos de las reglas matemáticas que se utilizan y del enfoque o ruta de enseñanza para la asignatura —con base en el tema que se ha tratado en las clases observadas— que se percibe a través de los conceptos y procedimientos abordados, los no abordados, las conexiones que se hicieron y las que faltó hacer, las definiciones propuestas y las posibles deficiencias en ellas, los supuestos que se hicieron sobre el conocimiento de los estudiantes, las cosas en las que enfatizó el profesor y las que solo mencionó rápidamente, las cosas que planteó pero que no utilizó.
- Una mirada global al discurso desde el punto de vista matemático para intentar identificar una tendencia.

Figura N° 3.

Posteriormente en el proceso de tratar de asignar significados compartidos y claros para las categorías, se sugirieron otros aspectos en cada categoría y se puntualizó la relación de las normas relativas a la interacción con las normas sociales propuestas por Yackel y Cobb (1996); el contenido del discurso relativo a la aprobación del trabajo de los estudiantes se identificó con las normas sociomatemáticas de Cobb y Yackel (1996) y con las metarreglas de Sfard (2000a, 2001), y el contenido matemático con algo de las prácticas matemáticas de Cobb y Yackel (1996) y de las reglas a nivel objeto de Sfard (2000a, 2001).

Transformación de la clasificación de normas en categorías más amplias

No obstante, la obligación de describir todo en términos de reglas y el hecho de los investigadores no se sentían tan cómodos con la idea de encajar la investigación en un marco específico que obligara a dejar por fuera varios de los aspectos ya percibidos y evaluados como importantes para la caracterización de las clases observadas, nos condujo a dedicar bastante trabajo en el establecimiento de otras posibles categorías que recogieran algunos de los aspectos incluidos en las normas, pero no bajo esa óptica. Por esta razón se propuso intentar determinar unos asuntos sobre los que se quería hablar. Es claro que la construcción de estas nuevas categorías no estuvo desligada de las propuestas de los autores consultados y en consecuencia no es raro encontrar coincidencias y hacer asociaciones, pero sin que se ajusten exactamente a aquéllas. Una vez más se miraron los documentos hechos sobre lo sucedido en la clase y los videos grabados para intentar extraer información relativa a los nuevos aspectos esbozados, en un proceso dialéctico, pues la mirada a los videos con un foco en mente ayudó a refinar la definición de categorías. Se discutieron así, ampliamente, distintos asuntos intentando precisar a qué se referían y limitar su alcance para distinguirlos claramente y se llegó a acuerdos sobre asuntos acerca de los que en definitiva se quería decir algo.

Estos asuntos fueron, los relativos a la información que el profesor percibe y no percibe de lo que sucede en clase, evidenciados a través de ver a qué reacciona el profesor; si no hay reacción, es difícil saber si esto se debe a que el profesor no percibió esa información o a que eligió no reaccionar. Además se determinó como importante describir cuál es esa reacción y la frecuencia con que lo hace. Igualmente para completar este panorama, se estipuló dar cuenta de información que los observadores detectan y que es probable que el profesor también la haya percibido, pero que no genera ninguna reacción en él. Se sugirió también registrar otra información que aparece en clase que no es probable que el profesor perciba, y por consiguiente a la cual es natural que no reaccione, por ejemplo las conversaciones que se dan entre los estudiantes en voz baja. Sin embargo, se dejó este asunto de lado, dado que hay mucha más información que circula en la clase, como por ejemplo lo que el profesor dice no como reacción a algo sino porque lo tenía previsto, y en consecuencia esto llevaría a los investigadores a dilucidar razones y criterios que justifiquen dar cuenta de una parte de esta información y no de otra.

Atendiendo más a la especificidad de las matemáticas se vio la necesidad de hablar de los temas, subtemas, conceptos, procedimientos, representaciones abordados para el tema que se trató en las clases de cada profesor, del orden en que fueron abordados, las conexiones que se establecieron, las intenciones que se percibieron para cada uno, la relevancia de cada uno para el tema, los ejemplos propuestos, etc. También fue patente que se requería registrar el tipo de conocimiento que se enfatiza en la clase, es decir si el conocimiento que se promueve es conceptual, procedimental, qué sistemas de representación se utilizan con más frecuencia y si se hacen transformaciones en un mismo sistema o entre distintos sistemas, la clase de ejemplos, la contextualización de éstos en la vida real, etc. Igualmente se pensó que sería deseable poder hablar de cómo se trata lo arbitrario y lo necesario del conocimiento matemático en clase, de acuerdo con los planteamientos de Hewitt (2002a, 2002b, 2000c).

Así mismo, se vio como indispensable retomar la cuestión de lo que se considera aceptable como respuesta matemática en clase, de la relatividad de estas respuestas según el tipo de tareas que se abordan, de quién o qué es el encargado de aprobar o desaprobar, y de cómo lo hace. También se indicó la relevancia de contemplar asuntos relativos a la interacción del profesor con los estudiantes, de cómo y cuando contestan el profesor y los estudiantes. Se puntualizó que se estaba aludiendo en conocer si hay diálogo entre profesor y estudiantes, si hay respuestas directas del profesor a los estudiantes en público, si todas las preguntas son atendidas y cuáles son atendidas, si el profesor espera de verdad que los estudiantes contesten sus preguntas, etc.

Entre los asuntos propuestos también surgió la idea de hablar sobre las explicaciones en el sentido de (Leinhardt, 2002), quien define estas explicaciones como un constructo que abarca todo lo que el profesor hace con la intención de que sus estudiantes aprendan o comprendan algo en matemáticas. No obstante, se objetó que desde ese punto de vista las explicaciones eran similares a lo que se entiende por enseñanza y que el término 'explicación' parecía simplemente otro nombre para este fenómeno. Así, ya no se vio el interés de detenerse en este asunto de las explicaciones.

Cuestionario del estudiante

La primera versión del cuestionario se elaboró con base en las preguntas consignadas en el cuestionario de profesores que habíamos construido y en el cuestionario para el estudiante utilizado en el estudio TIMSS (1994).

Aunque en principio las primeras versiones del cuestionario del estudiante apuntaban claramente a obtener información con el propósito de validar en cierta forma lo que el profesor hace, de una parte, y de otra con el fin de conocer algo sobre las rutas del aprendizaje de los estudiantes, a medida que las preguntas se fueron mirando con detalle y discutiendo, su intención giró hacia conocer más sobre el aprendizaje. Naturalmente en este proceso se evidenció la dificultad inherente a mirar el aprendizaje como proceso mental, pero también surgieron dificultades debidas a las limitaciones impuestas por razón de que no se pensaba hacer pruebas a los estudiantes sobre las matemáticas mismas, sino preguntas de opinión para las que el mismo estudiante debía mirarse al contestarlas.

Se pensó entonces en averiguar cosas sobre la clase que nos permitieran ampliar la información obtenida en las observaciones, como por ejemplo tratar de dilucidar cómo es que los estudiantes aprenden algo en la organización de la clase, cuáles son sus formas de trabajar, qué de lo que hace el profesor tienen en cuenta, si creen que las tareas para la casa les ayudan en su aprendizaje, cómo son evaluados, etc.

Se elaboraron así dos secciones de acuerdo al contendido de las preguntas. La sección de 'Información general' que abarca preguntas sobre el rendimiento y las actividades que el estudiante hace fuera de la clase relacionadas con matemáticas. La sección de la 'Clase' donde se concentran la mayoría de las preguntas que aluden al gusto por las matemáticas, las actividades de la clase y su participación en ellas, la interacción que tiene con sus compañeros, profesor y otras personas en torno al trabajo en matemáticas, los recursos utilizados para éste, su opinión acerca de los factores que influyen en el aprendizaje , lo que considera que es aprender, cómo sabe que ha aprendido y lo que considera que es apropiado contestar en la clase (ver Apéndice Nº 2).

También en este cuestionario cada pregunta presentan diversas posibilidades de respuesta para las cuales hay cuatro opciones que indican la frecuencia con la que suceden: *nunca, a veces, casi siempre o siempre*. En otros casos hay adicionalmente opciones para indicar tiempos, o simplemente las opciones para las distintas posibilidades son *sí* o *no*. Las distintas posibilidades deben marcarse todas a menos que se indique lo contrario.

Análisis e interpretación

Aunque una vez terminadas las observaciones y entrevistas, comenzó formalmente la etapa de análisis e interpretación de los datos en el estudio, el análisis fue una actividad que permeó todo el proceso de definición de categorías y recolección de datos.

A pesar de que varios de los resultados encontrados se apoyan en el análisis de las estadísticas de frecuencias y de comparación de proporciones de las respuestas a los cuestionarios, el análisis realizado en el estudio fue predominantemente cualitativo. El análisis estuvo inmerso en un proceso continuo de trabajo en el que cobró mucha importancia el juego dialéctico y crítico de confrontar los resultados parciales que se iban obteniendo para cada clase observada con las anteriores, y simultáneamente con las de los otros profesores. Con base en estas discusiones y en esa actitud de búsqueda objetiva de consenso se llegó a las interpretaciones y caracterización final.

Un primer análisis de contenido tuvo lugar cuando a medida que se elaboraban los documentos basados en las transcripciones de audio de las clases observadas, los investigadores identificaban y extraían de ellos la información necesaria para llenar los formatos de registro, en los que se pretendía hacer una organización y clasificación inicial de los datos en categorías comunes a algunas de las utilizadas en el cuestionario del profesor; además ahí se daba cuenta de citas textuales que ayudaban a ilustrar y sustentar la clasificación. A partir de este análisis también se precisaron las dudas e inquietudes que les habían surgido a los observadores con respecto a lo sucedido en las clases y en las que se consideraba relevante ahondar; tales dudas llevaron a formular una serie de preguntas que eventualmente sirvieron de guía para las preguntas de la entrevista. Además, mediante el análisis se determinó información para intentar describir cada clase atendiendo al modelo para mirar la enseñanza propuesto por Schoenfeld (1996) que identifica segmentos y unidades de la clase de acuerdo con las acciones y actividades llevadas a cabo, y establece las intenciones probables que se suponen para cada segmento, los eventos que inician o terminan cada segmento o unidad, y si éstos se dan en forma paralela o secuencial.

Posteriormente, como resultado del análisis de contenido de la información que se iba recogiendo pero todavía en la etapa de trabajo de campo, es decir mientras se llevaban a cabo las observaciones de clase, se fue haciendo un refinamiento de los asuntos y categorías que se estaban contemplando, inicialmente definidas como producto de una idea general acerca de lo que se buscaba observar, de las lecturas realizadas sobre la teoría existente y de la experiencia de los investigadores en el área. Cada observador detectó en las clases cosas que le llamaron la atención, que fueron comentadas con los demás y contrastadas con lo observado en otras clases; cuando éstas se consideraron importantes de destacar se denominaron como asuntos o categorías y se intentaron dimensionar. Igualmente, en este proceso y a través del análisis de los datos recolectados, se encontraron más evidencias para apoyar la pertinencia de los asuntos ya establecidos, otras categorías o asuntos se fueron modificando y concretando, e incluso algunos se desecharon del todo.

En la etapa de análisis cada investigador leyó de nuevo y cuidadosamente los documentos con las transcripciones de las clases y de la entrevista; oyó los cassettes de las grabaciones y miró los videos, considerando el conjunto de datos como un todo. La lectura línea a línea y entre líneas de los documentos de cada clase, permitió detectar información que encajara con, e ilustrara, las categorías o asuntos ya definidos, pero igualmente posibilitó reconocer información que no se había advertido antes, aunque no fuera claro cómo encajarla en tales categorías. Adicionalmente se evidenció que a pesar de codificar diferentes sucesos bajo el mismo asunto, existían matices para ellos que podrían generar subcategorías o códigos de segundo nivel. Esta codificación de la información, puede verse como una codificación más o menos 'abierta' no totalmente condicionada por los asuntos ya establecidos en el sentido descrito por Emerson, Fretz y Shaw (1995) y Quinn (2002), pero selectiva a la vez (Emerson, Fretz y Shaw, 1995).

Como consecuencia de lo anterior el refinamiento de las categorías continuó en esta etapa, pero además porque el análisis llevó a ver que se estaba duplicando la información en dos o más categorías; que existían otros aspectos no contemplados que también son descriptivos de las clases de un profesor particular; que los aspectos descubiertos para un profesor que en otros no se habían visto, valía la pena explorarlos; que se requería tener en cuenta acciones o incidentes recurrentes en las clases; que los datos ya codificados en alguna categoría no proveían información relevante acerca de la práctica del profesor. Es así como este análisis cualitativo podría acercarse a una combinación de análisis deductivo e inductivo al mismo tiempo, de acuerdo con la definición de Quinn (2002) o a una mezcla de la conocida *grounded theory* [9] (Emerson, Fretz y Shaw, 1995; Quinn, 2002) con la aproximación *top-down*[10]. Es decir el análisis se hace a partir de una idea general de lo que se va a observar en los datos se leen los datos haciendo una primera codificación que incluye citas del texto para ilustrar los temas establecidos a priori; una lectura de esa codificación permite hacer un refinamiento del marco teórico; se vuelve a hacer una o más pasadas a los datos, buscando otros temas, modificaciones o confirmaciones de los ya definidos; se organizan de nuevo los temas y ese es el marco teórico emergente.

Para cada profesor se construyó entonces una descripción de su enseñanza, donde se pretendió no hacer juicios, ni dar razones, explicaciones o justificaciones sino donde se intentó relatar de manera cohesiva e ilada lo que sucedió en las clases con respecto a los asuntos establecidos como categorías; las descripciones se acompañan de citas textuales o ejemplos que ilustran lo que se dice; obviamente esta descripción no es independiente de la interpretación de los investigadores pero trata de ser los más objetiva posible, libre de juicios e interpretaciones. Así mismo con base en esta descripción se elaboró una discusión de lo observado, donde sí se hace interpretación expresa desde el punto de vista de los investigadores de lo que sucede y se plantean algunas razones o explicaciones a aquello que pasa; estas explicaciones a veces son apoyadas o refutadas por los comentarios de los profesores en la entrevista. Se procuró que se evidenciara que las interpretaciones estaban basadas en hechos que fueran visibles en las descripciones.

Las descripciones y discusiones fueron leídas y comentadas críticamente por los demás investigadores teniendo en cuenta que la codificación de la información descrita se ajustara a la estructura de categorías definida, el hecho de que fueran textos con intenciones distintas: uno descriptivo y el otro interpretativo en concordancia con lo sugerido por Quinn (2002), y la uniformidad en la forma del documento. Se revisó la codificación y se comparó con las realizadas por los demás investigadores hasta lograr consenso; las citas de una categoría se verificaron para validar su pertenencia a dicha categoría; se hicieron modificaciones de forma y redacción a los textos. Este proceso fue además, la oportunidad para una última modificación de esta estructura de categorías, a la que se adicionaron asuntos específicos que se consideraron relevantes para complementar la caracterización de la enseñanza de algunos profesores, aun cuando no siempre los sucesos que dieron pie a su inclusión fueron asiduos; sin embargo eran lo suficientemente extraños para ser tenidos en cuenta, tal como lo proponen Emerson, Fretz y Shaw (1995).

Finalmente se compararon los asuntos contemplados en las discusiones para todos los profesores y se detectaron similitudes y diferencias, que además se contrastaron con las tendencias encontradas en respuestas relacionadas del cuestionario.

Validación

En este estudio intervinieron varios elementos que aportan validez a la investigación realizada desde distintos puntos de vista, y que de alguna manera se acercan a las consideraciones que Eisenhart y Howe (1992) proponen como estándares de validez[11] para la investigación en educación. Tales elementos tienen que ver con el empleo de distintas opciones para la recolección de datos, la definición de las categorías que conforman el marco conceptual construido, el análisis e interpretación de la información y especialmente con el proceso para llegar a consensos en torno a los resultados encontrados. Dada la imposibilidad de efectuar un proceso de validación estricto en los mismos tér-

9. Esta teoría también es llamada aproximación *bottom-up*, la cual que propone olvidarse de los marcos teóricos y producir una teoría basada en los datos que se tienen.
10. La aproximación *top-down* parte de un marco teórico inicial que permite decir cuáles son los temas principales a mirar para hacer la codificación, marco que puede a su vez ser modificado de acuerdo a los datos.

minos de una investigación cuantitativa, el uso de múltiples métodos, materiales empíricos, perspectivas y observadores, es entendido por varios autores no como una herramienta o estrategia de validación sino como una alternativa a la validación (Denzin, 1989a, 1989b, Fielding y Fielding, 1986 y Flick, 1992, citados en Denzin y Lincoln, 1998), que añade rigor, amplitud y extensión desligada de prejuicios, y profundidad a cualquier investigación cualitativa.

Como ya se indicó, en el estudio se usaron diversos métodos para la recolección de datos: los cuestionarios, las grabaciones de audio y video de las clase observadas, los apuntes sobre éstas y las grabaciones de las entrevistas. Se quería contar así con información sobre el fenómeno de estudio, la enseñanza de las matemáticas, desde una variedad de perspectivas que ayudaran a ahondar en su caracterización, tal y como lo recomiendan Denzin y Lincoln (1998), Eisenhart (1988) y Quinn (2002).

En la construcción de las categorías que conforman el marco conceptual se siguió un proceso que contó con la participación activa de los cuatro investigadores como observadores y como descriptores de los mismos eventos, pero también como lectores y comentaristas críticos y permanentes de todo lo que se iba encontrando. A este proceso cada investigador aportó su propia experiencia, conocimiento y visiones, así como también ideas de la literatura que se iba consultando. Además se tuvieron en cuenta los datos recogidos a medida que iban surgiendo y que dieron indicaciones de que había información que permitía ahondar en el fenómeno que se estudiaba. Una misma categoría considerada al analizar la información sufrió modificaciones en su definición y dimensionamiento como reflejo en cierta medida del proceso de evolución de la conceptualización de los investigadores a lo largo del estudio, de los aportes de los datos mismos que iban surgiendo y de las contribuciones de los profesores mediante la lectura de los documentos y la entrevista.

Las técnicas de análisis cualitativo utilizadas corresponden a combinaciones de técnicas sugeridas en la literatura de la investigación cualitativa, descritas más arriba, pero su selección obedeció a la necesidad y pertinencia de ellas en cada momento del estudio, para clasificar y codificar la información y para luego verificar dicha codificación, más que a seguir un procedimiento señalado por alguien. Fueron técnicas que se adecuaron a lo que se estaba haciendo y a los propósitos del estudio, que también atendieron a las limitaciones del mismo.

Con respecto a los resultados, el proceso seguido implicó por parte de cada investigador una revisión y confrontación repetida de las clasificaciones hechas y por tanto de los resultados parciales que iba obteniendo, hasta tener alguna seguridad de que la información correspondía a las categorías, de que no se estaba inventando cosas y de que las citas eran pertinentes y sustentaban la codificación. Los documentos producidos, en sus versiones parciales, fueron leidos y comentados críticamente por todos los investigadores, quienes en consecuencia especificaban sus propias interpretaciones. En las discusiones posteriores se llegaba a consensos, que conducían a modificaciones de los escritos. Las interpretaciones finales emergieron entonces del análisis de diferentes observadores

11. Los estándares de validez propuestos por estos autores pueden resumirse así: 1. Articulación entre la pregunta de investigación, el procedimiento para la recolección de datos y la técnica de análisis. 2. Aplicación efectiva de las técnicas de recolección y análisis de datos. La selección de los participantes, los procedimientos para la recolección de información, y las técnicas de análisis deben responder a razones lógicas y creíbles. Los procedimientos y principios existentes para la recolección de datos deben ser respetados. 3. Atención y coherencia con el conocimiento existente. Los argumentos deben ser construidos con base en alguna teoría existente o deben contribuir a alguna área considerable. La subjetividad del investigador, interpretaciones personales, y otras suposiciones deben hacerse explícitas. 4. Limitaciones internas y externas de la importancia. Las externas se refieren al valor de los resultados de la investigación y si está el estudio mejorando e informado la practica educativa. En este caso es muy importante poner atención a las características sociales, políticas y culturales del contexto y de los participantes. Las limitaciones internas se refieren a la ética de los investigadores, es decir la forma como la investigación se realiza.

acerca de varias situaciones para un mismo profesor y de distintos profesores para una misma situación. Además, los documentos en versiones ya más definitivas fueron leídos por los profesores y comentados por ellos. Dichos comentarios que confirmaron o descartaron lo dicho, se tuvieron en cuenta para las versiones finales de los textos; éstos también reflejan las respuestas, interpretaciones y opiniones de los profesores, expresadas durante la entrevista. En los últimos meses, la asesora hizo igualmente parte de todo este proceso cíclico de lectura, comentarios críticos e interpretaciones. De otra parte, el análisis a las respuestas de los cuestionarios apoyaron el proceso de consistencia, al complementar, corroborar y explicar parte de lo encontrado. El reporte final del estudio será enviado a los profesores participantes para sus comentarios, los cuales constituirán un breve documento que se hará llegar al IDEP y se incluirá en el reporte que enviaremos a los colegios, entre los que difundiremos este estudio, tan pronto como los recibamos.

¿Cuándo?
¿Qué pasó con el programa Computador?

Procesamiento de las respuestas a los cuestionarios

El procesamiento en el computador de las respuestas de escogencia múltiple de los cuestionarios del profesor y del estudiante, se hizo con el programa estadístico Stat View, que permite hacer alguna validación de la entrada de datos y el manejo de los cruces de variables y de correlaciones entre dos o tres o más variables. Se estableció cómo codificar la información para procesarla, se definió entonces el formato para digitalizar los datos en el computador con dicho programa y se comenzó este proceso.

Procesar las respuestas a los cuestionarios implicó el procesamiento de una gran cantidad de información. Por ejemplo, la matriz de datos que se manejó para analizar las respuestas al cuestionario del profesor contiene más de trescientos veinte variables por profesor, correspondientes a las diferentes posibilidades de respuesta que se debían considerar para cerca de cincuenta preguntas que contiene el cuestionario. Debido a la gran cantidad de información, se abordó el estudio de las respuestas con un análisis estadístico univariado —basado en estimaciones de porcentajes y medidas de tendencia central y dispersión para caracterizar las distribuciones de los datos. Sin embargo, al revisar los resultados de tales análisis se sospechó acerca de la presencia de algunas correlaciones, razón por la cual se decidió realizar para algunos pares de variables un análisis bivariado -i.e., cruzar la información de variables para indagar por la presencia de posibles correlaciones y determinar la significación estadística de dichas correlaciones.

Se produjeron en primer lugar, reportes estadísticos de frecuencias (ver Anexos N°5 y N° 6) para cada una de las opciones de cada pregunta y en segundo lugar, reportes de caja y bigotes para las opciones y preguntas que aludían a tiempos o a indicadores de orden.

Las respuestas a las preguntas abiertas se analizaron manualmente. Se organizaron en tablas donde se intentó agrupar las similares y destacar las que presentaran elementos muy distintos, para así caracterizarlas. Además se hizo un conteo de frecuencias de acuerdo a la caracterización hecha.

Para las respuestas a los dos cuestionarios se hizo un análisis manual detallado con el fin de detectar inconsistencias en las respuestas de una misma persona, tanto desde la óptica de la selección de opciones distintas para posibilidades relacionadas de una pregunta, o para preguntas conectadas entre sí, como desde el punto de vista de la pertinencia de lo expresado con lo que se preguntaba.

Dado que en las respuestas al cuestionario del estudiante no se percibían tendencias definidas y teniendo en cuenta las características disímiles de las clases observadas en uno de los colegios, el que se presenta en el Caso 2, se pensó que esto podía estar ocultando algunas de las tendencias esperadas. Así, se decidió volver a procesar los datos pero esta vez divididos en dos grupos: uno para dicho colegio y el otro con los datos del resto de las instituciones.

Aspectos de la ruta pedagógica en un curso de matemáticas de grado sexto Caso 1

En este capítulo presentamos, a través de cuatro secciones, un análisis de cuatro clases de geometría desarrolladas con un grupo de sexto grado. En cada una de las secciones incluimos un apartado de descripción de lo sucedido en las clases y uno de discusión de lo observado.

Este documento se alimenta y apoya en el análisis de las transcripciones que se realizaron de las clases observadas, las cuales recapitulan información procedente de un registro en video, dos en audio y las notas de un par de observadores; en este sentido, las citas textuales que incorporamos en este documento para ilustrar o ampliar las ideas presentadas, provienen de aquellas. En las citas hemos cambiado los nombres de quienes intervienen y en algunas de ellas hemos utilizado las letras P y E para reseñar que es la profesora o un estudiante (aunque no siempre el mismo, incluso en una misma cita) quien enuncia cada texto; además hemos incluido entre corchetes ([ ]) aspectos de lo sucedido en la clase que fueron enunciados pero sí observados, hemos utilizado tres puntos suspensivos entre paréntesis ((...)) para denotar que excluimos parte de la cita y hemos hecho uso de las comillas dobles (" ") para citas breves. En el texto hemos respetado el género de la profesora, pero no de los estudiantes; así utilizaremos la palabra 'estudiante', independientemente de si estamos haciendo referencia a una niña o a un niño.

Esquema de las clases

Descripción

A continuación presentamos una descripción de los esquemas que identificamos en cada una de las cuatro clases.

Esquema de la primera clase

Para el desarrollo de la clase identificamos cinco segmentos que denominamos: iniciación de la clase, revisión de la tarea, actividad de medición con unidad arbitraria, actividad de escritura acerca de lo que es medir y asignación de tarea para fuera de la clase.

Iniciación de la clase. La clase inicia con una intervención del coordinador de disciplina en la que revisa la asistencia de los estudiantes. Luego la profesora saluda a los estudiantes y llama la atención sobre su ubicación en los respectivos puestos y sobre el uso del uniforme. Posteriormente invita a los estudiantes a hacer en grupo una oración. Al finalizar el rezo, hace una alusión a la presencia de miembros de 'una empresa docente' durante la clase y a que se va a realizar una grabación de video, pero señala que esto no implica que la clase se deba desarrollar de manera diferente a las habituales.

Revisión de la tarea. Una vez realizada la oración la profesora prosigue la clase anunciando y haciendo una revisión de la tarea. Al parecer la profesora revisa si algunos estudiantes hicieron o no la tarea, pero por la velocidad con la que lo hace, no parece estar advirtiendo el contenido de la misma, sino quizá su extensión. En efecto, en la clase sólo revisa la tarea para aproximadamente diez estudiantes y los comentarios que les hace a algunos de ellos se refieren a si la realizaron o no, o a la extensión de la misma.

La revisión de la calidad de la tarea y del contenido de la misma se pretende hacer de manera plenaria. Para ello, la profesora selecciona sucesivamente a varios estudiantes para que en el tablero den cuenta de la solución al ejercicio que configura la tarea. Sin embargo, no hay evidencia de que los estudiantes den cuenta en el tablero de lo que escribieron en sus cuadernos; por ejemplo, ninguno de los estudiantes que pasan al tablero lleva su cuaderno para de allí copiar alguna respuesta, en ningún momento la profesora les hace leer del cuaderno, o nunca hay una referencia a si la notación usada en el cuaderno corresponde a la usada en el tablero. En este sentido quizá lo que se esté revisando en el tablero sea lo que logran elaborar los estudiantes en ese preciso momento y no precisamente lo que elaboraron a través de sus tareas. A pesar de ello, la profesora pretende que como resultado de la revisión plenaria de la tarea los estudiantes tengan elementos para 'corregir' sus elaboraciones escritas.

Actividad de medición con unidad arbitraria. Luego de la revisión de la tarea un estudiante advierte que hay una doble notación para el mismo segmento ($\overline{AC}$ y $\overline{CA}$). Al abordar el asunto de los 'dos' segmentos ($\overline{AC}$ y $\overline{CA}$), la profesora guía la discusión hasta establecer que estos 'dos' segmentos tienen la misma medida e indaga acerca de qué es para los estudiantes una medida. Ante la ausencia de una respuesta por parte de los estudiantes, la profesora propone hacer el ejercicio de medir la longitud de la tapa del pupitre con diferentes unidades de medidas surgidas de objetos físicos; para ello selecciona varios objetos con bordes rectilíneos (v.g., cuaderno, escuadra) y objetos cuyo principal atributo geométrico es ser longitudinal (v.g., esfero, regla) y los asume como unidades para medir tal longitud.

Este ejercicio no parece ser la actividad que seguía a la revisión de la tarea, pues al inicio de tal revisión un estudiante parece preguntarle a la profesora si van a usar la cinta métrica, ante lo cual ella contesta que lo harán después de terminar la revisión de la tarea, pero en esta clase no la usan, pues al finalizar la revisión se propone un ejercicio de medición de longitudes que no involucra la medición con cinta métrica. De otro lado, al finalizar la actividad de conteo de los segmentos la profesora dice "(...) fijémonos que no interesa en donde estén los puntos, ¿qué podemos decir?", pregunta que no es contestada por ninguno de los estudiantes; en su lugar, surge la advertencia del estudiante acerca de los segmentos que tienen la misma notación. Así, parece que la profesora ha planeado otro tipo de actividad para cuando termine de revisar la tarea, pero la clase toma un rumbo diferente.

Actividad de escritura acerca de lo que es medir. Como una manera de utilizar la actividad de medir la longitud de la tapa del pupitre como referencia para describir lo que es medir, la profesora propone que se describan los procesos que se realizaron en la actividad de medir la longitud y lo que es medir. Con esto último parece procurarse que los estudiantes logren una definición del término 'medir'.

En esta actividad de escritura la profesora altera el rumbo impuesto por la instrucción y pide a algunos estudiantes que inicialmente enuncien sus respuestas —y ella también enuncia la propia— y que posteriormente las escriban. Luego, les pide que lean sus respuestas escritas.

Asignación de tarea para fuera de la clase. En los últimos cinco minutos de la sesión de clase, la profesora enuncia tres actividades que los estudiantes deberán realizar en su casa y que constituyen la tarea para la siguiente sesión, al igual que menciona que en la siguiente sesión se realizará una evaluación. Las actividades se proponen así:

P: Bueno. Me van a hacer un favor. Ustedes escribieron aquí con sus propias palabras y de acuerdo con lo que dijimos qué era medir ¿cierto? Pero quiero que para la próxima clase van a leer lo que ustedes escribieron y van a buscar en los libros —tenemos quince días para hacer esto— van a buscar en el libro, en el diccionario —ustedes miran a ver en dónde lo van a consultar— ¿qué será medir? y por favor comparan lo que ustedes escribieron con la definición que vayan a encontrar. Y con sus propias palabras van a utilizar los dos escritos, el que estaba en el libro y el que tiene en su cuaderno: y lo van a escribir muy organizado. Además de eso quiero que averigüen también ¿cuáles son los elementos que utilizamos en nuestro diario vivir para poder medir?, ¿será que siempre utilizamos el cuaderno?

E: [Varios estudiantes] No.

P: ¿El esfero? Eso sirve para saber que hay diferentes unidades de medida, ¿pero cuál es la principal?, ¿en qué nos basamos para que todo el mundo podamos hacerlo igual? Y además de esto vamos a hacer una cosa, por favor, con el metro van a tomar la medida del esfero, del cuaderno, del elemento con el que ustedes hayan trabajado. Lo miden con el metro y después de medirlo con el metro entonces van a buscar —van a buscar, no— van a mirar cuánto mide el pupitre en las unidades que estén tomando en el metro. Listos, a ver qué se les ocurre hacer. Cada uno piense y dentro de quince días cuando tengamos clase miramos qué fue lo que hicieron; ¿está claro?

Esquema de la segunda clase

En la segunda clase identificamos cinco segmentos a saber: iniciación de la clase, realización de una evaluación escrita corta, corrección plenaria de la evaluación, revisión de la tarea y asignación de tarea para fuera de la clase.

Iniciación de la clase. La clase inició con una intervención del coordinador de disciplina revisando la asistencia de los estudiantes. Luego la profesora hizo una reflexión y una oración, la cual repitieron los estudiantes.

Evaluación escrita corta. La clase prosigue con la realización de una evaluación, o en palabras de la profesora "ejercicio de verificación sobre lo que hasta el momento recordamos, lo que hemos aprendido"; la realización de esta evaluación se anunció al finalizar la clase anterior.

Para realizar esta evaluación la profesora dicta y escribe en el tablero una pregunta y los estudiantes disponen de aproximadamente siete minutos para responderla, luego, cuando la profesora considera que ha sido suficiente el tiempo para responderla, dicta y copia la siguiente pregunta y los estudiantes la contestan. A pesar de ser individual la evaluación, varios estudiantes comentan y preguntan a sus compañeros lo que al parecer no saben y también abordan a la profesora para preguntar si sus respuestas están bien o mal; entre tanto, la profesora se pasea por el salón observando lo que los estudiantes escriben y realizando algunos comentarios personales.

El enunciado de la evaluación es:

> 1. Con mis propias palabras cuento ¿dónde y por qué apareció la Geometría? Mínimo 6 renglones.
> 2. Defino y realizo el dibujo de:
>   a) Línea recta.
>   b) Segmento de recta.
>   c) Semirrecta.
>   d) Líneas paralelas.
> 3. Realizo un dibujo en donde identifico el punto, la línea en todas sus clases.

Corrección de la evaluación. Inmediatamente después de la evaluación la profesora organiza una actividad de corrección de las respuestas a los dos primeros numerales; el tercero no es objeto de corrección en la clase.

Para el primer numeral propone a los estudiantes presentar sus respuestas ante todo el grupo de estudiantes quienes deben discutir si lo expuesto es o no correcto o enunciar respuestas diferentes; para hacer la presentación de las respuestas en algunas oportunidades se recurre a leer lo registrado en las hojas y en otras ocasiones se parafrasea lo escrito en ellas. Para el segundo numeral se abordan, uno a uno, los cuatro literales; en algunos de éstos se lee primero la definición escrita en una de las evaluaciones y posteriormente se reproduce el dibujo en el tablero, o viceversa; en otros se hace de manera simultánea.

La corrección de la evaluación también incorpora registrar en el cuaderno lo que se va corrigiendo así como tomar apuntes de lo que va sucediendo, lo cual es anunciado por la profesora una vez se ha empezado el trabajo respecto del primer numeral.

Revisión de la tarea. La primera parte de la tarea asignada para fuera de la clase consistía en consultar en libros el significado de la palabra medir, contrastarla con la que cada uno había escrito en la clase anterior y escribirla "con sus palabras". Una vez terminada la corrección de los dos primeros numerales de la evaluación, la profesora decide iniciar la revisión de tal parte de la tarea. Así, ella escoge uno a uno a algunos estudiantes, les solicita que lean lo que han escrito y les hace preguntas con la aparente intención de saber qué tanto entienden el contenido de lo leído. Algunas de estas preguntas también se las dirige a estudiantes que al parecer detecta que no están atentos a la revisión de la tarea; no obstante, esta manera de llamar la atención de los estudiantes, algunos comentan diversos asuntos y no escuchan lo que sus compañeros leen y responden. Esta actividad se extiende hasta finalizar el tiempo de la clase.

Asignación de tarea para fuera de la clase. Después de que suena el timbre para el cambio de clase, la profesora da las indicaciones de la tarea para la siguiente clase: "Por favor para la próxima clase todos vamos a traer un metro. Quienes no lo tengan lo pueden elaborar".

Esquema de la tercera clase

La tercera clase involucra la iniciación de la clase, el desarrollo de un diálogo en plenaria acerca de las unidades de medida convencionales, el desarrollo de una guía de trabajo en grupos de estudiantes, una plenaria de revisión y corrección de los resultados del trabajo en grupos, una actividad de medición de la longitud de la tapa del pupitre con el metro y la asignación de la tarea para fuera de la clase.

Iniciación de la clase. La profesora entra al salón de clase, hace una oración y luego saluda al grupo de estudiantes. El coordinador de disciplina ingresa al salón una vez que la profesora ha iniciado el diálogo acerca de las unidades de medida convencionales, interrumpe la realización de éste y verifica la asistencia de los estudiantes.

Diálogo acerca de las unidades de medida convencionales. Este segmento de la clase se destina a hablar de las unidades de medida, tema que se había tratado en la clase anterior a la evaluación (i.e., en la primera clase observada). La profesora le pregunta a los estudiantes qué se utiliza para medir; de las diferentes respuestas dadas por los estudiantes a esta pregunta, la profesora rescata aquella que se refiere a la unidad de medida, plantea una situación hipotética en la cual no existiera una unidad de medida convencional y cuestiona a los estudiantes por las consecuencias de ello. A partir de esto sustenta la necesidad de emplear una unidad de medida convencional y presenta al metro como una de tales unidades.

Desarrollo de guía de trabajo. La actividad central de esta clase gira en torno al desarrollo de la siguiente guía que la profesora entregó a cada grupo de estudiantes:

Ejercicio práctico

1. Divido el segmento unidad **metro** en 10 segmentos congruentes.
2. ¿Qué nombre puedo dar a cada segmento logrado? Dibujo uno en el cuaderno.
3. Observo en el segmento unidad **metro** los 100 segmentos congruentes que contiene.
4. ¿Qué nombre puedo dar a cada segmento obtenido? Lo dibujo.
5. ¿Cuántos segmentos de los anteriores caben en el segmento logrado en el numeral 2?
6. Observo en el segmento unidad metro los 1.000 segmentos congruentes.
7. ¿Qué nombre puedo dar a cada segmento logrado?
8. ¿Cuántos segmentos de los anteriores caben en un segmento del numeral 2, y en un segmento del numeral 3?

Los estudiantes, por indicación de la profesora, configuran grupos de tres personas para realizar el trabajo. La profesora mientras tanto, se pasea por el salón ojeando lo que los estudiantes hacen. En algunas ocasiones llama la atención sobre algunas representaciones gráficas que están haciendo los estudiantes, en otras interactúa con los estudiantes para explicar lo que deben hacer y que parecen no entender.

Revisión y corrección del trabajo en grupos. En el momento en que algunos estudiantes están desarrollando las tareas descritas en el tercer y cuarto numeral, la profesora interrumpe el trabajo para hacer una plenaria donde los estudiantes que ya habían desarrollado las tareas de la guía comentan su trabajo.

La profesora les pide a los estudiantes que comenten lo que en grupo han realizado de cada numeral; más exactamente, la profesora pregunta por las respuesta a cada uno de los numerales (a partir del segundo) y un estudiante voluntariamente responde; si este estudiante —a juicio de la profesora— está equivocado, otro estudiante contesta. En esta revisión de lo hecho hasta el momento, la profesora hace varios llamados de atención acerca de la disciplina, pues al parecer no todos los estudiantes están participando de la revisión plenaria.

Luego de esta revisión, los estudiantes reinician el trabajo en grupos y la profesora vuelve a pasar por algunos de éstos. Transcurren un par de minutos y la profesora decide hacer una nueva plenaria en la que espera "unificar las respuestas" que los estudiantes han escrito en sus cuadernos, para lo cual sugiere que si lo requieren escriban corrección y copien las respuestas correctas. Inicia entonces una revisión de las respuestas de cada uno de los ocho numerales que configuran la guía; en esta revisión algunos estudiantes presentan sus respuestas y en la mayoría de ellos la profesora expone la respuesta correcta.

Al concluir la corrección de las tareas propuestas en la guía, la profesora pregunta a los estudiantes si hay aún alguna pregunta acerca de la actividad, pero ningún estudiante contesta afirmativamente.

Actividad de medición con el metro. La profesora solicita a los estudiantes que realicen la medición del largo del pupitre; ante las diferentes respuestas en centímetros de tal medida solicita explicación acerca de las diferencias y del por qué la respuesta incluye la palabra centímetros. Luego les propone una nueva pregunta en la que indaga por la cantidad entera de decímetros que expresaría la misma medida.

Asignación de tarea para fuera de la clase. Después de finalizar con la actividad de medición la profesora enuncia la tarea para la próxima clase. Ésta consiste en averiguar la historia del metro y qué es el metro. Además, la profesora entrega a los estudiantes la evaluación que había hecho y solicita que para la siguiente clase las traigan firmadas y las corrijan en una hoja aparte.

Esquema de la cuarta clase

En la cuarta clase observada la profesora organiza la clase en cuatro segmentos. El primero corresponde a la iniciación de la clase; en el segundo hace la revisión o corrección de la tarea; en el tercero propone la realización de una lectura de unas páginas de un libro de texto y la transcripción de parte de su contenido; en el cuarto asigna tarea para fuera de la clase.

Iniciación de la clase. La profesora entra al salón de clase, hace una oración y luego saluda al grupo de estudiantes. Al poco tiempo de que la profesora inicia la revisión de la tarea, el coordinador de disciplina ingresa al salón, interrumpe la revisión y verifica la asistencia de los estudiantes.

Revisión o corrección de la tarea. La primera parte de la clase se destina a revisar la tarea, que consistía en consultar en textos y libros la historia y definición del metro. Para ello la profesora selecciona estudiantes quienes leen lo que han copiado en sus cuadernos y les solicita que expliquen al curso lo que entienden de lo leído diciéndoles que lo expresen con sus propias palabras. En varios momentos de la revisión la profesora pide a los estudiantes que aporten información diferente a la leída por sus compañeros, pero no parece ser muy claro para los estudiantes el significado de 'diferente' sobre todo cuando parecen no entender lo que sus compañeros leen. De manera simultánea a las lecturas, la profesora toma nota en el tablero de algunas frases con lo cual parece intentar una organización de las ideas expuestas alrededor del tema; esta organización la complementa con algunas intervenciones verbales a todo el grupo de estudiantes.

Realización de una lectura y transcripción del texto. Una vez la profesora revisa la tarea y comenta aspectos del contenido de la tarea, propone un cambio de actividad. Hace que los estudiantes se organicen en grupos y a cada grupo le hace entrega de un ejemplar del libro de texto titulado Matemática hacia el futuro (Durán y otros, 1996). Los estudiantes inicialmente deben leer y recapitular las ideas importantes que contiene el texto en el apartado titulado "Múltiplos y submúltiplos del metro"; para ejemplificar esto, la profesora hace un breve análisis de las primeras ideas planteadas en aquel apartado (p. 255). También los estudiantes deben copiar unas tablas de múltiplos y submúltiplos del metro, que aparecen en el texto (pp. 256-257).

Mientras los estudiantes realizan la lectura y escriben en sus cuadernos, la profesora pasa por los pupitres ojeando lo que los estudiantes escriben y revisando que la evaluación que ha hecho en la segunda clase observada, esté corregida y firmada por el acudiente, como había sido propuesto en la asignación de la tarea de la clase anterior. La profesora también atiende a algunos estudiantes que le solicitan que se acerque a sus grupos a responder algunas preguntas.

Asignación de tarea para fuera de la clase. La clase se termina porque una profesora desde la puerta del salón le hace señas a la profesora indicando cambio de clase. Entonces los estudiantes en medio del desorden entregan los libros y recogen sus cuadernos, dando por terminada la clase. Entre tanto la profesora escribe en el tablero la tarea, la cual es copiada por algunos estudiantes. Lo que quedó escrito en el tablero fue:

Tarea.
1. Medir el frente de su casa.
2. Medir el largo de la cuadra donde vive.
3. Medir el largo y ancho de su alcoba.

Discusión

En este apartado presentamos nuestra visión acerca de la existencia de algunos segmentos que caracterizan a las clases como conjunto. En particular señalaremos que los segmentos definidos en su orden por la iniciación de la clase, la revisión de las tareas, la ejecución de tareas de aula y la asignación de tareas para fuera de la clase, son comunes a todas las clases. A continuación abordaremos una discusión de aspectos relativos a cada uno de estos segmentos; no obstante, no procederemos en el mismo orden citado antes sino que abordaremos primero la discusión sobre la iniciación de la clase, luego la asignación de tareas para fuera de la clase, posteriormente la revisión de las tareas y, finalmente la ejecución de tareas de aula.

Iniciación de la clase

En todas las clases pudimos reconocer un segmento inicial de aproximadamente diez minutos en el que se realiza una oración y se hace una revisión de asistencia, pero al parecer su realización no define un rasgo característico de las clases de geometría. En efecto, las clases observadas se desarrollaron en las dos primeras horas de la jornada escolar lo cual parece justificar que siempre al inicio de las mismas el coordinador de disciplina esté o ingrese en el salón y realice la labor de identificar a los estudiantes ausentes. El desarrollo de las clases en las primeras horas del día parece justificar, también, que al inicio de todas las clases observadas la profesora invite a los estudiantes a hacer una oración o a rezar.

La asignación de tareas para fuera de la clase

La asignación de tareas para realizar fuera de la clase es también una actividad presente en cada una de las clases. Ésta ocurre regularmente al finalizar la clase y está a cargo de la profesora quien enuncia la tarea prioritariamente de manera verbal y eventualmente de manera escrita. Las tareas asignadas verbalmente para realizar fuera de la clase fueron: la indagación acerca de lo que es medir; la averiguación de cuáles elementos se usan cotidianamente para medir; la determinación de las medidas en centímetros de los objetos con los que se realizó la medición con unidad arbitraria, así como la medición de la longitud del largo de la tapa del pupitre; la elaboración o consecución de una cinta métrica; la indagación acerca de la historia del metro y de lo que éste es; y, la firma y corrección de la evaluación. En tanto que las asignadas por escrito fueron: el conteo de los segmentos determinados por seis puntos ubicados sobre una misma recta; y, la medición de algunas longitudes del sitio donde viven los estudiantes.

Las condiciones en las cuales se enuncian dichas tareas no parecen ser las más adecuadas para que los estudiantes puedan registrar de manera escrita el contenido de las mismas; particularmente, en dos de las clases la profesora enunció la tarea una vez que había sonado el timbre que indica la finalización de la clase y que motiva en los estudiantes actitudes de indisciplina y se aumenta así el nivel de ruido en el salón. Otro aspecto que puede limitar la posibilidad de que los estudiantes registren adecuadamente la información respecto de la tarea a realizar, lo constituye la falta de claridad con que se enuncian algunas tareas; un ejemplo de ello puede verse en la cita de la página 41 —que aparece bajo el título "Asignación de tarea para fuera de la clase"—, allí no es fácil reconocer las tres actividades que deben desarrollar los estudiantes. Una condición adicional que manifestó la profesora en la entrevista es precisamente el hecho de que haya cambio de clase al final de la misma (i.e., que el final de la clase no coincida con el inicio del descanso o con el final de la jornada escolar) pues ella acostumbra en otros casos poner la condición "hasta que no la copien no los dejo salir" para presionar a los estudiantes. De otra parte, la profesora no parece llevar un registro escrito de las tareas propuestas pues en ninguna de las clases pudimos advertir que elaborara tal registro ni para las tareas propuestas de manera verbal ni para las propuestas de manera escrita.

Ahora bien, al observar los enunciados de las tareas y el uso que de éstas se hace en la clase, reconocemos que hay gran variedad de intenciones que sustentan las tareas asignadas. Algunas tareas tienen como intención contrastar lo que se ha logrado elaborar durante la clase con una información institucionalizada y contenida en textos o consultar tal información (v.g., la indagación acerca de lo que es medir, la indagación acerca de la historia del metro y de lo que éste es); otras tienen como intención preparar un material o información a usar en la clase siguiente (v.g., la averiguación de cuáles elementos se usan cotidianamente para medir, la elaboración o consecución de una cinta métrica, la medición de algunas longitudes del sitio donde viven los estudiantes); y otra, informar a los acudientes sobre el resultado de la evaluación y procurar respuestas correctas (la firma y corrección de la evaluación). De igual manera reconocemos que algunas tareas podrían tener una intención ligada con un hecho o conocimiento matemático específico, pero que su tratamiento en clase no permite que ésta se satisfaga ni siquiera parcialmente; este es el caso de la tarea donde se propone la determinación de las medidas en centímetros de los objetos con los que se realizó la medición con unidad arbitraria, así como la medición de la longitud del largo de la tapa del pupitre. Finalmente, reconocemos que quizá la tarea del conteo de los segmentos determinados por seis puntos ubicados sobre una misma recta tenía como intención propiciar un ámbito geométrico problemático en el cual la visualización y el uso de la definición geométrica de segmento cumplieran un papel en la solución de un problema; sin embargo, para esta última tarea, la ausencia de una afirmación del estilo "no son sólo cinco segmentos" o "hay más de cinco segmentos" o "los segmentos no sólo se forman con puntos adyacentes" como parte de su enunciado nos hace dudar de que esta tarea tuviera la intención de constituirse en un problema más que en un ejercicio para los estudiantes. Tampoco consideramos que la intención de la tarea fuese permitir una vía de acceso a la medición de la longitud de segmentos, como podría pensarse al considerar la secuencia de los segmentos de la primera clase observada.

De manera general, consideramos que ninguna de las tareas puede tener como intención 'mecanizar' algún procedimiento matemático, específicamente geométrico. Esta afirmación la hacemos, a propósito de un comentario que la profesora hace en la entrevista en el que parece justificar la asignación de tareas en la posibilidad que éstas ofrecen para favorecer la mecanización de tales procedimientos, ante las limitaciones definidas por el escaso tiempo que para ello se dispone en las clases.

La revisión de las tareas asignadas en la clase anterior

La revisión de las tareas asignadas para fuera de la clase es una actividad que —salvo en la clase en la que se propone la evaluación— se realiza luego de haber hecho la oración; tal revisión está presente en cada una de las clases observadas, aun cuando en la tercera clase no exista un segmento reseñándola explícitamente. Además, salvo una, la profesora revisa cada una de las tareas asignadas. En efecto, la tarea que se propuso en la clase anterior a la primera clase observada (el conteo de los segmentos determinados por seis puntos ubicados sobre una misma recta) se revisa en ésta. La primera parte de la tarea asignada en la primera clase (la indagación acerca de lo que es medir) se revisa parcialmente en la segunda clase observada; la segunda parte de esta tarea (la averiguación de cuáles elementos se usan cotidianamente para medir) se aborda al inicio del diálogo de la tercera clase observada; y, la tercera parte de dicha tarea (la determinación de las medidas en centímetros de los objetos con los que se realizó la medición con unidad arbitraria, así como la medición de la longitud del largo de la tapa del pupitre) no se revisa en alguna de las clases observadas, aunque sí —en la tercera clase— se propone una actividad en la que hay que hacer parte de ésta (medir la longitud de la tapa del pupitre, asumiendo al metro como patrón de medida). Para el desarrollo de la guía propuesta en la tercera clase se exige que los estudiantes cumplan con la tarea asignada en la segunda clase (la elaboración o consecución de una cinta métrica). En la cuarta clase se realiza la revisión de las dos tareas propuestas al finalizar la tercer clase (la indagación acerca de la historia del metro y de lo que éste es; y, la firma y corrección de la evaluación). En la quinta clase[1] la profesora hace la revisión de la tarea asignada al finalizar la clase inmediatamente anterior.

La revisión de la tarea contempla dos aspectos: la verificación de realización o no de la misma y la calidad de ésta. No obstante, estos dos aspectos no están presentes en todas las revisiones de tareas y no todas las tareas de los estudiantes son objeto de verificación.

En una de las cuatro clases la profesora inicia —mas no termina— un recorrido por el salón mirando los cuadernos de los estudiantes; su intención parece ser determinar si la tarea se realizó. Esta intención se colige de advertir —como lo señalamos al inicio de esta sección— que la velocidad con la que se realiza la observación de los cuadernos, no parece posibilitar que la profesora pueda apreciar además la calidad matemática de la misma. En otra clase, la profesora revisa si los estudiantes hicieron firmar por su acudiente la evaluación y realizaron la corrección de la misma; en este caso también la velocidad con que hace la revisión no parece dejar tiempo para que pueda apreciar y valorar suficientemente la corrección elaborada sino que apenas alcanza para mirar rápidamente si se realizaron estas dos partes. En ambos casos, la profesora reacciona con comentarios acerca de la realización de la tarea y no de la calidad de la misma; algunas veces estos comentarios si bien están dirigidos a un estudiante específico, son enunciados y escuchados por buena parte de los estudiantes del curso. En las demás clases y para la mayoría de las demás tareas, para hacer la revisión se procede a través de indagación directa y pública por parte de la profesora a algunos estudiantes que ella selecciona; sin embargo, por la cantidad de estudiantes del curso, aunada al hecho de que en este tipo de revisión

1. Esta clase no hace parte del conjunto de clases observadas y analizadas; sin embargo, de ésta se cuenta con el registro de video.

se está examinando simultáneamente el contenido de la tarea realizada, parece imposible que la tarea de todos los estudiantes sea revisada. En la mayoría de los casos la evidencia falta de elaboración de la tarea, genera que la profesora haga algún comentario público al estudiante implicado. Por otra parte, ni estos comentarios, ni la realización de la tarea por parte de cada estudiante parecen ser registrados por la profesora para disponer luego de un reporte físico de ello.

Con respecto al registro de las tareas realizadas y no realizadas por los estudiantes, la profesora admite en la entrevista que hace algunos años sí llevaba un registro minucioso y que era satisfactorio evidenciar buenos resultados pues en esa época la mayoría de los estudiantes cumplían con la tarea, casi que independientemente de la extensión y dificultad de la misma, pero que en la actualidad ese registro lo lleva de manera no escrita (quizá en la memoria) y que en todo caso ella sí reconoce a los estudiantes que trabajan y a quienes no y que incluso utiliza esa información al momento de dar información acerca del rendimiento del estudiante. Reporta además que esta situación fue cambiando de manera paulatina y que los resultados de tales registros se transformaron considerablemente y que desanimaban tanto al profesor como a los estudiantes; explica que entre las razones fundamentales de este cambio en el comportamiento de los estudiantes se encuentran algunas políticas gubernamentales que no parecen favorecer la exigencia de las tareas, como las que plantean lo relativo a las competencias. Adicionalmente, menciona que cada director de curso sí ejecuta una estrategia para saber en cada materia cuáles estudiantes cumplen o no con las tareas que se proponen y que tal registro se tiene en cuenta al momento de juzgar la responsabilidad del estudiante.

Consideramos que la falta de un registro tal no se suple con la memoria de la profesora pues es casi imposible registrar allí para un solo curso de más de cuarenta estudiantes la realización o no de —en promedio— más de una tarea por clase. Además, es evidente que no siempre se revisan todas las tareas a cada uno de los estudiantes, por lo cual tal registro en la memoria, si fuera posible llevarlo, sería incompleto. De otra parte, no entendemos bien a qué reglamentación gubernamental se refiere la profesora en su argumentación y consideramos que no es válido deducir que el trabajo para promover —y con— las competencias matemáticas no es coherente con la realización de tareas fuera de la clase, idea que parece estar implicada en la respuesta y justificación de la profesora en la entrevista.

Para algunas de las tareas asignadas, la profesora revisa la calidad de las respuestas que dan los estudiantes y hace comentarios sobre ésta. Particularmente, reconocimos que hubo un interés y un tratamiento especial a las tareas referidas al conteo de los segmentos determinados por seis puntos ubicados sobre una misma recta, la indagación acerca de lo que es medir, y la indagación acerca de la historia del metro y de lo que éste es. Para estas tareas la profesora organiza una presentación pública de las respuestas en la que se espera que cada estudiante le presente al grupo en pleno su respuesta y responda a las inquietudes que los demás estudiantes y ella le puedan plantear; sin embargo, lo que sucede dista de este esquema. En efecto, consideramos que la presentación de respuestas casi siempre se hace para la profesora y no pretende involucrar a los demás estudiantes, esto a pesar de los ingentes esfuerzos de la profesora para que todos los estudiantes atiendan a la respuesta que está planteando un estudiante; adicionalmente, en la gran mayoría de oportunidades, es la profesora quien reacciona a las respuestas de sus estudiantes —y no los estudiantes mismos— por ejemplo, solicitando aclaración sobre el significado de lo expresado como respuesta, o identificando respuestas que contienen información interesante o repetida. El siguiente registro de la revisión de la tarea relativa a lo que es medir ilustra lo anterior.

P: Muy bien. (...) habíamos dicho qué era medir y ustedes debían completar el significado de medir. ¿Tu qué encontraste que era medir?

E: [El estudiante no contesta].

P: Nada. A ver hija, duro. Espera que te escuchen. ¿Ya? Amigo. Escuchamos a la compañera. Siéntate hacia acá. Caballero. ¿Qué pasó? Ya. Rápido hija.

E: Tener determinada la medición, tener determinada la longitud y la altura.

P: Medir, ¡pilas! que estamos hablando de la palabra medir. ¿Angela qué escribiste tú?

E: Determinar la longitud, extensión, volumen o capacidad de alguna cosa.

P: ¿Entiendes qué es lo que escribiste? A ver, con tus palabras, extensión[pausa] vuelve a leer.

E: Determinar la longitud, extensión, volumen o capacidad de alguna cosa.

P: ¿Qué significa eso que tu escribiste? Mamita hazme un favor escuchemos a la amiga (...) A ver Angela. ¿Se acuerdan que tenemos un compromiso: qué cuando copiamos algo de un libro lo entendemos primero para poder escribirlo? Por favor, ¿tu qué escribiste?

E: Es comparar una cosa con otra.

P: ¿Quién?

E: Medir, es comparar una cosa con otra, es comparar una unidad con una medida. Los objetos de los cuales sobre su medida de larga o ancho de una cosa u objeto.

P: ¿Entendiste lo que está escrito ahí? Ahora con tus palabras.

E: Es comparar una cosa con otra de ancho y lo largo.

P: (...) Papito tu compañera está hablando y tu no la estás escuchando. Listos ¿Ya amigo? Ahora sí.

E: Averiguar las veces que tiene la cantidad una cosa con otra, compara una cosa con otra.

P: (...) ¿Qué significa eso que tu escribiste ahí?

E: Es averiguar las veces que tiene la cantidad una cosa.

P: Es averiguar las cosas. Pilas con lo que decimos, porque no es a ver que ustedes mismos a veces no entienden lo que hablan. ¿Quién nos quiere explicar lo que la compañera leyó?

E: [Nadie contesta].

P: No por favor, no sabemos lo que escribimos.

Para otras de las tareas asignadas para las cuales hubiese tenido caso plantear un esquema de revisión de las respuestas, la profesora simplemente presenta un comentario general que involucra de manera superficial la respuesta que los estudiantes pudieron dar a la tarea (v.g., la averiguación de cuáles elementos se usan cotidianamente para medir) plantea la tarea nuevamente como una actividad a realizar en el aula (v.g., la medición de la longitud del largo de la tapa del pupitre) o no realiza actividad alguna con las posibles respuestas (v.g., la determinación de las medidas en centímetros de los objetos con los que se realizó la medición con unidad arbitraria).

La ejecución de tareas de aula

Si bien en las cuatro clases se pueden referenciar tareas propuestas por la profesora al margen de la revisión de la tarea y de su asignación, consideramos que en sólo tres de ellas las tareas propuestas para trabajar en el aula tienen como asunto una temática relativa a la medición de longitudes; en este sentido, excluimos de esta discusión la tarea de evaluación desarrollada en la segunda de las clases observadas, e incluimos las tareas que en el apartado de descripción de esta sección aparecen bajo los títulos: actividad de medición con unidad arbitraria, actividad de escritura de lo que es medir, actividad de medición con el metro, desarrollo de guía de trabajo, y realización de una lectura y trasncripción de un texto.

Cada una de estas tareas es propuesta por la profesora casi siempre a través de instrucciones verbales; de hecho sólo para el desarrollo de la guía presenta las instrucciones de la tarea de manera escrita. En la tercera sección de este documento hemos reportado algunos resultados y consideraciones acerca de la manera de enunciar dichas tareas.

Cada una de las tareas parece ser propuesta con una intencionalidad específica, la cual no es siempre explicitada en las clases. Al parecer, la actividad de medición con unidad arbitraria procura una experiencia para reconocer que la medida de una longitud depende de las diferentes unidades consideradas. La actividad de escritura de lo que es medir parece tener como intención lograr una descripción personal y compresiva del proceso de medir una longitud que involucre las ideas de unidad de medida y de comparación. La actividad de medición del largo de la tapa del pupitre con el metro parece tener como finalidad que la medida de una misma longitud (la de cada pupitre) puede enunciarse en varias unidades. Por su parte, el desarrollo de guía de trabajo pretende aproximar al reconocimiento de los submúltiplos del metro y establecer relaciones numéricas entre éstos. En tanto que, la realización de una lectura y transcripción de un fragmento del libro de texto, parece procurar informar a los estudiantes de la existencia de los nombres y abreviaturas de los múltiplos y submúltiplos del metro y disponer de una herramienta con base en la cual establecer conversiones de medidas de longitud en el sistema métrico decimal.

Frente a la supuesta intención de la actividad de escritura de lo que es medir, consideramos que por la insistencia de la profesora por incluir las ideas señaladas, se deja de lado otras acciones del proceso de medir, que los estudiantes si advirtieron y explicitaron en la clase (v.g., la ubicación de un segmento a continuación del otro, la ubicación de marcas para la ubicación sucesiva de los segmentos, el conteo de los segmentos 'completos' que cubren al segmento a medir) pero que quizá no registraron en sus escritos. Con respecto a la tarea de medir la longitud de la tapa del pupitre podemos afirmar que bajo las circunstancias en que se desarrolla, difícilmente los estudiantes pueden entender el asunto en cuestión pues el énfasis realizado y la premura con la que se desarrolló la reflexión sobre la tarea apenas pudo dejar la idea de que basta contar los decímetros completos o tomar el primer número de la medida en centímetros para determinar la medida correspondiente; es decir, se deja de lado un elemento fundamental que es precisamente la equivalencia entre las medidas en una y otra unidad. De otra parte, la intención de la tarea de lectura y transcripción de la información del texto parece no atender a las habilidades reales de lectura comprensiva que pueden hacer los estudiantes de este grado escolar y parece limitarse a una actividad de transcripción de textos.

En suma, si bien las intenciones aparentes de cada una de las tareas de aula propuestas a los estudiantes parecen coherentes y ajustadas a lo que quizá deba ser el estudio de la medición de longitudes, la consecución de éstas parece no posibilitarse suficientemente por las condiciones en que se desarrollan las tareas mismas. En cierto sentido, entonces, los objetivos de aprendizaje no parecen favorecerse a través de las actividades propuestas y/o de su desarrollo escolar.

Visión panorámica de los temas abordados

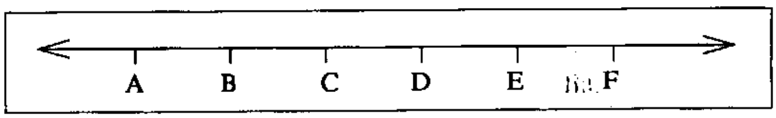
Descripción

En este apartado describiremos la ruta temática seguida a través de las cuatro clases observadas. Para ello, inicialmente presentaremos un bosquejo de la secuencia de actividades realizadas en las clases y entre ellas. Enseguida, sin pretender ser totalmente exhaustivos, expondremos un listado de elementos del conocimiento conceptual tratado, discriminando los términos, las notaciones, las convenciones y los enunciados matemáticos puestos en juego durante las clases. Además, haremos referencia a los elementos del conocimiento procedimental involucrados, describiendo técnicas y procedimientos matemáticos.

Secuencia de actividades

Si bien en la descripción de los segmentos de cada una de las clases reportadas en la anterior sección pueden reconocerse la mayoría de las tareas que se plantearon a lo largo de las cuatro clases, hemos creído conveniente hacer la siguiente descripción de las mismas. En ésta hemos excluido la referencia a la evaluación desarrollada en la segunda clase observada, pues consideramos que los temas sobre los que se indagó en ésta, corresponden a los estudiados en clases anteriores a la primera clase observada.

Inicialmente se hace un trabajo en el reconocimiento y notación de segmentos a partir de un dibujo que contiene una recta y seis puntos denotados sobre ella; el trabajo consiste en establecer cuántos segmentos de recta se determinan en el dibujo a través de los puntos señalados y denotar cada uno de los segmentos.



Como resultado de este ejercicio se advierte que hay una doble notación para el mismo segmento ($\overline{AC}$ y $\overline{CA}$), asunto que se aprovecha para discutir las razones que sustentan el hecho de que estas dos notaciones no refieran segmentos diferentes sino un mismo segmento. En tal discusión se alude a la medida como aspecto que comparten y equipara los 'dos' segmentos. Esta alusión permite cuestionar lo que es la medida de un segmento y lo que significa medir.

Enseguida, pero ligado a la discusión anterior, se desarrolla una actividad de medir una longitud de un objeto físico con diversas unidades de medida definidas por bordes rectilíneos de objetos o por objetos. Esta actividad constituye un ámbito en el que se aborda una discusión acerca de la idea y nombre de la unidad de medida, se identifica que el resultado de la medida de un mismo objeto depende del tamaño de las unidades de medida consideradas, se describe el proceso para hacer una medición, y se mencionan aspectos relativos a qué es medir, o más específicamente qué es medir una longitud, enfatizando la importancia de la acción de comparar dos segmentos.

Para contrastar los aspectos relativos a qué es medir se propone consultar definiciones de la palabra medir en libros y diccionarios y reescribir una definición. A partir de la lectura de las definiciones consultadas se hace un intento de discutir sobre el significado de sus contenidos.

Continuando con la discusión sobre el proceso de medir, se plantea la pregunta acerca de qué se utiliza para medir; de las diferentes respuestas dadas se rescata aquella que se refiere a la unidad de medida. Inmediatamente después, se plantea una situación hipotética en la cual no existiera una unidad de medida convencional y se cuestiona por las consecuencias de ello. A partir de esto se sustenta la necesidad de emplear una unidad de medida convencional y se presenta al metro como una de tales unidades. Se propone entonces el desarrollo de una guía de trabajo (ver el Ejercicio práctico citado en la página 43) en el que se pretende que se determinen las 10, 100 y 1000 partes alícuotas de un segmento patrón (de medida equivalente a un metro), se dibujen y nombren cada una de estas partes y se establezcan relaciones numéricas entre éstas. Algunas de las elaboraciones logradas en este ejercicio son presentadas y comentadas públicamente; luego, se hace una plenaria que pretende unificar las elaboraciones logradas.

Enseguida, con la cinta métrica se realizan mediciones de una longitud específica y su resultado se enuncia en centímetros. Estos resultados luego, también se enuncian en decímetros, o más precisamente en unidades enteras de decímetros.

Se propone entonces una indagación acerca de la historia del metro y qué es el metro. Los resultados de dicha consulta se leen y se cuestiona por la comprensión lograda de tales enunciados. Se intenta sintetizar información (datos) acerca de las condiciones que originan la adopción del metro como unidad patrón y diferentes mediciones físicas relacionadas con éste.

A continuación se propone la lectura de un breve texto acerca de los múltiplos y submúltiplos del metro, lo cual implica escribir la síntesis de las ideas presentadas allí y hacer la transcripción de cuadros o tablas que sirven para calcular equivalencias entre dichos múltiplos y submúltiplos.

Luego, se propone una tarea en la cual hay que tomar algunas medidas de longitudes o distancias relativamente grandes.

Elementos del conocimiento conceptual

Los términos que se enunciaron durante las clases observadas se refieren a objetos o ideas matemáticas y eventualmente a un proceso matemático; éstos son: segmento, recta, semirrecta, punto, líneas paralelas, infinito, orden, dirección de una recta o un segmento, medida, largo, ancho, medir, tamaño, unidad de medida, metro, decímetro, centímetro, milímetro, múltiplo, submúltiplo, distancia, longitud, segmentos congruentes, potencia de 10 y sistema métrico decimal.

Las notaciones que se pusieron en juego en las clases se refieren a la manera de utilizar en un dibujo letras mayúsculas para nombrar los puntos que determinan un segmento, una recta, o una semirrecta; también a cómo utilizar las letras y un símbolo sobre una pareja de ellas para denotar un segmento. También se mencionaron y leyeron las abreviaturas para el metro, y para algunos de sus submúltiplos y sus múltiplos.

Pocas convenciones se usan o plantean durante las clases observadas. El uso de una 'flecha' —o mejor de una cabeza de flecha— al inicio de un trazo rectilíneo se interpreta como que la línea representada en el trazo 'no tiene principio'; si la flecha aparece al final del trazo, se interpreta que la línea representada 'no tiene fin'. La aparición de la abreviatura de la unidad de medida al lado derecho del número de unidades que caben en el segmento a ser medido, es una segunda convención, en este caso expresada tácitamente en las clases. El enunciar la medida de un segmento a través exclusivamente de valores enteros (positivos) y no permitir que aparezcan números mixtos, fraccionarios o decimales es una convención explicitada en las clases observadas.

En las clases se hace un trabajo o se mencionan algunos comentarios en torno a los siguientes enunciados matemáticos que versan sobre cuestiones geométricas y/o sobre asuntos métricos:

- ▲ Dos puntos trazados en una recta señalan un segmento; es decir, es el conjunto de puntos que se encuentran entre los dos puntos señalados.
- ▲ El segmento $\overline{AC}$ es lo mismo que el segmento $\overline{CA}$ porque tienen la misma medida, además tienen las mismas letras.
- ▲ Los bordes rectilíneos de algunos objetos son segmentos. También algunos objetos son segmentos.
- ▲ Un punto trazado sobre una recta determina dos semirrectas.
- ▲ Las líneas paralelas son las que llevan la misma dirección y en ninguno de sus puntos se unen.

- ▲ El resultado de la medición de una longitud depende del tamaño del segmento unidad; si el segmento es grande la medida es menor que si el segmento es pequeño pues la medida será mayor.
- ▲ Medir es comparar con una unidad de medida los objetos de los cuales queremos saber su tamaño y expresar la cantidad de unidades (enteras) que caben en lo que se va a medir.
- ▲ La unidad de medida es el elemento que se toma como base para establecer las comparaciones con lo que se va a medir.
- ▲ El decímetro es una de las diez partes congruentes en que se puede dividir el metro.
- ▲ El centímetro es una de las cien partes congruentes en que se puede dividir el metro pero también son los trazos numerados de la cinta métrica.
- ▲ El milímetro es una de las mil partes congruentes en que se puede dividir el metro pero también son los trazos no numerados de la cinta métrica.
- ▲ En un decímetro hay cien milímetros o diez centímetros.
- ▲ El metro es una unidad de medida inventada para disponer de una unidad universal y constante.
- ▲ Los múltiplos y submúltiplos del metro se obtienen al multiplicar o dividir —respectivamente— la unidad patrón, metro, por potencias de 10.

Para ilustrar el tratamiento que se hizo de algunos términos, notaciones, convenciones y enunciados, a continuación presentamos su descripción.

Notación de segmentos. En cuanto a la notación se recuerda la manera de simbolizar un segmento y el significado de los signos implicados. La referencia a la notación se da cuando un estudiante que ha identificado al segmento determinado por los puntos A y B intenta nombrarlo pero parece no recordar cómo hacerlo. Un estudiante, por indicación de la profesora, pasa al tablero y escribe $\overline{AB}$. Con respecto al significado del símbolo escrito sobre las letras que determinan el segmento, la profesora pregunta "¿Qué significan esas dos rayitas?" ante lo cual los estudiantes enuncian respuestas como: "que el segmento es sólo uno", "que tiene principio y tiene fin".

En otra de las clases la profesora expresa que las letras asociadas al segmento cumplen el papel de nombre de aquel, es decir "lo bautizan".

Definición de segmento. En una de las clases el trabajo acerca de la definición de segmento aparece como un intento de la profesora para hacer que los estudiantes observen más segmentos que los cinco que han reconocido y que se determinan por seis letras adyacentes de la recta.

P: Bueno, ahora sí, recordemos a ver, ¿qué era lo que habíamos visto que era un segmento?

E: Que eran dos puntos, que era una raya que no tenía fin y no tenía principio.

P: Una raya que no tenía principio ni fin, ¿sería eso lo que dijimos? [Entonces le preguntó a los otros estudiantes si la respuesta de su compañera era válida y les solicitó que revisaran lo que tenían escrito en el cuaderno] A ver Marina.

E: [La estudiante leyó la definición que tenía escrita en el cuaderno] Dos puntos trazados en una recta nos señalan un segmento, es decir son el conjunto de puntos que se encuentran entre los dos puntos señalados.

P: Listo.

En otra de las clases los estudiantes insisten en definir segmento a través de la característica "tiene principio y fin".

Definición de semirrecta. La referencia a la semirrecta aparece a partir de la respuesta que dos estudiantes dan a la pregunta sobre cuántos segmentos hay en la recta del ejercicio. Ambos estudiantes hacen referencia a dos de las semirrectas determinadas por los puntos extremos en la figura (i.e., a la semirrecta a la izquierda del punto denotado por A y a la semirrecta a la derecha del punto denotado por F). Como definición de semirrecta apelan a la característica descrita por el enunciado "tiene comienzo, pero no tiene fin".

Idea de infinito. Una vez que los estudiantes han reconocido y nombrado muchos segmentos que se definen a través de los seis puntos señalados en la recta, la profesora menciona la idea de infinito y la asocia con la imposibilidad de contar los elementos de un conjunto. En otro momento de las clases se asocia la idea de infinito con la característica de 'no tener fin' de las rectas o las semirrectas.

Dirección de un segmento. La discusión propuesta por la intervención de un estudiante quien manifiesta reconocer un solo segmento en las dos notaciones que relacionan las letras de los puntos que lo determinan en diferente orden, hace que la profesora haga una breve referencia a la dirección del segmento, señalando que lo que cambia entre los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{CA}$ es "la dirección; en una ocasión lo estamos tomando hacia la derecha y en la otra ocasión lo estamos tomando hacia la izquierda". En otra clase la profesora usa la idea de dirección, o más precisamente de igualdad en la dirección de las rectas, para establecer un criterio para juzgar cuándo dos líneas son paralelas. En esa misma clase ha mencionado que un punto marcado en una recta determina dos semirrectas y que éstas tienen "direcciones opuestas".

Identificación de bordes rectilíneos con segmentos o un objeto con un segmento. En repetidas ocasiones la profesora identifica los segmentos con los bordes rectilíneos de objetos tales como el cuaderno o la escuadra, y en otras con objeto (v.g., el esfero o la regla).

P: [Ella se colocó enfrente de los estudiantes, tomó un cuaderno y señaló el lomo de éste] Cogemos el cuaderno y lo observamos por este lado, ¿qué tenemos ahí?

E: [Varios] Una recta. Una medida. Un segmento.

P: (...) No es una medida.

E: Es un segmento.

P: ¿Cómo, hija?

E: Es un segmento.

P: (...) Miren aquí, estamos indicando, estamos señalando un segmento.

P: En esta fila vamos a coger los esferos ¿qué tenemos aquí?

E: Un segmento también.

P: ¿Sí será un segmento?

E: [Varios] Sí.

P: ¿Por qué?

E: [Varios] Porque tiene principio y fin.

P: Muy bien.

El resultado de la medida depende del tamaño de las unidades. Al momento de registrar en el tablero los datos que los estudiantes habían obtenido al medir el largo del pupitre con unidades arbitrarias, la profesora procura precisar el tamaño relativo de las unidades; específicamente, hace referencia a si el cuaderno era grande o pequeño, si las reglas eran de distinto tamaño, o si los lados de la escuadra eran desiguales. Además intenta que los estudiantes justifiquen a qué se debe que existan distintas medidas para una misma longitud.

P: Bueno, listos, estuvo medido el pupitre. ¿Todos los pupitres miden lo mismo?

E: No. No porque [pausa].

P: El que quiere hablar, indica.

E: Depende de los lados que tomamos.

P: Depende del segmento con que uno mida; no con todos dio lo mismo, observen, en algunos casos está como igual, pero en otros tienen medidas diferentes. ¿Eso qué significa? ¿Qué podemos decir de acuerdo a lo que escribimos allá en el tablero?

E: [No se entiende].

P: ¿Son iguales, según eso? [señala los resultados escritos en el tablero]. Su compañera dijo: depende con lo que lo midamos, ¿depende de quién? del segmento que utilizamos para medirlos. Si el segmento era grande [pausa].

E: Da menos

P: Si el segmento es pequeño [pausa].

E: Va a dar más.

Definición de medir. Con respecto a la descripción de lo que es medir se presentaron varias respuestas enunciadas por los estudiantes antes de haber consultado en los textos: "medir es como queremos saber centímetros o metros cuánto mide algo", "medir es tomarle la medida a un objeto", "medir es tomarle el largo, el ancho", "medir es comparar una cosa con otra", "es utilizar una de esas tantas formas que hay para medir algo y en ésta se llama segmento", "es como calcular los segmentos que caben".

Luego de escuchar estas respuestas y de reaccionar a éstas, la profesora intenta una construcción de una definición de medir.

P: (...) Una palabra clave: comparar. Lo que hicimos fue comparar. ¿Qué?

E: Una medida con otra.

P: ¿La medida?

E: Comparar los segmentos.

P: Comparar los segmentos. Marina dijo comparar una cosa con otra. Partamos de lo que nos dijo Marina. ¿Comparar qué?

E: Una cosa con otra, una unidad de medida.

P: ¡Ah! Comparar con una unidad de medida. ¿Pero a quién comparamos?

E: A un segmento. ¿A una unidad de medida? Un objeto.

P: ¿A cuáles?

E: Un pupitre.

P: ¿Y qué era lo que queríamos hacer con el pupitre?

E: Saber cuánto media.

P: Saber cuánto media, ¡ojo! Entonces comparar con una unidad de medida los objetos de los cuales queremos saber su medida [esto lo fue escribiendo en el tablero]; para no escribir medida escribamos tamaño. Los objetos que queremos saber su tamaño. A los objetos que queremos saber su tamaño los comparamos ¿con quién?

E: Una unidad de medida.

Después la profesora indaga nuevamente por las definiciones que los estudiantes han escrito y obtiene varias y diversas respuestas que incluyen elementos que ella ha escrito en su definición.

Elementos del conocimiento procedimental

En el trabajo realizado en las clases observadas sólo reconocimos, en su orden, una técnica para contar todos los segmentos determinados en una recta en la que se han denotado seis puntos, un procedimiento matemático para hacer una medición y una técnica para convertir una medida en centímetros en una medida en decímetros. Presentamos a continuación algunos detalles de tales técnicas y procedimiento.

Técnica para contar segmentos. La profesora en un intento por organizar la información producida por los estudiantes y de sistematizar el proceso de reconocimiento de los segmentos que permita establecer cuáles y cuántos segmentos hay, enuncia y desarrolla una técnica que consiste en enunciar y contar para cada una de las letras (tomadas de izquierda a derecha) los segmentos determinados por ésta y las demás letras a su derecha. La cita siguiente ilustra la manera como se presentó y desarrolló la técnica:

> P: (...) [refiriéndose a los segmentos] los podemos contar, los tenemos ahí, obsérvenlos bien. De cada uno vamos sacando un segmento. Aquí habíamos dicho que había ¿cuántos? Cinco. Luego con cada una de las letras observemos. [La profesora iba señalando en el tablero las letras A, B, C, D, y E y mostrando los segmentos que tenían como extremo A señalando AB, AC, AD, AE y AF, al mismo tiempo que los contaba. Luego indicó y contó a los segmentos BC, BD, BE y BF. Algo similar hizo con los determinados por C, D y E, hasta que los contó todos y del conteo obtuvo 14[2]]. ¿Hay dieciséis? ¿había unos cuántos repetidos ahí? ¿En conclusión cuántos hubo?
>
> E: [Varios estudiantes] Dieciséis. Catorce.
>
> P: Catorce hemos contado ahí.

Proceso para hacer una medición. La primera explicación que hace la profesora a los estudiantes es bastante breve y se realiza como el enunciado de la tarea que van a realizar: "Lo que vamos a hacer es lo siguiente. Cogemos nuestro segmento, el que sea, el que tiene cada fila y vamos a colocarlo desde el orillo del pupitre, desde un orillo hasta el otro". Con este enunciado los estudiantes realizan la medición del largo de la tapa de su pupitre; sin embargo, después, cuando la profesora está registrando los resultados obtenidos por los estudiantes a través del proceso de medición, hace algunas precisiones sobre el proceso para hacer una medición, particularmente sobre el tipo de número que se debe obtener como resultado de la medición.

> P: A ver ¿cuánto le dio?
>
> E: A mí me dio tres segmentos y medio.
>
> P: Tres segmentos y medio. Tomemos solamente el segmento completo.
>
> E: Profe, en el esfero nos dio dos y medio.
>
> P: ¿Les dio qué?
>
> E: Dos y medio.
>
> P: Dijimos que íbamos a dejarlos como completicos. Dos.

2. En el conteo la profesora comete un error pero no lo advierte: en total hay 15 segmentos.

Además, la profesora realiza, frente a todos los estudiantes, el proceso utilizado para medir el ancho del tablero con el largo de un cuaderno; simultáneamente les pregunta "¿qué es lo que estoy haciendo?" y en sus respuestas se reconoce la descripción del proceso.

P: Lo voy a hacer. [Se dirigió al tablero y colocó el lomo del cuaderno sobre el borde del tablero y ubicó el dedo índice al extremo del cuaderno; a partir de ese punto puso el cuaderno y ubicó un nuevo punto. Cuando hizo la primer marca dijo 'uno', cuando hizo la segunda marca dijo 'dos', etc. Y los niños repitieron en coro los números]. ¿Qué es lo que estoy haciendo?

E: Una medida.

P: ¡Ah no!

E: Midiendo.

P: ¿Cómo?, ¿estoy qué? (...) A ver ¿tú qué puedes decir?

E: Que está formando segmentos.

P: Que estoy formando segmentos.

E: ¿Que está nombrándolos?

P: ¿Que estoy qué?

E: ¿Que está nombrando los segmentos?

P: ¿Dónde he nombrado, al hacer eso? ¿Los estoy nombrando?

E: ¿Le estoy midiendo lo ancho?

P: Los estoy midiendo, bueno, pero para poder medir ¿qué es lo que estoy haciendo con el segmento y con el largo del tablero?

E: Está contando los segmentos.

P: Estoy contando los segmentos. Bueno, los voy a contar también. ¿Qué será lo que estoy haciendo? A ver ¿qué será lo que estoy haciendo? Voy a volverlo hacer.

E: Está contando los segmentos.

P: Sí, pero antes de contarlos, ¿qué es lo que hago?

E: Medirlos.

P: Sí, pero para medirlos, ¿qué es lo que hago?

E: Está colocando los segmentos.

P: Sí señora estoy colocando, señalando los segmentos. Bueno, y al colocar los segmentos realmente ¿qué es lo que estoy haciendo?

E: Trazando puntos.

P: Trazando puntos; y al trazar los puntos ¿qué es lo que hago con el segmento que me da aquí?

Técnica para convertir una medida en centímetros en una medida en decímetros. En una de las clases la profesora pone a los estudiantes a medir con la cinta métrica la longitud del largo de la tapa del pupitre. Como respuesta a la tarea, los estudiantes dan la medida en centímetros (v.g., 98 cm., 94 cm.) y la profesora les plantea como nuevo reto, enunciar la medida en decímetros. Inmediatamente les sugiere que cuenten el número de decímetros que caben "completicos" en la cantidad de centímetros que representa la medida.

Discusión

Una descripción similar a la expuesta en el apartado anterior de esta sección, pero un poco más sucinta, le fue presentada a la profesora en la entrevista y se le cuestionó acerca de la validez de tal descripción. Ella estuvo de acuerdo con la descripción y señaló que si bien pudo haber recorrido los temas de manera diferente (aunque no explicita tal manera) lo hizo así pues tiene un interés en no dejar sueltos los temas y ligarlos entre sí; por ello vio como una muy buena oportunidad enlazar el estudio de los segmentos con el estudio de su medición, asumir las unidades convencionales de longitud (v.g., metro, decímetro, centímetro, milímetro) como segmentos que se usan para medir longitudes.

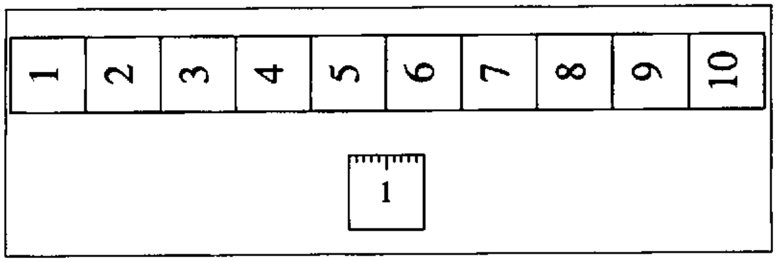
No obstante esta apreciación, consideramos que los vínculos entre los segmentos, en tanto objetos geométricos y la medición de su longitud, carece de puentes que el desarrollo curricular observado no consideró. Por un lado, pensamos que una definición conjuntista de segmento[3], como la registrada en el cuaderno de un estudiante y leída por ella, no favorece la identificación de la longitud como una cualidad común a todos los segmentos que, a través de la consideración de la cantidad de tal característica, permite establecer una igualdad (o relación de equivalencia) entre ellos y una relación de orden para el conjunto de los segmentos rectilíneos. De otro lado, no se registró trabajo alguno en torno a la identificación de dicha cualidad ni al establecimiento de tales relaciones de equivalencia ni de orden, asuntos todos ellos fundamentales desde las perspectivas planteadas por Campbell (1956, pp. 186, 190-191), Chamorro (1995, p. 38) y Chamorro y Belmonte (1991, pp. 15, 49-57).

Dejando de lado la descripción de la secuencia de tareas y observando lo planteado en la descripción de los elementos del conocimiento conceptual y procedimental, uno de los primeros hechos que se evidencian es el énfasis en asuntos relacionados como los elementos del conocimiento conceptual comparado con los citados como elementos del conocimiento procedimental. Particularmente, sorprende que tan sólo se haga referencia a tres asuntos procedimentales y, en contraste, a más de una docena de ideas o enunciados matemáticos. No obstante, este énfasis en aspectos conceptuales y el consecuente descuido de aspectos procedimentales, es reportado como característico de la geometría escolar y en la actualidad es cuestionado vehementemente, como puede apreciarse en los planteamientos de Modesto Arrieta (1995).

De otra parte, si bien reconocemos que la aproximación a tales asuntos conceptuales y procedimentales se hace por vías inductivas, mediadas por actividades promovidas por las tareas propuestas, no todas las tareas propuestas permitieron la aproximación al conocimiento como parecía estar previsto o de manera adecuada. Particularmente, consideramos que el trabajo realizado con el ejercicio práctico (ver página 43) no permite entender al metro, al decímetro, al centímetro ni al milímetro como segmentos, sino como trozos de una cinta métrica o como marcas de ésta; esta aserción cuestiona el alcance y comprensión real de más de la tercera parte de los enunciados matemáticos citados en el apartado de descripción anterior. Igualmente consideramos que asumir el medir como comparar no describe suficientemente bien la actividad realizada por los estudiantes y por la profesora al medir la longitud de un segmento.

En efecto, en la guía de trabajo se propone que los estudiantes dibujen uno de los segmentos obtenidos al dividir el "segmento unidad metro" en diez segmentos congruentes y que dibujen uno de los segmentos obtenidos al dividir el "segmento unidad metro" en cien segmentos congruentes. Los dibujos que los estudiantes hacen son muy variados pero una gran mayoría presenta como resultado dibujos similares a los siguientes, en los que el decímetro y el centímetro parecen ser figuras geométricas con superficie, más que segmentos rectilíneos.

3. Dos puntos trazados en una recta señalan un segmento; es decir, es el conjunto de puntos que se encuentran entre los dos puntos señalados.



Este tipo de dibujos son aprobados y promovidos por la profesora a través de instrucciones y comentarios que procuran que los estudiantes dibujen el decímetro o el centímetro "completo", es decir, que dibujen exactamente lo que observan. Nos parece que a través de esta actividad se consolida la confusión entre el decímetro y el centímetro con sendos trozos de la cinta métrica; esta confusión se expresa también al mencionar la cinta métrica con la palabra metro. En sentido estricto el metro es el patrón de medida de longitud, así, la cinta métrica tan sólo representa ciento cincuenta unidades de longitud, cada una equivalente a una centésima parte del metro, aunque también representa a través de distintos colores cada una de las décimas partes del metro, pero los respectivos trozos de la cinta no son decímetros o centímetros. En otras palabras, se está confundiendo un objeto o instrumento con una de sus características.

Esta confusión aumenta cuando la profesora menciona frases como: "[los milímetros] son las rayitas pequeñas que están apareciendo ahí [señala la cinta métrica]", "mírenlo bien, las rayitas pequeñas, cada una de las rayitas pequeñas, que encontramos ahí, esos son los mil segmentos congruentes", o, "porque ya estaba dibujado y no era sino observarlo; los cien centímetros ¿cuáles eran los cien centímetros? pues, las rayitas más grandes que además están numeradas, ¿cierto? está enumerado desde el uno hasta el cien". En las clases observadas hay también evidencia de confundir también el segmento con el objeto; así se habla del esfero, de la regla, del lomo del cuaderno, de uno de los lados de la escuadra, etc. como segmentos.

En la entrevista se le cuestionó a la profesora sobre estas diferentes 'acepciones' que había puesto en juego para el caso del centímetro. Su respuesta describía que no había advertido ese hecho, pero que se justificaba en la necesidad de que los estudiantes "enriquezcan su vocabulario" y adviertan que "no es sólo una, la forma de expresarlo". Además, señala que estas diferentes acepciones no le generan confusión al estudiante y que una muestra de ello es que en el desarrollo de la tarea asignada para fuera de la clase en la última clase observada, los estudiantes no tuvieron problema para medir el largo y el ancho de su habitación, es decir que en efecto midieron longitudes.

Por otra parte, como lo señalamos arriba, consideramos que asumir el medir como comparar no describe suficientemente bien la actividad realizada por los estudiantes y por la profesora al medir la longitud de un segmento. En efecto, al momento de que la profesora les muestra a los estudiantes el proceso de medir la longitud de uno de los lados del tablero con uno de los bordes del cuaderno, los estudiantes le enuncian muchos aspectos de tal procedimiento para realizar la medición que van más allá de la comparación. Sin embargo, la profesora pareciera esperar como respuesta completamente válida la palabra 'comparar'; más aun, ella posteriormente enfatiza en la importancia de tal palabra.

Recapitulando los planteamientos de Chamorro (1995, p. 43) y de Chamorro y Belmonte (1991, pp. 33-34) observamos que en efecto en el proceso de medir una longitud con una unidad arbitraria hay más actividad matemática que la comparación; incluso, desde nuestra perspectiva, la acción de comparar la unidad de medida con el segmento a medir no es una acción que se realice en este procedimiento. Lo que en realidad la profesora y los estudiantes realizan se puede describir así: (i) De un objeto se selecciona una de sus cualidades y se le aísla de las otras cualidades del objeto; en el ejemplo objeto de análisis, del tablero la profesora seleccionó el lado definido por su borde vertical. (ii) Se asimila la cualidad con un objeto geométrico idealizado; en el ejemplo, se asimila el lado del tablero con un segmento vertical cuya longitud es igual a la del lado del tablero. (iii) Se selecciona un objeto que comporte una cualidad de la misma naturaleza a la del objeto a ser medido, pero en menor cantidad y se asimila con un objeto geométrico idealizado; en el ejemplo, la profesora selecciona el cuaderno, de éste selecciona uno de sus bordes, el cual asimila con un segmento que es menor que el segmento asociado al lado del tablero y le denomina segmento unidad. (iv) Se hacen coincidir uno de los extremos de los dos segmentos y se ubican los segmentos en una misma dirección; en el ejemplo, la profesora ubica el borde del cuaderno sobre el borde del tablero haciendo coincidir el extremo superior de ambos. (v) Se identifica el extremo de la unidad sobre el segmento a ser medido por ésta; la profesora hace una marca, con el dedo o con un marcador para tablero, de tal punto. (vi) Se determina si el extremo de la unidad no 'supera' el extremo del segmento a ser medido. (vii) Si lo anterior se confirma, se asigna en orden un número de la secuencia numérica de los naturales, y luego se itera el segmento unidad sobre el segmento a ser medido repitiendo los pasos iv, v y vi hasta que no se confirme el paso anterior, por supuesto que ya no haciendo coincidir los extremos sino la marca con el extremo de la unidad; en el ejemplo, la profesora desplaza el cuaderno verticalmente para hacer coincidir su extremo superior con la marca trazada y poder hacer una nueva marca. (viii) Se enuncia como medida el último número de la secuencia numérica asignado; la profesora enuncia el número natural que corresponde a la cantidad de unidades iteradas sobre el segmento a medir sin que lo supere en longitud. Como se ve, en sentido estricto no hay comparación alguna entre la unidad de medida y el segmento; quizá haya comparación entre un segmento que es un múltiplo de la unidad de medida y el segmento a ser medido, en cuyo caso se está estableciendo cuál es más corto o más largo que el otro. No obstante, sí hay un conteo de segmentos, sí hay una construcción de segmentos, sí se están poniendo segmentos, y sí se están trazando puntos, como lo sostienen las respuestas de los estudiantes a la pregunta "¿qué estoy haciendo?" formulada por la profesora para dar cuenta del proceso de medir (ver la cita en la página 57). De otra parte, reconocemos que este procedimiento es incompleto, pero además inadecuado para dar cuenta de lo que es medir magnitudes no escalares (v.g., la velocidad, la temperatura, la densidad); para éstas la medición se hace de manera indirecta y en sentido estricto aquí tampoco la medición es sólo la comparación con unidad de medida; estos procesos son referenciados por Campbell (1956, pp. 195-196) como mediciones derivadas.

El procedimiento de medir presentado antes, permite también reconocer que efectivamente uno de los elementos importantes para medir una longitud es la elección de la unidad de medida. En el ejercicio de medir la longitud de la tapa del pupitre la profesora selecciona las unidades con las que se va a realizar la medición, lo cual implica que los estudiantes no se enfrentan a considerar el tamaño y tipo de unidad que tienen que utilizar. Ahora bien, reconocemos que la profesora no sólo tiene la intención de que los estudiantes realicen una medición de una longitud con una unidad arbitraria (que de hecho realizan sin mayores dificultades) sino que tiene la intención de que se describa y escriba el proceso utilizado; en este sentido, consideramos que la descripción elaborada en clase es demasiado superficial y poco significativa para el proceso de aprendizaje.

Para finalizar esta discusión queremos señalar que el manejo intuitivo de las nociones geométricas ligadas a los conceptos de recta, semirrecta, y segmento es un hecho conscientemente determinado por la profesora quien sostiene en la entrevista que hace este tipo de tratamiento "para que ellos lo entiendan un poco más, porque como hay que darles es algo concreto, con ellos en este momento en grado sexto toca lo concreto, que lo vean; a medida que va pasando el tiempo pues hay que irles haciendo la claridad, ellos deben ir entendiendo, como comprendiendo exactamente lo que es el concepto, pero no en ese momento". En este sentido, entendemos que en el ejercicio de identificar los segmentos definidos por seis puntos sobre una recta, se trabaje sobre la gráfica y no a través de ella, es decir que se promueve la idea de que los objetos geométricos son precisamente aquellos que se pueden dibujar. Si bien estamos de acuerdo con esta aproximación intuitiva, nos cuestionamos a si en la posterior escolaridad de los estudiantes sí efectivamente van a tener la oportunidad de abandonar la aproximación intuitiva y concreta para abordar una aproximación abstracta a los objetos geométricos e incluso a los aspectos métricos; creemos que no.

Interacción a través de la cual discurren la enseñanza y el aprendizaje

Descripción

En este apartado presentamos una descripción acerca de la manera como se da la interacción entre la profesora y los estudiantes en al menos tres escenarios, a saber: la enunciación de tareas, la revisión de las producciones de los estudiantes a las tareas propuestas, y el trabajo individual o en grupo.

Uno de los ámbitos en los que se da una interacción entre la profesora y los estudiantes es cuando ella les enuncia las tareas que espera que ellos realicen. Como se mencionó antes, la mayoría de las tareas propuestas son enunciadas de manera verbal por la profesora y muy frecuentemente la profesora en un intento por capturar la atención de todos los estudiantes hace varios llamados de atención disciplinarios mientras enuncia la tarea. Por otro lado, es muy frecuente que la profesora modifique la tarea propuesta o que luego de haberla propuesto y una vez los estudiantes están trabajando en ésta, enuncie condiciones que complementan la tarea o la precisen.

El enunciado de la segunda tarea propuesta en la primer clase ejemplifica de manera bastante precisa la anterior observación. Ésta se refiere a la actividad de medición con unidad arbitraria. Allí, después de hacer precisiones acerca de los segmentos que van a utilizar para medir el largo de la tapa del pupitre la profesora dice: "Lo que vamos a hacer es lo siguiente. Cogemos nuestro segmento, el que sea, el que tiene cada fila y vamos a colocarlo desde el orillo del pupitre, desde un orillo hasta el otro. ¿Ya? Empecemos". Luego de que los estudiantes han empezado a trabajar en el desarrollo de la tarea la profesora hace varias intervenciones que pretenden precisar asuntos de la tarea; por ejemplo, les solicita que escriban el resultado de la medición en el cuaderno, luego les dice que el resultado de la medida debe dar cuenta de la cantidad de unidades que caben completas en la longitud a medir.

Otro ejemplo que ilustra la observación realizada es precisamente la tarea de escribir en el cuaderno lo que es medir, los resultados de las mediciones hechas y la descripción de lo que hicieron para hacer las mediciones. Para ello la profesora dice:

> P: Entonces por favor quiero que ahí en el cuaderno quede copiado qué fue lo que dijimos que era medir. Escríbanlo con sus propias palabras (...) y lo que tenemos aquí ¿qué fue?
>
> E: Diferentes medidas de segmentos.
>
> P: ¿Y las tenemos en el cuadernos? Escribimos qué fue lo que hicimos para obtener esas medidas, con sus palabras.

Luego de haber escuchado la respuesta de un par de estudiantes a la tarea citada antes, la profesora dice: "todos deben tener escrito con sus propias palabras lo que sus compañeros acabaron de leer. ¿Quiénes no tienen escrito eso? Levanten el brazo quienes no tienen escrito eso. Con eso había que empezar, porque dijimos copiamos lo que está acá en el tablero". Pasado un tiempo, la profesora dice: "Después de copiar lo que escribimos acá, de decir cómo se llama al segmento que utilizamos, entonces vamos a escribir con nuestras palabras qué es medir, que es lo último que vamos a escribir". Como la profesora cambia el rumbo de la tarea (pues hace que algunos estudiantes enuncien a toda la clase lo que para ellos es medir, antes de que lo escriban, y además escribe su propia definición de lo que es medir) propone una nueva tarea o redefine la anterior: "Cada uno escríbalo con sus propias palabras, lo que yo escribí allá no es lo que ustedes van a escribir".

Algunos de los llamados de atención acerca de la disciplina de la clase, que la profesora hace mientras enuncia las tareas atienden a la ubicación de los estudiantes en sus puestos, al silencio que debe haber para poder escuchar. No obstante, al momento de enunciar las tareas asignadas para fuera de la clase, casi siempre hay un alto nivel de ruido y los estudiantes están fuera de sus puestos o están organizando sus libros y cuadernos para la clase siguiente; esto, pues generalmente la tarea se asigna por fuera del tiempo de la clase, es decir una vez que ésta ha terminado.

Veamos ahora el segundo escenario reseñado arriba. La revisión de las producciones es quizá el ámbito en el cual se da la mayor cantidad de interacciones de la profesora y los estudiantes. En cada una de las clases observadas la profesora hizo revisión de las tareas asignadas para fuera de la clase y de las producciones logradas por los estudiantes en su trabajo en el aula. Esta revisión se caracteriza por ser liderada y orientada por la profesora. Es ella quien formula las preguntas que deben ser contestadas, quien selecciona a los estudiantes que deben contestar, quien decide en qué momento terminar una discusión e iniciar otra, quien decide cuándo se debe profundizar en una respuesta, explicarla o someterla a debate, quien controla la disciplina y la actividad de los estudiantes, quien decide qué se escribe en el tablero y qué se enuncia de manera verbal, quien decide lo importante de la discusión y quien ordena la actividad y el momento de sintetizar de manera escrita, corregir o copiar en el cuaderno.

Como consecuencia de este papel protagónico, se espera que los estudiantes cumplan las órdenes y disposiciones en el momento preciso y de manera ágil; lo cual con relativa frecuencia no sucede. Entonces la profesora hace reconvenciones sobre la disciplina. En esta dirección hace llamados de atención acerca de las intervenciones de los estudiantes como respuesta a lo que sus compañeros o ella escriben en el tablero, sobre la imposibilidad de levantarse del puesto, acerca de las condiciones para poder pasar al tablero (v.g., "No se me pueden levantar del puesto porque aquí los estamos escribiendo en el tablero", "ninguno de los que levante la mano va a pasar al tablero"), y/o acerca de las condiciones para poder intervenir (v.g., "quien quiera hablar porque hablamos veinte al tiempo y no sabemos qué es todo lo que decimos", "quien quiera hablar indica por favor", "el que quiera hablar indica", "A ver, voy a pedirles un favor, quien quiera hablar, quien tenga algo que decir indica, porque si hablamos todos al tiempo no nos vamos a escuchar y nos quedamos con la duda").

La revisión de las producciones se hace habitualmente de manera plenaria; es decir, la profesora de espaldas al tablero y frente a los estudiantes habla para que todos los estudiantes la escuchen y se espera que los estudiantes desde sus puestos, también hablen para que todos sus compañeros y la profesora escuchen. De igual manera se espera que lo que se escriba en el tablero o lo que se exhiba pueda ser visto por todos los presentes en el aula.

En la revisión de la tarea el tablero cumple un papel diverso, como se puede evidenciar en las dos situaciones siguientes. En la primera clase la profesora utiliza el tablero para dibujar la recta; este dibujo es la referencia observable por todos los estudiantes sobre la que ellos dan cuenta del desarrollo del ejercicio de contar y nombrar los segmentos y sobre el cual la profesora interroga por la cantidad real de segmentos implícitos allí. Los estudiantes utilizan el tablero para escribir, a través de las notaciones, cada uno de los segmentos que observan; simultáneamente sirve como registro escrito en el que se puede advertir fallas en la notación usada. El dibujo hecho en el tablero también sirve para que un estudiante señale unas semirrectas que considera son segmentos y para que la profesora de manera ordenada señale y nombre los segmentos que efectivamente se definen en la gráfica. En el ejercicio de la medición de la longitud del largo de la tapa del pupitre, se hace un uso del tablero en al menos tres modalidades. En primer lugar, el tablero se usa para registrar los resultados de las mediciones efectuadas por los estudiantes; para ello la profesora hace una lista de los objetos que se han considerado como unidades y luego escribe las diferentes medidas que los estudiantes reportan; posteriormente estos datos deberán ser copiados por los estudiantes en sus cuadernos. Este registro de valores es utilizado para hacer que sea evidente para los estudiantes que las medidas obtenidas son diferentes, dependiendo del objeto que se utilice como unidad. En segundo lugar, el tablero se usa como objeto a ser medido en tres momentos diferentes. En tercer lugar, la profesora registra en el tablero palabras (v.g., unidad, comparar), nombres (v.g., segmento de medida, medida de segmentos) y frases (v.g., comparar con una unidad de medida los objetos de los cuales queremos saber su tamaño) que considera importantes en la construcción de una definición de lo que es medir.

Durante la revisión plenaria la profesora enuncia algunas afirmaciones en respuesta a acciones que realizan los estudiantes: "ahora sí empezaron a darse cuenta de que hay más segmentos", "Fíjense que nosotros también podemos con nuestras propias ideas entender". La primera, en respuesta a la solicitud de varios estudiantes de pasar a escribir los segmentos que estaban viendo, luego de que un estudiante mencionó y denotó un segmento definido por puntos no adyacentes; la segunda, como reacción a que los estudiantes sí recordaron los nombres que un estudiante y ella habían enunciado para referirse al segmento con el que se mide (unidad de medida o segmento de medida).

Examinemos ahora el tercer escenario reseñado, es decir el de trabajo individual o en grupo. Cuando los estudiantes están desarrollando las tareas de aula, la profesora casi siempre pasa por sus puestos para revisar lo que están realizando, contestar preguntas que los estudiantes le hacen, cuestionar alguna respuesta que le parezca que amerita una reflexión o corrección especial, hacer llamados de atención disciplinaria o para enunciar frases de reconocimiento o reconvención. En este sentido, enuncia aserciones acerca de acciones que no realizan los estudiantes: "Eso no es tarea. Es que había que hacerla. Y, tú, ¿ni siquiera el cuaderno? Terrible. Mamita y en ocho días no tuviste tiempo, eso fue lo que hizo en todo este tiempo", "No hicieron lo que debían hacer. No escribieron en el cuaderno", "No escuchan para que sigan las instrucciones de cuál es el orden que debemos llevar", "No tienes ni idea porque no estabas atenta", "Andan en las nubes. Ay mijitos". Algunas otras afirmaciones se relacionan con lo que deben hacer los estudiantes: "Eso debemos escribirlo en el cuaderno porque después vamos a mirar y decimos ¿esto qué es? No tenemos ni idea. Pero escríbanlo con sus palabras", "Deben estudiar. Ustedes deben aprender los conceptos que ustedes han ido escribiendo en el cuaderno", "Su imaginación, su creatividad, pongan en juego sus habilidades comunicativas, sus habilidades de pensamiento. Pilas con esa ortografía".

Por supuesto que las intervenciones orientan el trabajo que realizan los estudiantes. Por ejemplo, cuando los estudiantes están desarrollando la el ejercicio práctico (ver página 43) la profesora plantea instrucciones para que los estudiantes entiendan que la instrucción del primer numeral puede desarrollarse doblando convenientemente la cinta métrica para obtener los diez decímetros y poder ver sólo uno, que es precisamente lo que quiere que se dibuje.

No obstante esta actividad de la profesora en el trabajo de los estudiantes, en algunas oportunidades no logra interactuar con la mayoría de ellos no pudiendo orientar el trabajo de ellos. Por ejemplo en el desarrollo del mismo numeral citado en el párrafo anterior, algunos estudiantes hicieron dibujos que no correspondían a lo que la profesora esperaba y que luego en la entrevista admitió no haber visto. En ésta justificó este hecho en el elevado número de estudiantes que configuran el curso (aproximadamente 45).

Discusión

Un aspecto que llama la atención de la interacción es que no se menciona que existan exposiciones en el tablero por parte de la profesora. En efecto, el uso que se hace del tablero casi siempre es para recoger los resultados de una tarea o para trabajar sobre la tarea misma.

Otro aspecto que atrae nuestra atención es la referencia a los llamados de atención disciplinaria de manera simultánea a la enunciación de las tareas. Desde nuestra perspectiva este hecho hace que el mensaje y características de la tarea que se quiere comunicar se vean permeados por información de otra naturaleza e incluso que llegue a los estudiantes de manera inadecuada. Quizá esto justifique también que la profesora deba hacer adecuaciones sobre la marcha a la tarea propuesta. Esto no contribuye tampoco a que los estudiantes puedan copiar el enunciado de la tarea.

De otra parte, el hecho de que la profesora sea quien oriente tantos aspectos de las revisiones de las producciones, hace que algunas normas no guarden la coherencia que se espera. En particular, nos llama la atención al uso y aceptación que se hace de la norma acerca de cuál es la forma de participación (el que quiera hablar levanta la mano); al parecer lo reiterativo de este llamado evidencia que sólo tiene un efecto temporal y no permanece como una norma de clase. Quizá esto se deba a que en algunas oportunidades la profesora permite hablar a varios estudiantes al mismo tiempo y que se responda en coro en otras oportunidades.

Desde nuestra perspectiva, consideramos que en muchas ocasiones las respuestas que dan los estudiantes a preguntas o asuntos planteados por la profesora, proceden más como adivinanzas que como concatenación lógica y razonada. Esta apreciación fue objeto de indagación en la entrevista ante lo cual la profesora afirmó que si los estudiantes

> *no dan la respuesta que debe ser —no la que yo espero sino la que debe ser— sigo haciéndoles otras preguntas y algunos adivinan o dicen palabras, palabras, palabras [pausa]. Bueno el objetivo no es que digan palabras, palabras, sino que ellos empiecen a pensar y a idear qué puede ser [pausa] pues [pausa] ¡no! concreto es que ellos pongan en juego su imaginación y vayan razonando, no es que digan palabras al azar por adivinar.*

En otras oportunidades los estudiantes incorporan a sus respuestas palabras que la profesora ha enunciado y enfatizado para intentar lograr una respuesta satisfactoria. A propósito de esta apreciación, en la entrevista le formulamos una pregunta a la profesora. Ella manifestó que no había advertido este hecho pero que en las plenarias, cuando estaba intentando que los estudiantes "organizaran un concepto" ella sí enfatizaba algunas palabras que consideraba eran fundamentales en la enunciación del mismo o en la descripción de una definición, como por ejemplo la palabra 'comparar' en la definición de lo que es medir, o 'medida' en la igualdad de segmentos.

Valoración de las producciones de los estudiantes

Descripción

En las clases observadas pudimos reconocer algunas respuestas a las preguntas ¿qué es lo que se considera como una producción válida o adecuada en el salón de clase?, ¿quién determina cuando una producción es válida o adecuada? y ¿cómo se determina que una producción es válida o adecuada?

En términos bastante generales evidenciamos que la profesora juega un papel protagónico en cada uno de los aspectos ligados a estas preguntas, que sus diferentes tipos de reacciones constituyen indicadores para comunicar si algo es válido o adecuado, que los juicios de los estudiantes acerca de la producción de sus compañeros no son efectivamente considerados para determinar lo válido o adecuado de tal producción, que hay un énfasis en exigir que las producciones (particularmente las respuestas a algunas preguntas) incluyan el objeto sobre el que se está indagando (es decir, estén correctamente sustantivadas), que la información que se consulte y copie de un texto pueda tener significado para el estudiante y que él lo pueda verbalizar y que el estudiante pueda redactar enunciados y definiciones con "sus propias palabras". En lo que sigue de este apartado, intentaremos presentar una visión más próxima de cada uno de estos aspectos.

En primer lugar, veamos las reacciones de la profesora como indicador de la validez o adecuación de la producción de los estudiantes. Al examinar las reacciones de la profesora provocadas por las producciones de los estudiantes relativas a preguntas sobre los temas y/o procedimientos matemáticos sobre los que se trabaja en clase, se distinguen al menos tres tipos de reacciones, a saber: de aceptación de la respuesta, de aceptación relativa de la respuesta, de no aceptación de la respuesta. También se reconocen respuestas de los estudiantes que parecen no generar reacción alguna.

Reacciones de aceptación de la respuesta. Una de las maneras habituales de la profesora para determinar que una respuesta es correcta consiste en repetir la respuesta del estudiante y decir que está bien. Las siguientes citas ejemplifican la anterior afirmación:

E: Semirrecta.
P: ¿Por qué semirrecta?
E: Porque tiene comienzo, pero no tiene fin.
P: Porque tiene comienzo y no tiene fin, muy bien.

P: ¿Por qué más?
E: Porque sirve para medir.
P: Porque sirve para medir, muy bien, claro.

P: Pongan cuidado a lo que están diciendo sus compañeros, tenían una regla y les dio dos, unieron las dos y les dio seis. ¿Y al unirlas qué fue lo que ellas hicieron con el segmento?
E: Lo agrandaron.
P: Muy bien, lo agrandaron.

En otras oportunidades la validación no incluye la frase "muy bien" pero sí el parafrasear la respuesta.

P: A ver ¿tú qué puedes decir?
E: ¿Que está formando segmentos?
P: Que estoy formando segmentos.

P: ¿Los qué?
E: Los comparó.
P: Los comparamos, fuimos comparándolos.

P: A ver, ¿quién se acuerda?
E: Unidad de medida.
P: Unidad de medida o segmento de medida.

En cambio, en otras sólo incorpora una frase de aceptación.

P: ¿Sí será un segmento?

E: [Varios] Sí.

P: ¿Por qué?

E: [Varios] Porque tiene principio y fin.

P: Muy bien.

Algunas pocas ocasiones la profesora agrega algo más a la respuesta del estudiante.

P: ¿Qué es lo que está igual?

E: La C.

P: Y la A, bueno hay los mismos puntos, ¿qué es lo que está cambiando?

E: El orden.

P: El orden, la dirección, en una ocasión lo estamos tomando hacia la derecha y en la otra ocasión lo estamos tomando hacia la izquierda o de izquierda a derecha ¿cierto? Muy bien.

En todos los anteriores casos la profesora es quien decide si una respuesta es correcta.

Reacciones de aceptación relativa de la respuesta. En algunas oportunidades la profesora parece considerar que la respuesta del estudiante está parcialmente correcta y reacciona a ésta a través de un reconocimiento parcial de la respuesta e inmediatamente plantea una objeción a la misma. Como ejemplo de esta manera de reacción se presentan las siguientes citas:

P: Observemos solamente la parte que está en verde, ¿qué está ocurriendo? si nos dicen que son los mismos segmentos no interesa que los llamemos AC o CA. ¿Qué es lo que nos están permitiendo esos puntos?

E: Que uno sea el punto donde se comienza y el otro donde se termina.

P: Y en la otra ocasión si lo tomamos desde C hasta A. Eso está muy bien pero la pregunta que yo les estoy haciendo es: si nos dicen que hay los mismos puntos, ¿esos puntos qué nos están dando para ese segmento?

E: Medir es como [pausa] queremos saber centímetros o metros [pausa] cuánto mide algo.

P: Medir es querer saber cuánto da en centímetros, metros. Pero es que aquí hablamos de una unidad y en este caso cuando lo hicimos con el cuaderno no nombramos los centímetros, no nombramos los metros.

E: Medir es tomarle el largo, el ancho.

P: Medir es tomarle el largo, el ancho. Pero ¿cómo lo tomamos?

Reacciones de no aceptación de la respuesta. Ante respuestas que la profesora juzga como incorrectas o incompletas, se encuentra que ella utiliza como reacción una frase del estilo: "Ojo y oído pongamos cuidado a lo que vamos a decir", "Pilas, pilas, pilas". Sin embargo, es más frecuente encontrar que ella parafrasea la respuesta dada y enseguida duda de las respuestas de los estudiantes y/o plantea una nueva pregunta; esta forma de reacción parece indicar a los estudiantes que la respuesta ha sido incorrecta. También se da el hecho de que la profesora simplemente niega la respuesta de los estudiantes sin esgrimir argumento alguno que sustente la invalidez de la respuesta. Las dos primeras citas ilustran la primera manera de reacción, en tanto que las siguientes ejemplifican la otra.

P: ¿Qué significan esas dos rayitas?

E: Que el segmento es sólo uno.

P: Que es sólo uno. A ver ¿qué significa?

P: Listo. ¿qué más dijimos del segmento?

E: El segmento se nombra por medio de las letras, que dividen la recta.

P: Por medio de las letras que dividen la recta ¿serán las letras que dividen la recta? ¿o quiénes dividen las rectas?

E: [Varios estudiantes] Los puntos.

P: ¿Esos puntos qué nos están dando para ese segmento?, ¿una qué?

E: [Varios] ¿Semirrecta? ¿Segmento?

P: No, ¿una qué?

E: [Varios] Línea. Medida.

P: No, ¿una qué?

E: [Varios] Una recta. Una línea.

P: No, ¿una qué?

P: Miramos esta parte en el cuaderno cerrado o puede ser esta pero nos queda más fácil mirar la de atrás.

E: Es una medida.

P: No es una medida.

No reacciones. En algunas oportunidades la profesora no exhibe reacción alguna a la respuesta de los estudiantes; esto se da casi siempre cuando parece estar de acuerdo con la respuesta enunciada. Las siguientes citas son un ejemplo de ello:

E: [Un estudiante leyó] Para medir con segmentos tomamos cuadernos, esferos y reglas y cada uno midió con su segmento y medimos cuántos segmentos teníamos que tomar para medir un objeto.

P: ¿Y tú qué escribiste? [le dice a otro estudiante].

P: Lee por favor.

E: Medir es comparar una medida de un objeto con otro llamado unidad de medida y así sabremos cuál es la medida.

P: [Le dice a otro estudiante] ¿Tú qué escribiste?

En segundo lugar, veamos los juicios de los estudiantes acerca de la producción de sus compañeros. Muy eventualmente la profesora promueve que los estudiantes validen o se cuestionen por la producción que sus compañeros han realizado en torno a una tarea o a una pregunta. En las pocas oportunidades que lo hace, nos parece que no da la oportunidad efectiva de que haya reacciones legítimas y autónomas sino que se supedita la validez al contenido del texto copiado en el cuaderno o a una opinión no argumentada. Las dos citas siguientes ejemplifican lo relatado antes.

P: Bueno, ahora sí, recordemos a ver [pausa] ¿qué era lo que habíamos visto que era un segmento?

E: [una estudiante contestó] Que eran dos puntos, que era una raya que no tenía fin y no tenía principio.

P: Una raya que no tenía principio ni fin, ¿sería eso lo que dijimos? [Entonces le preguntó a los otros estudiantes si la respuesta de su compañera era válida y les solicitó que revisaran lo que tenían escrito en el cuaderno].

P: ¿Ustedes pueden pensar en un nombre que podamos darle a estos segmentos especiales que utilizamos para poder comparar con el largo del tablero?

E: ¿Segmento de medida?

P: Segmento de medida ¿les parece que lo llamemos segmento de medida?

En tercer lugar, veamos lo que hemos dado en llamar la sustantivación de los enunciados. En repetidas oportunidades, la validez o adecuación de la respuesta dada por un estudiante incorpora la consideración acerca de si la frase enunciada tiene explícitamente señalado el sujeto al que se hace referencia o no. Este énfasis es reiteradamente exigido por la profesora y en cierto sentido explicado a la clase, de tal suerte que constituye una de las normas para responder, que los estudiantes conocen y procuran acatar, no siempre de manera exitosa.

Por ejemplo, cuando se están revisando las definiciones sobre medir, la profesora insiste en que las respuestas de los estudiantes incorporen el sustantivo del que se está hablando; para ello, ante un par de respuestas sin sustantivo pregunta: "¿qué?", "¿quién?", como se evidencia en las siguientes citas.

P: ¿Tú qué escribiste?

E: Es tomar la medida a algo.

P: ¿Qué?, ¿qué?

E: ¿Qué es medir? Es tomar la medida a algo que nosotros queramos medir, el ancho o el largo etc. que uno mida [pausa].

P: Por favor, Angela.

E: Es comparar una unidad de medida [pausa].

P: ¿Quién?, ¿qué?

E: ¡Ah! Medir es comparar una unidad de medida a una cosa u otra.

Cuando se están revisando las respuestas a uno de los numerales de la evaluación la profesora hace la observación sobre la sustantivación, pero sólo para la primer respuesta enunciada, para las demás parece no considerarse tal exigencia.

P: Cuéntanos ¿qué escribiste que era una línea recta?

E: Era la que se extendía infinitamente.

P: ¿La qué? ¿Qué será la que?

E: La línea.

P: La línea que se extiende indefinidamente. ¿Tú qué escribiste?

E: Que era una unión de puntos que no se sabe ni dónde comienza ni dónde termina.

P: Una unión de puntos que no se sabe dónde comienza ni dónde termina. Muy bien. ¿Tú qué escribiste?

E: Es una serie infinita de puntos.

En el trabajo en grupos propuesto por la profesora para que se lea y copie de un texto, pudimos reconocer que los estudiantes eventualmente tienen en cuenta la exigencia de la profesora. A continuación presentamos la transcripción de este breve episodio ocurrido entre estudiantes sin la presencia de la profesora en el grupo.

E: Prefijo, escriba prefijo [pausa] ¿ya? [pausa] es la que indica la potencia de diez [pausa].

E: No, no porque ¿es la qué? nos vacean después, porque ¿es qué? ¿es la qué?

E: Hay sí. Es la que no, porque que tal nos vacea, porque nos pregunta ¿la qué? ¿la que qué?

E: Es la potencia [pausa] es la potencia de diez por la cual [pausa].

En cuarto lugar, examinemos lo referente a la exigencia de significado respecto de los textos copiados por los estudiantes. En la revisión de las dos tareas asignadas por la profesora en las cuales los estudiantes tenían que buscar en un texto las definiciones de medir y la historia del metro, respectivamente, se reconoce el interés de la profesora para que los estudiantes le den significado a lo que han copiado. En este sentido, la profesora considera y explicita como criterio de validez y adecuación de la producción de los estudiantes, tanto que hayan hecho la tarea como que le puedan dar un significado o al menos que puedan explicar el contenido de lo copiado. Las siguientes citas dan cuenta de ello.

P: Angela, ¿qué escribiste tú?

E: [Medir es] determinar la longitud, extensión, volumen o capacidad de alguna cosa.

P: ¿Entiendes qué es lo que escribiste? A ver, con tus palabras, extensión (...) ¿Qué significa eso que tú escribiste? A ver, Angela ¿Se acuerdan que tenemos un compromiso? Que cuando copiamos algo de un libro lo entendemos primero para poder escribirlo.

E: El metro es la unidad de longitud adoptada en casi todos los países del mundo y que sirve de base para todo un sistema de pesas y medidas. El metro es la longitud a temperatura de cero grados centígrados de prototipo internacional del platino e iridio.

P: [La profesora interrumpió preguntando] ¿Cómo? ¿Alguien entendió?

E: [Pero el estudiante siguió leyendo] pero el que se conserva en Sevres. Esta barra es aproximadamente inferior en 0,2 milímetros a la diez millonésima parte del cuadrante del meridiano terrestre. Esta medida después de una conferencia de pesas y medidas de 1983, se define como la longitud de trayectoria del recorrido en el vacío por la luz en el tiempo de 1/299 792 458.

P: A ver hijo, ahora quiero que con tus palabras me cuentes qué fue lo que leíste, cuénteles a todos sus compañeros.

En quinto y último lugar, veamos lo correspondiente a la redacción de enunciados y definiciones con 'sus propias palabras'.Cada vez que la profesora propone a sus estudiantes que escriban una definición o que redacten y corrijan algo que se ha discutido (por ejemplo, un procedimiento), utiliza la expresión 'con sus propias palabras'. Las siguientes citas tomadas se refieren respectivamente al enunciado de una tarea de aula, a un numeral de la evaluación y al enunciado de una tarea asignada para fuera de la clase: "Entonces por favor quiero que ahí en el cuaderno quede copiado qué fue lo que dijimos que era medir. Escríbanlo con sus propias palabras", "Con mis propias palabras cuento ¿dónde y por qué apareció la Geometría?" y "Como hoy trabajamos con el metro, quiero que ustedes con sus propias palabras escriban ¿qué es el metro?, ¿cuál es su historia y qué es el metro?".

Discusión

En las diferentes formas de reacción de la profesora para determinar si una producción de sus estudiantes es válida o adecuada reconocemos un 'lenguaje' al cual acceden los estudiantes a través de su participación en las clases. Las reacciones constituyen así un mensaje concreto que los estudiantes interpretan de manera bastante fiable. Esta manera de juzgar la validez de las respuestas en cierto sentido desconoce y relega a un segundo plano las características del conocimiento matemático y los procesos de la validación de las afirmaciones respecto de éste. Por ejemplo, no promueve la argumentación razonada como último criterio de validez matemática de un enunciado, no promueve la duda sobre lo que se enuncia y concluye, no promueve la búsqueda de ejemplos o contraejemplos. Además, ayuda a consolidar una visión de las matemáticas en la que la validez de sus afirmaciones depende de quien las enuncie o del nivel de conocimiento y experiencia que se tenga; para el caso de la clase, es la profesora quien posee el conocimiento y la experiencia que le permite juzgar y validar.

En la entrevista cuestionamos a la profesora por el tipo de reacciones que percibimos. Ante ésto ella manifestó que frente a una respuesta correcta intentaba profundizar en ella, "porque si está bien hay que clarificar sobre todo no tanto para él, no tanto para el que está contestando, sino más para los otros, porque cuando uno hace ese tipo de preguntas y se las hace a un estudiante no es para él, es para el grupo, para que la pregunta, o la respuesta que está dando el chico, ayude a enriquecer a todo el grupo". Además comentó que frente a una respuesta incorrecta ella intentaba no dejarla pasar pues "lo importante ahí no es la respuesta, lo importante es entonces saber cuál es la causa por la cual, o hacerles ver a ellos cuál es la causa por la cual no están contestando correctamente". Adicionalmente le cuestionamos acerca de si creía que era ella quien debe ocupar el papel protagónico en la determinación de si algo es válido o no. Ella nos contestó que cree que sí es ella la que tiene "que aprobar o desaprobar porque (...) soy la que está orientando", que los estudiantes son pequeños y requieren que alguien les establezca lo correcto y que debe atender a la confianza que los estudiantes tienen en las afirmaciones de los profesores, hasta el punto de cuestionar las afirmaciones de la familia cuando éstas contradicen a la que menciona la profesora. No obstante, procura que entre los estudiantes haya un proceso de confrontación y validación de sus producciones y considera, además, que una alternativa sería plantear 'debates' pero que eso haría que se alargan las discusiones.

Desde nuestra perspectiva, esta manera de pensar no favorece la argumentación razonada en matemáticas y en consecuencia la promoción de competencias argumentativas, en boga por esta época. Además, consideramos que con aquella manera de pensar se consolidan supuestos como que los estudiantes de los primeros grados de la Básica Secundaria no son competentes para realizar algunos procesos y que sólo hasta que los aprendan podrán enfrentarse a realizarlos, desconociendo que se aprende es y a través de la acción. También se refuerza la idea de que la matemática es un dogma y que el profesor es el sacerdote quien transmite la verdadera interpretación de tales dogmas.

Por otro lado en la entrevista indagamos por las razones que sustentan la exigencia de sustantivar las frases que se enuncien. La profesora manifestó entonces

> *la idea mía y la justificación de la necesidad es para que ellos razonen y sepan de qué están hablando, porque a veces hablan y hablan sin saber por qué hablan ni para qué. Entonces la idea es esa: que sepan de qué están hablando y les quede claro de qué es lo que hablan, concreto, concreto, sobre qué hablan, sobre qué temas, sobre qué aspectos; entonces para eso es que digan el sustantivo y no siempre 'lo que' y 'el que' porque a la hora de la verdad ese 'el que' no tiene sentido, lo dicen pero sin saber qué es, o de pronto uno lo dice y el que lo dijo lo sabe pero los que lo están escuchando, nada, no tienen ni idea de qué habló.*

Desde nuestra perspectiva la explicación que suministra la profesora es coherente con su actuar en las clases, a pesar de que ella misma ocasionalmente comete el error de no sustantivar algunas de las frases que enuncia, aunque cuando sucede esto, el contexto de enunciación permite reconocer sin ambigüedad alguna el sustantivo respectivo.

Con respecto a la exigencia de la profesora relativa a que los textos copiados puedan ser significados, creemos que fuera de la clase poco se puede hacer para que los estudiantes signifiquen escritos que no atienden al desarrollo lector de los estudiantes, o quizá, al margen de lo que puedan colaborar los padres para la comprensión de tales escritos. Reconocemos que durante la clase la profesora hace esfuerzos ingentes para que se logre una mediana comprensión de los textos copiados; sin embargo, creemos que cuando solicita a los estudiantes que lean algo diferente a lo que algún compañero acaba de leer parece olvidar las deficiencias lectoras de sus estudiantes y el reconocimiento a que para poder saber si lo escrito es diferente a lo que alguien leyó antes, deben poder significarse ambos contenidos.

Por otra parte, consideramos que no se hace suficiente trabajo durante la clase para apoyar los procesos autónomos de escritura. Consideramos que la exigencia de la profesora, por sí sola, no beneficia la calidad de las producciones escritas de los estudiantes. Adicionalmente, consideramos que no siempre es explícito para los estudiantes el contenido de lo que deben escribir, pues éste ha surgido de una discusión que seguramente no han podido organizar ni seguir de manera conveniente. Muestra de ello son, por ejemplo, las respuestas que los estudiantes dan a la tarea de describir el proceso de medición, en las cuales no se reconocen la mayoría de las ideas discutidas sino que se observan los términos que la profesora ha enfatizado e incluso escrito en el tablero.

Aspectos de la ruta pedagógica en un curso de matemáticas de grado sexto Caso 2

En este capítulo presentamos, a través de cuatro secciones, un análisis de cuatro clases de matemáticas desarrolladas con un grupo de grado sexto. En cada una de las secciones incluimos un apartado de descripción de lo sucedido en las clases y uno de discusión de lo observado.

Este capítulo se alimenta y apoya en el análisis de las transcripciones hechas de las clases que observamos[1], las cuales recapitulan información procedente de un registro en video, dos en audio y las notas de un par de observadores; en este sentido, las citas textuales que incorporamos en este documento para ilustrar o ampliar las ideas presentadas, provienen de aquéllas. También nos apoyamos en el análisis de la transcripción de la entrevista realizada con las profesoras después de concluida la observación. En las citas hemos cambiado los nombres de quienes intervienen y en algunas de ellas hemos utilizado las letras P y E para indicar que es la profesora o un estudiante (aunque no siempre el mismo, incluso en una misma cita) quien enuncia un determinado texto; además hemos incluido entre corchetes ([ ]) aspectos de lo sucedido en la clase que no fueron enunciados pero sí observados, hemos utilizado tres puntos suspensivos entre paréntesis ((...)) para denotar que excluimos parte de la cita y hemos hecho uso de las comillas dobles (" ") para citas breves. Cabe aclarar que estamos usando los genéricos "estudiante", "estudiantes", "alumno" y "alumnos" para referirnos tanto a hombres como a mujeres.

Esquema general de la clase

Descripción

Aspectos de la organización y funcionamiento de la clase

El curso está organizado en grupos[2] de tres o cuatro estudiantes que por momentos trabajan individualmente pero también interactúan entre sí y con la profesora. Sin embargo, en tres de las clases observadas pudimos advertir que un estudiante no hacía parte de algún grupo y que durante las sesiones trabajó solo.

El trabajo de los estudiantes en la clase está guiado de manera general por documentos elaborados por las profesoras —a los que ellas denominan "talleres de matemáticas o guías"— que los alumnos reciben gradualmente a medida que van terminando de desarrollarlos dado que "avanzan a su ritmo"; así que, durante una clase se pueden estar desarrollando diferentes talleres; de hecho, en las cuatro clases observadas pudimos ver trabajo en torno a los primeros seis talleres.

Son dos las profesoras que tienen a su cargo el desarrollo de la clase: entre las dos atienden durante toda la sesión a los diferentes grupos —en todo momento de la observa-

1. Por las características mismas del funcionamiento de estas clases —las que se harán explícitas en la siguiente sección—, la mayor parte de la grabación de audio y de video hecha, lo mismo que las notas de campo se refieren al transcurso de toda la hora de clase para un grupo de cuatro estudiantes o al transcurso de fragmentos de la hora de clase para varios grupos de cuatro estudiantes.
2. La disposición de los pupitres hace posible conformar bien cada uno de los grupos de cuatro estudiantes; además, entre los diferentes grupos hay espacios que hacen posible la circulación de la profesora por el salón.

ción advertimos que cada profesora estuvo interactuando con algún grupo o un determinado estudiante—, haciéndose cargo, cada una[3], de unos determinados grupos, que dicho sea de paso, en el salón están ubicados cercanamente y además, están desarrollando unos ciertos talleres; tal organización tiene como propósito que la misma profesora atienda a quienes están trabajando en los mismos temas.

Iniciación de la clase

La clase comienza cuando entran las profesoras y los alumnos al salón y la mayoría de ellos se organizan en sus puestos y la profesora se acerca a los diferentes grupos que atiende para saludarlos y si lo ve necesario, les hace comentarios relativos a que comiencen a trabajar, saquen sus útiles, en qué punto del taller van, etc. La clase se desarrolla desde el comienzo hasta el final en un ambiente de mucho ruido producido por las conversaciones de los estudiantes; además, es usual que haya estudiantes fuera de sus puestos.

Desarrollo de la clase

Enseguida, los alumnos de cada grupo continúan el desarrollo del taller en el que están trabajando, lo que incluye leer los textos del documento y comentar entre ellos lo leído, responder las preguntas, llevar a cabo las actividades que están planteadas, todo ello a través de un intercambio verbal entre los miembros del grupo y con la profesora que lo tiene a su cargo, quien durante la hora de clase se involucra con el grupo en más de una ocasión. Algunas veces, después de haber hablado en el grupo con respecto a un determinado punto del taller, los alumnos de manera individual escriben en su cuaderno un texto que presenta su solución; otras veces, siguen con la discusión de otro punto. En principio, el taller les indica qué tareas deben realizar y en qué secuencia; sin embargo, la interacción de cada grupo con la profesora define en gran medida los detalles de lo que se hace en el grupo; dicha interacción se da, bien sea, para que los alumnos hagan preguntas a la profesora acerca de algo que no han entendido o le expongan las ideas y soluciones que han elaborado, o, bien para responder a sus preguntas y comentarios en torno a los asuntos que se están tratando. En particular, en la interacción de cada grupo y de cada estudiante con la profesora se determina la necesidad de continuar trabajando en un cierto punto del taller, se hace la evaluación del trabajo realizado y se decide en qué momento pueden los alumnos comenzar a abordar el siguiente taller. En la interacción de las profesoras con los grupos se evidencian algunas diferencias en los énfasis hechos por cada una de ellas; por ejemplo, diferencias en la exigencia de leer haciendo la puntuación apropiada, de explicitar los significados para términos que podrían ser desconocidos por los alumnos, de escribir para registrar el resultado de un intercambio verbal, de exponer las ideas de manera completa en los intercambios con la profesora, de dar razones para lo que se afirma.

En las diferentes guías cuyo desarrollo se observó, podemos identificar distintos asuntos tratados en las tareas; reconocemos tareas que propenden por la introducción de ideas geométricas desde una perspectiva intuitiva (e.g., hechos geométricos que relacionan las nociones de punto y recta y de punto y plano); tareas que se resuelven con algún conocimiento aritmético para las cuales no se ha discutido ni presentado previamente una estrategia de solución (e.g., problemas de razonamiento); tareas que exigen leer y comprender la información expuesta en las guías con respecto a objetos matemáticos para poderla emplear en la solución de ejercicios (e.g., representación gráfica de segmentos, semirrec-

3. Por esa razón, cuando en la descripción estemos aludiendo a la interacción con un grupo particular, haremos referencia a "la profesora" y no a "las profesoras".

tas, rectas); tareas que solicitan aplicar procedimientos matemáticos presentados previamente (e.g., construir un triángulo a partir de cierta información dada).

En la última clase observada se lleva a cabo, durante una hora, una exposición[4] para todo el curso, a cargo de dos grupos de alumnos que en la sesión anterior habían terminado de desarrollar el quinto taller; la exposición —en la que participan todos los integrantes de los dos grupos— se lleva a cabo mediante preguntas formuladas por algún alumno que deben ser respondidas por alguien del otro grupo y viceversa; sin embargo, después de tener la respuesta no se explicita ninguna valoración de parte de quien la formula; la participación de las profesoras en esta actividad se concreta a través de preguntas para ayudar a precisar el contenido de la exposición. La actividad concluye con una indagación por parte de una de las profesoras acerca de la opinión del curso con respecto a la exposición. El propósito de la exposición era abrir un espacio para que los alumnos de tales grupos les contaran a sus compañeros qué habían aprendido al realizar el taller; así lo señala una de las profesoras al explicarle al curso qué van a realizar:

> *Entonces les decía que vamos a tener un trabajo bien interesante en el que vamos a participar todos y vamos a tener, yo diría que por primera vez este año, la experiencia de sus compañeros. Acá se encuentran dos grupitos que ya culminaron su guía número cinco. Aunque los otros no van todos en la misma guía, vamos a compartir con ellos las experiencias que ellos han podido alcanzar al desarrollar la guía número cinco. Estos dos grupitos son los que se van a encontrar hoy; ellos están acá. Ellos nos van a contar qué han alcanzado hasta ahora, qué han aprendido, qué aporte les quieren dar a ustedes que todavía no han llegado allá pero que pronto van a llegar. Entonces, quedamos con los dos grupos y espero el respeto y la colaboración que vamos a tener con ellos.*

Terminación de la clase

Cuando la hora de clase llega a su fin, la profesora hace al grupo con el que está interactuando en ese momento, algún comentario con respecto al trabajo que se está realizando, "Ajá. Seguimos trabajando sobre esta parte. ¿Listos? Levantamos el material porque se nos acabó el tiempo." y hace algo similar con los grupos a los que atiende y que aún no han salido del salón.

Discusión

Al tratar de establecer segmentos en los que se pueda organizar, en general, el discurrir de la clase para todo el curso, advertimos que ello no es posible pues desde el momento mismo en que comienza la clase —cuando entran las profesoras y los alumnos se disponen para iniciar su trabajo— hasta el final —cuando el timbre indica la finalización y profesoras y estudiantes se disponen a salir del salón—, no hay eventos didácticos ni intervenciones de parte de las profesoras o de los alumnos que se realicen para todos en un mismo momento de la clase, es decir, durante cada sesión de clase, cada grupo de tres o cuatro estudiantes vive una experiencia propia y diferente de la de los demás grupos.

Desde nuestra perspectiva, tal característica —que permite diferenciar sustancialmente estas clases de aquellas cuya organización se puede interpretar en términos de segmentos más o menos bien delimitados por sus intenciones y las tareas específicas que se plantean en el marco de actividades comunes para todos los estudiantes— es consecuencia de una serie de decisiones relativas a varios asuntos, entre los que podemos mencionar: ritmo de trabajo de los estudiantes, papel del estudiante en su propio proceso de

4. Para esta actividad, los pupitres estaban de frente al tablero.

aprendizaje, papel de la interacción entre alumnos en el proceso de aprendizaje, papel de la escritura en el proceso de aprendizaje y papel del profesor en el proceso de aprendizaje de los alumnos. Además, está vinculada a factores que de hecho se alejan de lo usual: nos referimos, por ejemplo, a que son dos las profesoras que desarrollan el curso, hay unos documentos escritos con base en los cuales trabajan los estudiantes de manera más o menos autónoma, hay unas expectativas y unas visiones de parte de las profesoras y de la institución[5] que permiten y propician una experiencia de tal índole. A continuación presentamos algunas de las ideas —explicitadas por las profesoras en una entrevista— que desde nuestra perspectiva, guían, de hecho, varias de sus acciones en las clases:

> *(...) para nosotras todos los chicos son triunfadores, son exitosos, son muy importantes, van avanzando, lento o rápido pero van avanzando. (...) Y respetando el ritmo de aprendizaje de cada uno de ellos, eso es la base para nosotros; respetar a la medida que ellos van.*
>
> *[Queremos lograr] Que el chico tome consciencia de que ese aprendizaje es lo que él necesita; que él no sienta como una carga el aprender sino todo lo contrario; en ese sentido vamos avanzando muy lentamente, pero sí se habla con ellos sobre eso, (...) será muy importante el momento en que el chico en lugar de querer pasar de un lado al otro empiece a decir 'yo todavía tengo dificultad en esto entonces voy a profundizar y luego sigo' entonces ya no será una carrera para terminar las guías, y además, no estarán pendientes de qué calificación obtuvieron.*
>
> *Nosotros tenemos una serie de parámetros: para nosotros es fundamental el debate entre ellos ¿sí? Las intervenciones respetuosas; nosotros insistimos muchísimo en eso, el reconocer al otro, que si yo estoy trabajando con Mercedes, la escucho, si no estoy de acuerdo con lo que ella dice, doy mis argumentos por los cuales no estoy de acuerdo, pero no la interrumpo, no le digo "eso no es", ese tipo de cosas; pienso, analizo si está aportando lo que ella dice a lo que está dentro de mi estructura mental, etc.*
>
> *Una de las estrategias que estamos llevando a cabo es la realización verbal, entonces para nosotras es fundamental que el chico se exprese tanto en forma oral como escrita. (...) Queremos estimular el lenguaje como una forma de comunicación, de expresión del muchacho, pero reconocemos que eso es un proceso, un proceso en el que tenemos que quemar todas las etapas y que ellos desde luego deben pasar de expresiones simples a llegar después a una argumentación, a todo ese tipo de cosas; a colocar inicialmente en forma escrita, frases muchas veces sin coherencia, muchas veces cortas, recortadas como sucede ahí, hasta llegar a escribir su discurso como lo sienten y todo ese tipo de cosas, en eso nos estamos apoyando fuertemente en la profesora de español especialmente y en la de inglés.*

Durante la observación realizada, sólo en dos momentos ocurrió algo para todo el curso: en la primera clase observada, al comenzar la actividad, una de las profesoras se dirigió a todo el grupo para aludir a nuestra presencia; en la última clase, dos grupos hicieron una exposición para todo el curso. Percibimos que este último evento ocurrió como respuesta

5. Tanto que haya dos profesoras para atender el curso como que los muchachos puedan trabajar en equipo durante toda la clase son hechos que responden a una decisión institucional a la cual se refirió una de las profesoras durante la entrevista: "El ideal [con los estudiantes] es que conformen su equipo fuerte, de tal forma que independiente de dónde estén y cómo estén, estén aportando a un grupo; estén pensando en el aporte a ese trabajo de grupo; pero todavía de hecho, eso no se da. (...) Y eso está ligado a nuestro PEI donde el primer interés es conformar equipos de maestros; queremos conformar equipos de trabajo entre maestros, inicialmente en la misma disciplina pero después interdisciplinariamente; ese es el ideal para nosotros".

de las profesoras a preguntas que les habíamos formulado anteriormente para indagar si había momentos que convocaran a todos los alumnos y cómo se daban. Al hablar en la entrevista sobre la socialización del trabajo de los alumnos, las profesoras explicaron que:

> *¿Qué buscamos nosotras con eso [la socialización]? Que el chico suba su autoestima, dándose cuenta y socializándole a los otros todo lo que él sabe; que los otros chicos se den cuenta de que este chico sabe sobre la temática y de hecho se apoyen de él cuando lo necesiten. (...) La primera socialización [se refiere a la que observamos nosotros] nació de ellos, salió de ellos. 'Queremos hacerlo, ¿cómo lo hacemos?' La forma como se hizo ese día salió de ellos; expresamente la idea fue de Carlos, uno de los chicos. [Dijeron] 'Nosotros mismos hacemos las preguntas, pero entonces nosotros le hacemos las preguntas a ellos y ellos nos hacen las preguntas a nosotros'. (...) En este momento nosotras no sabemos si pase el año y haya un grupo que nunca haya socializado ante el curso o ante otro grupo.*

Al considerar lo que ocurre de manera independiente para cada grupo durante una clase, podemos reconocer básicamente tres segmentos fácilmente identificables en la descripción hecha en el apartado anterior: uno de inicio, otro de desarrollo y uno de finalización de la clase.

Sobre la base de información obtenida en la entrevista, que concuerda con lo que percibimos en las observaciones hechas, consideramos importante destacar como característica del esquema empleado su flexibilidad, dada por una posición moderada y coherente con unos principios básicos, de parte de las profesoras, que les permite relativizar las prioridades. Veamos tres ejemplos.

A pesar de que las profesoras dan un gran valor al trabajo en equipo y su estrategia metodológica lo propicia e intenta evidenciar el valor y las ventajas que tiene, esta forma de trabajo no es una condición que se imponga a los estudiantes. Detrás de esto vemos que para las profesoras lo importante no es que el estudiante cumpla con un esquema establecido sino que los esquemas empleados sean medios que contribuyan a lograr unas metas en la formación de los estudiantes. Al respecto, en la entrevista, una de las profesoras refiriéndose a un estudiante que trabajó solo durante algunas sesiones, señala que:

> *(...) ese chico acabó de llegar al curso y tiene dificultad para integrarse a un grupo; quiere trabajar solo. Empezamos un proceso. Después le propuse que trabajáramos los dos como grupo; empezamos a trabajar los dos y ya en este momento él está integrado, incluso, liderando uno de esos grupos. (...) Queremos mirar las diferencias en cada muchacho; si este muchacho inicialmente quiere el trabajo individual, le permitimos que trabaje de esa manera; si se acomoda al trabajo en grupo, lo trabajamos de esa manera.*

Las profesoras consideran que comunicar lo aprendido puede contribuir notablemente a que el alumno gane confianza en sí mismo ya que sus compañeros pueden apoyarse en él cuando lo requieran, y están dispuestas a abrir espacios para la socialización, sin embargo, aceptan que alguien no quiera hacerlo frente a todo el grupo y que comience a hacerlo ante la profesora. Detrás de esto vemos, de nuevo, que para las profesoras los esquemas de trabajo con los estudiantes no son fines sino medios para lograr su formación, y además, son conscientes de que esa formación es un proceso que requiere de experiencias diversas y graduales. Los siguientes comentarios de las profesoras en la entrevista apoyan lo dicho:

Los [estudiantes] míos, lo primero que me dijeron fue: '¡ah!, no profe; nosotros no vamos a socializar con los otros grupos, nosotros le socializamos a usted o en el grupo, pero no más'. Un chico, Pérez, me dijo: 'yo le explico pero a usted sola, a mí no me pase allá, yo le explico a usted sola, yo no le explico a nadie más' y el chico está socializando la guía para mí. Yo le hago preguntas, él me las contesta (...).

En el grupo que yo tengo ahora sucede todo lo contrario, ellos quieren a toda hora mostrar su trabajo y ahí es donde ya piden que no sea sólo ahí ante los chicos del curso 603 sino que ya lo quieren con otros cursos. Ha habido un cierto entusiasmo en ese sentido.

Las profesoras están convencidas de la importancia de que los estudiantes "pongan en el afuera lo que tienen en sus cabezas", esto les lleva a abrir espacios reales para que ellos hablen y escriban; por ello, no dudan en la pertinencia de que un estudiante emplee media hora de la clase haciendo la tarea de redactar apropiadamente la solución de un problema que ha sido discutido en el grupo. Vemos que para ellas, lo importante no es que el estudiante tenga lleno un cuaderno; lo importante es que escribir tanto como debatir son actividades que permiten expresar lo que ellos creen, lo que quieren, lo que entienden; sin embargo, reconocen que en el proceso en que están empeñadas a los estudiantes les hace falta recorrer mucho trecho para llegar a construir sus propios argumentos.

Al considerar conjuntamente el papel preponderante de la interacción de la profesora con el grupo, para garantizar que se realicen ciertas acciones como parte de la actividad deseable, y el papel que al respecto pueden jugar los talleres, advertimos que estos últimos tal como están elaborados tienen poca posibilidad de jugar un papel importante ya que aunque enuncian para los alumnos las tareas que deben realizar, hacen pocas alusiones a asuntos en los que enfatizan las profesoras en su interacción. Incluir alusiones a tales asuntos en los talleres demandaría de parte de las profesoras un trabajo adicional en la preparación de los correspondientes diseños curriculares y, probablemente, no garantizaría la disminución en los correspondientes esfuerzos durante la interacción, pero quizás daría posibilidad de más autonomía para algunos alumnos al no tener que esperar que la profesora se acerque al grupo para puntualizar qué acciones adicionales deben realizar y además, podría contribuir a que las experiencias de los alumnos se parezcan más unas a otras con respecto a los asuntos mencionados antes, porque los énfasis, al menos en lo escrito, están planteados de la misma manera para todos los alumnos del curso. En la entrevista, las profesoras hacen referencia a que no obstante hacer un diagnóstico inicial que informa sus decisiones con respecto a los temas a tratar en el curso, sobre la marcha detectan dificultades de los estudiantes a las que es necesario atender y en consecuencia esas circunstancias justifican y requieren de parte de ellas un papel muy activo durante la interacción con los alumnos, que conlleva a darle un papel relativo a los talleres:

(...) Hay muchas ocasiones en que debe uno orientarlos por otros caminos dependiendo de lo que suceda en el desarrollo [del taller]. (...) En el conocimiento que a diario tenemos de lo que el chico piensa, de lo que el chico sabe... a ver, nuestro trabajo empieza con un diagnóstico en términos generales, ¿cierto? pero talvez no recoge todo lo que nosotros necesitamos saber, entonces con ese diagnóstico nosotros decimos ¡ah, bueno!, tenemos que trabajar esto de geometría, esto de aritmética, esto y esto, pero cuando ya viene el desarrollo de la clase resulta que en muchas ocasiones nos damos cuenta que no, que ahí hay una dificultad para que el chico avance, entonces vemos que tenemos que manejar otra serie de conceptos y al interactuar con ellos tratamos de resolver esas dificultades, pero, de hecho, eso no está en el taller. A veces ellos

toman el taller y lo desarrollan y no hay ningún problema, pero si se les nota algún problema, alguna dificultad retomamos cosas anteriores para poderlos encausar en lo que ellos ven.

En lo que pudimos ver, no advertimos que sus interacciones con los alumnos se desvíen significativamente con respecto a los asuntos abordados en los talleres; sí incluyen algunos énfasis que no se vislumbran en los documentos.

Visión panorámica de los temas abordados

Descripción

A continuación nos proponemos reconstruir en la medida de lo posible el recorrido temático por el cual son conducidos los alumnos al desarrollar los cinco primeros talleres propuestos en este curso, que según las profesoras tienen como temas: pensamiento lógico (los dos primeros), problemas de razonamiento lógico (el tercero), sistemas geométricos (los talleres cuarto y quinto). Para ello describimos cada taller dando cuenta, en primer lugar, de los objetivos que explicitan las profesoras en los respectivos documentos, en segundo lugar, de las tareas y/o actividades planteadas y, en tercer lugar, del conocimiento matemático implicado.

Taller 1

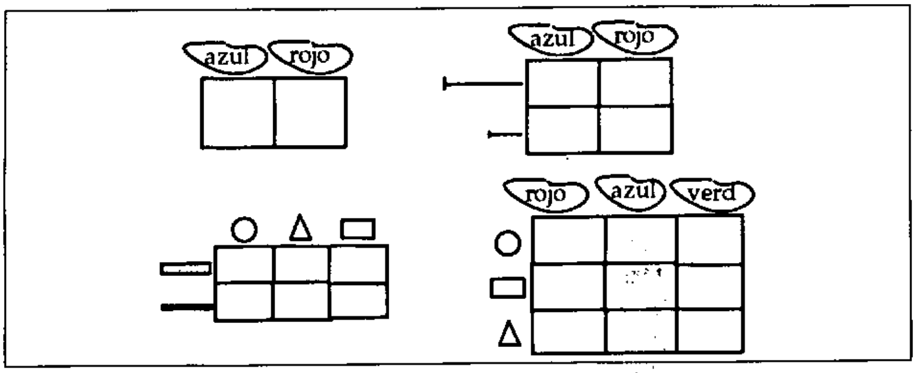
Para el primer taller se enuncian los siguientes objetivos:

> Manejar los mecanismos básicos del pensamiento lógico a través del juego con bloques lógicos.
>
> Elaboración de procesos mentales de solución a situaciones de la vida cotidiana con base en enunciados escritos o verbales.
>
> Efectuar, en forma oral y/o escrita, descripciones de los juegos y ejercicios realizados con los bloques lógicos.

El taller se configura a través de dos actividades:

1) Una, denominada "juegos libres", que contempla en primera instancia la manipulación de las fichas de los bloques lógicos con el fin de que los alumnos se familiaricen con ellas y las reconozcan; luego, se le pide al grupo que forme una figura con las fichas y a continuación, cada alumno del grupo debe escribir una historia sobre la figura formada.

2) Otra, denominada "juegos de clasificación", que incluye la realización de varias tareas. En primer lugar, "Los alumnos de cada grupo deben elaborar las tarjetas correspondientes a color, forma, tamaño, grosor". En segundo lugar, deben formar grupos de fichas de tal manera que en cada grupo todas las fichas tengan una misma característica correspondiente a un determinado atributo, por ejemplo, "formar grupos de fichas, de modo que en cada grupo todas las fichas sean del mismo color" y se pide identificar cada grupo con la tarjeta correspondiente. En tercer lugar, se proponen dos juegos para realizar en parejas: (i) identificar una ficha con base en las tarjetas que la describen; (ii) describir una ficha usando las tarjetas correspondientes. En cuarto lugar, se plantea la tarea de "clasificar las fichas" sobre la tapa del pupitre según cuatro esquemas dados mediante tablas de doble entrada. Los encabezamientos de dichas tablas no aluden a todas las características de un atributo; por ejemplo, en las formas no se considera la forma cuadrada y en el color se consideran sólo dos de los tres colores disponibles en los bloques.



La actividad finaliza con la tarea de elaborar tarjetas que identifiquen la negación de cada una de las características para cada atributo considerado, "Cada grupo debe elaborar la negación de las características de las tarjetas".

En este taller identificamos el uso de cinco términos especializados: grupo, montón, clasificación, "caja de dos entradas" y negación de una característica, para ninguno de los cuales se explicita verbalmente su significado; sin embargo, a través de los enunciados de las tareas propuestas en las que aparecen tales términos se aporta información que ayuda a concretar algún significado, excepción hecha del término negación. Los términos grupo y montón se están usando como sinónimos de conjunto; clasificar se está usando en términos de hacer grupos de elementos que tengan una o más características comunes como se ve por ejemplo en la tarea que les pide clasificar las fichas utilizando unos esquemas en los cuales no están contempladas todas las características de los atributos implicados; cajas de dos entradas se está asociando a esquemas para organizar las fichas, sin embargo, uno de tales esquemas no representa una tabla de doble entrada ya que sólo se está considerando un atributo. No identificamos en este taller la presencia de convenciones, notaciones o enunciados matemáticos específicos.

Aunque no se explicita ningún conocimiento procedimental ni tampoco se hace referencia a la puesta en acción de un tal tipo de conocimiento, realizar este taller pone en juego y contribuye a desarrollar destrezas generales como la organización de objetos, el cumplimiento de instrucciones, la simbolización (e.g., representar con una tarjeta a todas las fichas que cumplen una determinada característica), la interpretación de un símbolo en un contexto dado, explicitación del razonamiento seguido para realizar una tarea.

Taller 2

Para el segundo taller se enuncian los siguientes objetivos:

> Desarrollar la capacidad de clasificar y analizar información por medio del juego con cajas de doble entrada.
> Afianzar en los estudiantes la concepción sobre semejanzas y diferencias.

El taller se configura a través de cuatro actividades:

1) Los alumnos deben clasificar las fichas atendiendo a dos atributos, color-forma y tamaño-color, sin embargo, uno de los dos atributos hace referencia a una característica y a su negación (en el primer caso, la forma contempla las fichas redondas y las no redondas; en el segundo caso, el color contempla las fichas rojas y las no rojas); para organizar

las fichas de acuerdo con las clasificaciones descritas se dan los formatos correspondientes y se pide hacerlas tanto sobre la tapa del pupitre como en los cuadernos.

2) Considerando para las palabras dos atributos: tipo de sustantivo (común o propio) y número de sílabas (disílaba, trisílaba), se pide dar casos de palabras que cumplan dos condiciones dadas y organizarlas en una tabla de doble entrada, cuyo formato está dado en el documento.

3) Se pide hacer tres secuencias de fichas que cumplan determinadas condiciones, a saber: (i) que cada ficha tenga color diferente a la siguiente; (ii) que cada ficha se diferencie de la siguiente solamente en una característica; (iii) que la diferencia entre dos fichas consecutivas sea variable, pero explicitada en cada caso.

4) Se pide aplicar un programa propuesto que indica para una determinada ficha sacada al azar por un estudiante, qué característica debe tener la que saque el otro alumno. La explicación de este juego se hace por medio de un esquema.

En este taller se usan los términos clasificar, negación de una característica, semejanza, diferencia y tabla de dos entradas. Tampoco aquí se precisa explícitamente algún significado, pero hay información en los enunciados que ayuda a saber de qué se está hablando. Por ejemplo, en los encabezamientos de los esquemas que presenta el taller para que los alumnos clasifiquen las fichas de acuerdo con lo que se pide, se exhibe la negación de ser rojo en términos de la de ser rojo, tachada. Por otro lado, en este taller, cuando se pide clasificar las fichas según dos atributos, efectivamente se están clasificando todas las fichas de los bloques lógicos y no sólo agrupando algunas de ellas.

Aunque no se explicita ningún conocimiento procedimental ni tampoco se hace referencia a la puesta en acción de un tal tipo de conocimiento, vemos que realizar el taller pone en juego y contribuye a desarrollar destrezas generales como la organización de datos, la simbolización, la interpretación de un símbolo en un contexto dado.

Taller 3

Para el tercer taller se enuncian los siguientes objetivos:

> Descubrir situaciones reales en las cuales es posible identificar elementos que se interrelacionan y, a través del encuentro de relaciones nuevas, proponer soluciones para el problema planteado.
> Mediante la elaboración de procesos, poder analizar, comparar, sintetizar, especular, intuir, ensayar; en fin, ejercitar la capacidad de pensar.
> Procurar que los alumnos "construyan" y propongan sus propios procesos y puedan describirlos en forma escrita.

El taller está conformado por nueve enunciados de problemas. Se trata de situaciones para las que no hay un procedimiento preestablecido de solución; en la mayoría de los casos, quizás hay más de una forma de llegar a la solución; en algunos casos hay más de una respuesta válida. No hay ninguna instrucción adicional que indique al estudiante qué se espera que haga como parte de su proceso de búsqueda de una solución. A continuación se presentan los enunciados de tres de tales problemas.

> Una persona necesita exactamente 4 litros de agua para emplearlos en una mezcla. ¿Cómo puede retirarlos de una alberca, si para ello cuenta solamente con dos recipientes, uno con capacidad de 5 litros y el otro de 3 litros, los cuales no tienen ninguna marca?
>
> Al numerar las páginas de un libro se utilizaron 342 cifras. ¿Cuántas páginas tiene el libro? ¿Cuántas veces se empleó la cifra 6?
>
> ¿Cuántos hombres, mujeres y niños hay en un grupo de 20 personas a las que se les repartieron 20 panes, de modo que cada hombre recibió 4 panes, cada mujer medio pan y cada niño un cuarto de pan?

En los enunciados de los problemas propuestos identificamos el uso de términos especializados: cifras de un número, litros, metros, kilogramos; sin embargo, no es un requisito para abordar y solucionar los problemas tener un significado preciso de tales términos y tampoco el resolver los problemas permite elaborar un significado más preciso de dichos términos. La solución de algunos de esos problemas puede requerir de hechos y procedimientos asociados a la adición y la sustracción.

El conocimiento procedimental que la resolución de estos problemas puede ayudar a desarrollar a la vez que lo pone en juego, tiene que ver con la capacidad de identificar, organizar, representar y analizar la información del enunciado, obtener y representar nueva información a partir de lo dado y de la información que se va derivando.

Taller 4

Para el cuarto taller, se enuncian dos objetivos:

> Utilizar los conocimientos que se tienen sobre conjuntos en la elaboración de nuevos conceptos geométricos.
>
> Representar los conceptos de punto, recta, semirrecta, segmento y plano.

El documento del cuarto taller, en su mayor parte, está constituido por texto en el que las profesoras hacen una exposición del tema geométrico que están abordando. El estilo de escritura emplea el tuteo y el pronombre 'nosotros' pero no hay nada explícito que le indique al estudiante qué se espera que haga en este taller, además de hacer la lectura, "Pensemos en una hoja de papel, si la doblamos, el pliegue que se forma nos da la idea de una línea recta. Las rectas se denotan (...)".

Para comenzar, se exponen cuatro afirmaciones a través de las cuales se alude a qué es la geometría y al propósito que tiene su estudio:

> El estudio de la geometría se inició hace más de 4.000 años, siempre con el objeto de comprender mejor el mundo en que vivimos.
>
> A diario el ser humano se ve rodeado de figuras como por ejemplo las paredes de nuestra habitación, el tablero del salón de clase, los discos de música, las llantas de los automóviles o el parque del barrio.
>
> Todas las figuras tienen altura, grosor, tamaño, etc. Características que las distinguen unas de otras.
>
> La Geometría es la ciencia que hace posible estudiar las figuras, sus elementos y características.

Luego, se hace una breve exposición de algunos elementos conceptuales relativos a las nociones de punto, línea recta, semirrecta, segmento de recta y plano. Para finalizar, se presenta una lista de siete ejercicios. Los dos primeros piden examinar los objetos del salón de clase con miras a determinar en cuáles de ellos están sugeridas las ideas de punto, recta, plano y superficie no plana. El tercer ejercicio plantea una pregunta referida a una representación concreta en la que es posible explorar y evidenciar un hecho geométrico, luego pide representarlo gráficamente y expresarlo verbalmente; el enunciado del ejercicio dice:

> Toma una hoja de papel y marca sobre ella un punto. ¿Cuántos dobleces puedes hacer que pasen por este punto? Representa la ilustración en tu cuaderno. De acuerdo a lo anterior, ¿qué puedes decir acerca del número de rectas que pasan por un punto en el plano?

El cuarto ejercicio pide identificar los "segmentos de línea" en tres dibujos. El quinto ejercicio, relativo a otro hecho geométrico que también relaciona las nociones de punto y línea recta, plantea una pregunta que exige explorar la situación descrita, representarla gráficamente y además explicarla; el enunciado del ejercicio es:

> Si se eligen tres puntos A, B, C que no están en la misma recta, ¿cuántas y cuáles rectas quedan indicadas en los diferentes pares de estos puntos? Ilustra con un dibujo y explica.

El sexto ejercicio, relativo a un hecho geométrico que relaciona las nociones de punto y plano, plantea preguntas referidas a una representación concreta en la que es posible explorar y evidenciar tal hecho. El enunciado del ejercicio es:

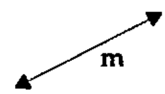
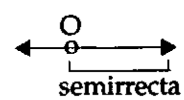
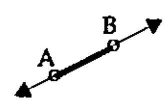
> Tomemos una hoja de papel y un lápiz con la punta bien afilada y tratemos de sostener la hoja con la punta afilada de un lápiz.
>
> ¿Qué observas? ¿Será posible sostener la hoja con un solo lápiz? ¿Habría alguna manera de lograrlo?
>
> Hagamos la experiencia ahora con dos lápices de puntas afiladas. ¿Qué observas? ¿Será posible lograrlo? ¿Habría alguna manera de lograrlo?
>
> ¿Qué sucedería si lo intentamos ahora con tres lápices? ¿Cómo hay que colocar los lápices para poder sostener la hoja en todos los casos?

El último ejercicio pide trazar rectas en una hoja del cuaderno usando la regla y lápices de colores; además pide inventar un nombre para el cuadro dibujado y una historieta.

En este taller identificamos el empleo de los términos: geometría, figura, elemento de una figura, característica de una figura, forma, altura, grosor, tamaño, figura geométrica, punto, dimensión, sucesión infinita de puntos, línea recta, dirección, sentido, semirrecta, origen, segmento de recta, plano, superficie. Sólo en torno a cinco de tales términos, punto, recta, semirrecta, segmento y plano, se exponen enunciados mediante los cuales se precisa en alguna medida la correspondiente noción. Aunque no de manera sistemática para los cinco términos, para algunos se hace referencia a una representación concreta de la noción, se establecen afirmaciones que aluden a qué es y algunas características, se establece la notación usual y se ilustra la noción con una representación gráfica. Al término figura, el taller le está asociando más de un significado: en el primer texto expuesto se refiere a objetos físicos como una pared, un tablero, etc. y luego se refiere al objeto de estudio de la geometría. Para otros, no se explicita con precisión a qué se refieren, como por ejemplo, cuando se afirma que *la recta es una sucesión infinita de puntos; el punto no tiene una dimensión definida.* En el cuadro que se presenta en la siguiente página se expone el contenido geométrico tratado en el taller.

A través de tres de los ejercicios planteados al final del taller, hay una aproximación empírica a tres enunciados geométricos, a saber: por un punto del plano pasan infinidad de rectas, por dos puntos del plano pasa una recta, tres puntos no colineales determinan un plano.

El conocimiento procedimental implicado en este taller tiene que ver con el reconocimiento de representaciones gráficas y concretas de los objetos geométricos abordados (e.g., determinar en un dibujo los segmentos de recta, reconocer en algún objeto físico una representación de plano) y con la elaboración de representaciones gráficas de los objetos geométricos abordados.

	Representación concreta de la idea	**Qué es y características**	**Notación**	**Representación gráfica**
Punto	La huella que deja en el papel la punta bien afilada de un lápiz.	Figura geométrica más pequeña. No tiene dimensión definida ya que su tamaño es muy reducido.	Letras mayúsculas	A o B o
Línea recta	El pliegue de una hoja de papel doblada. Un hilo tenso.	Es una sucesión infinita de puntos que tienen la misma dirección. Se extiende indefinidamente en ambos sentidos (esto se representa en la gráfica con flechas en los extremos).	Letras minúsculas	
Semirrecta		Cada una de las dos partes en que queda dividida una recta cuando sobre ella se marca un punto.		
Segmento		Pedazo de recta comprendido entre dos puntos marcados sobre ella (A y B).	AB	
Plano	Hoja de papel extendida. "La superficie de una mesa es parte del plano". Una superficie que se extiende indefinidamente en todas las direcciones.			

Para terminar la descripción en torno al cuarto taller, queremos presentar algunos detalles relativos al manejo del tema cuando la profesora y los estudiantes interactúan en la clase. Pudimos ver que ellas indican, en términos generales, algo del hilo conductor que puede estar por detrás del tema, al señalar, por ejemplo, que van a ver "Qué es la geometría y para qué se estudia" y "Bueno, ya sabemos lo que es un punto, lo que es una recta y lo que es una semirrecta". En esta interacción surgen en el discurso los diversos términos ya mencionados y algunos otros como ángulo interior y exterior de un polígono e infinito. Con relación a tales términos, sólo algunos se definen verbalmente por las profesoras o por los estudiantes, y en ese caso de alguna manera son avalados por las profesoras. Las profesoras recalcan la importancia de la notación que ha sido establecida explícitamente en los documentos de los talleres.

Al hablar una de las profesoras de línea, los estudiantes le corrigen "allá no decía línea" sino recta. Cuando esta profesora pregunta "¿qué es un punto?", los estudiantes dicen "Es la figura más pequeña [...] Se denominan por letras mayúsculas". Al referirse a la línea recta, la profesora pregunta "¿por qué estará formada toda esa línea?" y refuerza una respuesta de los estudiantes que dice que una recta está formada por infinitos puntos. Luego pregunta "¿qué es una semirrecta?" y después de un intercambio verbal el estudiante dice "... es un pedazo de la línea. Es decir, si ponemos el origen... donde pongamos el origen en la recta... si nosotros lo colocamos en una esquina, ese pedacito que queda es una semirrecta". La profesora muestra primero la representación de una recta y luego la de una semirrecta, y dice "Entonces, siempre vamos a partir de los orígenes. A ver, ésta [señala la recta] no tiene ni principio ni fin, ésta ¿tendrá principio? Claro. Donde está el origen, ese es el principio; ¿tiene fin? Tiene principio pero no tiene fin". Más tarde se refiere al concepto de segmento y dice "Ahora ya no vamos a marcar un punto sino dos puntos" y un estudiante señala "Un segmento. Es decir, si nos dicen pongan dos puntos, coloco uno acá y el otro acá; el espacio que queda entre esos dos, se llama el segmento".

Los siguientes enunciados generales fueron explicitados por la profesora en su interacción con uno de los grupos en la cuarta clase observada.

- La recta está formada por infinitos puntos.
- Si quiero nombrar una recta entonces marco dos puntos en la recta.
- La recta no tiene ni principio ni fin, por eso colocamos flechitas a ambos extremos, para indicar que la línea se extiende infinitamente en ambos sentidos.
- Cuando esos puntos tienen una dirección determinada es porque es una línea recta, porque si se ponen a saltar como ustedes así por todo el salón ya no es una línea recta.
- Si yo cojo un hilo y lo tiemplo, eso también me da la idea de línea recta.
- Si yo marco un punto, la recta se divide en dos; entonces, cada una se llama semirrecta.
- La semirrecta tiene principio pero no tiene fin. Donde está el origen, ese es el principio, pero no tiene fin.
- Cuando colocamos dos puntos sobre una recta, esa partecita que queda entre los dos puntos la llamamos segmento. Tiene principio y tiene fin.

Taller 5

Para el quinto taller se plantean como indicadores de logro los siguientes:

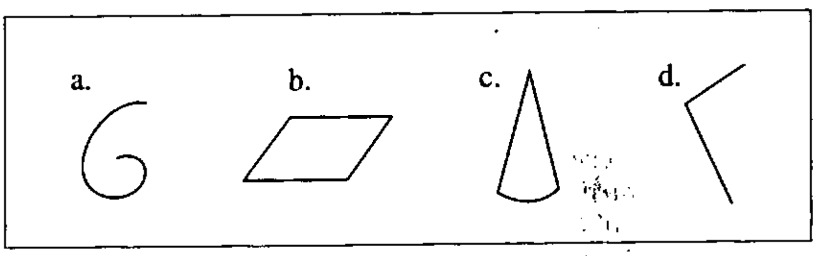
Saber diferenciar rectas paralelas y perpendiculares.
Usar correctamente el transportador y determinar con precisión las medidas angulares.
Clasificar ángulos de acuerdo a su medida.
Hacer construcciones básicas de polígonos.
Construir figuras geométricas y establecer semejanzas y diferencias entre ellas.

El documento del quinto taller está constituido por una exposición sobre los varios asuntos geométricos abordados, realizada mediante la inclusión de enunciados cortos y dibujos que concretan y amplían la información dada en los enunciados; en tal exposición se intercalan preguntas y tareas para los estudiantes. En algunos puntos del documento —al comienzo de alguna de las partes o al final de una de ellas— aparece destacado como lema "Recordemos".

El quinto taller está compuesto por seis partes cuyo contenido pasamos a precisar:
I) Se pide ver la película "El maravilloso mundo de las matemáticas", para lo cual se pone a disposición de los alumnos el equipo correspondiente; después, se pide que los alumnos comenten la película y realicen dos tareas relativas al contenido de la misma.

II) *Cuadriláteros y otros polígonos.* Se presentan tres dibujos con la información de que uno de ellos es ejemplo de figura abierta y los otros dos, de figura cerrada y a continuación, dados otros tres dibujos se pregunta cuál de ellos es una figura abierta; de los seis dibujos dados, los dos que representan figuras abiertas son además curvas simples mientras que los cuatro que representan figuras cerradas son además líneas poligonales simples. Se enuncia que "Una figura cerrada hecha de segmentos que no se cruzan entre sí se llama un polígono", luego de lo cual se muestran casos de polígonos (e.g., cuadriláteros, triángulos, pentágonos) para los que se explicita el nombre junto con dibujos que los representan (se representan gráficamente, por ejemplo, un cuadrado, un rectángulo no cuadrado y un paralelogramo no rectángulo y se les asignan respectivamente los nombres "cuadrado", "rectángulo" y "paralelogramo"). Enseguida se hacen preguntas que tocan más elementos conceptuales relativos a la idea de polígono y al número de lados como característica diferenciadora de los polígonos. Dos de tales preguntas son:

- ▲ [Haciendo referencia a los casos de polígonos representados] ¿¿Qué polígonos tienen cuatro lados?
- ▲ ¿Cuáles de estas figuras no son polígonos? Explica.



Luego se explicita verbalmente que una recta de un plano lo divide en dos partes llamadas semiplanos y que al trazar en un plano dos rectas que se corten, se divide el plano en cuatro zonas, cada una de las cuales se denomina ángulo; ambos enunciados van acompañados de la respectivas figuras.

III) *Ángulos y su medida.* Se establece que "Ángulo es una parte del plano limitada por dos semirrectas que tienen el mismo origen.", enunciado que va acompañado de un dibujo en el que se puede ver que el ángulo al que se alude es la zona correspondiente a la región convexa; además, en ese dibujo se incluyen los términos lado y vértice indicando tales elementos del ángulo. Después, usando un implemento hecho con dos tiras de cartulina —pegadas por uno de sus extremos de manera que cada una pueda girar en torno al punto común— se hace referencia a distintas clases de ángulos (agudo, recto, obtuso, llano, cóncavo, completo) con el respectivo nombre y con un dibujo de un caso de la clase en cuestión, en el que se marca cuál de las dos regiones posibles es la considerada. Luego se presenta información con respecto a la medición de ángulos: "[...] para medir ángulos empleamos el transportador. Un transportador está dividido en 180 partes iguales. Cada una de ellas se llama Grado.". La técnica para medir ángulos utilizando el transportador no se explicita verbalmente, sólo se muestran dos figuras correspondientes a la medición de dos ángulos particulares. Además, se presenta una clasificación de los ángulos según su medida en la que se hace referencia a ángulos agudos, rectos, obtusos y llanos. Luego se plantean dos tipos de tareas: por un lado, medir un ángulo dado, y por otro lado, dibujar un ángulo cuya medida se conoce. En ambos casos, los ángulos con los que se trabaja tienen medida menor a la de un ángulo llano.

IV) *Rectas paralelas y perpendiculares.* En primera instancia se pide dibujar varias parejas de rectas tratando de cubrir con los casos considerados todas las posibles posiciones, comparar las producciones de los miembros del grupo y sacar conclusiones; luego se explicita verbalmente que "sólo pueden presentarse dos posiciones" y las describe en términos de si tienen o pueden tener un punto en común, informa acerca de los nombres técnicos que designan las situaciones en cuestión (i.e., rectas secantes y rectas paralelas) y además incluye representaciones gráficas de ellas; después aparece un recuadro con la consigna de "Recordemos" y en él se recoge el resultado enunciado. En segundo lugar, se hace referencia a un procedimiento para trazar rectas paralelas usando regla y escuadra; se pide observar una figura correspondiente a la posición de una regla y una escuadra al producir tres rectas paralelas entre sí, y luego se presenta la correspondiente explicación "Apoyamos fijamente la regla sobre el papel y deslizamos la escuadra sobre la regla." Luego se plantean dos ejercicios: en uno de ellos se da un dibujo de un paralelogramo y se pide comprobar que sus lados opuestos son paralelos; en el otro se pide dibujar una recta paralela a una recta dada (que no está en posición horizontal) por un punto dado. En tercer lugar, se refiere a un procedimiento para trazar una recta perpendicular a una dada, usando el transportador y la regla; se pide colocar el borde del transportador sobre la recta dada, medir un ángulo de 90° y trazarlo, luego se informa el nombre y la característica que tienen tales rectas, "Las rectas r y l que has trazado formando ángulos rectos se llaman rectas perpendiculares."; después aparece un recuadro con la consigna de "Recordemos" y en él se recoge la definición de rectas perpendiculares.

V) *Medición de ángulos: el grado.* Se presenta un texto que hace referencia a que el atributo que se mide en los ángulos es la amplitud y no el largo de sus lados; además, establece que la vuelta completa es la referencia con respecto a la cual se mide la amplitud de los ángulos y el grado es la amplitud que mide 1/360 de vuelta; adjunto al texto se presenta una figura en la que se muestra el ángulo central de una circunferencia dividido en 36 partes. A continuación se transcribe el texto:

> Un ángulo se mide por la amplitud de su abertura. Para asignarle una medida se toma como referencia una vuelta completa y se divide en 360 partes iguales. Esta amplitud se llama grado. Un grado equivale a 1/360 de vuelta. Para comparar dos ángulos debemos determinar cuál de los dos es mayor. Pero debemos tener en cuenta que lo importante de un ángulo es su amplitud y no el largo de los lados.

Después del texto se incluyen cuatro tareas. En la primera se pide reproducir en el cuaderno una determinada figura, determinar cuántos ángulos hay y además ordenarlos ascendentemente de acuerdo con la medida de su amplitud. La segunda y tercera tareas piden dibujar respectivamente el menor y el mayor ángulo posible y además asignarles las correspondientes medidas, luego de lo cual se les pide comparar y discutir los resultados con los compañeros del grupo.

VI) *Triángulos*. Se plantean dos tareas. En la primera, se pide tratar de dibujar polígonos de uno y dos lados, después de lo cual se pregunta cuál es el número mínimo de lados que puede tener un polígono. En la segunda tarea se solicita buscar en el salón tanto objetos que se puedan representar con segmentos como objetos que no se puedan representar con segmentos. A continuación, se exponen dos clasificaciones de los triángulos, una de acuerdo con "la relación entre sus lados" y la otra de acuerdo con "sus ángulos". En ambos casos, se incluye el nombre de la clase de triángulos, la condición que debe cumplir un triángulo para hacer parte de una clase y un dibujo de un caso de la clase (de los seis triángulos representados, sólo dos de ellos están en la posición estándar). Adicionalmente se da información relativa a la forma de notar los triángulos. Luego, se propone la tarea de clasificar "los triángulos que encuentres en tu salón" de acuerdo con los dos criterios mencionados. Para terminar esta parte del taller, se incluyen dos procedimientos para construir triángulos, uno de ellos a partir de los tres lados del triángulo (se conoce la medida de ellos) y el otro a partir de dos de los lados y el ángulo comprendido entre ellos (se conocen las respectivas medidas). En ambos casos se explicita verbalmente un conjunto de cuatro pasos que indican qué hacer y también se presentan los correspondientes dibujos. Después se plantean tres tipos de ejercicios (i) construir los triángulos con las siguientes medidas (cuatro casos en los que se dan las medidas de los tres lados, usando la notación convenida); (ii) construir un triángulo isósceles, con un ángulo entre sus lados iguales de 30°; (iii) construir los triángulos con las siguientes medidas (cuatro casos en los que se dan las medidas de dos de los lados y la del ángulo comprendido entre ellos, usando la notación convenida).

En este taller identificamos el empleo de los términos: figura geométrica, figura abierta, figura cerrada, polígono, segmentos que no se cruzan, lado de un polígono, cuadrado, rectángulo, triángulo, paralelogramo, pentágono, hexágono, octágono, plano rectangular, semiplano, ángulo, lado de un ángulo, vértice de un ángulo, ángulo agudo, ángulo recto, ángulo obtuso, ángulo llano, ángulo cóncavo, ángulo completo, grado, posición [relativa] de dos rectas, rectas paralelas, rectas secantes, rectas perpendiculares, amplitud de la abertura de un ángulo, triángulo equilátero, triángulo isósceles, triángulo escaleno, triángulo acutángulo, triángulo rectángulo, triángulo obtusángulo, medida del lado de un triángulo, medida de un ángulo, arco de circunferencia. De esos treinta y nueve términos, cuatro de ellos (polígono, ángulo, triángulo, recta) se constituyen en alguna medida en nodos de una red en la que se explicitan enunciados geométricos, sin embargo, en algunos casos, las relaciones que hacen parte de la red se limitan a vincular términos dado que el taller sólo aporta una imagen conceptual y no un enunciado explícito; es el caso de la relación entre los términos polígono y figura cerrada y entre ángulo y vértice. En la red no todos los términos que deberían estar relacionados lo están, es el caso de vértice de un ángulo y origen compartido por las semirrectas que limitan al ángulo; en algunos casos, la falta de conexiones redunda en que no se establecen jerarquías entre los términos, es el caso de la falta de conexión entre rectas secantes y rectas perpendiculares. Aunque para los términos que no son nodales no siempre se explicita verbalmente algún enunciado que aporte un elemento para precisar algo del correspondiente significado, sí se expone un dibujo por medio del cual se explicita algo; es el caso de los términos figura abierta, figura cerrada, octágono, pentágono, plano rectangular para los cuales sólo se dio una representación gráfica.

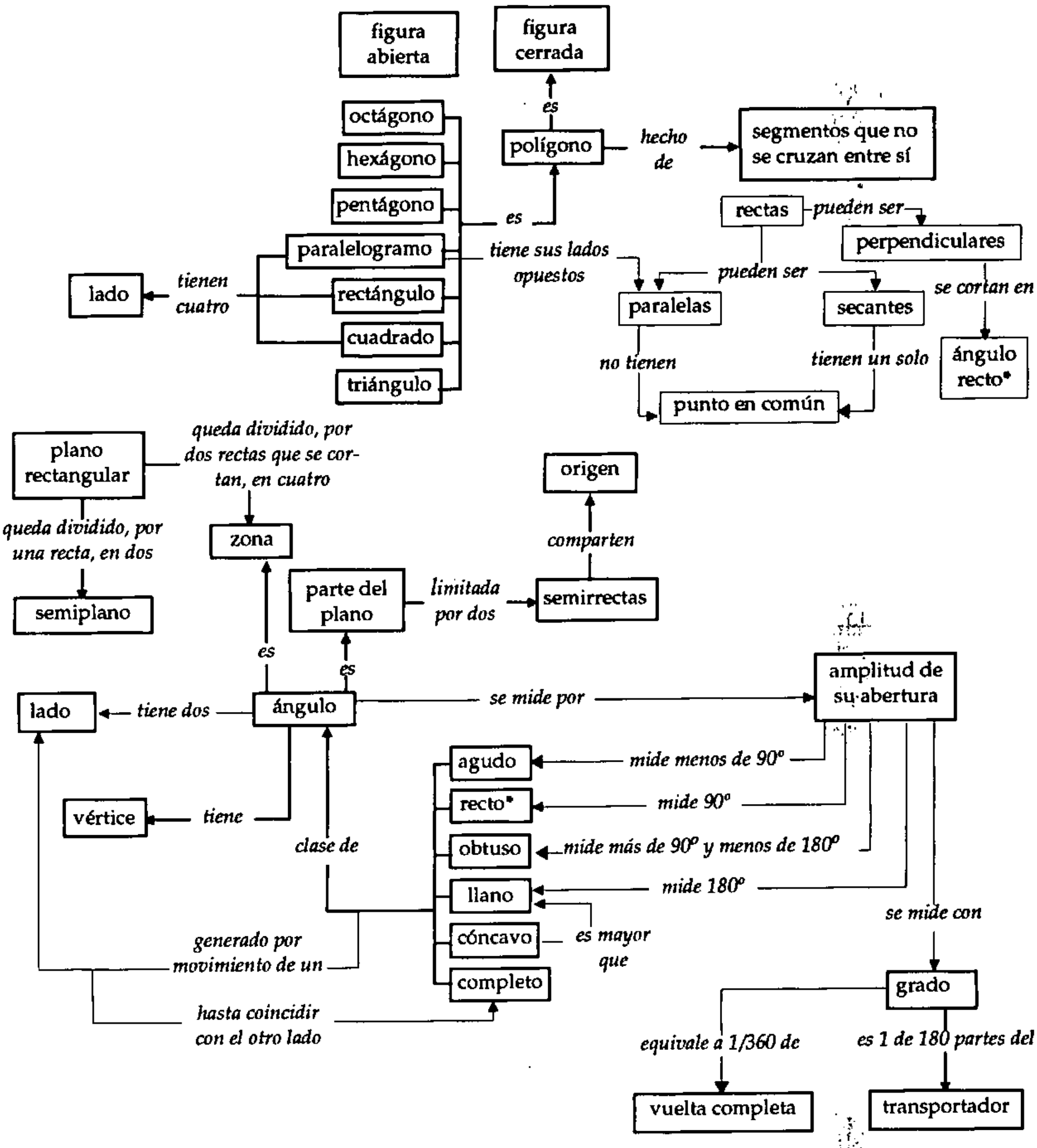
En el desarrollo del contenido matemático involucrado en este taller advertimos la alusión, por medio de los dibujos, a sólo dos convenciones: para indicar de cuál de las dos regiones angulares se trata, se pinta en la respectiva región un pequeño arco de circunferencia; poner flecha en uno de los extremos de la semirrecta. Con respecto a las notaciones, pudimos advertir que se utiliza —sin alusión explícita— la acostumbrada para denotar grados sexagesimales (°) y se explicita verbalmente y se utiliza la notación para denotar los elementos de un triángulo (vértices con letras mayúsculas, "lados en minúsculas, con la misma letra que su vértice opuesto").

En este taller también se involucra algún conocimiento procedimental particular de los temas tratados: sin explicitación verbal sino gráfica se indica "cómo medir ángulos" con el transportador, cómo trazar rectas paralelas con regla y escuadra y cómo trazar rectas perpendiculares entre sí; con una explicitación verbal, paso a paso, apoyada por los respectivos dibujos se presentan dos procedimientos para construir triángulos conociendo las medidas de los tres lados y las medidas de dos de sus lados y la del ángulo comprendido.

El esquema que se presenta en la página siguiente pretende recoger los enunciados geométricos involucrados en el quinto taller, excepción hecha de lo correspondiente a la clasificación de los triángulos.

Para terminar la descripción en torno al quinto taller, queremos presentar algunos detalles relativos al manejo del tema cuando los estudiantes hicieron la exposición frente al curso. Ellos realizaron algunas tareas, definieron algunos conceptos y los representaron gráficamente. Algunas alusiones fueron:

- ▲ La diferencia entre un polígono y una figura abierta, establecida como que el primero tiene ángulos interiores y exteriores, y segmentos de recta y es cerrada, mientras que una figura abierta puede no tener segmentos de recta, no tiene ángulos interiores ni exteriores y es infinita.
- ▲ Las diferencias entre polígonos como un cuadrado, un rectángulo, un triángulo no rectángulo, un hexágono, establecidas como que unos tienen más segmentos de recta que otros, no todos tienen la misma forma.
- ▲ Un plano que se define como una superficie, como su nombre lo indica, plana, que puede estar delimitada por líneas que pueden ser imaginarias o pueden ser trazadas; se puede dividir en cualquier dirección y cada parte se llama semiplano.
- ▲ Un ángulo está formado de dos lados que se llaman semirrectas, que pueden ser infinitas y que lo que tienen en común es que están unidas por un vértice y el ángulo es la abertura que hay de lado a lado. Luego se indican los diferentes ángulos: un ángulo recto que tiene noventa grados, uno agudo, uno obtuso, uno llano, uno de más de 180 grados y un ángulo de 360 grados; este ángulo mide más de ciento ochenta grados y recibe el nombre de ángulo cóncavo; un ángulo completo que tiene trescientos sesenta grados.
- ▲ También se define qué es un grado de la siguiente manera: primero que todo, un grado es una forma de medida, ya dado que en este momento pues, puede ser la medida de un ángulo. También los grados son cada espacio que hay entre una raya y otra raya del transportador.
- ▲ Después se habló que al comparar dos ángulos, lo que se compara es la abertura que hay entre los dos lados. Y que lo que mide cada lado, no interesa para el valor del ángulo.



En su exposición, los estudiantes también explicitaron y usaron dos procedimientos. Uno de ellos para construir y medir ángulos con el transportador: se empieza desde la mitad del transportador hacia la derecha, hasta el cero y se empieza a contar hacia arriba, diez, veinte, treinta hasta noventa y marcan; entonces se traza otra vez aquí hasta la vértice una recta que une los dos lados. El otro para construir un triángulo dados dos lados y el ángulo comprendido entre ellos: primero marcar los diez centímetros; sobre un segmento que se ha trazado y después se miden los sesenta grados; desde aquí desde el vértice y se traza la semirrecta por el punto señalado. Entonces, se miden sobre esa semirrecta los diez centímetros y se marcan. Sobre esa marca se traza el tercer lado que una los dos segmentos.

Discusión

Entendiendo que los objetivos de los talleres son enunciados que expresan lo que se quiere lograr en los alumnos en aspectos relativos a su saber matemático, advertimos que algunos de tales enunciados están formulados de manera general y en consecuencia no es evidente a qué se refieren. Por ejemplo, en relación con dos de los objetivos del primer taller no se precisa a cuáles "mecanismos básicos del pensamiento lógico" ni a que "procesos mentales de solución de situaciones de la vida cotidiana" se refieren los respectivos enunciados; tampoco los términos "manejar" y "elaborar" para aludir a las acciones que se pretenden lograr ayudan a precisar un significado de lo que se quiere lograr. Suponiendo que uno de los mecanismos básicos del pensamiento lógico a los que se está haciendo referencia fuera el que está implicado al hacer grupos de objetos de acuerdo a un criterio, ¿a qué haría referencia "manejar ese mecanismo"? Otro ejemplo que puede ilustrar el comentario es tomado del segundo taller, ¿a qué alude el enunciado "desarrollar la capacidad de clasificar"? ¿Incluye esa capacidad la determinación de un criterio para clasificar, la clasificación misma y además, la constatación de que efectivamente se lograron clases disyuntas cuya unión da todo el referencial? En el tercer taller observamos que el segundo objetivo propuesto habla de "ejercitar la capacidad de pensar" y este enunciado se concreta en algunas acciones como analizar, comparar, sintetizar, especular, intuir y ensayar; a pesar de que estas acciones descriptoras de lo que se quiere promover en el estudiante tienen un menor nivel de generalidad que la acción de pensar, consideramos que no es evidente lo que puede significar cada una de ellas y en consecuencia esa falta de precisión no contribuye a enfocar en el taller tareas y actividades que apunten directa y apropiadamente a lograr lo que se pretende. A manera de ejemplo, para sustentar la importancia y necesidad de precisar todo lo que sea posible los términos con los que se definen los objetivos de manera que sea claro a qué se está haciendo referencia, presentamos un caso tomado del sexto taller en donde hay implicado un significado de lo que puede ser la acción de analizar o el resultado de un análisis, significado con el que no necesariamente estamos de acuerdo.

Analicemos el valor de la cifra 7 en el número 4721.

Observemos:

4 7 2 1

valor absoluto = siete

valor relativo = setecientos

Asumimos que los objetivos de un taller, por un lado, plantean la intención, la pretensión de lograr algo en el saber matemático del estudiante y por otro lado, deben estar en estrecha relación con los medios utilizados para alcanzarlos —ya sea parcial o totalmente— en el sentido de que las tareas y actividades que se le planteen a los alumnos deberían cumplir unas condiciones de viabilidad y pertinencia para el fin al que se quiere que sirvan. Bajo este supuesto no vemos claramente qué es lo que se quiere lograr en el taller cuarto cuando se expresa como objetivo "Representar los conceptos de punto, recta, semirrecta, segmento y plano" cuando el texto del taller presenta información relativa a la representación de tales nociones. Adicionalmente, advertimos lo que desde nuestro punto de vista puede ser una confusión entre un objetivo y un medio para lograrlo; tenemos esta percepción al considerar que lo que se formula como objetivo no tiene la respectiva importancia que debería tener un objetivo dentro del saber del estudiante. Es el caso del enunciado "Efectuar, en forma oral y/o escrita, descripciones de los juegos y ejercicios realizados con los bloques lógicos"; muy probablemente, lo dicho es una tarea a través de la cual, las profesoras ven una oportunidad para que los estudiantes avancen en el desarrollo de su capacidad de comunicar clara y precisamente lo que han vivido en la clase.

Como característica notoria de los talleres vemos que están conformados, en una proporción considerable, por tareas, preguntas y actividades no rutinarias ni repetitivas, para las cuales no se han establecido previamente formas de resolverlas, así que para entender qué es lo que se pide, por un lado, y por otro, resolverlas, los estudiantes necesariamente tienen que leer los enunciados, interpretarlos y proponer soluciones, que en la interacción con la profesora se revisan.

En relación con las tareas y actividades que las profesoras esperan que los alumnos lleven a cabo, advertimos que en ocasiones no hay indicación alguna al respecto. Es el caso de los talleres cuarto y quinto en los que, con subtítulos se anuncian actividades y lo que aparece debajo de los subtítulos es información acerca de las ideas geométricas que se quieren tratar. Ante tal circunstancia, los estudiantes hacen una lectura rápida y continúan con lo siguiente, comportamiento que no es el que pretenden propiciar las profesoras y contra el que luchan en la interacción con los grupos al iniciar una serie de preguntas y hacer recomendaciones con el propósito de que los estudiantes logren una comprensión de las ideas leídas. Otro caso tiene que ver con el tercer taller; allí se plantean los enunciados y pareciera que lo importante es solucionar el problema, llegar a una respuesta pues no hay indicación alguna que invite a los estudiantes, por ejemplo, a establecer qué información se tiene y cuál es el problema que se debe resolver, a buscar diferentes formas de abordar la solución del problema, a hacer una representación gráfica del enunciado y/o de la solución, a escribir la solución encontrada, siendo que las profesoras en su interacción con los grupos sí impulsan la realización de algunas de estas acciones.

En otras ocasiones, vemos que hace falta precisar la tarea que se pide e incluso podría ser pertinente bien fuera presentar consideraciones al respecto o incluir otras tareas a través de las cuales se pudieran tener en cuenta dichas consideraciones; en otras palabras, algunas de las tareas planteadas son muy abiertas. El siguiente caso puede ayudarnos a ilustrar a qué nos referimos: en el primer taller, una de las tareas reza: "Los alumnos de cada grupo deben elaborar las tarjetas correspondientes a color, forma, tamaño, grosor." Reconocemos detrás de tal tarea una serie de cuestiones no triviales relativas a la representación y a la interpretación de símbolos como, por ejemplo, ¿cómo representar gráficamente la característica "ser grande" de manera que se interprete adecuadamente cuando la tarjeta no se presenta al mismo tiempo que la tarjeta que representa "ser pequeño"?, ¿cómo representar gráficamente el tamaño de las fichas usando un martillo como objeto que tiene tamaño?, ¿cómo interpretar que un triángulo representado gráficamente sobre un pedazo de cartulina azul hace alusión a la forma y no al color?

En los dos talleres relativos a geometría reconocemos tareas que le permiten ver al estudiante, por sí mismo, hechos geométricos o por lo menos instancias de ellos. No ocurre algo similar con los dos procedimientos para construir triángulos con cierta información dada: allí se enuncian los procedimientos sin explicación alguna y lo único que se le pide al estudiante es que los aplique.

Continuando con la atención enfocada en los dos talleres de geometría reconocemos que tales talleres enfatizan un conocimiento conceptual en la medida en que abordan principalmente ideas relativas a varias nociones y conceptos de la geometría elemental, lo que se concreta no sólo al mencionar términos y exhibir representaciones gráficas que les corresponden, sino sobre todo al establecer relaciones entre ellos. En el esquema que recoge buena parte del contenido involucrado en el quinto taller (véase página 89), es posible ver que alrededor de la caja marcada con "ángulo" hay varias flechas que llegan o que salen a otras cajas, indicando con ello relaciones entre los términos implicados. Algo similar se puede decir para el caso de las cajas marcadas con "polígono" y con "rectas". Con respecto a la estructura conceptual que se refleja en el esquema, consideramos que puede valer la pena hacer una revisión cuidadosa que tenga como propósito establecer si hay flechas relevantes que falten o que haya que redirigir y si hacen falta cajas con términos o con enunciados que puedan obviar la necesidad de incluir un término adicional o quizás ambas cosas.

Interacción a través de la cual discurren la enseñanza y el aprendizaje

Descripción

La interacción de las profesoras con los estudiantes en clase se da a través de las intervenciones orales y escritas de cada uno en el trabajo en grupos mediante el cual se lleva a cabo la clase. Las intervenciones verbales de los estudiantes con respecto al tema matemático que se está tratando se dan cuando ellos responden las preguntas formuladas por la profesora durante las interacciones con ella en los grupos, cuando le hacen preguntas sobre el trabajo que desarrollan, y cuando en los grupos abordan las tareas y actividades propuestas en los talleres y comentan entre sí el trabajo.

Los estudiantes trabajan en grupos pequeños de tres o cuatro personas. En la entrevista, las profesoras explicaron que inicialmente dichos grupos "se conformaron como ellos quisieron", pero después de trabajar el primer taller las profesoras y los mismos estudiantes se dieron cuenta de que ellos avanzaban a distintos ritmos y por eso se fueron formando grupos distintos, "de acuerdo a sus intereses, a sus avances, a lo que ellos querían", y agregan que incluso todavía no son fijos y hay estudiantes que cambian a veces de grupo. En el desarrollo de los talleres, los estudiantes se involucran en las actividades propuestas —tanto en el documento como las que plantea la profesora en su interacción con cada grupo— para generar soluciones y respuestas propias, considerar y discutir los comentarios, ideas, preguntas y dudas de los integrantes del grupo, e intentar así llegar a una solución común.

El intercambio verbal entre la profesora y un grupo ocurre, o bien porque la llaman o bien porque ella se acerca por iniciativa propia. Los alumnos llaman a la profesora para preguntarle sobre cosas que no entienden, para exponerle sus soluciones e ideas que han elaborado, o para averiguar acerca de lo adecuado de su trabajo. La profesora interactúa verbalmente con un grupo para hacerle seguimiento al trabajo y para ello les hace comentarios y preguntas que son respondidos por uno o más estudiantes. Los siguientes fragmentos de la transcripción del registro de audio realizadas en la primera y la cuarta clase observadas, ilustran lo descrito:

P: Sí, de eso se trata, de eso se trata. Échenle cabeza y cuando tengan una idea me llaman y miramos, ¿sí? Todos pensando. [La profesora se aleja del grupo].

E: Podemos coger estas pequeñitas y [no se entiende] una ficha que [no se entiende].

E: No; estamos en lo grande, no en lo pequeño.

E: Voy a dibujar una ficha [no se entiende] grande.

E: No porque [no se entiende] Ella [la profesora] quiere que si le salga [no se entiende].

E: Tocaría dibujar [no se entiende].

E: [Llamando a la profesora] Profe...

E: Profe...

P: [La profesora se acerca al grupo] A ver.

E: Lo que pasa es que mire: nosotros vamos a colocar las pequeñas y las vamos a dibujar acá, en la esta, en la cartulina; y aquí abajo le escribimos "grandes" para que si usted va y la muestra allá, ellos ven las figuras y ven la

E: Sí, porque si...

E: Ven lo que dice "grande" y le sacan todas las grandes.

E: Profe porque

P: Háganla y jugamos, a ver qué pasa.

E: Profe necesitamos cartulina.

P: ¿Cartulina? Bueno.

E: Si dibujamos ésta [se refiere a dibujar la figura del tamaño real que tiene el bloque que va a representar] acá no nos va a caber en las cartulinas.

E: De todas maneras no se pueden hacer todas.

E: No creo que quepan todas.

P: Yo te hago una pregunta para que entiendas. Si quieres la figura grande de acá, de los bloques lógicos, para pasarla a esta cartulina, ¿tienen que ser estas medidas exactas? Bueno, hagámosla y jugamos a ver qué pasa.

E: O sea...

P: Ahí les dejo los pedazos de cartulina. [La profesora se aleja del grupo].

P: [Se acerca la profesora] ¿Cómo vamos?

E: En el tema de sistemas de numeración.

P: No olviden que no copiamos; no olviden, nosotros no copiamos.

E: No. Estamos copiando lo más importante.

P: Exacto. Nosotros entendemos, analizamos, miramos qué es lo que necesitamos y lo que necesitamos consignar.

E: Profe, nosotros estamos anotando lo más importante.

P: Bueno.

E: Lo que nos parece más indispensable.

E: Lo que nos parece que nos puede servir.

P: [Refiriéndose a la guía] Ahí les damos un ejemplo, pero entonces nosotros hacemos otros ejemplos. No tiene sentido copiar. [La profesora se aleja del grupo].

E: Lucho, ¿cuál es el tema? ¿el tema de la guía?

E: Sistema de numeración. [Pausa] ¿Listo? A ver. [Leyendo de nuevo] El sistema de numeración decimal tiene su origen en la India pero... [titubea].

E: Venga, yo leo, yo leo esa parte.

Como se puede observar en el primer episodio, en los intercambios verbales del grupo intervienen, por lo general, todos o casi todos los estudiantes del grupo; y las profesoras dan tiempo a que los estudiantes hablen, discutan y se contesten antes de intervenir ellas.

Durante la clase, cada profesora interactúa por ratos con un determinado grupo, del que está encargada. Aunque en tal interacción, ambas profesoras establecen una conversación con el grupo a través de la cual se informan del proceso que éste ha seguido y además hacen explicaciones, preguntas adicionales a las de los talleres y recomendaciones que consideran necesarias, percibimos algunas características diferentes de la interacción generada por las dos profesoras.

Es frecuente que una de las profesoras revise para cada estudiante[6] del grupo en qué va y lo que ha hecho (e.g., qué respuesta obtuvo, si escribió en el cuaderno la solución), "A ver, tú ya hicistes esto la vez pasada ¿cierto? Lo hiciste con él. Entonces, vamos a dejar un espacio ahí para que te adelantes, porque ahorita no vamos a ponernos a adelantar el cuaderno en clase porque para eso tuviste ocho días". También indaga acerca de lo que ha entendido, estableciendo con dicho alumno, delante de los demás integrantes del grupo, una conversación en la que le hace preguntas, comentarios y eventualmente le da explicaciones. Cuando no obtiene respuestas adecuadas le formula preguntas más puntuales, algunas veces acompañadas de gestos (e.g., tono de la voz, señalamiento a algo escrito); en ocasiones, logra la respuesta esperada, pero en otras, no y por tanto, le recomienda al alumno que debe continuar trabajando en el asunto para lograr claridad en el concepto. Los siguientes dos fragmentos de la transcripción de los registros de audio de las dos últimas clases observadas, ilustran lo descrito:

P: [Referencia a uno de los problemas del tercer taller] Tengo únicamente dos recipientes.

E: O sea que esos dos toca dividirlos entre

P: ¿Cuáles dos?

E: Los cinco.

P: A ver, llenaste el de tres, llenaste el de tres. Lo derramaste en el de cinco; ¿qué le pasó al de cinco? ¿quedó lleno o no quedó lleno?

E: Sí, sí quedó lleno.

P: ¿Síiii? ¿quedó lleno?

E: Sí, porque profe, vea

P: Lleno el de... póneme atención; lleno el de tres, lo derramo en el de cinco, al derramar los tres en el de cinco, ¿me quedó lleno el de cinco?

E: No, quedaron dos.

P: Quedan faltando dos. ¿Qué hago ahora? Ahí va; siga leyendo el revoltijo que tiene ahí [en el cuaderno]. Es que tiene que organizar bien las ideas.

E: Cojo el balde de tres

P: Bueno, cojo... bueno, ya; ya está allá el de tres; el de tres quedó solo; ¿qué hago ahora? [pausa] Quiero llenar el de cinco, ¿qué hago ahora?

E: Cojo, cojo...

P: Cojo ¿cuál? otra vez.

E: El de tres litros.

P: El de tres. Lo lleno. ¿Qué pasa?

E: Queda con dos litros.

P: Pero, ¿lo llena de una vez allá? Lo derramo allá y ¿qué pasó allá? ¿Quedó lleno o no quedó lleno?

E: Quedó lleno.

6. En la entrevista, la profesora señaló su interés de indagar "si en realidad han trabajado todos los estudiantes del grupo o sólo algunos". Además, ambas profesoras indicaron la pertinencia de hacer este seguimiento individual a los grupos de los que está encargada la profesora que lo hace, dado que son "chicos supremamente lentos" y en consecuencia cada uno de ellos necesita un cuidado muy especial.

P: Quedó lleno el de cinco y sobra...

E: Uno.

P: ¡Uno! Bueno, ¿ahora qué hago?

P: ¡Ahhh! entonces, la recta ¿por qué está formada?

E: Por dos puntos. Por A y B.

P: Que si la quiero nombrar, de pronto, entonces marco dos puntos en la recta. Pero, entonces ¿aquí no hay puntos?

E: No.

P: ¿Nooo?

E: Sí. Si uno la quiere dividir así y así.

P: A ver, Adriana. Entonces, acá... entonces, la recta ¿es sólo este pedazo?

E: No. Es todo.

P: Todo eso. Entonces, todo eso ¿por qué está formado?

E: Por un segmento.

P: [no se entiende].

E: Por un segmento.

P: ¿Qué es esto? ¿Qué es esto? [La profesora va marcando varios puntos sobre una recta representada en el papel].

E: Los puntos.

P: Los puntos. ¿Por qué está formada la recta?

E: Por puntos.

P: Por puntos, Adriana. [Pausa]. Ya miramos qué era un punto. Entonces, ahora la recta está formada por puntos. ¿Por cuántos? ¿Para qué era que escribíamos esto? [Se refiere a las flechas señaladas en los extremos de la recta].

E: Por... para

P: Para decir que eran ¿cuántos?

E: Dos.

P: ¿Dos?

E: Sí, profe, porque vea... [marca dos puntos en la recta].

P: Adriana, me acaba de decir que todos estos son puntos y ¡me dice que son dos!

E: Entonces son cinco.

P: Y si yo hago más y más y más y más [la profesora señala varios puntos más en la recta].

E: Son seis, siete, ocho, nueve, diez

P: ¿Cuántos? Entonces, ¿cuántos?

E: Die... once.

P: No; entonces, ahí te vas a quedar. Sigue leyendo acá lo de la recta [la profesora se refiere al texto que hace parte de la guía] Hasta ahora vas en la recta, no puedes pasar de la recta. Te devuelves. A ver Liliana, a ver, explícame tú.

La otra profesora, en cambio, interactúa primordialmente con el grupo centrando sus intervenciones en dos aspectos. Por un lado, da explícita o tácitamente pautas de acción para los estudiantes con respecto a la forma de llevar a cabo ciertas actividades como por ejemplo, la interacción en el salón de clase en torno al trabajo, la lectura de los enunciados de los problemas y la lectura de los textos. Son recomendaciones suyas, cada vez que advierte que algún estudiante interrumpe a otro, "uno habla, lo escuchamos, luego otro habla, todos vamos a a hablar", "escuchemos al compañero y luego al otro". En su interacción con los grupos cuando estaban trabajando en el tercer taller, siempre insistió en que hicieran dos o más veces la lectura de los enunciados hasta haber entendido el planteamiento del problema; enfatizó también la necesidad de conocer el significado del vocabulario empleado en el enunciado, de determinar los datos relevantes para solucionar el problema, las condiciones impuestas por el problema y la pregunta del problema. En su interacción con un grupo que durante la última clase observada estaba trabajando en el sexto taller, insistió en que los estudiantes hicieran una lectura pausada de manera que pudieran hacer un parafraseo de lo expuesto; además, les puso la tarea adicional de ampliar la información del texto con base en la lectura de otros libros. Las siguientes dos citas ilustran lo dicho:

> *A ver, lee; con toda la puntuación. (...) Bueno, ahora cuéntenme... En primer lugar, cuál era el problema que había ahí. (...) Y, ¿qué datos importantes teníamos ahí en ese problema, que nos sirvan para resolverlo? (...) Volvamos a leerlo y miramos qué datos de los que hay nos sirven para resolver el problema.*
>
> *¿Quién va a empezar leyendo? (...) Bueno, bueno; pero, a ver, chicos, vamos despacio. ¿Van entendiendo lo que han leído hasta ahora? O, ¿volvemos a leer? [Después de haber hecho preguntas que no fueron respondidas a satisfacción de ella] Bueno, volvamos, juiciositos los cuatro, volvamos a empezar la lectura. (...) Bueno, ¿dónde vamos? A ver, muchachos, despacio. (...) Entonces, ¿qué concluimos de esta primera parte? (...) Ahorita que van a leer otros libros, en otros libros se van a dar cuenta de que utilizaban piedras, palitos, conchas. Entonces, aquí nos estamos dando cuenta de dónde aparecen los sistemas de numeración ¿sí? Vamos a mirar un poquito más esa historia en algunos libros. A ver, les voy a traer libros; aquí hay uno. [Pausa; la profesora trae al grupo unos libros] Mira acá hay libros, cada uno coja un libro. Cada uno va a leer, primero mentalmente y luego le va a contar a sus compañeros Entonces, lea mentalmente y después le va a contar a sus compañeros qué encontró ahí que amplíe esta lectura que teníamos en la guía.*

Por otro lado, la profesora interactúa con el grupo para escuchar las soluciones que éste ha construido y hace preguntas o plantea otras situaciones relacionadas. Se inclina principalmente por hacer preguntas que confronten o expliquen el trabajo de los estudiantes y por proponer casos distintos a los que se consideran pero relacionados con éstos, tal y como se ilustra en los fragmentos que se presentan a continuación.

E: [Referencia a un problema del tercer taller] Profe, fácil. Ahí... la... probamos con dos, probamos con dos. Sacamos una; si esta es la falsa pues...

P: Espérate un momento. Yo te pregunto: si vas a sacar una, ¿por qué echaste tres?

E: Porque... ahí hay tres.

E: Ay, no; eran dos.

P: Bueno, échenle cabeza y ya vengo.

P: [Después de unos segundos de silencio la profesora insiste en el asunto no respondido, pero en esta ocasión hace preguntas más dirigidas hacia la respuesta] ¿Qué datos nos sirven? ¿Nos sirve, por ejemplo saber que uno de esos recipientes tiene capacidad de cinco litros? ¿Por qué nos sirve?

E: Porque... con ese dato nos podemos entender más... qué es lo que hay que hacer...

P: Puede ser. ¿Qué otro dato nos sirve?

E: En el recipiente de tres, profe, se puede... o sea se saca... en el recipiente de tres litros se sacan los tres litros y se pueden... ¿cómo le digo yo?

P: ¿Tiene un interés para nosotros saber que un recipiente tiene una capacidad de tres litros? ¿Sí?

E: Sí.

P: ¿Por qué?

E: (...)

P: ¿Qué otra cosa nos interesa de esos datos? Por ejemplo, ¿será importante que nos digan que los recipientes no tienen marcaciones, por ejemplo, no sabemos dónde es un litro ni dónde son dos litros? ¿Eso será importante para nosotros?

E: (...)

P: Pero, la pregunta que yo les hacía era si era importante para nosotros ese dato y por qué es importante. Que no sepamos dónde es un litro o dónde son dos litros, o dónde son cuatro litros. ¿Por qué es importante?

E: Pues es importante para... como para saber... ¿saber medir bien los líquidos?

P: Quién sabe. Bueno, ahora cuando vayamos a la solución miramos por qué es importante.

E: Porque... las marcaciones son importantes porque no existiría medición para el agua.

P: ¡Ah!, bueno, pero eso es como la respuesta a una pregunta central.

Las alusiones generales para todo el grupo de parte de las profesoras sólo se dieron en dos oportunidades: en la primera clase observada, para contarles a los alumnos de la presencia de dos observadores y sugerirles que debían comportarse como siempre, una de ellas dice "trabajaremos en la clase de matemáticas, muy agradable para todos ustedes, de la misma manera como lo hemos venido haciendo..."; en la última clase observada, para contarle al curso qué se iba a realizar en la primera parte de la clase y al final dar las instrucciones para que siguieran con el trabajo de grupos, la profesora indica:

> *¡Calladitos! Les damos la bienvenida a los compañeros. Hoy vamos a realizar un trabajo bien interesante... es muy difícil poder hacer lo que hoy vamos a hacer porque no podemos encontrarnos como siempre quisiéramos todos en un mismo tema. Ustedes saben que unos van más adelantados y otros vamos en lo que vamos; los grupos que están con la profesora A van un poco más adelantados, los que van conmigo no es que vayan atrasados sino que vamos al ritmo de cada uno de ustedes. Entonces les decía que vamos a tener un trabajo bien interesante en el que vamos a participar todos y vamos a tener, yo diría que por primera vez este año, la experiencia de sus compañeros. Acá se encuentran dos grupitos que ya culminaron su guía número cinco. Aunque los otros no van todos en la misma guía, vamos a compartir con ellos las experiencias que ellos han podido alcanzar al desarrollar la guía número cinco. Estos dos grupitos son los que se van a encontrar hoy; ellos están acá. Ellos nos van a contar qué han alcanzado hasta ahora, qué han aprendido, qué aporte les quieren dar a ustedes que todavía no han llegado allá pero que pronto van a llegar. Entonces, quedamos con los dos grupos y espero el respeto y la colaboración que vamos a tener con ellos.*

Algunas veces las profesoras dan instrucciones sobre lo que hay que hacer, como "Anota los lados y después construyes", "Como tienen la guía, pues no tienen que copiar nada. Entonces empezamos a leer y a hacer cada una de las actividades". También en ocasiones hacen interpelaciones generales o particulares sobre la comprensión de lo tratado.

Durante el desarrollo de la actividad de exposición y evaluación entre dos grupos, las profesoras intervinieron con preguntas para ser respondidas por los estudiantes del grupo que estaba contestando en ese momento, como "Yo quisiera como que nos explicaran cómo es que se miden los ángulos, cómo se hace para construir un ángulo", "Para terminar esa partecita de grados, creo que es conveniente una parte que tienen ahí para los compañeros que todavía no han llegado, en el sentido de que entendamos como más claramente qué es un grado. ¿Quién quiere explicar qué es un grado? ¿Quién quiere explicar qué es eso, qué es un grado? (...)". También para conducir a los expositores a que hagan dibujos o explicaciones adicionales que puedan aclarar cosas a los demás estudiantes, y para forzar que el expositor precise a qué se refiere, por ejemplo al decirle "¿Qué es cm?" o para que corrija algo, tal como se ve en el siguiente fragmento de clase:

E: [El estudiante que está en el tablero inicia su explicación inmediatamente ha terminado de hacer el dibujo correspondiente al rectángulo]. Primero, que... las semejanzas que hay entre estos polígonos es que todos están conformados por segmentos de recta, por ejemplo, este rectángulo tiene segmentos de recta de B a A, este hexágono tiene... de D a A ahí, hay un segmento de recta y así, cada uno tiene su segmento de recta. La otra es que

P: Perdón, ¿tiene un solo segmento de recta cada uno?

E: No, tienen muchos segmentos.

Discusión

En la interacción de las profesoras con los estudiantes en este curso, se establecen diálogos que pueden catalogarse como tales por el tipo de las intervenciones de las partes involucradas. Aunque al respecto no hay una homegeneidad entre las dos profesoras, en general, las participaciones de los estudiantes se caracterizan porque pueden tomarse el tiempo que se requiera y no son interrumpidos, se expresan libremente en sus palabras para exponer las soluciones a las que llegaron, indican sin reparos su falta de entendimiento, hacen preguntas, proveen explicaciones solicitadas. Las preguntas de las profesoras y las preguntas y respuestas de los estudiantes se centran casi siempre en el tema matemático tratado. Las profesoras antes de intervenir dan tiempo a qué los estudiantes hablen, se contesten, discutan entre ellos. Las respuestas esperadas no se limitan a que se indique un número o resultado sino se extienden a exponer la estrategia y solución encontradas. En estos diálogos intervienen una de las profesoras y todos, o casi todos, los integrantes del grupo; en otras oportunidades el diálogo se da entre la profesora y un estudiante particular del grupo.

La interacción verbal de una de las profesoras con los grupos, se enfoca frecuentemente en revisar lo que un determinado estudiante ha entendido del tema, en explicarle cosas puntuales de éste, en hacerle en presencia de los demás integrantes del grupo, preguntas específicas y dirigidas para que llegue a la respuesta adecuada, en verificar en qué taller y problema van, si tienen los implementos de trabajo y si han terminado de escribir los problemas en el cuaderno. La interacción verbal de la otra profesora con cada grupo se enfoca frecuentemente en escuchar las soluciones que el grupo ha construido frente a un determinado punto de la guía y en caso de considerarlo oportuno en hacer preguntas o plantear casos con la intención de que los estudiantes amplíen, contemplen algo diferente o modifiquen la perspectiva que están teniendo o la respuesta. Igualmente, la interacción de estas dos profesoras con los estudiantes se distingue por el interlocutor al que la profesora se dirige. La primera profesora se centra usualmente en un estudiante a la vez y por ejemplo cuando va a hablar otra persona le dice "no, un momentico cállate porque yo estoy mirando lo que ésta persona me dijo". La segunda profesora acepta la interacción de todos los integrantes del grupo, y cuando dos personas hablan simultáneamente dice cosas como "un momentico, hay espacio para que todo el mundo hable".

Las profesoras rara vez hacen alusiones generales para todo el curso.

Aunque las profesoras señalan la importancia de la disposición de los estudiantes en grupos para el trabajo y las guías se desarrollan en grupo, el trabajo es al ritmo de cada quien, y en ocasiones esto es causa de que lo que se hace allí no sea necesariamente en grupo o de que algunos estudiantes se queden sin trabajo por momentos. Los siguientes fragmentos de clase presentan ejemplos de lo anterior.

> P: Habíamos quedado en lo de las monedas.
>
> E: No; ya, profe. Es que yo voy atrasado.

> E: Profe, yo soy el único que va adelantado.
>
> P: Vas adelantado, pero te vas a esperar que ellos, al menos, alcancen a...

En los grupos cuando la profesora no está presente se generan discusiones entre los estudiantes sobre el trabajo que están realizando. No hay discusiones en todo el curso ni entre los grupos. Las profesoras también destacan la relevancia del trabajo individual dentro del grupo y en situaciones en que hay estudiantes a los que en un comienzo se les dificulta trabajar en grupo.

En ocasiones las profesoras hacen interpelaciones generales dirigidas a un grupo, para indagar sobre la comprensión de lo tratado, para expresar reglas generales de la clase como el ritmo de trabajo individual que se lleva en el desarrollo de las guías, el comportamiento que se debe tener en las discusiones y exposiciones, lo que se espera que esté registrado en el cuaderno, etc.

Las interpelaciones de los estudiantes dirigidas a las profesoras consisten en respuestas a las preguntas de la profesora y en preguntas sobre el trabajo que se desarrolla, sobre lo que no entienden. Se evidencia que para las respuestas a las preguntas de la primera profesora mencionada, la extensión de las respuestas esgrimidas por los estudiantes es corta, y por tanto en muchas situaciones no alcanzan a expresar ideas completas, mientras que las respuestas promovidas por el otro profesor dejan ver un poco más la elaboración de las mismas.

Aunque las profesoras no hablan de los objetivos del tema a tratar o del trabajo que se va a realizar, éstos sí se indican en las guías; a veces las profesoras señalan el hilo conductor del discurso en su interacción oral con los estudiantes, aludiendo a los temas relacionados que se abordan o abordarán.

Se nota el esfuerzo de las profesoras por asumir un papel en el que no son ellas las que siempre proveen la información. Esto se evidencia en la preparación de las guías y actividades que se desarrollan durante las clases, en el hecho de que se utilizan las guías y distintos libros para suministrar información, y en sus actuaciones con los estudiantes, a través de las cuales intentan conducir a los estudiantes mediante preguntas y sugerencias para que sean ellos quienes exploren y descubran. Sin embargo en algunos casos las preguntas de las profesoras no son muy claras ni apuntan a que el estudiante vea lo que debe contestar y por tanto el estudiante tiene que adivinar qué es lo que se espera que responda. En otras ocasiones, quizás por esta misma razón, las preguntas que hace una de las profesoras son tan puntuales y direccionadas que incluyen la información necesaria para indicar a los estudiantes lo que tienen que contestar. También se observa que a veces esa profesora termina por suministrar la información que los estudiantes no han podido dar o comprender.

Valoración de las producciones de los estudiantes

Descripción

Dada la naturaleza del trabajo que hacen los estudiantes en estas clases al desarrollar talleres en los que se proponen preguntas abiertas, problemas y tareas creativas, las estrategias y respuestas posibles no son únicas. Advertimos que en algunos problemas como el del cuadrado mágico (propuesto en el tercer taller) las profesoras aceptaron variedad de soluciones, ya que distintos grupos escogieron diferentes totales para la suma y diversas estrategias para la ubicación de los números. También en ocasiones durante las interacciones de las profesoras con los grupos de estudiantes, especialmente de una de las profesoras, aquéllas preguntan expresamente por otra opinión, distinta a la expuesta por algún estudiante, con lo cual crean espacios de discusión que pueden enriquecer la visión de los alumnos, "Tú ¿qué opinas? ¿Será importante acá tener en cuenta que son seis monedas? ¿O, lo que dice su compañero?", "Discutan entre los tres y si llegan a algún acuerdo me llaman y me cuentan. Claro que si están en desacuerdo y cada uno tiene una solución también me llaman".

Después de haber trabajado en grupo un determinado punto del taller, cada estudiante debe escribir la solución en su cuaderno y lo deseable es que no pase al siguiente punto sin haber escrito aceptablemente el desarrollo de dicho punto en su cuaderno. Para una de las profesoras es muy importante la forma en que la solución está redactada y escrita en el cuaderno, independientemente de que el estudiante oralmente haya podido decir algo con sentido, y así lo indica en diversas oportunidades: "Hasta que no esté bien escrito lo que me acaban de decir no pasan al otro", "¡Ah!, bueno. Entonces toca redactar muy bien. Ustedes ya lo saben, entonces ahora es redactar", "Pero, tú me estás explicando y yo te mandé fue a leer [lo que el estudiante había escrito en el cuaderno]", "A ver, no me vas a mirar a mí. Vas a leer, no me vas a contar porque ya me contaste y ya sé que entiendes el problema y lo que quiero es que lo escribas".

> E: Tengo seis monedas, las divido... Tengo seis monedas y las divido y las peso y las que quede menos es porque ahí está la moneda falsa.
>
> P: ¿En las que quede menos? ¿Qué es eso?
>
> E: La que, la que...
>
> E: La que quede... se... se sube es porque ahí está la moneda falsa.
>
> P: Tú me explicas pero no me escribes, ¿sí ves?
>
> E: Ay, profe, pero es mejor explicar.
>
> P: Pero, ¿qué decía al empezar la guía? Vean: en forma escrita. Ese era uno de los indicadores de logro. Entonces, toca como hace Juan y escribir también. ¿No ven que es muy importante escribir?

A veces esta profesora da indicaciones más concretas que pueden ayudar al estudiante a escribir lo que ella espera, como en la situación que se presenta en la cita siguiente.

> *¿Cómo puede identifi... la moneda diferente. Ustedes inventaron que era falsa. A ver, empieza; va ordenando las ideas que tienes en esa cabecita. Cojo el recipiente de tres, lo derramo en el de cinco... todo lo que vas haciendo, lo vas escribiendo, de a poquito. Y ¿en el cuaderno en dónde vas?*

Adicionalmente, esta misma profesora advierte sobre lo que puede pasar si no se tiene el cuaderno e incluso dice quitar "vistos buenos" que ha puesto al trabajo ya realizado en el taller, "¿Dónde está el cuaderno, Juan?, ¿dónde está el cuaderno?", "Muy bien. Pero, si trajera el cuaderno sería mejor ¿cierto?, "La próxima vez si no traes cuaderno me olvido de todo esto", "No me traiga el cuaderno, Juan y verás".

La otra profesora recalca que en los cuadernos no se copia sino que se analiza y se sintetiza y luego el resultado de estas acciones es lo que se copia en el cuaderno, tal y como se muestra en un fragmento de clase ya incluido en la sección de descripción de la interacción.

Una de las profesoras insiste en el uso de las palabras apropiadas al referirse al problema y su contexto. La siguiente interpelación ejemplifica lo dicho:

Muy bien, muy bien... bien, nos acostumbramos a llamar cada cosa con su nombre; si estamos hablando de recipiente decimos recipiente, si estamos hablando de litro, lo llamamos litro.

El trabajo de los estudiantes y lo que ellos dicen se aprueba o desaprueba en clase de manera verbal casi siempre.

Por medio de frases directas de las profesoras dirigidas a un estudiante o al grupo pequeño, en los momentos en que los estudiantes responden a las preguntas de las profesoras o les muestran el trabajo realizado. A veces estas frases incluyen palabras que califican explícitamente, como por ejemplo, "Ahí, señor; está bien", "¿Ya te diste cuenta del error?", "¡Ah, muy bien!", "Exactamente", "Ahí estás bien, tú estás viendo bien, porque aquí está un cuadrado", "Pues, ahí les funcionó; en esa parte les funcionó, pero hagamos el esfuerzo de emplear un solo gráfico", "Muy bien, miremos a ver qué pasó", "¿será que hay un error en esas fichas?, ¿en qué hay el error?", "Sí, claro; eso está muy bien, eso está muy bien. Y hay otras soluciones para ese problema", "¡Ah!, bueno, muy bien; entonces ahí están colocados verticalmente; listo", "Te están dictando diez centímetros de lado, ¿sí? de un triángulo. Ahí te hacen una corrección. ¿Por qué? ¿Qué corrección están haciendo y por qué?".

Por medio de respuestas valorativas de la profesora a preguntas directas del estudiante sobre lo adecuado de su trabajo, como las que se ilustran en seguida.

E: Pero, profe ¿qué? ¿Está bien? Dígame ¿está bien?

P: Mal.

Por medio de la repetición por parte de la profesora de una misma pregunta al obtener una respuesta no acertada. En los fragmentos de clase a continuación se presentan algunos ejemplos de esto.

P: ¿Qué debemos hacer, muchachos? A ver, piensen.

E: Ir y mostrar una pequeña.

P: Ya tienen por aquí una de esas.

P: ¿Qué será lo que debemos hacer? A ver piensen. Piensen y ya vengo para que me cuenten qué sucede. Piensan, a ver; todos pensando, a ver.

P: ¿Qué pasó ahora? Cojo el de tres, lo lleno, lo echo al de cinco. Quedan faltando dos litros, ¿en dónde?

E: Espere... Quedan faltando dos litros.

P: ¿En dónde quedan faltando dos litros?

E: En el otro balde.

P: ¿Cuál es el otro?

E: El de...

E: El de tres.

P: No, el de dos... Quedan faltando dos litros.

E: ¿En dónde quedan faltando dos litros?

Por medio de indicaciones o preguntas insistentes por parte de la profesora relativas al tema que se trata, que no valoran directamente lo que dice o hace el estudiante, que acompaña algunas veces de gestos para indicar al estudiante que su respuesta no ha sido adecuada, tal cual se ejemplifica en las siguientes intervenciones, "Pero, mira cómo está la cajita. Grandes, pequeños (...) Yo no veo sino... ¿Cuántos cajoncitos?... Yo no veo sino tres", "Pero ¿qué exactamente? Volvamos a leerlo y miramos qué datos de los que hay nos sirven para resolver el problema", "Bueno, y ¿por qué tú me dices que me vas a explicar de esta forma lo que yo te estoy preguntando acá?", "Yo te hago una pregunta para que entiendas. Si quieres la figura grande de acá de los bloques lógicos para pasarla a esta cartulina, ¿tiene que ser estas medidas exactas? Bueno, hagámosla y jugamos a ver qué pasa".

E: Pequeño.

P: ¿Unicamente pequeño?

E: La forma y el color.

E: Primero, que... las semejanzas que hay entre estos polígonos es que todos están conformados por segmentos de recta, por ejemplo, este rectángulo tiene segmentos de recta de B a A, este hexágono tiene... de D a A ahí, hay un segmento de recta y así, cada uno tiene su segmento de recta. La otra es que...

P: Perdón, ¿tiene un sólo segmento de recta cada uno?

E: Profesora, acá están los diez centímetros, entonces acá medimos el ángulo de sesenta grados, entonces a los sesenta grados le medimos los diez centímetros.

P: ¿Será a los sesenta grados? ¿Dónde medimos los otros diez centímetros del otro lado?

Por medio de la repetición por parte de la profesora de una respuesta adecuada de los estudiantes. Se exponen enseguida intervenciones de este tipo.

E: ¿El tamaño?

P: El tamaño. Entonces, ¿cómo sería ahí?

P: En primer lugar, ¿cuál era el problema que había ahí?

E: Que tenemos que completar cuatro litros.

P: Ajá... que ideamos la forma para completar cuatro litros.

E: El otro dato que hay ahí es que solamente nos permite usar dos veces la balanza.

P: Exactamente. Que sólo podemos utilizar dos veces la balanza.

E: Queda uno.

P: Queda uno, ¿en dónde?

E: Me falta... Este ángulo mide más de ciento ochenta grados y recibe el nombre de ángulo cóncavo.

P: Cóncavo.

P: Pero, ¿cuál medida comparamos?

E: La abertura que hay entre los dos lados.

P: La abertura.

P: ¿Cuántos grados mide el verde, el que dibujó con verde?

E: Sesenta grados.

P: Sesenta grados. El que dibujó con negro, ¿cuánto mide?

Por medio de formularle a otros estudiantes la misma pregunta que fue inapropiadamente respondida por un estudiante a quien se le preguntó primero, como se ve en el fragmento de clase, a continuación.

E: O sea, que va sumando porque si una decena le presta a las unidades es... suma más.

P: ¿Será? Tú, ¿qué entiendes en este parrafito.

E: Que suma a la derecha.

E: Lo mismo que él; que se va sumando así, por ejemplo, el cero le presta al cero... ehhh... el diez le presta al cero entonces queda convertido en diez, diez menos nueve una, entonces ahí le prestó, ahí va sumando.

P: Ujum. Tú, ¿qué entendiste? [Pausa]. ¿Qué entendiste? [Pausa] O, ¿no has entendido? [Pausa] Recuerdan los romanos, ¿qué símbolo utilizaban para el uno? ¿sí?

Por medio de la invitación de la profesora a un estudiante que ha dicho algo apropiado a que lo repita más duro para que sea escuchado por todos, y de la repetición y confirmación luego de lo dicho por parte de la profesora.

E: Las semirrectas, no importa lo que midan; sino la abertura.

P: Dilo.

E: Lo que pasa es que las semirrectas no importan lo que midan, sino la abertura que hay entre las dos semirrectas.

P: No interesa la medida de los lados sino la del ángulo. Muy bien.

Por medio de la indicación de la profesora de que escuchen lo que los compañeros dicen.

P: Escuchemos lo que dice su compañero.

E: Quedó uno.

E: Quedó uno. Boto el que está...

P: Póngale cuidado a lo que él está diciendo.

Por medio de la indicación de la profesora a los estudiantes de que sigan pensando y trabajando mientras va a otros grupos y vuelve después a ver si pudieron resolver el problema; es el caso de las siguientes frases, "Sigamos pensando muchachos, sigamos pensando. Yo vengo ahorita a ver qué me cuentan. No podemos utilizar otra vasija porque el problema nos lo dice.", "Bueno, échenle cabeza y ya vengo".

Por medio de la indicación de la profesora a los estudiantes de que la respuesta que dieron no la convence a ella o a un estudiante, según se muestra enseguida:

A ver yo les voy a dar mi opinión. Yo pienso que así no sea falsa, estando una acá y tres acá, ésta se va a ir para arriba. La menor cantidad de peso que tiene la moneda es mínima. No me convencieron.

P: ¿Cuál es la más morena de las tres?

E: Pues Estela.

E: Susana, Susana, Susana, Susana…

E: ¡Ay¡ mire, mire.

E: Susana, Susana, ¡Susana!

P: A él lo tienen que convencer porque él es muy difícil de convencer.

Por medio de la repetición en forma de pregunta por parte de los estudiantes de una respuesta de otro estudiante que no es adecuada, ilustrada en el siguiente fragmento de clase.

E: Este ángulo tiene ciento treinta grados y recibe el nombre de obtuso. [Pausa] Este ángulo tiené noventa grados y recibe…

E: ¿Noventa?

E: Noventa.

P: Vuélvelo a medir.

E: Digo, ciento ochenta grados y recibe el nombre de ángulo obtuso.

E: Obtuso, ¿otra vez?

E: Llano.

E: Bueno, llano.

En los grupos se generan discusiones entre los estudiantes sobre el trabajo que están realizando, en las que ellos comentan sus ideas, opinan acerca de lo correcto o incorrecto de éstas, se corrigen entre ellos y caen en la cuenta de posibles errores, como se ejemplariza en los tres fragmentos a continuación.

E: ¿Cómo vamos a saber? Usted dice que en el de tres queda un litro… en el de tres queda un litro, ¿cierto? Se echa otro de tres, no caben todos los seis litros en el de cinco… ¡Miren!, miren como que lo tengo. Llenamos el de tres litros ¿cierto? Lo echamos en el de cinco; volvemos a llenar el de tres y como caben dos litros, echamos dos litros hasta que se llene la botella; entonces queda un litro acá ¿cierto? Botamos el de cinco litros.

E: ¿Todo?

E: Todo, todo y el litro que queda acá lo echamos acá, ¿entendió? Queda un litro, acá en el de cinco queda un litro, volvemos a llenar el de tres y lo echamos en el de cinco, quedan cuatro litros.

E: Sí, sí salió.

E: ¡Ah! es que yo.

E: Lo cogió bien.

E: Era de dos en dos.

E: Pero no ve que aquí dice seis.

E: Pero se acuerda que la profesora nos dijo que intentáramos de dos en dos, dos en cada mano.

E: Pero, el problema es que tenemos que sacar la moneda falsa de seis.

E: La redactó mal.

E: ¿Cuál que la relaté mal?

Las profesoras insisten en que los estudiantes estén convencidos de la respuesta que dan y en que además convenzan al profesor a su vez. Por medio de indicaciones al respecto, dan pautas para señalar lo apropiado o no de las respuestas de los estudiantes: "No me convencieron", "¿Por qué? El no está convencido, entonces hasta que él no se convenza no podemos seguir".

P: Entonces, ¿por qué está haciendo otra vez el de las páginas?

E: Porque vea aquí no me dio.

P: ¡Ah! porque no se ha convencido, entonces siga.

E: Vea profe, ahora sí.

P: A ver, ¿ya se convenció?

Una de las profesoras a veces asiente con la cabeza cuando el estudiante habla para indicar su aprobación o mueve la cabeza indicando que no está bien, o aplaude una respuesta correcta.

El día de terminación de un taller, los estudiantes dan cuenta del desarrollo de éste y esas respuestas son evaluadas por las profesoras, quienes además en ese momento les hacen preguntas sobre lo que han hecho y han entendido de los problemas trabajados, y de acuerdo con una de las profesoras, "una guía no se pasa sin evaluar". También cuando dos grupos han finalizado el desarrollo de una misma guía de manera más o menos simultánea se hace una exposición que sirve de evaluación en otro salón entre esos dos grupos, a la que asiste uno de las profesoras. En una de la clases observadas se llevó a cabo este tipo de actividad pero frente a todo el curso, y una de las profesoras los presentó diciendo:

Estos dos grupitos son los que se van a encontrar hoy; ellos están acá. Ellos nos van a contar qué han alcanzado hasta ahora, qué han aprendido, qué aporte les quieren dar a ustedes que todavía no han llegado allá pero que pronto van a llegar.

La dinámica de la actividad consiste en que algún estudiante de uno de los grupos hace preguntas sobre el tema tratado, las cuales deben ser respondidas por un estudiante del otro grupo, y viceversa.

Discusión

En pocos casos se vio que los estudiantes efectivamente usaran distintos procedimientos o llegaran a respuestas variadas, pero las profesoras dicen que estarían dispuestas a aceptar como válidos diversos procedimientos y respuestas, cuando el problema lo permita. Esta apreciación podría reforzarse por algunas interpelaciones de las profesoras durante la interacción con los grupos de estudiantes como preguntar expresamente por otra opinión, distinta a la expuesta por alguno de los estudiantes, que parece que tienen la intención de promover que emerjan diversas respuestas, de crear el espacio para que éstas se debatan, de que sean los mismos estudiantes quienes vean la validez de sus respuestas. Sin embargo, en algunos casos y a pesar de que las profesoras dan pistas de que se pueden utilizar estrategias distintas para la situación que se trabaja, una vez que los estudiantes han solucionado el problema mediante una de ellas, las profesoras no destacan el hecho de que hay otras maneras de hacerlo ni contrastan los procedimientos posibles, por ejemplo en el problema de encontrar la moneda más liviana.

En particular se perciben variaciones entre las dos profesoras con respecto a lo que se espera y se considera válido como procedimiento y como respuesta. En general para ambas, una respuesta adecuada es importante pero la forma de obtenerla difiere en gran medida; también a ambas les interesa que los estudiantes reconozcan cuál es el problema o la pregunta que hay que contestar, los datos relevantes del problema y la solución. Mientras que una de las profesoras se esfuerza especialmente para no suministrar la respuesta en su interacción con los estudiantes, para que sean ellos quienes la encuentren y además para que ésta sea puesta a prueba en actividades posteriores del grupo, la otra profesora casi que indica a los estudiantes lo que tienen que contestar al formular preguntas muy dirigidas y específicas que suministran la información para que el estudiante responda lo que se espera, o por los comentarios y gestos que hace.

Las dos profesoras destacan la relevancia de escribir la solución de algunas de las tareas más importantes en los cuadernos, lo que puede estar ligado a los logros que persiguen con el trabajo de los talleres, uno de los cuales tiene que ver con el desarrollo de la comunicación escrita, en sus palabras "que el chico se exprese tanto en forma oral como escrita". Aun así, mientras la primera profesora recalca que en los cuadernos no se copia directamente, sino que antes se analiza y se sintetiza, y es el resultado de estas acciones lo que se copia en el cuaderno, para la otra profesora parte de la respuesta adecuada es, haber copiado en el cuaderno el desarrollo de algunos problemas y sobre todo redactar y escribir en forma apropiada la solución allí; aunque el estudiante describa oralmente la solución con las palabras esperadas o con otras, se necesita que tal solución esté escrita correctamente para que sea del todo aceptada. Cabe anotar que a veces se percibe que el hecho de que las profesoras digan que el estudiante dio o explicó adecuadamente una solución determinada, está vinculado a que la misma profesora ha ayudado con sus interpelaciones a que el estudiante diga lo que se espera. Parece entonces natural que el estudiante no sea capaz luego de escribir apropiadamente lo que según la profesora es una respuesta correcta elaborada por el estudiante.

Se aprecia que para las profesoras el que un estudiante esté convencido tiene que ver con que haya entendido y estar convencido o convencer es algo conocido por los estudiantes como indicio de aprobación. Cuando una profesora dice a unos estudiantes que convenzan a otro y entre ellos mismos se explican, son ellos los que determinan que el conocimiento del otro ya es aceptable, pero de todos modos requieren la verificación de la profesora; así por ejemplo le solicitan que compruebe que un estudiante desarrolló adecuadamente el problema: "Profe: ya, ya; ya entendió". En la práctica pasar de un punto del taller al siguiente se relaciona casi siempre con este hecho de que los estudiantes estén convencidos o hayan podido convecer a las profesoras o a otros estudiantes acerca de una solución específica, como cuando una de las profesoras le dice a los estudiantes de un grupo: "hasta que él no se convenza no podemos seguir". Según lo manifiestan las profesoras, ellas se convencen cuando la respuesta que dan los estudiantes es apropiada y son capaces de dar explicaciones y justificaciones. No es claro cuándo es que el estudiante mismo se siente convencido de su respuesta, a no ser que sea cuando alguien distinto a él mismo, aprueba lo que hace.

Así, parecería que las explicaciones y justificaciones son también parte de lo que las profesoras consideran como una respuesta correcta. A veces las profesoras indican explícitamente a los estudiantes que expliquen su trabajo y les hacen preguntas de por qué, tal cual se ilustra en los ejemplos siguientes.

P: Entonces todo eso hay que explicarlo.

E: Pero, ya lo... sí lo dibujamos

E: Sí, ya lo explicamos, vea.

P: Hay que explicar y hay que dibujar.

P: Coloco tres acá y tres acá. ¿Puede ser que quede nivelado?

E: [Dudando] Sí.

P: ¿Por qué?

E: No.

P: Entonces, ¿no hay ninguna falsa?

Parece no obstante, que en ocasiones las profesoras aceptan como explicaciones a estas preguntas de por qué, la descripción de los procesos realizados y las razones que son las mismas premisas de las que se parte o se involucran en el trabajo que se desarrolla. Por ejemplo, cuando los estudiantes trabajaban en la clasificación de fichas, al mostrar una ficha que habían elaborado para las figuras grandes, la profesora pregunta la razón de la escogencia y la respuesta es lo que se había estipulado desde comienzo.

P: Y, ¿tú, por qué sacaste esa ficha?

E: Porque era triángulo y grande.

En estas clases, las profesoras son las principales encargadas de indicar, verbalmente o por escrito, y a través de vistos buenos, de anotaciones directas que califican o de comentarios indirectos que confrontan y señalan que algo no está bien, cuáles son las respuestas y producciones aceptadas. Por tanto, son las que aprueban o desaprueban el trabajo de los estudiantes y lo que éstos dicen. Este trabajo también se aprueba o desaprueba a través de gestos y acciones de las profesoras. En especial una de las profesoras a veces asiente con la cabeza para aprobar cuando el estudiante habla, aplaude una respuesta correcta, o mueve la cabeza en otro sentido indicando que algo no está bien.

Durante el trabajo en grupo y en las eventuales discusiones entre los grupos hay espacios que abren la oportunidad a que sean los mismos estudiantes quienes valoren las producciones, bien sea de ellos mismos o e de sus compañeros. En estas situaciones, muchas veces la profesora termina por avalar la posible valoración que hacen los estudiantes señalando por ejemplo, que escuchen a un compañero, indicando a un estudiante que hable más duro para ser escuchado por todos, o expresándolo directamente. En otras oportunidades una de las profesoras alude a situaciones distintas a las que los estudiantes están considerando, con el propósito de que ellos puedan contemplar algo diferente y puedan en consecuencia modificar su respuesta y valorar así su trabajo.

Las profesoras indican que durante el desarrollo de los talleres todo el tiempo hay una evaluación del trabajo de los estudiantes, que además es continua, integral, y se hace desde el punto de vista del mismo estudiante, de sus compañeros y de las profesoras; señalan que están "manejando esas tres cositas de la autoevaluación, la coevaluación y la heteroevaluación en el mismo momento". Esta evaluación es lo que determina si pueden pasar o no al siguiente punto de un taller, y dicen las profesoras que no es la profesora quien dice ya pueden pasar, es "entre todos decimos ya pasamos a la otra pregunta". De acuerdo a estas declaraciones de las profesoras, en las clases se observa que tanto las profesoras como los estudiantes hacen comentarios con respecto a lo adecuado o no del trabajo que realizan, lo que podría interpretarse como la evaluación a la que hacen referencia las profesoras; de todos modos no es una situación claramente definida en la que se vean unas reglas de juego precisas, establecidas y conocidas por todos, ni una sistematicidad por parte de las profesoras en registrar lo que van detectando o en explorar por la comprensión más allá de la solución adecuada. Las profesoras son quienes usualmente terminan por corroborar o no, la valoración que hacen los estudiantes, bien sea a pedido de ellos mismos o por decisión propia. Al momento de finalización de cada taller son las profesoras quienes evalúan el trabajo de los estudiantes consignado allí, pero también las respuestas de ellos a las preguntas orales que les hacen.

Según comentarios de las profesoras es usual que cuando dos grupos terminan de trabajar el mismo taller en clases cercanas en el tiempo o de manera más o menos simultánea, y si los estudiantes lo quieren, se lleva a cabo entre ellos una puesta en común de lo que ambos grupos aprendieron. Estos grupos salen del salón y se ubican en otro salón para hacer evaluaciones entre ellos con la presencia de una de las profesoras pero no ante todo el curso; un grupo le hace preguntas a los integrantes del otro, que son avaladas por la profesora de distintas maneras: por medio de preguntas adicionales, de silencios, de solicitar repetición de lo expuesto, etc. Dada la diferencia en el ritmo de desarrollo de los talleres que tienen los estudiantes, hacen esto así para no interrumpir el trabajo del resto de los estudiantes. La intención de estas evaluaciones o socializaciones también es que los estudiantes suban su autoestima, que reconozcan lo que saben y puedan decirlo a otros, que según una de las profesoras "los otros chicos se den cuenta que este chico sabe sobre esta temática y de hecho se apoyen de él cuando lo necesiten". No es un esquema rígido que según las profesoras puede variarse. De hecho en una de las clases se dio esta dinámica pero frente a todos los estudiantes del curso. Es decir, mientras los miembros de los grupos hacían preguntas que eran respondidas, los demás estudiantes en el salón observaban. Aunque en esta evaluación se pretendía indagar qué sabía un grupo acerca de algo específico —así lo indicaron los estudiantes al presentarlo al curso—, después de tener la respuesta los estudiantes que habían hecho la pregunta no explicitaban ninguna valoración. Sólo en pocas ocasiones las profesoras decían algo o los estudiantes aplaudían, indicando aprobación. Al parecer, las intenciones de las intervenciones de las profesoras apuntaban a que el auditorio pudiera entender mejor lo que se estaba exponiendo. Así, se hacían preguntas, se forzaba la explicitación y explicación de una idea matemática relevante que podría haber quedado escondida, se conducía a una precisión o a una corrección de parte del expositor. Tal como lo dijo una de las profesoras, esta fue la primera vez que se realizaba la actividad de evaluación frente a todo el grupo. También los estudiantes, dicen las profesoras, ahora quieren repetir esta experiencia en otro curso.

Aspectos de la ruta pedagógica en un curso de matemáticas de grado séptimo Caso 3

En este capítulo presentamos un análisis de una secuencia de tres clases de aritmética en la que se desarrolló el tópico "criterios de divisibilidad" en un curso de grado séptimo. La descripción y la discusión se realiza a través de cuatro secciones en las que damos cuenta del esquema de las clases, trazamos con algún detalle el desarrollo curricular seguido en la enseñanza del tema, presentamos detalles de la interacción a través de la cual discurren los procesos de enseñanza y aprendizaje y hacemos referencia a la valoración de las producciones de los estudiantes en el curso.

Este documento se alimenta y apoya en el análisis de las transcripciones que se realizaron de las clases observadas, las cuales recapitulan información procedente de un registro en video, dos en audio y las notas de un par de observadores; en este sentido, las citas textuales que incorporamos en este documento para ilustrar o ampliar las ideas presentadas, provienen de aquellas. En las citas hemos cambiado los nombres de quienes intervienen y en ellas usualmente hemos utilizado las letras P y E para reseñar que es el profesor o un estudiante (aunque no siempre el mismo, incluso en una misma cita) quien enuncia cada texto; además hemos incluido entre paréntesis cuadrados [ ] aspectos de lo sucedido en la clase que no fueron enunciados pero sí observados, hemos utilizado tres puntos suspensivos entre paréntesis (...) para denotar que excluimos parte de la cita y hemos hecho uso de las comillas dobles " " para citas breves. Cabe aclarar que estamos usando los genéricos "estudiante", "estudiantes", "alumno" y "alumnos" para referirnos tanto a hombres como a mujeres.

Esquema de las clases

Descripción

A continuación presentamos una descripción de los esquemas que identificamos en cada una de las tres clases.

Esquema de la primera clase

Para el desarrollo de la clase identificamos seis segmentos que denominamos: revisión de la idea de múltiplo, revisión de la tarea, trabajo en torno al criterio de divisibilidad por dos, trabajo en torno al criterio de divisibilidad por tres, trabajo en torno al criterio de divisibilidad por cuatro y asignación de la tarea.

Revisión de la idea de múltiplo (7 minutos). Al iniciar la clase hay bastante ruido y el profesor hace varios llamados al orden. Cuando aún hay un poco de ruido el profesor inicia la clase preguntando a los estudiantes acerca de cuándo un número es múltiplo de otro. A medida que el profesor replica ésta o preguntas similares, se desplaza por diferentes lugares del salón y establece diálogos cortos con los estudiantes en los que a través de preguntas y contra preguntas selecciona las ideas expresadas por los estudiantes tanto para generar una respuesta a la pregunta, como para aclarar dudas o errores de los estudiantes, hasta cuando parece quedar satisfecho con la revisión de esta idea.

Revisión de la tarea (4 minutos). Al comenzar este segmento el profesor se dirige a todos los estudiantes para preguntarles si alguien sabe enunciar el critério de divisibilidad por dos, que era una de las cosas que tenían que averiguar como tarea. Durante un par de minutos insiste en la pregunta y al notar que no responden apropiadamente, concluye que ellos no han hecho la tarea y decide el mismo explicar los criterios de divisibilidad dando paso de esta manera al siguiente segmento de clase. El siguiente fragmento, ilustra el inicio de este segmento.

P: Listo. Ustedes tenían que averiguar —fíjese que nos estamos ubicando porque hace dos semanas no teníamos clase— ustedes tenían que averiguar cuando un número es divisible por dos. ¿Quién lo hizo?

E: No profe.

P: Lorena. Leila ¿tu la hiciste?

E: Un número es divisible por dos.... [no se entiende].

P: Lorena ¿Cuándo un número es divisible por dos?

E: [No responde].

P: ¿Tu hiciste la tarea?

E: Sí señor.

P: ¿Cuándo un número es divisible por dos?...en tu cuaderno está, Lorena. Leonardo, ¿cuándo un número es divisible por 2?

E: Un número divisible por dos...

P: Sí, pero yo quiero saber si tu hiciste la tarea.

E: [se escuchan murmullos de los estudiantes]. (...)

P: No estamos haciendo la tarea. Yolanda, ¿cuándo un número es divisible por dos?

E: [No responde].

P: No la hizo. Aura María, ¿cuándo un número es divisible por dos?

E: ¿Cuando la división es exacta? ¿Si?

P: Si, pero ¿cuál es el criterio?, (...)

La manera de proceder que se lustra en el fragmento anterior también se identifica en otros fragmentos de segmentos de la segunda y la tercera clases, en donde el profesor antes de pasar a trabajar en un nuevo criterio, indaga acerca de lo que han hecho algunos estudiantes en torno al criterio de divisibilidad sobre el que luego quiere ocupar la atención para continuar.

Trabajo en torno al criterio de divisibilidad por dos (21 minutos). Para formalizar el inicio del tema el profesor escribe en el tablero "Criterios de divisibilidad" y como subtítulo "Divisibilidad por 2" y luego dicta tanto la definición de lo qué es un criterio de divisibilidad como el enunciado del criterio de divisibilidad por dos, con la intención de que cada estudiante los anote en su cuaderno. Después el profesor revisa como los estudiantes están entendiendo el enunciado del criterio —para lo cual considera tres preguntas a responder: ¿que hay que mirar? ¿qué operaciones hay que hacer? y ¿cuál debe ser el resultado de esas operaciones?— que discute con los estudiantes. Luego de ésto, el profesor propone algunos ejemplos numéricos para que los estudiantes apliquen el criterio y al rato revisa como lo están haciendo. El final del segmento está determinado por el hecho de que ningún estudiante le responde al profesor la pregunta de si hay "¿Preguntas de divisibilidad por 2?", ante lo cual el profesor procede a considerar el siguiente criterio.

Trabajo en torno al criterio de divisibilidad por tres (20 minutos). El profesor procede de manera similar a como lo hizo en el segmento anterior. Dicta el criterio, indaga cómo lo están entendiendo los estudiantes, propone algunos ejemplos numéricos para que los estudiantes lo apliquen, revisa el trabajo hecho y termina abriendo un espacio para preguntas de los estudiantes que no se desarrolla pues éstos no las proponen. De todas maneras, en el fragmento que enseguida se presenta, se destaca que a diferencia de lo sucedido en el caso de divisibilidad por 2, ahora el profesor procede casi inmediatamente a considerar el siguiente criterio.

P: Ah, listo! ¿Preguntas de divisibilidad por 2?

E: [Algunos pocos estudiantes contestan]. No.

P: ¿No? Entonces escribimos: Divisibilidad por 3.

E: [Entre tanto algunos estudiantes hablan entre sí] Divisibilidad. Mire entonces el 0 no es par ni impar porque...(...) El 3 es divisible por 2? Si, puede ser, no porque el 3, 6, 9 no ve que es así?

P: [Luego de escribir el título en el tablero, el profesor comienza a dictar]. Un número ... ¿Dónde es donde lleva la tilde "número"?

E: [Algunos estudiantes responden] en la u...

P: es divisible por 3 ...

E: ¿Qué? ¿Señor? ...

P: es divisible por 3 ...

E: no, el principio ...

P: un número es divisible por 3 cuando... ¿alguien sabe?

E: [Algunos estudiantes dan respuestas]. Cuando la última cifra es impar. Cuando la última cifra es 3 y cero...

P: [El profesor niega con la cabeza y dice]. No. Cuando la suma de sus dígitos... [Un estudiante entonces dice]

E: ...da un múltiplo de 3. Sí a lo bien.

P: [el profesor continúa dictando] cuando la suma de sus dígitos es ... múltiplo —con tilde en la primera u— de 3.

Trabajo en torno al criterio de divisibilidad por 4 (14 minutos). El esquema de trabajo es similar al comentado en los dos segmentos anteriores.

Asignación de la tarea (5 minutos). En este última parte de la clase, el profesor enuncia dos actividades que los estudiantes deberán realizar en su casa y que constituyen la tarea para la siguiente sesión. Las actividades se proponen así:

Taller

Complete el siguiente cuadro escribiendo si o no según corresponda.
Escriba todas las operaciones que justifiquen su respuesta

divisibilidad por	3	4	5
478694			
379560			
394672			
577000			
435843			

P: [Una vez que el profesor ha acabado de escribir la tarea en el tablero se dirige a los estudiantes]. ¡Chist! El que va terminando, copia la tarea.

E: Ah, esa tarea es muy fácil.

P: [Enseguida el profesor hace una breve explicación] Aquí, por ejemplo yo miro si ese número es divisible por 2, ¿si es?, o ¿no es?

E: [Los estudiantes responden a coro] Sí!

P: Entonces aquí debajo del 2, escribo que sí es. Este es dividible por 2.

E: [Los estudiantes responden a coro]. Hum.

P: Oído. En divisibilidad por 3... en divisibilidad por 3 deben hacer en su cuaderno, las operaciones que sean necesarias, así sea, 4+0+0+0+0, la escriben en su cuaderno. ¿Listo? Si tiene que dividir por 4, pues lo hacen. ¿Preguntas de la tarea?

E: No. [y otro estudiante dice sin que al parecer sea escuchado por el profesor] Qué hay que hacer —ja-ja—

P: Entonces pueden empezar a hacer la tarea. [Luego el profesor dice] Averiguan, ¿cuándo un número es divisible por 5, 6 y 7?

E: [Los estudiantes están hablando entre si]...

El profesor no estuvo presente en la fecha en la que inicialmente se debía desarrollar la segunda clase y para suplir la ausencia envió con su "secretaria"[1] un segundo "Taller" que los estudiantes debían trabajar para la siguiente fecha de clase. De esta manera quedaron dos tareas asignadas para la segunda clase. El enunciado se presenta a continuación.

1. Complete el siguiente cuadro escribiendo SI o NO según corresponda.
   Efectúe TODAS las operaciones correspondientes en el cuaderno.

Divisible por / Cantidad	2	3	4
51300			
28754			
36820			
30507			
74096			

2. Escriba la cantidad que falta a cada número, para que cumpla la condición dada:
   a) 4 5 7 0 __ para que sea divisible por 2
   b) 4 5 7 0 __ para que sea divisible por 3
   c) 3 7 5 7 __ para que sea divisible por 4
3. Encuentre otros valores que cumplan las condiciones del punto anterior para cada cantidad.
4. Si un número es divisible por 6 si es divisible por 2 y por 3. Conteste las "3 preguntas" y escriba 3 ejemplos en que aplique divisibilidad por 6.

Tabla N° 1. Segunda tarea asignada por el profesor para trabajar por fuera del aula.

1. En el apartado titulado 'Interacción a través de la cual discurre la enseñanza y el aprendizaje' hablaremos de cual era el papel que jugaba una de las estudiantes del curso que aquí se denomina como "secretaria", tal como la llamó el profesor.

Esquema de la segunda clase
En la segunda clase identificamos tres segmentos a saber: revisión del taller, ejercicio de divisibilidad por seis y asignación de la tarea para la casa.

Revisión del taller (52 minutos). Este segmento se desarrolla durante cerca del 80% de la clase. El profesor lo inicia conversando con todo el grupo y en esta conversación, algunos estudiantes responden a preguntas que hace el profesor. Al comenzar el profesor explica que dado que no pudo venir a clase en la última fecha programada, les envió un taller, como una segunda tarea, cuya discusión y revisión terminó siendo el foco principal de actividad de este segmento; procedió entonces a preguntar si habían surgido dudas con respecto a las dos tareas y como los estudiantes no le reaccionaron, comenzó a hacer preguntas en torno a la tarea presentada en la Tabla 1. Básicamente se identifican dos tandas de preguntas: las primeras se enfocan en el literal c del segundo punto y luego en el literal b del mismo punto, pero en ambos casos también se pone a consideración la pregunta de si había otras respuestas posibles —tercer punto del taller; la otra tanda de preguntas se enfoca en la divisibilidad por seis —último punto de la tarea. El profesor durante todo el desarrollo de este segmento hace preguntas a todo el grupo, pero varias veces termina estableciendo diálogos —una veces cortos y otras veces más largos— con estudiantes específicos; el recurso del tablero se utiliza para copiar los números propuestos en la tarea en el segundo puntos y los que a veces propone el profesor para realizar contra preguntas.

Ejercicio de divisibilidad por seis (12 minutos). Después de la revisión que se hace del taller el profesor propone un ejercicio de divisibilidad por seis para que los estudiantes lo trabajen en su puesto. Mientras algunos estudiantes empiezan a trabajar se escuchan muchas voces y ruido y el profesor se dedica a pasar por algunos puestos y preguntar a los estudiantes por su trabajo. Luego, el profesor comienza a hacer una revisión pública del trabajo que han hecho algunos estudiantes, hasta cuando se da cuenta que falta muy poco tiempo para que suene el timbre que anuncia el fin de la clase.

Asignación de la tarea (2 minutos). Este final de clase contrasta con respecto a lo que sucedió hacia el final de la sesión en las otras dos clases. Las diferencias radican en que en esta clase el tiempo que dedicó a la asignación de la tarea fue mucho más breve, no contempló la realización de ejercicios en los que hubiera que verificar la divisibilidad de un número y la tarea fue dictada y no escrita en la pizarra. Por otra parte, se destaca el hecho de que el profesor conmina a los estudiantes a que deben repasar lo que se ha visto hasta el momento, pues les preguntará en la siguiente clase acerca de lo que ya se ha visto.

Esquema de la tercera clase
En la tercera clase identificamos seis segmentos a saber: revisión de la tarea: divisibilidad por siete, ejercicios de divisibilidad por siete, revisión de la tarea: divisibilidad por ocho, ejercicios de divisibilidad por 8, revisión de la tarea: divisibilidad por 9 y taller.

Revisión de la tarea: divisibilidad por siete (7 minutos). Al iniciar la clase, se escucha mucho ruido. El profesor delante de todo el grupo comienza a preguntar a algunos estudiantes por la tarea y luego de seleccionar a un par de ellos que no responden, le da la palabra a un estudiante que levanta la mano y que parece tener más clara idea de como es el criterio. Luego, comienza estableciendo un diálogo con todo el grupo, pero termina interactuando con un estudiante particular con el que resuelve, con base en preguntas y contra preguntas, un ejemplo numérico que ilustra cómo ese aplica el criterio de divisibilidad por siete. El cierre del segmento se establece en el momento en el que el profesor pide que copien el ejemplo y luego dice: "¿preguntas?". El siguiente fragmento contiene un trozo de transcripción que corresponde al intercambio que se establece al iniciar este segmento y otro al terminarlo e ilustra algo de lo dicho.

P: Bien, sentaditos por favor jóvenes. Siéntense, por favor. Siéntense jóvenes. Que se sienten jóvenes. Buenas tardes.

E: [Varios estudiantes responden en coro]. Buenas tardes.

P: A ver escuchamos. Leonardo. Paula. [Hay una pausa]. Bien. Había una tarea, ¿cierto?(...)

P: [Sigue habiendo ruido]. Señor Alvarez, Nariño ¿qué era la tarea?

E: ¡Eh!, la divisibilidad por 7, 8 y 9. [Y otro estudiante agrega] Oh my God, no la hice.

P: A ver. Qué hubo joven. A ver, Congote ¿cuándo un número es divisible por 7?

E: [El estudiante no contesta].

P: Congote, ¿cuándo un número es divisible por 7?

E: Profesor, es que sólo encontré la del 8 y la del 9, es que no me encontré la del 7.

P: [Una estudiante levanta la mano y el profesor le da la palabra]. Léela Juana, eh, Inés

E: Un número es divisible por 7 si al multiplicar la última cifra por 2 y restarle lo que queda, obtenemos el número mayor. Lo que debemos es que?...

P: Por ejemplo, tengo esta cantidad [escribe en el tablero 4784]. Lee de nuevo y escuchen. José, Lola.

E: Un número es divisible por 7 si al multiplicar su última cifra por dos y restarle lo que queda obtenemos un múltiplo de 7.

P: (...)

P: Entonces, 4784 es múltiplo de 7?

E: ¡No! (a coro)

P: ¿Están seguros?

E: Sí (a coro)

P: Copien el ejemplo por favor. ¿Preguntas? (...)

Ejercicios de divisibilidad por siete (9 minutos). Mientras todavía hay algunos estudiantes que están copiando el ejemplo anterior, el profesor propone en el tablero un ejemplo numérico para que los estudiantes apliquen el criterio y se establezcan si es divisible por siete. Luego, el profesor se pasea por el salón, le pregunta por el cuaderno a algunos estudiantes y le hace preguntas a algunos estudiantes. Entre tanto los estudiantes parecen trabajar en sus cuadernos mientras una estudiante (la secretaria) pasa por los puestos, al parecer, revisando la tarea. Al cabo de un par de minutos el profesor se dirige a la clase e inicia un intercambio oral con los estudiantes para resolver el ejercicio propuesto, actividad que dura otro par de minutos; luego de esto vuelve a proponer otro ejercicio, y se repite un esquema de trabajo similar al desarrollado con el ejercicio anterior.

Revisión de la tarea: divisibilidad por ocho (4 minutos). El profesor se dirige al tablero, lo borra parcialmente e inicia el trabajo con este criterio, diciendo "Bien! Divisibilidad por 8..."; pocos estudiantes levantan la mano y el profesor dice "¿Nadie más hizo la tarea? ...", señala a un estudiante, pero no le contesta, ante lo cual dice "Estamos sinvergüenzas" y continúa solicitando respuesta, entre tanto algunos estudiantes indican con manos y voces que quieren leer la tarea y de entre estos el profesor selecciona uno. De nuevo se toma un tiempo de intercambio oral con el estudiante seleccionado y con otros estudiantes más, hasta que finalmente queda enunciado el criterio.

Ejercicios de divisibilidad por ocho (4 minutos). En este segmento el profesor propone un primer ejemplo para que se verifique la divisibilidad por 8, pero no da espera para que los estudiantes lo trabajen solos, como si lo hizo en otros casos, sino que de una vez inicia el intercambio oral con los estudiantes para abordar la solución. Luego repite la misma actividad con otro ejemplo numérico, y luego con otro.

Revisión de la tarea: divisibilidad por nueve (2 minutos). El profesor de nuevo pregunta a los estudiantes quien sabe el criterio y antes de medio minuto un estudiante enuncia de manera correcta el criterio. Entonces, en este caso el profesor enseguida procede a proponer tres ejemplos numéricos para que los estudiantes verifiquen la divisibilidad por nueve, los cuales son resueltos rápidamente por los estudiantes dando paso así a la última actividad de esta clase.

Taller (16 minutos). En este última parte de la clase, el profesor propone un taller para que los estudiantes lo resuelvan en su casa y de paso les sirva para prepararse para la evaluación que se realizará próximamente. El enunciado del taller que fue escrito en el tablero es:

1. Completar el siguiente cuadro escribiendo SI o NO según el caso.
Escriba las operaciones que sean necesarias.

Divisible por	4	6	7	8	9
578000					
8544548					
578200					
478960					
720000					
547846					

2. Escribir el número que falta para que la cantidad cumpla la condición dada.
   - 4785__ para que sea divisible por 6
   - 3785__6 para que sea múltiplo de 4
   - 57836__ para que 8 sea uno de sus factores
   - 37897__5 para que sea divisible por 9
   - 4__3789 para que sea divisible por 7

Luego de escribir el taller el profesor explica a los estudiantes que:

> P: Bien! si ustedes siguen la instrucción que dice el taller, cuando yo les ponga el punto en la previa, usted ya va a estar acostumbrado a hacer (...) lo que tienen que hacer en la evaluación. Yo le admito, que usted haga la suma para divisibilidad por 3, mentalmente, pero si le pregunto divisibilidad por 4, a menos que sea un múltiplo que usted se sepa, tiene que hacer la operación. Si es divisible por 2 y por 3, algo tendrá que hacer. Por allá, en alguna previa, en alguna ocasión, resultaron haciendo todas las divisiones; si usted no maneja las reglas que hemos trabajado no me sirve. Y si usted me escribe las operaciones en su evaluación, lo mismo! Me hace el 50% del trabajo, entonces pilas! (...)

Discusión

En este apartado presentamos nuestra visión acerca de la existencia de tres segmentos que caracterizan a las clases como conjunto. Para empezar, en una primera parte de la clase, el profesor usualmente revisa el trabajo de los estudiantes en torno a la tarea o al taller asignado en la clase anterior, para lo cual el estudiante debe explicar en qué consiste la tarea y cómo se desarrolla; luego, en una segunda parte de la clase, se lleva a cabo algún tipo de trabajo en torno a los criterios de divisibilidad en el que en algunos momentos el profesor y los estudiantes intercambian oralmente, y en otros momentos, los estudiantes trabajan en sus puestos mientras el profesor se pasea por el salón revisando el trabajo que hacen los estudiantes; en la última parte de la clase, y para cerrar la sesión, el profesor asigna una tarea o un taller que se debe trabajar por fuera de la clase y que luego se revisa en la siguiente sesión.

Dado que la revisión de la tarea no solamente se realiza al inicio de la clase sino que su consideración aparece de manera reiterada luego de trabajar en torno a un criterio de divisibilidad o de realizar un trabajo de repaso, las tareas que en general asigna el profesor tienen la intención de preparar el terreno para iniciar el abordaje y la discusión de tema. En pocas palabras, la revisión de la tarea hace parte esencial de la clase y determina en buena medida el curso de acción del profesor durante la sesión de clase.

Asignación de tareas para realizar fuera de la clase

Una actividad presente en cada una de las clases fue la asignación de tareas para realizar en la casa. En general, al finalizar la clase el profesor copia la tarea en el tablero y agrega alguna tarea adicional en forma oral o en otras ocasiones la dicta para que los estudiantes la copien. Las tareas asignadas en forma escrita en el tablero contienen dos tipos de tareas: una, consiste en determinar la divisibilidad de una conjunto dado de números —que pueden estar entre el 2 y el 9, incluidos estos— y la otra suele proponer que para un número dado se encuentre un dígito que se pueda agregar a tal número, de tal manera que se satisfaga la divisibilidad por algún número dado (véase por ejemplo el punto 2 del taller presentado en la Tabla 1). En cuanto a las tareas comunicadas en forma oral, que en una ocasión fue dictada, lo usual es proponer que se averigüe acerca de los enunciados de los criterios de divisibilidad, salvo en el caso de divisibilidad por 6, que fue enunciado en una de las tareas que dejó por escrito.

Al observar los enunciados de las tareas y el uso que de éstas se hace en la clase, reconocemos varias intenciones que sustentan el para que se proponen. Por una parte, pretenden que el estudiante se informe de cuál es el contenido de los enunciados de los criterios de divisibilidad que se van a considerar en la clase, y por otra parte, afianzar la habilidad procedimental del estudiante para aplicar los criterios. Si bien las dos intenciones que se acaban de mencionar son las más destacables, otras posibles intenciones son: promover conexiones de significado entre términos como múltiplo, factor y divisor, aunque esto sólo se identifica en la última tarea; también —y a propósito de la tarea en los que pide agregar un dígito a un número dado para que se satisfaga cierta divisibilidad— revisar la comprensión de los enunciados de los criterios a aplicar, propiciar que el estudiante se dé cuenta de que puede haber más de una respuesta a dicho ejercicio, y quizás identificar ciertas características en la divisibilidad de un número (v.g. que el estudiante se dé cuenta de que si al final de un número está el dígito "2", y dicho número es divisible por tres, también será divisible por tres el número que resulte de cambiar el "2" por un "5" o un "8").

Finalmente, no sobra señalar otras dos cuestiones observadas. Por un lado, aunque en una de las tareas se consideró la tarea de averiguar si un número dado era divisible por 5, dicho criterio de divisibilidad no fue considerado en las clases observadas; y por otra lado, que para una las tareas que fue enunciada en forma oral, no fue recordada por al menos tres de los estudiantes de curso a quienes los observadores interrogaron acerca de qué era la tarea que había quedado para la siguiente clase. Posiblemente, hay una manera implícita de insinuar, por parte del profesor, o de asumir, por parte del estudiante, que lo prioritario de la tarea es lo que se pide registrar por escrito.

Revisión de las tareas asignadas en la clase anterior

En general, el profesor revisa la tarea a través de un intercambio verbal con los estudiantes. Algunas veces el profesor elige al estudiante al que le quiere preguntar acerca de la tarea y en otras ocasiones permite que sea voluntariamente algún estudiante el que la explique. Tanto para indagar por el trabajo del estudiante con respecto al estado de elaboración alcanzado por éste en la tarea al comenzar la clase, como para desarrollar el trabajo académico en las partes intermedias de la misma, es frecuente que el profesor proponga la utilización de ejemplos numéricos para que los estudiantes expliquen o ilustren como funciona el criterio de divisibilidad que se esté considerando; sin embargo, también en partes intermedias de la clase, cuando en un momento dado se termina el trabajo con un criterio y se pasa a trabajar en un nuevo criterio, el profesor algunas veces vuelve a revisar la tarea, a través de preguntas que indagan acerca de lo que han averiguado los estudiantes sobre el nuevo criterio a considerar.

Por lo general, una vez que queda ilustrado el procedimiento para la verificación de un criterio de divisibilidad y el profesor propone ejercicios para que los estudiantes los desarrollen, mientras los estudiantes trabajan en los ejercicios propuestos, el profesor pasa por los puestos y tiene breves intercambios con algunos estudiantes o hace comentarios para todo el grupo, en los que les recuerda cosas como: escribir las operaciones de verificación que realicen con los números trabajados y explicar cómo es que aplican el criterio. Ocasionalmente, el profesor se detiene en aspectos que podrían no ser tan nodales a la discusión en torno a un criterio, como por ejemplo para aclarar aspectos que considera que no son bien comprendidos por los estudiantes o en otros casos para darles la oportunidad de que hagan preguntas. Nunca se registró que un estudiante pasara al tablero con el propósito de copiar o desarrollar la solución completa de un ejercicio; más bien, las pasadas al tablero de los estudiantes eran muy esporádicas y el profesor sólo las solicitaba para que se verificara o aclarara algún aspecto muy particular de un ejercicio, como podría ser el de realizar una división para verificar una divisibilidad.

Desarrollo del contenido

En algunos de los fragmentos que fueron presentados se pueden destacar aspectos que caracterizan el desarrollo del contenido. En primer lugar, es más frecuente evidenciar el hecho de que el profesor dicte el criterio para que éste sea anotado por los estudiantes en su cuaderno —hecho en el que de paso se nota el interés del profesor por llamar la atención a los estudiantes acerca de la utilización de una correcta ortografía— que desarrollar a través de un intercambio oral con los estudiantes, el enunciado del criterio. Sin embargo, aunque no encontramos una razón que justifique porque en unos casos se hace de una manera y en otros no, pensamos que en términos de la complejidad implicada en los enunciados de los criterios de divisibilidad, el criterio de divisibilidad por siete, marca una diferencia. Este hecho lo abordaremos con más detalle en la próxima sección.

Por lo general, una vez que queda ilustrado el procedimiento para la verificación de un criterio de divisibilidad y el profesor propone ejercicios para que los estudiantes los desarrollen, mientras los estudiantes trabajan en los ejercicios propuestos, el profesor pasa por los puestos y sostiene breves intercambios con algunos estudiantes o también hace comentarios para todo el grupo, en los que les recuerda cosas como que deben escribir las operaciones de verificación que realicen con los números trabajados y la explicación de cómo fue que se aplicó el criterio. Ocasionalmente, el profesor se detiene en aspectos que podrían no ser tan nodales a la discusión en torno a un criterio, como por ejemplo para aclarar aspectos que considera que no son bien comprendidos por los estudiantes o en otros casos para darles la oportunidad de que hagan preguntas. Nunca se registró que un estudiante pasara al tablero con el propósito de copiar o desarrollar la solución completa de un ejercicio; más bien, las pasadas al tablero de los estudiantes eran muy esporádicas y el profesor sólo las solicitaba para que se verificara o aclarara algún aspecto muy particular de un ejercicio, como podría ser el de realizar una división para verificar una divisibilidad.

Al parecer, no solamente es el tópico abordado lo que justifica o determina el tipo de acciones que despliega el profesor durante la clase para guiar su enseñanza, también las respuestas que obtiene el profesor de parte de sus estudiantes le sugieren caminos por donde transitar. El profesor, al referirse concretamente a aspectos de la clase tales como la elección de los ejercicios numéricos que decide considerar en un momento dado o a los puntos a asignar en una siguiente tarea, dijo:

> *(...) el desarrollo de la clase me va diciendo por donde coger, por donde debo afianzar más y a partir de eso que yo he observado, selecciono los números (...) de acuerdo a lo que yo quiera trabajar, quiera enfatizar; entonces no son preseleccionados porque yo no hago como un libreto, sino que de acuerdo a lo que yo vea pongo los ejercicios, pongo la tarea (...).*

El profesor consideró que con el grupo que el dirige, había clases donde se trataban otros temas de matemáticas que no necesariamente se ajustaban al esquema general de clase que se había descrito. Sin embargo, no sólo corroboró que para este tema de la divisibilidad el esquema utilizado le parecía apropiado, sino que explicó que había otros tópicos en los que la dinámica de la clase era diferente y donde el tema —por ser más extenso— le requería a los muchachos una mayor dedicación en ejercitación práctica y en trabajo intelectual. Lo anterior sugiere que este tema, comparado con otros temas del currículo escolar, le parecía más apropiado para poner a trabajar a los estudiantes durante la clase: "este tópico daba más para el trabajo de llegar y hagan este taller y resuélvalo". Posteriormente, al pedirle al profesor que explicara en más detalle qué era lo que hacía que el tema se adecuara a ese esquema, señaló:

> *Por la inducción, el proceso que implica que ellos aprendan a aprender (...) me explico: cuando pongo una tarea, (...) uno tiene que ver hasta dónde entendió el muchacho la tarea, entonces viene el manejo del lenguaje que uno utiliza y los procesos que él utiliza para desarrollar la tarea, (...) a partir de eso uno mira qué elementos todavía no son muy claros, o en qué hay que reforzar, en dónde hay cosas que no pudieron hacer y (...) cosas que uno espera que no puedan hacer; a partir de ahí uno toma el trabajo para el desarrollo de la clase. Lo otro es, los últimos diez minutos, cuarto de hora, el trabajo es la iniciación de la tarea siguiente, precisamente por eso, si el niño no tiene claro el enunciado de la tarea, entonces tiene la oportunidad de venir y preguntar ¿cómo es que hago? (...)*

Visión panorámica del tema abordado

Descripción

En la descripción que ahora se presenta se pretende dar una idea del desarrollo curricular observado para abordar la enseñanza del tema; se incluyen un bosquejo de la secuencia de las actividades realizadas en las clases y un recuento de las aspectos matemáticos consideradas durante el desarrollo del tema tanto desde el punto de vista conceptual como desde el procedimental.

Secuencia de actividades

La secuencia seguida para abordar los criterios de divisibilidad ya se puede entrever a partir de lo segmentos del esquema de las clases que se describió en la sección anterior. En forma sucinta la secuencia seguida es: primero, se abordan algunas ideas y consideraciones generales asociadas a los criterios de divisibilidad en donde el foco de atención es la idea de múltiplo, luego se define qué es un criterio de divisibilidad y enseguida se realiza un trabajo en torno a tres criterios de divisibilidad del 2, 3 y 4 respectivamente; después, con base en tareas y talleres se consolida el trabajo realizado con respecto a los criterios anteriores y se introduce un trabajo en torno al criterio de divisibilidad por 6; y por último, la secuencia se finaliza con un trabajo en torno a tres criterios de divisibilidad para los números 7, 8 y 9.

Elementos del conocimiento conceptual

Los términos que se enunciaron durante las clases observadas se refieren a objetos o ideas matemáticas y principalmente son los que se reconocen a través en los enunciados de los criterios de divisibilidad; además, para la mayoría de términos que se identifican en el desarrollo curricular no se puede apreciar que se recurra a la utilización de notaciones particulares con excepción de la que alude a la notación de una división indicada con el símbolo $\underline{|\quad\quad}$ para indicarla, por ejemplo $34525\underline{|\,2\quad}$. El manejo de lo simbólico, posiblemente por la naturaleza misma del tema considerado, no se exhibió como una preocupación importante en el desarrollo de estas clases.

En la Tabla N° 2 se presenta un listado de varios términos referidos, que se han agrupado de acuerdo a una lista de algunos de los hechos matemáticos mencionados en el desarrollo curricular.

Términos referidos	Hechos mencionados
Producto, resultado, factor, multiplicando, multiplicador, múltiplo.	Un número es múltiplo de otro si uno de ellos es factor del otro. El resultado de multiplicar dos números se llama producto. El multiplicando y el multiplicador son los factores de un producto.
Criterios de divisibilidad, división, división exacta, residuo, divisible	Los criterios de divisibilidad son reglas que permiten conocer cuándo un número es divisible por otro sin necesidad de efectuar la división. Una división es exacta si el residuo da cero. El residuo es lo que sobra al dividir. Un número es divisible por otro si la división es exacta.

Tabla N° 2. Listado de términos referidos y hechos mencionados

Número par, número impar, mitad de un número.	Un número es par si tiene mitad. Un número es par si puede dividir exactamente por 2. Los números son pares o impares. Cero es par.
Suma, adición, dígito, cifra, número, sumandos	Un número tiene dígitos o cifras. Los dígitos de un número se pueden sumar. La adición de los dígitos de un número es lo mismo que la suma de sus cifras.

Tabla N° 2. Listado de términos referidos y hechos mencionados

Pocas convenciones se usan o plantean durante las clases observadas.Tal vez, el uso de una raya "_" se utiliza en uno de los talleres para indicar un dígito que la puede reemplazar y en el caso de la escritura de números de más de tres dígitos es poco usual, aunque se identifican excepciones, que se indique el lugar de los miles o de los millones, es decir un número como por ejemplo quince mil se escribe como 15000 y no como 15.000.

Algunas de las ideas matemáticas en las que reconocemos que en las clases se hace un trabajo o se mencionan algunos comentarios con un énfasis más cargado hacia lo conceptual son las siguientes:

Idea de múltiplo. En la primera clase, el profesor comienza preguntando a los estudiantes acerca de la idea que tienen de múltiplo. En los diálogos que surgen se evidencia la aparición de términos asociados a dicha idea y a la de divisibilidad como son: producto, resultado, total, factor, multiplicando, multiplicador, divisible, cociente, residuo y otros más. Un fragmento, que corresponde a uno de los momentos en que se está tratando de formalizar la idea de múltiplo que ilustra el tipo de preguntas que propone el profesor al estudiante y la manera como se habla acerca de los términos señalados es el siguiente.

P: [El profesor se desplaza a otro sitio del salón y dice] Sonia, ¿cuándo un número es múltiplo de otro? [La estudiante no contesta y en su lugar lo hace la compañera de puesto con quien el profesor entabla un diálogo público]

E: Cuando es ...

P: ¿Cuándo? ¡Chist!

E: Cuando un número, digamos, el número que sea está ¿debajo del otro?, ¿no?

P: Sigue ... ¿y?

E: Y se multiplica y da el resultado y...

P: Y se multiplica ¿Será?

E: ¿Se divide?

P: Piensa.

E: Ok. Mira...[El profesor interrumpe por unos estudiantes que están distraídos y luego de reprenderlos le pide a la estudiante que continúe] Pues el resultado que dé los... entre multiplicando y multiplicador, el resultado...

P: ¿Cómo se llama el resultado?

E: Eh... producto. El producto se divide con el multiplicador ¿si? el multiplicador y da pues el número exacto, o sea el cociente.

Paridad del cero. Al ponerse a consideración de los estudiantes el enunciado del criterio de divisibilidad por dos, surgen discusiones en donde el profesor en un momento dado asume implícitamente no reconocer a cero como un número par y en otro momento, debido al intercambio verbal que sostiene con sus estudiantes termina argumentando y tratando de conducir el razonamiento de ellos, para que se admita que 'cero es par'. Veamos dos fragmentos alusivos a este asunto.

> P: [Enseguida el profesor se dirige a todo el grupo]. Entonces, ¿cómo deben ser estos números? [señala las últimas cifras de los números 49786 y 53347].
>
> E: [Algunos estudiantes responden a coro]. Pares
>
> P: Pares, ¿o?
>
> E: [Algunos estudiantes responden a coro]. Impares [El profesor niega con la cabeza y entonces algunos nos estudiantes responden a coro] ... o cero
>
> P: Bueno, ¿pares o impares?
>
> E: [Algunos estudiantes responden a coro] Pares
>
> P: O si no...
>
> E: Cero!
>
> P: (...) ¿Por qué está bien que Leila haya dicho que cero es par?
>
> E: [Algunos estudiantes hablan entre sí, sin responder directamente al profesor]. Apréndasela, porque termina en cero, ... Si, porque termina en cero.
>
> P: Es correcto; cero es par. Pero, ¿quién nos quiere contar, quién nos puede justificar, quien quiere sustentar lo que dice Leila? Lorena.
>
> E: [Entre ellos hablan]. Eso está fácil, ni impar. Cero no es nada ¿En el tercero cierto?
>
> P: Cero; cero es par. Lo que yo estoy preguntando es, porque es correcto que Leila diga que cero es par. (...)
>
> E: Sí porque el 0 tiene mitad y también está correcto que diga par.
>
> P: 0 tiene mitad, bueno alguien me quiere explicar en otras palabras.
>
> E: [Algunos estudiantes siguen bromeando y hablando entre ellos]. ¿El 0 tiene mitad? (...)
>
> P: Eh! Victor, en tus propias palabras. ¡Chist! 0 es par, yo digo que 0 es par, estaré en la verdad [unos estudiantes dicen sí mientras otros dicen no]. (...)
>
> P: Y explícame por qué no. [El profesor escribe en el tablero "cero es par"].
>
> E: [Algunos estudiantes continúan hablando entre ellos]. No es par, porque es un conjunto... Ay, que Leonardo nos la dijo y esa está bien. Es que tu sabes, el nerdo. Victor: ¿Qué digo?, ¿qué digo?... que, pues no es par ni impar, porque es un conjunto finito. Victor: El cero no es par ni impar, sino. No ve que no tiene cifras, no tiene múltiplo. Porque el 2 si, el 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14. Ah, no está porque no tiene. No tiene par ni impar, no que no tiene múltiplo. No tiene cifra.
>
> E: El cero no es par porque no tiene, o sea no tiene mitad.
>
> P: Si yo le saco la mitad a cero, ¿qué estoy preguntando? [El profesor escribe en el tablero la división y en el cociente escribe un signo de interrogación]. ¿Qué número multiplicado por 2 da ... cero?
>
> E: Cero.

La discusión sigue en términos similares durante algunos minutos más hasta cuando el profesor decide terminarla estableciendo que dado que cero se puede dividir por dos y su residuo da cero, se debe entender entonces que es un número par. Es decir, establece la paridad de cero a través de establecer la divisibilidad del cero por dos para incluir definitivamente el cero en el conjunto de los pares. Hay que advertir además, que en ningún momento de esta discusión se registra que se recurra al uso de notaciones de la forma "$2n$" o "$2n+1$" para referirse a los números pares e impares.

Número y cifra. Con respecto al segundo ítem del taller (véase la Tabla 1), en los siguientes dos fragmentos de la segunda clase queremos ilustrar tanto la interacción que se da en torno a este ítem como la confusión que surge en un momento dado, con respecto al uso de los términos 'número' y 'cifra'. El primer fragmento es así:

P: [Ahora el profesor se dirige a otra estudiante]. Deisy tú dices que aquí le pusiste 6 [se forma ahora el número 45706 en lugar del 45702] ¿cierto? entonces veamos, acá tenemos que cambiar este dos por un seis, ¿cuánto da esa suma Deisy?

E: 22.

P: (...) ¿22 es divisible por 3?

E: [No se sabe si la estudiante responde]

P: [Niega con la cabeza] Entonces, ¿ese número que pusiste sirve?

E: No.

P: ¿Cuál sería entonces el número?

E: ¿dos? [Y otra estudiante dice al tiempo] profe, profe, dos

El segundo fragmento es así:

P: El 5, ya lo dijo Deisy... [hace una pausa en la que mira el cuaderno de un estudiante] A ver ¿qué otro sirve... Inés?

E: El 8.

P: El 8, si yo acá tengo 8 ¿cuánto da la suma?

E: 24

P: Y entonces también cumple ¿cierto?

E: Sí señor.

P: Será ¿que hay algún otro? [A partir de la respuesta que da ahora la estudiante, el profesor establece un diálogo con ella]

E: Sí

P: ¿Cuál?

E: El 14 y el 11

P: Tenemos sólo una cifra

E: ¡Ah!

P: Para escribir 11 entonces nos toca escribir dos palitos, dos cifras

E: El 11 es una sola... es un solo número.

P: Pero tienes... a ver, se trata de que escribas acá [señala el guión] una cifra, solamente una, si hubiera dos espacios [traza dos guiones] entonces sería dos, serviría el 11, el 14, el 17 ¿listo?

Elementos del conocimiento procedimental

En el trabajo realizado en las clases observadas reconocimos, en el tratamiento que se da a los criterios de divisibilidad, un énfasis en la aplicación y manejo de los mismos. Por otra parte, identificamos un esquema de tres preguntas que se podría considerar como técnica particular que sugiere el profesor para realizar la lectura de un criterio y dotarlo de más sentido en su aplicación. Presentamos a continuación algunos detalles de los criterios de divisibilidad considerados y del esquema de preguntas bajo el que usualmente se abordaban.

Criterio de divisibilidad por dos. Averiguar el enunciado de este criterio había quedado como tarea, por ello el profesor comienza preguntando cuando un número es divisible por dos y por las respuestas de los estudiantes percibe que la mayoría no lo había averiguado, razón que lo lleva a iniciar el tema, enunciando primero, para que los estudiantes copien, lo que se constituye en la definición de lo que es un criterio de divisibilidad: "reglas que nos permiten conocer cuándo un número es divisible por otro sin necesidad de efectuar la división", y luego dictando el criterio de divisibilidad por dos y enunciado así: "un número es divisible por dos, cuando su última cifra es cero o un número par".

Esquema de las tres preguntas. Un aspecto general, más relacionado con una estrategia que con un procedimiento, es la que el profesor le propone al estudiante que tenga en cuenta cuando aplique un criterio de divisibilidad. La estrategia consiste en considerar un esquema de tres preguntas —¿que hay que mirar? ¿qué operaciones hay que hacer? y ¿cuál debe ser el resultado de esas operaciones?— a las que el profesor recomienda recurrir para desarrollar el proceso de verificación de un criterio de divisibilidad. Por ejemplo, en el siguiente fragmento se ilustra la alusión a la utilización de estas preguntas en el caso del criterio de divisibilidad por 2:

> P: [Y ahora, el profesor les dicta] Para saber, para saber… si un número es divisible por dos (…), primero, ¿que hay que mirar?; segundo, ¿qué operaciones hay que hacer?; y tercero, ¿cuál debe ser el resultado de esas operaciones?; cada una de las tres preguntas las ha copiado en el tablero. [Posteriormente, les indica la tarea que hay que hacer] Entonces lean la regla y piensen cuál es la respuesta de cada una de esas tres preguntas. Las piensa primero, primero lee y piensa; cuando tenga la respuesta la escribe (…) [El profesor espera un instante, luego se dirige al tablero, escribe dos números 49786 y 53347, uno debajo del otro y dice] A ver Leila, si tu quisieras saber si, el primer número que yo escribí es divisible por seis[2], según la regla, qué tenemos que hacer?

Dificultades con el esquema de preguntas (primer ejemplo). El uso del esquema de preguntas parece que en ocasiones origina algunos problemas de interpretación y manejo por parte de los estudiantes. En el siguiente fragmento, en el que el profesor está indagando a una estudiante con respecto a la aplicación del criterio de divisibilidad por 2, se ilustra una de las complicaciones que surgen y que evidencia la dificultad para comprender que en el caso de este criterio la segunda pregunta de la estrategia no aplica. Veamos:

> P: ¿Qué tengo que mirar entonces?
>
> E: La última cifra.
>
> P: ¡La última cifra! Entonces esa es la respuesta a esta pregunta. ¿Ya la escribieron? [Algunos estudiantes responden]. No… Sí. [El profesor le vuelve a preguntar a la misma estudiante]. ¿Qué operaciones debo hacer? Leila!
>
> E: Multiplicar por dos.
>
> P: Lee la regla.
>
> E: … dividir
>
> P: [Rechaza la respuesta moviendo la cabeza]. Lee otra vez la regla, duro.
>
> E: Un número es divisible por dos cuando su última cifra es cero, o número par.
>
> P: ¿Ahí te dicen que hagas alguna operación?
>
> E: No.
>
> P: ¿Qué tenemos entonces que mirar?
>
> E: Cuál es la operación que hay que hacer.

2. En la transcripción se aclara que el profesor mencionó el número "seis" debido a un lapsus, pero que en realidad debió haber dicho "dos".

P: No, no porque no hay ninguna operación, entonces ¿cómo debe ser el resultado? la última cifra. [La estudiante no contesta]

Criterio de divisibilidad por tres. Para la divisibilidad por 3 el profesor propone que sus estudiantes trabajen con el siguiente criterio: "un número es divisible por 3 cuando la suma de sus dígitos es múltiplo de 3". En el trabajo con este criterio se destaca la preocupación del profesor por trabajar el significado de los términos 'suma' y 'dígito' que aparecen en la definición del criterio. Esto se ilustra en el siguiente fragmento:

P: Bien. Traduzcamos, ¿qué es suma? [encierra con una curva la palabra suma] ... suma.

E: [Un estudiante comienza a contestar pero no se entiende porque hay muchos estudiantes hablando simultáneamente]. (...)

P: A ver, la regla está bien escrita. La regla... ponme cuidado, a ver escuchamos ¡Chist! Caballero. Pongan cuidado, escuchamos. La suma es, la regla está bien escrita. La pregunta mía es: ¿qué significa esta palabra en matemáticas?, ¿qué es suma?

E: [Ahora el profesor le da la palabra a varios estudiantes quienes contestan] Adición... Cómo meter más... Como aumentar la cantidad...Aumentar la cantidad! o de valores u objetos.

P: ¿El resultado de quién?

E: De la adición.

P: De la adición. Entonces cuando a usted le están hablando de la suma, ¡Chist!, ¿de qué operación le están hablando?

E: [Varios estudiantes contestan] Adición o suma. Ah, adición de números.

P: Bueno. ¿A quién le hacemos esto?, según la regla [El profesor escribe la palabra "adición" y la señala].

E: [Varios estudiantes contestan] A los sumandos. A los dígitos].

P: ¿Qué son dígitos?

E: Como los números, los 3, hasta 10, hasta 9. [Y otro estudiante dice] Los dígitos son los números de 1 a 9.

P: ¿Cómo?, a ver, escuchamos.

E: [no se entiende].

P: ¡Chist! Escuchen lo que dice ... Inés. Repite por favor, ¡duro!

E: Dígitos son los que conforman el número completo.

P: Repite lo que me dijiste. ¿Cada que? ... Cada cifra, con que nosotros escribimos un número se llama...

E: [Varios estudiantes contestan]. Dígito.

P: (...)

Dificultades con el esquema de preguntas (segundo ejemplo). Con respecto a la tercera pregunta en el siguiente fragmento se ilustra una confusión de los estudiantes[3] al aplicar el criterio de divisibilidad por 3, y que consiste en: descartar la divisibilidad del número, si la suma de los dígitos da un número par o aceptarla si da impar.

P: Teresa.¿Cómo debe ser la respuesta a esa operación? Según la regla.

E: [Una compañera responde primero] Operaciones. Hay que hacer una suma de todos los dígitos. [Pero en todo caso ella responde] Tiene que ser múltiplo de 3.

P: ¿Este es múltiplo de 3? [Señala el 34, que es la suma de los dígitos del número]. Déjela que piense.

3. Esta confusión no fue resuelta durante todo el segmento de clase de la que fue tomada.

E: No.

P: ¿No? Entonces ¿este grandotote es múltiplo de 3? [Señala al número 49786]

E: [Los estudiantes dicen a coro]. ¡No!

P: ¿Por qué?

E: Porque... [Varios estudiantes hablan simultáneamente y no se entiende].

P: Porque la suma de sus dígitos es ... par... 34 y 34 no es...

E: Múltiplo de 3. [Otro estudiante dice] Par, no es impar.

P: ¿Ya lo escribieron?

E: Es impar, si. 4907... 8...

Criterio de divisibilidad por cuatro. En el siguiente fragmento se muestra el momento en el que este criterio aparece en la escena de clase y la manera como se formaliza:

P: Bueno. Divisibilidad por 4.

E: [Algunos estudiantes reaccionan a favor y en contra de seguir adelante con el tema]. No!. ...Si profe, hágale. [Mientras que otros estudiantes aún dialogan acerca de los anteriores ejercicios]. No porque no hay ningún número multiplicado... porque no es múltiplo de 3.... Porque si sumamos 2 + 2 = 4, y no hay ningún número, multiplicado que de 4. (...)

P: [El profesor comienza a dictar]. Un número ... es divisible por 4... si sus dos últimas cifras —últimas con tilde en la u— ... forman, un múltiplo ... de 4. [Una vez que termina de dictar propone la tarea a realizar inmediatamente]. Bien, entonces lean por favor la regla y contesten esas tres preguntas.

El fragmento anterior también sirve para ilustrar la repetición de un mismo esquema de trabajo que siguió en los casos de divisibilidad por 2 y 3; y que consiste en proceder de la siguiente manera: dictar la regla, pedir que se lea la regla, aplicar la estrategia de las tres preguntas, y luego presentar un conjunto de números para que se verifique si son o no divisibles por el número en el que se esté trabajando.

Dificultades con el esquema de preguntas (tercer ejemplo). Con respecto al contenido del criterio de divisibilidad por cuatro, en relación con el esquema de preguntas que utiliza el profesor y en particular con la segunda pregunta — qué operaciones hay que hacer—, se evidencian dificultades de los estudiantes para responder. El fragmento que ilustra estas dificultades es el siguiente:

P: ¿Qué hay que mirar? ¿Cuál es la respuesta a esa que pregunta? (...) Sus dos últimas cifras, bueno, muy bien, perfecto. Segunda pregunta, qué operaciones hay que hacer, Inés.

E: Ninguna.

P: ¿Ninguna? Piensen.

E: [Algunos estudiantes hablando entre sí dicen]. Ahí no se hace ninguna. Una suma, se suma.

P: A ver escuchamos.

E: Se suma, se suma. Se suman las dos últimas cifras y lo que toca mirar es que...

P: [Interrumpe]. ¿La regla dice que se sumen las dos últimas cifras?

E: [A coro] No! ... Toca multiplicar el número.

P: ¡Chist! A ver, escuchamos.

E: Profe. Porque la regla dice que hay que tomar las dos últimas cifras, y si son divisibles, eh, múltiplos con 4 es porque son divisible.

P: Bueno y ¿cómo sabemos que son múltiplos de 4?

E: Pues miramos, o sea miramos las tablas de multiplicar, y si por ejemplo hay uno, por ejemplo 94 no es múltiplo de 4, entonces no es divisible por 4.

P: Bueno, está bien, perfecto. ¿Cómo se yo, que 94 no es múltiplo de 4? [Le da la palabra a otro estudiante].

E: Multiplicando... Pues digamos que si en ninguna multiplicación da ese resultado, quiere decir que no es múltiplo de 4.

P: Multiplicación ¿por quién?

E: [Los estudiantes dicen a coro]. Por 4.

P: Bueno, pero ¿quién se sabe la tabla del 4 hasta el 4 X 25? [los estudiantes no responden]. ¿Entonces qué toca hacer? (...)

Criterio de divisibilidad por seis. Para abordar la divisibilidad por 6, el profesor aprovechó lo que había ya planteado en el ítem 4 del segundo taller (ver Tabla 1). En realidad el trabajo realizado en la clase, sirvió no sólo para considerar el criterio de divisibilidad por 6 sino para afianzar el trabajo que se había adelantado en la primera clase con respecto a los criterios de divisibilidad por 2 y 3.

Criterio de divisibilidad por siete. En este caso el profesor no presenta el criterio de divisibilidad a través de formalizar su enunciado —como si lo había hecho en los casos de divisibilidad por 2, 3, 4 y 6— sino que lo va formalizando a través de la interacción con algunos de los estudiantes y utilizando un ejemplo concreto para ilustrar la aplicación del criterio mismo. El fragmento que se presenta a continuación ilustra como se desarrolla esta forma de trabajo.

P: Por ejemplo, tengo esta cantidad [escribe en el tablero 4784]. Lee de nuevo y escuchen. José, Lola.

E: Un número es divisible por 7 si al multiplicar su última cifra por dos y restarle lo que queda obtenemos un múltiplo de 7.

P: [Ahora el profesor le pregunta a todo el grupo y algunos estudiantes contestan; no se establece un diálogo con un estudiante en particular]. Si al multiplicar la última cifra por 2 y restarle lo que queda obtenemos, ¿qué? (...) Múltiplo de 7¿Qué hacemos entonces? [se dirige a otro estudiante, mientras escribe "Si al multiplicar su última cifra por 2"]

E: Se multiplica por 2.

P: ¿A quién?

E: La última cifra. (...)

P: Entonces 4 X 2. [Escribe 4 X 2 = 8]. Listo, ahora qué hago?

E: Le restamos los...

P: ¿a quién le resto? (...) ¿A quién le restamos? Lea otra vez. Inés! Noguera, ponga atención.

E: Un número es divisible por 7 si al multiplicar [no se entiende lo que hablan]... al restar las últimas cifras que quedan. [El profesor continúa escribiendo "y restar de lo que queda" (...)

P: ¿Qué es lo primero que tenemos que hacer?

E: Multiplicar.

P: ¿Quién por quién? (...) ¿Qué me quedó ahí, en ese ejemplo?

E: 8.

P: Bueno, me quedó 8, ¿con quién resto 8?

E: Con 4, 7 y 8

P: Con 478

P: [Escribe 478]. ¿A quién le resto? ¿Lo que me queda es 478?

E: Si.

P: Entonces, ¿cómo hago la resta? ¿Qué resta hago, Mauricio? [Niega con la cabeza] Yolanda, ¿qué resta hacemos?

E: -8.

P: -8, por qué 8?

E: Porque es el resultado de la multiplicación [no se entiende].

P: [Afirma con la cabeza, escribe debajo del 8 de 478 el 8, hace y escribe la resta]. 470. ¿Cómo debe ser la respuesta?... ¿Cómo debe ser la respuesta?

E: Que debe dar múltiplo de 7.

P: Debe dar múltiplo de 7. ¿Sabemos si este es múltiplo de 7?

E: No! Hay que dividir...

P: [interrumpe] Todavía está muy grande. Entonces hagámoslo con este número [señala el 470]. Si yo quiero saber si este número es múltiplo de 7, ¿entonces qué hacemos?

E: [Todos a coro dicen] Dividir!!!

P: Esa es una forma. ¿Otra forma? Tenemos que saber si es divisible por 7, ¿cierto? Otra forma, a parte de dividirlo por 7...

La interacción continuó a través de explicitar la operación: '47- 0x2 =47' y luego argumentar, que como 47 no es divisible por 7, entonces tampoco lo es el número 4784. Una característica particular de este criterio, es la necesidad de utilizar un proceso reiterativo que se debe aplicar varias veces hasta cuando en algún momento del proceso ya sea evidente el poder reconocer, en el número reducido al que se llegue, la divisibilidad por 7.

Criterio de divisibilidad por ocho. Para establecer divisibilidad por ocho, la versión de criterio presentada por un estudiante y aceptada por el profesor fue: "un número es divisible por ocho cuando sus últimas tres cifras de la derecha sean cero o múltiplo de ocho". A continuación se presenta un fragmento del trabajo realizado con este criterio.

P: Incompleta. ¿Tiene divisibilidad por 8? Pilas. Otra vez Mauricio.

E: Para que un número sea divisible por 8 es necesario que un número sea formado por sus 3 y 4 últimas cifras de la derecha, que sea divisible por 8, por 16 o por 32.

P: Bien. A ver. Alguien que lo tenga no tan confuso porque incluso hay divisibilidad por 8, 16, 32, 64, etc.

E: Profe, yo.

P: [Señala para darle la palabra].

E: Un número es divisible por 8 si termina en tres ceros o si son múltiplos de 8.

P: Mas o menos, otro, que tenga el de divisibilidad por 8. ¡Chist!

E: Un número es divisible por 8 cuando sus últimas 3 cifras de la derecha sean 0 o múltiplo de 8.

P: Cuando sus 3 últimas cifras de la derecha sean ceros o sea un ... múltiplo de 8. Mauricio, Noguera. Lo que estaba leyendo Mauricio, en cuanto que sus 3, 4 o más cifras, últimas cifras sean divisibles por 8, 16, 32, está haciendo una generalización, está diciendo una regla para varios números. Entonces vamos a trabajar solamente divisibilidad por 8. [Escribe en el tablero el criterio a la vez que lo enuncia]. Sus 3 últimas cifras son ceros o forman un múltiplo de 8. ¿Que divisibilidad le recuerda esta? Congote, deje la niña tranquila.

E: La del 3.

P: [Niega con la cabeza].

E: La del 2.

P: [Niega con la cabeza]. Bueno, sí, se parece a la del 2. La del 2 es sólo con la última cifra.

E: La del 3, la del 4.

P: ¿La del qué?

E: 4.

P: La del 4 es con las dos últimas cifras. La del 8 es con las...

E: 3.

P: ...tres últimas cifras. La del 16 es con las 4 últimas cifras. La del 32 es con las 5 últimas cifras. ¿Captaron capullo? ¿Sí? Ahora entendemos más fácil la que trajo Mauricio.

Criterio de divisibilidad por nueve. El criterio de divisibilidad por 9 fue enunciado por una estudiante así: "Se da que un número es divisible por nueve si sus cifras suman un múltiplo de nueve". En el trabajo de clase en torno a este criterio se señala por parte de un estudiante ante una pregunta del profesor dirigida con tal propósito, que ese enunciado es similar al de criterio de divisibilidad por tres.

Para cerrar la descripción, en la Tabla N° 3, se presenta para el caso de cada criterio de divisibilidad considerado, un lista de algunos procedimientos implicados al abordar la aplicación de cada uno de ellos a la luz de las tareas propuestas en el desarrollo curricular.

Criterio	Procedimientos implicados
2	Identificar la última cifra de un número, multiplicar por 2, identificar la paridad de la última cifra, agregar un dígito a un número para que sea divisible por 2.
3	Identificar cuales son todos los dígitos de un número, sumar los dígitos de un número, dividir por 3, multiplicar por 3, reconocer a simple vista si un número es múltiplo de 3, agregar un dígito a un número para que sea divisible por 3.
4	Identificar las dos últimas cifras de un número, dividir por 4, multiplicar por 4, verificar de manera directa la divisibilidad, reconocer cuando una división por 4 es exacta, reconocer a simple vista múltiplo de 4, agregar un dígito a un número para que sea divisible por 4.
6	Aplicar el criterio de divisibilidad por 2, aplicar el criterio de divisibilidad por 3, decidir a partir de la aplicación de uno o lo dos criterios anteriores la divisibilidad por 6.
7	Identificar la última cifra del número dado, multiplicar por 2 la última cifra del número, restar este número al número formado por todos los dígitos excepto por el último dígito del número dado, verificar si el número obtenido en la operación anterior es múltiplo de 7 o repetir el proceso anterior con el nuevo número obtenido, hasta que se pueda reconocer si el nuevo número obtenido es múltiplo de 7 o divisible por 7.

Tabla N° 3. Procedimientos implicados en la verificación de los criterios de divisibilidad.

8	Identificar las tres últimas cifras de un número, dividir por 8, multiplicar por 8, verificar de manera directa la divisibilidad, reconocer cuando una división por 8 es exacta.
9	Identificar cuales son todos los dígitos de un número, sumar los dígitos de un número, dividir por 9, multiplicar por 9, reconocer a simple vista si un número es múltiplo de 9.

Tabla N° 3. Procedimientos implicados en la verificación de los criterios de divisibilidad.

Discusión

La discusión de esta sección se organizó en dos partes. Primero, se discuten aspectos específicos relacionados con algunas ideas y procedimientos matemáticos considerados y luego se aborda comentarios de carácter más general.

Comentarios específicos

Consideramos que el enunciado del criterio de divisibilidad por dos, al hacer explícita una distinción entre cero, número par y número impar, promueve una concepción errada en los estudiantes al momento de poner en práctica su aplicación. Por un lado, hace ver como razonable dividir al conjunto de los naturales en tres conjuntos aparentemente disyuntos: los pares, los impares, y el cero como elemento que completa la partición y que entonces no es par ni impar. Así pues, encontramos razonable que el profesor haya realizado un esfuerzo por abordar las dificultades que se evidencian en algunos de los estudiantes y que lo llevan a indagar porque algunos estudiantes que afirmaban que "cero no es par". En el desarrollo de este criterio, también llama la atención lo relativo a la utilización del esquema de las tres preguntas; en algún momento el profesor quiere hacer notar a un estudiante que dada la simplicidad de la verificación de la divisibilidad por 2, no hay que realizar operaciones.

Con respecto a la significación de los términos "número y cifra" se destaca que se da prelación a la convención utilizada, es decir, la del uso del guión "_" para significar que es un dígito el que se debe reemplaza, sobre la posibilidad de argumentar qué tan razonable sería una respuesta en la que se sugirieran dos dígitos. Por otra parte, en la entrevista el profesor reconoce como infortunada la utilización de número en el mismo sentido que cifra, aclaró que el asunto no había sido intencional y que no se había dado cuenta de ello:

> *cuando ellos [los estudiantes] indagan acerca de cualquier cantidad para completar el número, estoy hablando de un dígito, una sola cifra, una cantidad y una sola cifra (...) yo quería que ellos entonces escribieran el dígito que faltara, la cifra que faltara para que ese número cumpliera con la propiedad.*

En lo relativo al criterio de divisibilidad por cuatro y en relación con el esquema de las tres preguntas, notamos que el enunciado no sugiere explícitamente un procedimiento a realizar como si lo sugería el criterio de divisibilidad por tres al hacer explícita la operación de sumar los dígitos del número. En consecuencia, al aplicar este criterio de divisibilidad, la realización o no de una operación depende, como el mismo profesor lo mencionó, de hasta que número se sabe uno las tablas de multiplicar del cuatro; para números de dos dígitos que no se puedan directamente identificar como múltiplos de cuatro, la operación a realizar es precisamente la de verificar directamente la divisibilidad a través de la división. Sin embargo, insistimos que es una operación que no siempre se debe realizar y que no está indicada en el enunciado del criterio.

En el segundo ítem del segundo taller se propone una tarea con la que se pretende que el estudiante enfrente de otra manera el trabajo con los criterios de divisibilidad. En esta ya no se trata de verificar la divisibilidad de un número, sino de completar el número para que satisfaga un criterio específico de divisibilidad. Consideramos que este ítem amplía la gama de procedimientos que deba manejar el estudiante para los criterios de divisibilidad y plantea la posibilidad de poder establecer conexiones entre los residuos obtenidos para un número dado al verificar su divisibilidad, sin embargo esta posibilidad no vimos que fuera aprovechada.

La divisibilidad por 7 es tal vez una de las más difíciles de trabajar si se quisiera realizar un trabajo basado en la identificación de patrones. El criterio que proponen Sierra et al. (1989, pág. 89) es incluso más exigente desde el punto de vista procedimental que el que exhibió el profesor en este desarrollo curricular y además es más fácil de formalizar verbalmente. Lo anterior justifica en parte, que sea razonable explicar el criterio a través de desarrollarlo con un ejemplo numérico.

En cuanto a la versión del criterio de divisibilidad por 8 descrita, fue interesante identificar que surgió en medio de un intento de generalización sobre la divisibilidad de los números de la forma 2^n, en el que un criterio más general se enunciaría así: un número es divisible por 2^n ($n \geq 1$), si termina en n ceros o los últimos n dígitos forman un número divisible por 2^n (véase el fragmento de la página 127).

Comentarios generales

En este trabajo en torno a los criterios de divisibilidad identificamos que generalmente se parte del enunciado del criterio, se formulan y responden tres preguntas relativas al funcionamiento de los criterios y se utiliza el criterio —y en particular la respuesta a la tercera pregunta del esquema de tres preguntas— para decidir si un número es divisible por el número al que aluda el criterio; además, también se proponen números incompletos (i.e. que les falta una cifra) para convertirlos en unos números divisibles por algún número dado. Esto podría ser en términos generales la descripción del esquema didáctico que utiliza el profesor para abordar el tópico en cuestión. En realidad, cuando le preguntamos al profesor si acostumbraba a hacer este recorrido cuando enseñaba divisibilidad respondió:

> *Sí, es una herramienta que yo tengo para que los muchachos aprendan a aprender matemáticas, para aprender matemáticas el muchacho tiene que, lo mismo que para resolver un problema, (...) identificar de qué está hablando, qué le pide, qué hace, cómo hacerlo y qué herramientas tiene él para resolverlo. Es un estilo que yo tengo para trabajar divisibilidad pues, (...) el trabajo mío se centra en que los muchachos puedan aprender a aprender; que después tomen un texto y digan "ésta palabra no la entiendo", uno busca todo; este proceso no lo manejo, empiezo a buscar donde lo pueda aprender. De pronto aquí el comentario con relación a la pregunta es: (...), yo verifico que el niño tenga claro el criterio de divisibilidad, cuando ya lo maneja entonces aplica el manejo del criterio que tiene completando con un dígito la cantidad para que cumpla la condición; (...)*

Dentro de este desarrollo curricular el significado que los estudiantes le atribuyan a términos como múltiplo y a otros términos relacionados a éste, es un elemento que el profesor tiene en cuenta y al que alude para justificar la acción inicial de indagar acerca de los significados de los estudiantes sobre diferentes asuntos a tratar. También en el recorrido que se siguió a través de los criterios, y a pesar de que aparece la insinuación de considerar en una de las tareas la divisibilidad por 5, en las clases no se registró algún trabajo en torno a a la divisibilidad por 5. Posiblemente esto se deba a que usualmente se percibe una mayor facilidad para el manejo de los criterios de divisibilidad del 5 y del 10.

En general para los diferentes criterios de divisibilidad que se abordaron surgen eventos y situaciones, que algunos veces podrían considerarse que desvían el foco principal de atención de la enseñanza. Algunas de ellas son consideradas como relevantes para el profesor y las aborda como es el caso de la paridad de cero y hay otras que se pasan por alto bien sea porque no se cae en cuenta de ellas o porque no se consideran importantes. Con respecto a las últimas, consideramos pertinente hacer un comentario con respecto al enunciado del criterio de divisibilidad por 4 considerado en la clase. Un criterio alternativo con el cual se podría evadir la crítica referente a que en el criterio no estaba explícito una operación a realizar, podría ser: "un número es divisible por 4 si también lo es el resultado de la suma de la cifra de las unidades con el duplo de la cifra de las decenas" (Sierra et al., 1989, p. 119). Con este criterio, si quedaría explícito una operación a realizar y además el resultado de esta operación siempre daría un número entre 0 y 27, que es mucho más fácil de reconocer si es o no divisible por 4.

Aunque con el ejemplo aludido anteriormente se ilustra el caso de un aspecto de conocimiento matemático del contenido acerca de los criterios que aporta un posible elemento a considerar en el esquema de interacción de las tres preguntas que propone el profesor, y en particular en lo relativo a la segunda pregunta (¿qué operaciones hay que hacer?), consideramos que no sólo el conocimiento matemático del contenido es suficiente para portar elementos que potencien la acción en la clase. En efecto, la búsqueda de propuestas didácticas que evidencian el hecho de que hay otras posibles aproximaciones didácticas nunca se debe dar por agotada. Por ejemplo, como lo sugieren Sierra et al. (1988), se pueden encontrar propuestas en las "que el alumno mediante la observación, la reflexión, el apoyo en conceptos anteriores, las deducciones y las comprobaciones parciales, llegue a descubrir los citados criterios". En realidad, al leer la propuesta que presenta Sierra et al. (1988, pp. 81-97) se puede entrever una posición en la que se sugiere hacer mucho más énfasis en la identificación de patrones como medio para establecer los criterios y el sentido de ellos y es en este sentido que vemos una opción diferente a la propuesta curricular que se desarrolló.

De todas maneras, en algunas acciones y justificaciones del profesor encontramos intentos —que distan aún de estar en la línea de lo sugerido por Sierra et al. (1988)— que muestran ideas de como sacarle partido al reconocimiento y a la identificación de patrones. Por ejemplo, en la segunda clase con lo de la tarea de "completar la cifra que falta" para que haya divisibilidad y en la última clase donde se pueden identificar algunas intervenciones del profesor para que los estudiantes noten semejanzas entre algunos criterios. En realidad, en la entrevista el profesor dice considerar valioso que los estudiantes se den cuenta de patrones "para que aprendan a generalizar (...) la matemática hasta séptimo la aprenden como una camisita de fuerza, pero en álgebra aprenden a generalizar y si ellos empiezan a abrir su panorama, en matemáticas después pues no les va a resultar tan complicado hacer una generalización".

A pesar de que en razones como las que el profesor presentó antes se percibe una preocupación dirigida a promover un trabajo basado en el reconocimiento de patrones, en el desarrollo curricular observado, pensamos que se hubieran podido proponer situaciones diferentes en las que se enfoque de manera más precisa el trabajo con patrones. En principio, la posición del profesor con respecto a este asunto no parece consonante con la nuestra. Por ejemplo, veamos una de sus reacciones con respecto a una crítica planteada en este sentido:

> *si a mi me dicen si uno pregunta como alumno ¿por qué el procedimiento para divisibilidad por 7? Yo le digo la verdad, alguno que le gustara matemática, desocupado, se puso a jugar con la matemáticas y encontró esa característica de los múltiplos de 7 pero es un algoritmo, es como un dogma de fe, nosotros lo asumimos así, precisamente por el tipo de temática que se desarrolla así. En otra temática entonces uno trata de ayudarle a descubrir al muchacho como funciona una operación, o a descubrir el algoritmo; este tema no se facilita para eso....*

Sin embargo, y si bien ya reconocimos que los criterios de divisibilidad por 7 son probablemente los más complejos de abordar, no vemos que este hecho sea generalizable a los demás criterios que fueron considerados. Por ejemplo en los casos de divisibilidad por 2, por 3, por 5 y por 10 hay patrones bastante familiares que podrían ser utilizados para no tener que dar la receta o el criterio de divisibilidad, sino para planear un trabajo con patrones con la intención de que el criterio se pudiera deducir.

Interacción a través de la cual discurren la enseñanza y el aprendizaje

Descripción

Aunque en las secciones precedentes ya se han podido evidenciar algunos asuntos relativos a la interacción como por ejemplo, alusiones a aspectos tales como el esquema de trabajo del profesor basado en preguntas y contra preguntas dirigidas a los estudiantes, anteriormente el foco de la descripción no estaba directamente centrado en dichos aspectos. Por otra parte, dado que varios fragmentos tomados como ejemplo en las descripciones previas, evidencian hechos relativos a la interacción que ahora se quieren comentar con más detalle, con alguna frecuencia se hará referencia a fragmentos que ya fueron presentados en las secciones anteriores.

En primer lugar, algunos de los fragmentos ya presentados evidencian que buena parte del tiempo de la clase transcurre en interacciones orales que se suceden entre el profesor con los estudiantes, algunas veces la interacción oral se presenta de manera individual y en otras con todo el grupo de estudiantes. Por lo general, el profesor inicia los procesos de interacción y para ello hace preguntas y dependiendo de la respuesta de los estudiantes hace contra preguntas para que se explique algún término, se enuncie un procedimiento o un criterio de divisibilidad, o bien para solicitar que se particularice un hecho con algún ejemplo o se verifique la validez de algo que ha sido enunciado. Además, con alguna frecuencia utiliza preguntas para llamar la atención de un estudiante que está distraído. La interacción principalmente se da en torno a la tarea, tanto para su revisión como para desarrollar la temática del día. Fragmentos como los presentados en la página 125 y 127, ilustran algo de lo que se ha señalado antes.

Algunas veces el profesor procura que el diálogo se dé entre él y todo el grupo de clase y en otras ocasiones centra el diálogo con algún estudiante en particular. Sin embargo a veces, cuando comienza el intercambio verbal con todo el grupo, lo termina sosteniendo con un estudiante en particular. En realidad, en esas interacciones verbales entre estudiante o estudiantes y profesor se debe señalar que cuando el profesor advierte que algún estudiante no le responde a sus preguntas, unas veces desarrolla un trabajo más intenso con tal estudiante y en otras oportunidades simplemente decide dar la palabra a otro estudiante. Por otra parte, en general, el profesor le presta mucha atención a las respuestas que le dan los estudiantes y a su vez a las que él les dirige a ellos. Sin embargo, la atención del profesor parece disminuir cuando atiende eventualmente a la explicación que un estudiante le da a otro.

P: Pero primero ... ¿que operación debes hacer?

E: Sumar los dígitos. ¿Y aquí? [Señalando otro número en el cuaderno].

P: Bueno, escribe lo que tenga que dar.

E: [El estudiante hace un gesto que parece expresar que no ha entendido y entonces un estudiante, apoyándose en el desarrollo del cuaderno que tiene el compañero de puesto, inicia una explicación, a la que atiende el estudiante, su compañero y el profesor]. Usted llega y hace así: suma los dígitos y si (...), cuando es par usted sabe que no es divisible pues es 2, 4, 6, 8, ¿si ve?. [Y entonces el profesor se retira sin hacer comentario alguno a la explicación que el estudiante hace; no hay registro de lo que sucedió después]

Muchas veces cuando el profesor establece diálogos con los estudiantes, varios de sus compañeros no se hacen partícipes del diálogo ni siquiera escuchando. En algunas oportunidades, cuando al parecer el profesor se percata de ello reacciona preguntando a los estudiantes que están distraídos, en otras ocasiones parece no interesarle mucho este hecho. Por ejemplo, en el siguiente fragmento el profesor reacciona ante un estudiante que está distraído.

P: [El profesor advierte que algunos estudiantes no están prestando atención y se dirige a ellos]. A ver escuchamos. [Luego se dirige a un estudiante]. A ver, hágame un favor ...eh ... Congote, si puedes repítame lo que está diciendo Ana María.

E: [El estudiante no responde].

P: [Ante la ausencia de respuesta le dice a la estudiante que estaba respondiendo]. Repite otra vez, por favor.

E: (...)

P: ¿Eso está bien Mauricio?

E: Si.

E: ¿Si? ¿Tu alcanzaste a escuchar? [Algunos estudiantes contestas que no].

P: Bueno, primero, estoy hablando con Mauricio ¿tu escuchaste Mauricio?

E: [El estudiante niega moviendo la cabeza].

P: ¿Estabas poniendo atención?

E: [Nuevamente niega con la cabeza].

P: Bueno.

Un evento particular que se puede identificar de manera clara en la clase del profesor es el momento en el que se inicia el abordaje de un nuevo criterio de divisibilidad. En la sección anterior se comentó que algunas ocasiones el profesor dicta el criterio y que en otras lo va formalizando a través de la interacción verbal que establece con los estudiantes. Pues bien, en los casos en los que dicta el criterio una preocupación del profesor que no es relevante desde el punto de vista del contenido matemático, es el énfasis en la ortografía de algunas palabras cuando les dicta a los estudiantes los criterios de divisibilidad (véase por ejemplo, el fragmento de la página 111). En realidad, el profesor reconoce que tiene la costumbre de realizar advertencias sobre la ortografía a los estudiantes y menciona, con respecto al sentido de estas advertencias lo siguiente:

(...) No tengo una ortografía óptima pero creo que tengo buena ortografía. Pues yo soy formador de personas y la herramienta que yo tengo es la matemática; entonces si yo puedo con-

seguir que el niño escriba bien, redacte bien se exprese correctamente en clase, para mí es muy valioso y para mí es muy importante que el niño escriba correctamente por lo menos las expresiones matemáticas que yo les doy: la ortografía es importante, me parece a mí.

Durante el trabajo en plenaria con los estudiantes el profesor algunas veces se detiene a indagar por afirmaciones que los estudiantes hacen respecto a asuntos laterales de la temática que se está tratando. Esto, por ejemplo, puede ser el caso de la afirmación "cero es par" que fue comentada con algún detalle en el apartado anterior, pero también se detiene en otras afirmaciones de los estudiantes tales como "4 es divisible por 64" en donde le interesa que se reconozca que ese no era el orden en las palabras, en los números; por lo general tales indagaciones toman bastante tiempo y pueden disipar la atención de los estudiantes sobre la temática central.

Cuando el profesor abre espacios para que los estudiantes trabajen individualmente o en grupos de compañeros que comparten puestos cercanos, es frecuente que uno que otro estudiante se pare del puesto y le muestre su cuaderno al profesor y que al mismo tiempo otros estudiantes levanten la mano y llamen al profesor. Usualmente, en este escenario de interacción algunos de los estudiantes terminan rodeando al profesor para mostrarles el trabajo, quien en algunas oportunidades asiente con la cabeza ante lo que le muestran y en otras ocasiones entabla diálogos con los estudiantes respecto del ejercicio que estén trabajando.

En las clases, luego de que se discute un criterio de divisibilidad, el profesor suele sugerir ejemplos numéricos que se le ocurren durante la interacción en la clase y que en general responden a lo que el profesor percibe que debe hacer en ese momento. Así pues, en general el profesor no estudia previamente características particulares que pudiera presentarse en algún ejemplo numérico particular. En la entrevista el profesor se refirió a este asunto de la siguiente manera:

cuando yo estoy escribiendo los números yo pienso qué es lo que quiero que él haga de acuerdo a las deficiencias que yo he notado en el grupo; entonces si la pregunta es "que son preseleccionados" en el sentido de que yo llego con "libreto de clase" y lo hago así, no. (...) Yo tengo un esquema de la clase, y el desarrollo de la clase me va diciendo por donde coger, por donde debo afianzar más y a partir de eso que yo he observado, selecciono los números (...) de acuerdo a lo que yo quiera trabajar, quiera enfatizar; entonces no son preseleccionados porque yo, como un libreto, sino que de acuerdo a lo que yo vea pongo los ejercicios, pongo la tarea (...)

Finalmente, un aspecto adicional de la interacción y que más bien define un escenario de interacción entre los estudiantes y no propiamente de aquellos con el profesor, es la existencia de un control que utiliza el profesor con respecto a la revisión de la tarea, de manera complementaria al control al que puede llegar a través del intercambio verbal y que ya ha sido comentado. Hay una estudiante a la que le ha encargado realizar una función particular de "secretaria" de curso, y es la de revisar si los estudiantes hicieron la tarea. Ella se pasea al comienzo de la clase por los puestos de los estudiantes registra esta información y luego le trasmite al profesor el resultado de esta indagación. El papel de esta estudiante no era claro a partir de la observación directa ni de los registros de audio y video y se esclareció en la entrevista, al respecto el profesor dijo:

(...) es una de las alumnas más sentadas, (...) y el papel que ella desempeña es como economizarme tiempo a mi para que yo le pueda dedicar en el trabajo con los muchachos. Hay cur-

sos en que la temática es muy larga y hay cursos en los que uno puede adelantar temas de otro, del nivel siguiente o profundizar en algunos temas, (...) es como catalizar porque en algunas ocasiones yo mismo asumo la revisión de la tarea entonces llego y les pongo actividades y donde yo veo el título de ahí para arriba reviso la tarea pero la mayor parte de las ocasiones lo hace ella. Cuando un estudiante, dos clases seguidas o tres clases seguidas no viene o no ha hecho la tarea, entonces ella me informa y cuando un alumno ha tenido la tarea incompleta o no la hace por tres clases seguidas entonces yo lo llamo a él, si es necesario cito al acudiente. (...) La secretaria me informa acerca de asistencia; en la revisión de la tarea, como hay ocasiones en que yo pongo ejercicios espero que algunos lo puedan revisar, de pronto los más aventajados puedan encontrar la mecánica de la solución pero la mayoría no. Entonces yo le digo: hasta tal parte de la tarea está bien, esencialmente las actividades que desarrolla la secretaria son esas; y pues eso le implica más o menos un cuarto de hora de su clase, si de pronto estoy explicando algún tema nuevo ella tiene la obligación, si tiene dudas, de pronto no la han satisfecho sus compañero, entonces venir y preguntarme a mi y ella me ayuda bastante, me colabora.

Discusión

Durante el discurrir de la clase y en la mayoría de las interacciones con los estudiantes, ya sea de manera individual o con todos ellos, el profesor utiliza principalmente un intercambio oral en el que usualmente hace preguntas y atendiendo a la respuesta de los estudiantes hace contra preguntas para pedir que se amplíe una respuesta, solicitar que se particularice con un ejemplo o se verifique la validez de lo enunciado. También con alguna frecuencia utiliza preguntas para llamar la atención a un estudiante que está distraído y así intentar que le preste atención a lo que dice él o a lo que estaba diciendo algún otro compañero.

En ocasiones se presentan afirmaciones interesantes de los estudiantes durante el transcurso de la clase —del estilo "cero no es par ni impar", "pues cero es nada, cómo va a ser par o impar", que en general, como dice el profesor, "suceden cuando de pronto intuyo que hay algo de bases que está mal"— que el profesor las considera y hace contra preguntas con respecto a ellas. En casos como esos, parece razonable pensar en que por estar trabajando en este tipo de aclaraciones se pueda perder el hilo de las explicación que lleva inicialmente el profesor; en la entrevista con el profesor, el entrevistador explicó este asunto así: "si este es el hilo, como una línea recta, en la mitad de la línea recta hay como un nudo, que representa estas cosas puntuales y luego de alguna manera hay que conectarlo con la explicación", entonces algunos pueden quedarse como en la idea del nudo y perder la continuidad de la explicación del tema que se estaba trabajando. A este respecto, la posición del profesor intenta sostener que los estudiantes no pierden el hilo de la explicación, sin embargo, consideramos que detrás de la justificación que presenta, que se apoya en la importancia de trabajar sobre el lenguaje del estudiante, también está su idea de que cuando el profesor se toma esos espacios para trabajar con unos estudiantes y permite que otros se distraigan, los estudiantes podrán retomar el hilo conductor. Las palabras del profesor son las siguientes:

Yo pienso que no han perdido el hilo en la explicación lo que pasa es que ellos tienen que tener claro el lenguaje, lo que digo, si ellos manejan el lenguaje bien, lo interpretan adecuadamente entonces pueden después estudiar solos y (...) detenerme en las cosas es verificar que el concepto está dado, que si el alumno no le pone mucha atención es porque para él es trivial es *irrelevante; porque como le digo, es heterogéneo el grupo, entonces hay algunos que dicen "yo no entiendo" se distraen, pero cuando sigue uno con la parte de la explicación ellos retoman.*

En otras palabras, para el profesor esos nudos a los que nos referimos antes no interfieren en "la hilaridad para ellos, son más bien como un descanso para los que están aislados". Además, al preguntarle cómo advertía si estas indagaciones no hacían perder el hilo de una explicación el profesor justificó que "por lo que ocurre después cuando yo los pongo a trabajar; en la práctica, cuando el muchacho se sienta a hacer un ejercicio en donde uno aplique, donde él aplique lo que uno está trabajando" es donde el profesor dice que se da cuenta si realmente un estudiante tiene claro las cosas.

Por otra parte, al considerar uno de los dos casos de un par de estudiantes con los que el profesor había mantenido una interacción especialmente intensa —y la cual seguramente propició que el grado de atención de otros estudiantes se hubiera dispersado— en la entrevista se recogieron un par de comentarios que aluden a la capacidad de concentración de los estudiantes en la clase y al motivo que lo movía a tomar la decisión de abordar de una u otra forma las respuestas de algunos estudiantes:

(...) tiene problemas de atención dispersa, precisamente porque es hiperactivo, entonces si yo logro que él capte la atención 10 minutos, se puede distraer los otros 70, pero con eso queda bien".

(...) depende de la caracterización del estudiante; hay estudiantes que son tímidos y no se atreven a participar y tienen dificultades en el aprendizaje entonces cuando [tienen] oso a preguntar, cuando [tienen] oso a participar, trato de sacarle el máximo al alumno; de pronto viendo el video me di cuenta de que yo asumo que ya ahí pueden quedar dudas todavía, entonces eso yo lo evidencio al mirar el trabajo del alumno. Básicamente es eso, los que yo pienso que pueden, con lo que tienen, con lo que me han mostrado hasta ahora, llegan solos, entonces no me preocupo tanto por él "necesita un poquitico más".

A nuestro modo de ver estos comentario ponen de manifiesto que finalmente hay varios estudiantes que podrían perder el hilo de la discusión y que esto al profesor no le importaría. Así pues, el asunto considerado anteriormente proporciona una explicación posible de porqué el profesor realizaba en algunas ocasiones un trabajo intenso con algunos estudiantes y con otros no.

En cuanto al asunto de reaccionar con preguntas para recriminar a los estudiantes por falta de atención, el profesor reconoció en la entrevista que reacciona preguntándoles a aquellos que están distraídos como un mecanismo para centrar su atención y también para evitar la interferencia del ruido. Sin embargo, también con alguna frecuencia se identifica que cuando el profesor interacciona públicamente con un estudiante y a pesar de que advierte que no todos los estudiantes están prestando atención, decidía sacrificar la comprensión de la totalidad de los estudiantes por la individual, es decir, le interesa más la interacción que en un momento dado está estableciendo con el estudiante y los que le están poniendo atención, que los otros que no están poniendo atención. Posiblemente, algunos de los acuerdos que dice pactar con sus estudiantes también pueden contribuir a explicar ese comportamiento selectivo en el que se identifican diferencias en cuanto al grado de interacción oral que decide establecer con uno u otro estudiante. Lo que el profesor menciona al respecto es:

Yo asumo que ellos, los que están distraídos es porque ya han llegado a lo que yo esperaba que llegaran ¿si? Yo tengo como un pacto con ellos: hay muchachos que son tímidos y mientras ellos están trabajando individualmente uno se da cuenta, "¿qué pasó aquí que no estás trabajando? "no profe, es que no he entendido" "¿por qué no me pregunta?", entonces después uno lo retoma en el descanso: "¿tu por qué no me preguntas?" y en este curso, en estas cosas que están pasando puede ocurrir que los molesten por preguntar, entonces yo llego a un acuerdo con ellos: vamos a hacer una cosa "si yo estoy explicando algo y tu no entiendes, tu me haces un gesto, me vas a decir cual es para que yo sepa y entonces lo hago en cámara lenta, le digo yo, refuerzo la explicación; (...) entonces cuando la interferencia del ruido es mucha me afecta, pero si yo veo que la comunicación entre los dos es clara, los demás que todavía tienen dificultades también están atendiendo.

En cuanto a las razones para no prestar tanta atención a explicaciones que ocasionalmente pueda advertir que un estudiante le da a otro, el profesor corroboró este hecho y además justificó que suele reaccionar de esa manera debido a que "manejo cuál es el lenguaje que tienen los estudiantes, pero en la clase procuro utilizar el lenguaje técnico de la matemáticas". y luego agrega que:

(...) las palabras con que se expresa el muchacho en clase, explicando al otro, es el lenguaje con que ellos están familiarizados, entonces yo se que la manera como el uno se exprese para el otro, puede llenarlo; me fijo más en la respuesta del estudiante que le explicaron, de pronto el cómo reacciona y pues hay momentos en la clase en que ellos le están dando participación a uno, pero tiene que estarse fijando en el trabajo del otro, entonces en momentos ocurre así a veces.

Pero si bien es cierto que el profesor justifica su actuar con respecto a intervenir con poca frecuencia en las explicaciones que un estudiante le da a otro, también es cierto que reconoce que hay situaciones que pueden pasar inadvertidas para él, en las que seguramente hubiera sido deseable su intervención. Veamos por ejemplo, lo que el profesor menciona ante un suceso particular de la clase, que le fue recordado por el entrevistador, en el que un estudiante le ha explicado algo a su compañera que parece no haber entendido y en el cual él decide no intervenir:

Yo no me fije en ese momento si para Leila había o no había quedado claro; realmente a mí me inquietó eso en cuanto a resolver dudas en el estudiante. Cuando yo vi esa parte, yo sigo la clase asumiendo que ella ya había entendido y la toma la muestra [el video] a ella como inconforme; yo dije me faltó sagacidad en ese momento para escudriñar un poquito si ella había entendido.

En cuanto al ruido de la clase debido a las conversaciones de los estudiantes, al profesor le fue mencionado que parecía que éste había sido un poco más notorio en la clase en la que se realizó la última observación y que entonces en esa clase habían sido más reiterados los llamados de atención a los estudiantes. El punto de discusión que se abordó con el profesor era si el mayor volumen de ruido se podía atribuir a la falta de preparación de la tarea por parte de los estudiantes —que era nuestra conjetura— o si más bien él tenía otras posibles razones para explicarlo. Fue un tanto sorprendente encontrar que el profesor adujera razones que se perfilan en una dirección opuesta. Por ejemplo, el profesor insinuó que entre más confianza empezaba a tener el estudiante en el dominio del tema, más se distraía:

(...) tal vez porque ya sienten suficiencia en el manejo del tema, la mecánica del tema era que el niño descubriera en la fórmula en la meseta que trae el libro, qué cosas tenían que hacer para, para manejar los criterios de divisibilidad, ya en ese estadio el muchacho leí y él puede interpretar con (...) entonces leí en su mente, entendía, probaba y listo, y los que somos lentos entonces se fijan más en clase de (...) es a lo que yo lo atribuyo y a mi me indica que el objetivo con el que estoy trabajando tiene éxito porque ya eso es fácil; es lo mismo que divisibilidad por dos, divisibilidad por 4. Ya han asimilado esa comprensión en el tipo de trabajo. Es a lo que yo le atribuyo...

Valoración de las producciones de los estudiantes

Descripción

En las clases observadas se reconocen algunas respuestas a las preguntas ¿quién determina cuando una producción es válida o adecuada?, ¿cómo se determina que una producción es válida o adecuada? y ¿qué es lo que se considera como una producción válida o adecuada en el salón de clase?

El profesor es quien en general determina la validez de una producción. Por una parte, cuando el profesor considera que la respuesta de un estudiante no es apropiada, usualmente la reprueba a través de repetir la pregunta, de realizar una contra pregunta, no volviendo a preguntar al mismo estudiante o también haciendo un además con la cabeza. Por otra parte, el profesor puede aprobar respuestas de los estudiantes a través de frases cortas como "muy bien", "correcto", repitiendo lo que acaba de decir el estudiante, o también a través de ademanes; en el primer caso, es frecuente encontrar que el profesor complementa estas frases con otras preguntas o con la petición de que se ilustre lo dicho con un ejemplo. En el fragmentos siguiente se ilustra algo de lo dicho:

P: Bueno, díganme ... dime tú, ¿cuándo un número es múltiplo de otro?, ¿cuándo un número es múltiplo de otro? (...)

E: ... cuando uno lo multiplica da exacto.

P: ¿Cuando qué?

E: Cuando lo multiplica da exacto.

P: ¿Por cuánto?

E: Por cero y ... cuando se multiplica por cero, [otro estudiante interrumpe y dice] no, por uno, por cualquier número.

P: [El profesor se dirige a otro lado del salón e interroga a otro estudiante diciendo] A ver, ya que estás de pie. ¿cuándo un número es múltiplo de otro?

E: [El estudiante no contesta ante lo cual el profesor dice] No estudiaron.

P: [El profesor se desplaza a otro sitio del salón y dice] Sonia, ¿cuándo un número es múltiplo de otro?

E: [La estudiante no contesta, en su lugar lo hace la compañera de puesto con quien el profesor entabla un diálogo público] Cuando es ...

P: ¿Cuándo? ¡Chist! (...)[4]

En el fragmento anterior y en su continuación, se puede notar que las definiciones que tratan de dar tanto el primer estudiante como el segundo, no se logra concretar la idea de múltiplo a pesar de que se alcanzan a mencionar algunos términos con base en los cuales se podría construir una apropiada definición; ante esta indefinición o ausencia de respuesta correcta, el profesor tiene reacciones como la de increpar a los estudiantes afirmando que

4. La continuación en este fragmento aparece en la página 120.

"no estudiaron" o también, ante una respuesta que no ve consonante con la pregunta que ha hecho dice "pilas tenemos que escuchar". Por otra parte, en el fragmento que sigue vemos como el profesor, a través de un "muy bien" parece aceptar la respuesta del estudiante que interviene, a pesar de que ésta es dada en un tono de pregunta. Sin embargo, también se identificó otro momento en donde el profesor si capta el tono de pregunta en la respuesta de un estudiante y le dice "¿me preguntas o me contestas?".

P: [Luego el profesor se dirige a otros estudiantes] Luisa. Natalia ¿cuándo un número es múltiplo de otro? ¿Cuándo qué? Duro por favor, A ver si escuchamos todos.

E: ¿Cuando es factor?

P: Cuando es factor, muy bien. ¿Qué quiere decir que un número sea factor de otro?

E: Que puede multiplicar con otro número para dar el resultado.

P: Que puede multiplicarse por otro número para dar el resultado. Dame un ejemplo.

E: 6x1

P: [El profesor escribe en el tablero "6x1=6"] Ahí, ¿quién sería factor de quién?

E: El 1 sería factor de 6.

El trabajo que realizó el profesor en torno a la idea de múltiplo también ilustra momentos de cierre de una interacción oral en torno a un asunto, en los que el profesor procede a retomar de nuevo lo que ya se ha discutido a través de indagar o confirmar si otros estudiantes, comprenden lo que se ha hablado; además, se puede observar hacia el final del fragmento cómo el profesor invalida la respuesta dada previamente por un estudiante.

P: [Ahora el profesor se dirige a toda la clase]. Bueno, entonces ¿qué quiere decir que un número sea factor de otro?

E: —Murmullo—

P: ¿Qué quiere decir que un número sea factor de otro? [El profesor señala a un estudiante].

E: Será el número del producto.

P: Déjelo pensar.... (no se entiende). Para hoy joven!.... ¿Qué quiere decir que un número sea factor de otro?

E: Que....

P: Déjelo que el está pensando...Jum?... Ahí están los ejemplos. Su compañera dice que 5 es factor de 20 y que 4 es factor de 20, o que 6 es factor de 6, 1 es uno factor 1, de 6, perdón.

E: [no se entiende]....el factor, digamos lo que da, siempre da el resultado.

P: ¿El resultado de qué?

E: De la multiplicación...

P: ¿Cómo se llaman los términos de la multiplicación? estoy en lo mismo. ¡Chist!.

E: Murmullo.... ¿total?

P: Total. ¿Cómo se llama el total?

E: ... Producto... [a coro]

P: ¿Y qué quiere decir que un número sea factor de otro? ¿Cómo se llaman el multiplicando y el multiplicador?

E: Factores [a coro]

P: Factores! ¿Y tu me estás diciendo que el total? A ver rebobine.

En algunas oportunidades el profesor utiliza expresiones como "si ustedes no preguntan, yo pregunto" "yo les creo" y "mientras estamos aprendiendo nosotros tenemos derecho a equivocarnos". En este tipo de alusiones encontramos algunos aspectos que se relacionan con la manera como el profesor valora el trabajo de los estudiantes. En la entrevista sostenida con el profesor, las explicaciones dadas acerca del sentido de estas alusiones fue la siguiente:

> *El "si ustedes no preguntan yo pregunto" es un mecanismo que yo tengo para que ellos se suelten, como le decía, hay ocasiones en las que uno trabaja y deja cosas como en el vacío como para que él diga bueno y aquí qué paso me perdí si yo no me distraje y entonces pregunto; ese cuestionarse para mí es importante porque entonces yo veo si están atendiendo (...) El "yo les creo" es porque ellos especulan mucho, entonces si yo quiero formar muchachos que sean responsables, ellos tienen que manejar la libertad de trabajo; por ejemplo Miguel es uno de los que no trabaja muy frecuentemente en clase "¿Miguel estas trabajando?" "sí profe", yo le creo aunque evidentemente yo se que no está trabajando, entonces me toca cogerlo (...) [En] ese "yo les creo" yo no pongo en duda lo que tu me estas diciendo [el estudiante] pero tu eres responsable en tu propia formación, tu puedes decirme lo que te sopló el compañero y tu puedes no haber hecho la tarea y estarme diciendo que la has hecho" pero entonces son herramientas que me ayudan al muchacho (...) "Mientras estamos aprendiendo nosotros tenemos derecho a equivocarnos" ocurre que algunos temen dar la respuesta o a veces pasar al tablero por (...) la imagen ante el público, el qué dirán, "al oso" a esa edad (...) entonces es una expresión para darle confianza, (...) nosotros también podemos aprender, entonces si se equivocó fresco está aprendiendo, pero entonces el día de la evaluación ya me tiene que mostrar que no se equivoca mientras se va dando el proceso nosotros nos equivocamos y que el saber ellos que mientras estemos aprendiendo nos equivocamos es de gran utilidad, me equivoque pero (...), de pronto de las expresiones que yo utilizo es de las que más me gusta.*

En cuanto a qué es lo que se considera como una producción válida o adecuada en el salón de clase, podemos dar cuanta de asuntos tales como la insistencia del profesor para que el estudiante expliquen los procesos de solución de las tareas, que se refleja en frases del estilo: "Oído. En divisibilidad por 3 (...) deben hacer en su cuaderno, las operaciones que sean necesarias, así sea, 4+0+0+0+0, la escriben en su cuaderno. ¿Listo?".

Un último aspecto de valoración del trabajo del estudiante se encuentra relacionado con el manejo que el profesor hace de sus propios errores en la interacción con los estudiantes. Un ejemplo, en el que se pone de manifiesto esta conexión sucede cuando al aplicar el criterio de divisibilidad por 7 para el número 4520, el profesor llega a un momento en el que tiene que explicar un último paso en el proceso de las operaciones a llevar a cabo y que consiste en realizar la operación "45 - 2x2 = 41". Sin embargo, por descuido del mismo profesor, escribe en el tablero "42- 2x2 = 38" y ningún estudiante reacciona enseguida. Al cabo de un tiempo, luego de que el profesor se pasea por el salón y al rato de estar sentado en su escritorio, va allí una estudiante y le menciona algo con respecto a lo que está escrito en el tablero. El profesor se dirige entonces al tablero y se da la siguiente interacción:

> P: Fíjense que sólo una persona, se dio cuenta! ¿Qué número debía poner acá? [señala la resta 42–4].
>
> E: 42, 46, 47.
>
> P: 45! Y si es 45 [borra la última cifra (el 2) y escribe el 5, borra el 38], ¿cuál es esta diferencia?
>
> E: ¡41!
>
> P: 41 [escribe 41] ¿Lo habían hecho bien? Pregunta.

E: No.

P: ¿45 - 4? Si a mi nadie me protestó es porque, o no lo habían hecho o lo habían hecho mal.

E: No nos habíamos dado cuenta.

P: Porque cuando usted ya lo ha hecho y compara, debe darle algo parecido.

Discusión

En este curso es el profesor quien usualmente indica la validez o no del conocimiento matemático que se pone en juego en la clase. La afirmación anterior se apoya básicamente en el hecho de haber registrado con relativa frecuencia que cuando los estudiantes contestaban correctamente una pregunta, el profesor repitiera la respuesta, o asentara o negara con la cabeza. El profesor no sólo reconoció esto como un hecho que se daba sino que además agregó que sería deseable que no ocurriera. Él dijo:

> *(...) de pronto es como un acto inconsciente que yo hago cuando el muchacho es acertivo (...) pero es un acto fallido realmente, no es consciente entonces (...) muevo la cabeza cuando ha acertado, cuando no ha acertado, sin embargo, los muchachos todo el mundo hacemos eso, cuando uno da una respuesta y está a la expectativa; estaré bien, (...) a veces yo le hago repetir la respuesta por cosas que se hayan notado anteriormente, a veces le dice, el vecino le dice, entonces yo quiero que el niño piense: si la respuesta que él me está dando, sea que haya oído o sea que él haya pensado es la correcta, entonces es para ratificar: el ejercicio (...) será que me dieron bien, o será que lo que yo pensé es correcto, es algo intencional de pronto cuando yo repito la pregunta, de pronto en alguna ocasión, sólo lo vi en una de las clases, le pregunté a Deisy y ella me contesta, como en tono de pregunta, entonces yo le digo "me preguntas o me contestas" y ella tímidamente me dice "le contesto"; conociendo yo como es la niña, entonces yo digo "listo", todavía hay inquietudes ahí, pero no la presiono tanto porque deja de preguntar (...)*

También se reconocieron valoraciones a respuestas de los estudiantes a través de frases como "muy bien" en las que de todas maneras se identifica respuestas que no están completas, y que el profesor complementa con un pedido de ampliación de la respuesta con la petición de que se presente un ejemplo. Usualmente, los errores o respuestas de los estudiantes que el profesor no considera aceptables son aprovechados por él para realizar un trabajo intenso de interacción con los estudiantes en los que se percibe la intención de que se aclaren dudas. Sin embargo, esta decisión de realizar un trabajo intenso parece estar mediada por el tipo de estudiante ya que también hay ocasiones en las que la reacción del profesor no es la de realizar un trabajo intenso sino la de advertir de manera casi inmediata sobre el error con frases del estilo "pilas a lo que estamos diciendo".

A pesar de que el profesor considere en un momento dado que se ha logrado que algunos estudiantes expresen una respuesta aceptable para él. Algunas de sus acciones en la clase llevan a pensar que el profesor no necesariamente cree que otros estudiantes la puedan repetir en ese mismo momento. Así pues, esto parece justificar la insistencia del profesor en realizar nuevas rondas de preguntas y contra preguntas, pero en la que es él quien ayuda a que se precisen un poco más algunos términos —como en el ejemplo de uno de los fragmentos donde se precisa que el multiplicando y el multiplicador se llaman factores (ver fragmento de la página 139)— y donde el profesor aprovecha para advertir a los estudiantes acerca de errores que surgen en ese intercambio —como el error de confundir 'total' con 'factores', en el mismo fragmento al que se aludió antes.

El repertorio de frases que el profesor utiliza y en particular la que el menciona que le gusta más —"mientras estamos aprendiendo nosotros tenemos derecho a equivocarnos"— ayudan a reconocer una posición del profesor en el sentido de reconocer que es posible sacarle partido al error en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En general, este tipo de alusiones suelen expresar un mensaje a través del cual se quiere transmitir alguna idea particular. Se percibe una intención relacionada con la autovaloración no sólo en torno al conocimiento matemático que tiene el estudiante sino a la producción de lo que el realiza en sus tareas. Así pues, en estas alusiones se identifican aspectos de valoración en el siguiente sentido: con la primera alusión ("si ustedes no preguntan yo pregunto"), crear la necesidad de que el estudiante revise su trabajo o la propia comprensión de un tópico, a través de motivarlo a que piense si tiene alguna pregunta sobre algo que no tiene claro; con la segunda alusión ("yo les creo"), hacerle ver al estudiante que tiene algo mal, sin reprenderlo explícitamente, pero haciéndole ver que él es el responsable de corregirlo; y con el "mientras estamos aprendiendo nosotros tenemos derecho a equivocarnos", valorar el error como algo que es natural que suceda dentro de un proceso de aprendizaje, pero que es necesario que advierta antes de que llegue el momento de una evaluación formal.

En algunos momentos es posible, y desde luego natural, que se valore cierto tipo de ejemplos que normativamente son correctos, pero que sin embargo, contienen características que los pueden diferenciar. Ante estos casos, el profesor no mostró estar tan alerta. Este es el caso del evento particular que llamó la atención con respecto a un ejemplo en el que una estudiante al final de una interacción verbal exhibe el ejemplo "6x1" como un caso de producto donde 1 o 6 son múltiplos de 6. En este caso hubiera sido apropiado destacar una propiedad particular del concepto de múltiplo: todo número es múltiplo de sí mismo y de la unidad que contrastaría con lo que se pudo decir acerca de un ejemplo como 5X4. Es posible que el hecho de que el ejemplo 6X1 no refleje un caso general en el que se muestre que no siempre tiene que coincidir el producto de los números con uno de los factores, sugiriera al profesor pedir otro ejemplo. Sin embargo, esa diferencia sutil entre la validez del ejemplo 6x1 y 4x5, definitivamente no se explicitó.

Si bien es cierto que el profesor con su frase de —"mientras estamos aprendiendo nosotros tenemos derecho a equivocarnos"— alienta al estudiante a que se lance a mencionar una idea o a resolver un ejercicio también es cierto que se identifica que puede recriminar a los estudiantes por dejar pasar errores y en ocasiones puede no tener tan presente que sería en últimas lo más importante de corregir el error. Por ejemplo, en el caso del fragmento en donde se menciona que él comete un error, llama la atención el hecho de que no insiste nuevamente en el objetivo final del ejercicio, averiguar si el número era o no divisible por 7, centrándose más en el hecho de que el resultado correcto de la resta era 41. Este, por supuesto fue un hecho aislado dentro de la secuencia curricular observada, y en todo caso la impresión general es más bien que el profesor ante respuestas de los estudiantes en las que se identifican errores trata de sacarle partido a la ocurrencia del mismo. Baste recordar eventos ya comentados como el relativo a lo de "cero es par" o al posible lapsus de un estudiante cuando dijo "4 es divisible por 64".

Aspectos de la ruta pedagógica en un curso de matemáticas de grado octavo Caso 4

Este capítulo consta de cuatro secciones, cada una con dos apartados, donde en primer lugar describimos y en segundo, discutimos, los aspectos considerados para caracterizar la ruta pedagógica. A partir de la información proveniente de una secuencia de cinco clases en un curso de álgebra en grado octavo, en dichas secciones damos cuenta del esquema de las clases observadas, trazamos con algún detalle una panorámica de los temas abordados, presentamos aspectos de la interacción a través de la cual discurren la enseñanza y el aprendizaje y hacemos referencia a la valoración de las producciones de los estudiantes en las clases.

Las citas textuales que se presentan, provienen de los documentos elaborados con base en las transcripciones de audio y en las notas de campo sobre las clases observadas, y del documento que contiene la transcripción de la entrevista. Las comillas dobles se usan cuando la cita es la transcripción literal de una frase corta de la profesora, los estudiantes o algún autor consultado; el formato de cita centrada y en letra cursiva se utiliza para el mismo caso anterior pero cuando la fase es más larga de tres líneas. El formato de diálogo se emplea para dar cuenta de intercambios orales entre la profesora y los estudiantes o entre los mismos estudiantes. En los diálogos no necesariamente las líneas marcadas con 'E' corresponden al mismo estudiante, ni siquiera dentro de una misma cita. Los paréntesis cuadrados se incluyen dentro de una cita para describir lo que sucede en la clase mientras se da el intercambio relatado; los tres puntos suspensivos entre paréntesis (...) denotan que se excluyó parte de la cita. Cabe aclarar que estamos usando los genéricos "estudiante", "estudiantes", "alumno" y "alumnos" para referirnos tanto a hombres como a mujeres.

Esquema de las clases

Descripción

La profesora entra al salón y los estudiantes se organizan en los puestos; casi simultáneamente la profesora comienza a hablar de algunos tópicos no matemáticos como la evaluación, lo ocurrido en la reunión de padres, los puntos requeridos para aprobar los logros, si trajeron el libro, etc., tal y como se ilustra en la siguiente fragmento de la segunda clase observada:

> *Yo ya había dicho desde la semana pasada, lo que pasa es que quiero dejarlo por escrito, colocan ahí mayo quince [no se entiende]. Ayer los papás que estuvieron sentados con la profesora Carola [no se entiende] hablaron conmigo... Yo hablé con ellos también y les comenté como iban, lo de los puntos que llevaban, les mostré el cuaderno que llevo de observaciones [esta profesora tiene organizado un sistema de puntos que asigna individualmente dependiendo del trabajo en cuestión; la profesora tiene un cuaderno donde para cada estudiante tiene designada una página con una foto del estudiante; allí anota los puntos de cada estudiante]. Y de todas maneras les dije que faltaba más trabajo en ellos, es decir, el curso no es que no trabaje porque yo escuché que había quejas en la otra materia [no se entiende] obviamente no! [no se entiende]. Las quejas de otras materias no me corresponden, es decir, yo no me estoy quejando del curso...*

Después de unas interrupciones de los estudiantes, la profesora continúa refiriéndose a la reunión que tuvo con los padres de familia y a la evaluación que realizará en la clase siguiente. A medida que va hablando los estudiantes hacen preguntas, según se ve en el fragmento de clase que se expone a continuación.

P: Estaba diciendo que [no se entiende] que no me quejé con los papás del curso, pero si les dije que les falta trabajo. Así como hay gente que lleva 50 puntos, hay gente que lleva 2. Hay gente que lleva 5 y hay unos que no han estrenado la hoja. [no se entiende].

E: [Hablan entre sí] ¿50 puntos lleva?

P: De la mitad hacia arriba. Sí la persona que más lleva, lleva 50; 26 puntos [no se entiende].

E: Ah, ya tenemos sobrado! Yo tengo como 2.

P: La mitad de la persona que más lleve, en este momento quien más lleva es Eliana Barbo...

E: Y yo, yo ¿cuántos llevo? Yo llevo 49. [Los estudiantes están hablando a la vez y no se entiende, al parecer hablan de los puntos que llevan hasta el momento].

P: Ahorita cuando los llame a cada uno les digo cuanto tienen [no se entiende]. Miren: ¿por qué en esta ocasión dicto esto que antes no lo había dictado? Porque esta evaluación es muy importante [no se entiende].

E: Chito, silencio.

P: [no se entiende] Es muy importante para el período [habla despacio] y por eso esa nota la estoy dictando especialmente para que no me diga nadie que no sabía cuál era la nota. Se hace evaluación con los siguientes temas: 1. Suma y resta.

E: Un momento!

P: Suma y resta de polinomios, de eso ya se ha trabajado mucho, suma y resta de polinomios. ¿Por qué no está anotando Estefanía?

Es usual que los estudiantes continúen hablando y preguntando sobre estos asuntos, aun cuando la profesora no necesariamente les conteste. A veces también, en el transcurso de la clase cuando se está realizando otra actividad, vuelven a surgir breves referencias a estos temas tanto por parte de la profesora como de los estudiantes en forma de preguntas, las que son atendidas por ella rápidamente.

Luego la profesora empieza a referirse al tema matemático de la clase del día o a las páginas del libro o fotocopias donde los estudiantes deben mirar; con frecuencia promueve una aproximación inicial de los estudiantes a los temas a través de una lectura relacionada con éstos, que se hace en clase o que los estudiantes deben hacer como tarea para la casa. Los textos para estas lecturas provienen casi siempre de los mismos libros de texto utilizados en la clase o de otros y en general incluyen el desarrollo de un ejercicio. En la Figura Nº 1 se presenta el texto de una lectura que la profesora entregó a los estudiantes en la primera clase observada, para hacerla allí.

Una vez terminada la lectura, con base en una guía de preguntas formuladas por la profesora, en algunos casos los estudiantes escriben sus ideas al respecto, se las muestran a la profesora o las leen de manera individual y ella las comenta; en otros casos, la profesora hace un recuento de lo que se presenta en la lectura, en el que intercala preguntas cortas al respecto para los estudiantes. Para el caso de la lectura mencionada, la profesora indica a los estudiantes que hagan la lectura y anuncia que va a hacer preguntas después, según se muestra en la siguiente cita.

Bueno, por favor, atención a las instrucciones que voy a dar para esta lectura. Aquí unas personas, antes de Semana Santa, pasaron a exponer sobre expresiones algebraicas, sobre monomio, binomio, trinomio, hablaron de variable y hablaron de constante. Me imagino que se acuerdan algo de eso, pero el concepto de variable y el concepto de constante no lo tenemos completo, no lo hemos analizado bien; no estoy diciendo que con lo que vamos a hacer hoy, ya ustedes quedaron expertos en esos dos conceptos pero tenemos que complementar esos dos conceptos porque hacen parte de las competencias del primer bimestre y yo necesito de todas maneras complementar esto también para poder dar una valoración de lo que ustedes lograron en esos conceptos. Van a leer esos dos pedacitos que están ahí; el uno es acerca de lo que es variable y el otro de lo que es constante. Unicamente lo van a leer; cuando terminen de leer yo voy a hacer unas preguntas para mirar qué tanto comprendieron de esa lectura.

Variable

Cantidad que se suele denotar por una letra en las ecuaciones algebraicas y que puede tomar un valor cualquiera dentro de un intervalo de valores posibles. Pueden efectuarse cálculos sobre variables porque hay ciertas reglas que se aplican a todos los posibles valores. Por ejemplo, para efectuar la operación de elevar al cuadrado todos los enteros entre 0 y 10, se puede escribir una igualdad en función de una *variable entera* n:$y = n^2$ con la condición de que n esté entre 0 y 10 ($0< n < 10$), y se dice *variable dependiente* porque su valor depende del valor de n que se tome, o sea que sólo pueda tener los valores 1, 4, 9… etc. Una *variable independiente* no guarda tal relación con otra variable. Por ejemplo, si una variable x denota el número de estudiantes de una escuela y otra, y, denota la proporción del total de estudiantes que desean almorzar en la escuela, entonces x y y son variables independientes y una variación en una de ellas no afecta a la otra. Sin embargo, su producto xy afectará a una tercera cantidad —el número de almuerzos pedidos. Las variables también pueden denotar cantidades diferentes a los números de la aritmética corriente, por ejemplo, variables vectoriales y variables matriciales.

Constante

Cantidad que no cambia de valor en una relación general entre variables. Por ejemplo, en la ecuación $y = 2x + 3$; donde x y y son variables, los números 2 y 3 son constantes. En este caso son *constantes absolutas*, pues nuca varían. A veces una constante puede tomar diversos valores en diferentes aplicaciones de una misma fórmula general. En la ecuación general de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$, a, b y c, son constantes *arbitrarias* porque no se les ha fijado ningún valor. En una integral indefinida se incluye una constante arbitraria (la *constante de integración*) porque para una función $f(x)$ la integral con respecto a x tiene la forma

$$\int f(x)\,dx + c$$

donde el valor de la constante c depende de los límites elegidos. *Viese también* integral indefinida.

Figura N° 4.

Las preguntas que la profesora hizo para que los estudiantes respondieran con respecto a esta lectura concreta están incluidas en el siguiente párrafo del discurso de la profesora.

Por favor, con base en esta lectura, vamos a responder estas preguntas. Colocan como título Taller [ante las preguntas y comentarios de algunos alumnos, la profesora volvió a referirse a la primera instrucción] Entonces colocamos Taller abril 3 y debajo colocan comprensión de lectura. Aunque en realidad, eso es complementación de un tema porque ese tema ya lo ha-

bíamos trabajado. Entonces, las preguntas son… Primera pregunta: defina con sus palabras qué significa variable; miren que dice defina con sus palabras, no dice transcriba de la fotocopia al cuaderno, no; dice que explique con sus palabras, es decir, yo ya leí, tuve que haberlo procesado y ahora voy a escribir lo que yo entendí de lo que es variable, no voy a copiar. Segundo, defina con sus palabras qué significa constante. Invente un ejemplo en el cual se involucren los dos conceptos. Entonces ustedes escriben el ejemplo y explican en este ejemplo, esto es la variable por tal razón; tal cosa sería la constante por tal razón.

Para otra lectura que los estudiantes debían haber hecho como tarea para la casa, pero que de todos modos podían volver a hacer en la clase, la profesora dictó las preguntas que se incluyen en el fragmento de la clase transcrito aquí.

P: Guía de introducción.

E: ¿Qué?, ¿cómo? Un momento. Profe espere.

P: Guía de introducción al tema de multiplicación de polinomios. ¿Qué pasa Ramón? ¿Donde está tu cuaderno? Yo les dije que iban a trabajar de a dos, pero cada uno en su cuaderno. Guía de introducción al tema de multiplicación de polinomios. Las preguntas que voy a dictar ahorita las tienen que contestar con base en la lectura que hagan. Entonces lo primero que tienen que hacer es buscar en el libro que tienen ahí. Ya sea el de 'Desafíos' que tienen por acá, ya sea en Baldor. Y con base en lo que lean contestan las preguntas. Entonces. Explique con sus palabras, y fíjense que no dice que copie lo que dice el libro sino que dice explique con sus palabras el proceso que se realiza para multiplicar un polinomio por un monomio. Segundo. ¿Las leyes de los signos que se aplican en el proceso anterior, o sea en el proceso del primer punto, ¿son distintas a las de la suma? Contestan si o no y porqué. Si contestan son distintas, dicen si por ésto y ésto y ésto. Tercero. Son cinco. ¿Cómo se hace para multiplicar un polinomio por otro polinomio? Punto seguido. En la misma pregunta. Punto seguido en la misma pregunta. El proceso que usted explicó…

E: ¿Cómo?, ¿cuarto?

P: Hay, Dios mío. Punto seguido en la misma pregunta. El proceso que usted explicó en el primer punto ¿tiene que ver con esto? ¿Qué es esto?

E: La multiplicación de un polinomio por otro polinomio.

P: Ahora si cuarta pregunta. Escoja un ejercicio. Ya eso si lo pueden buscar en el mismo libro que están consultando. Escoja un ejercicio donde se aplique el proceso de la primera pregunta y resuélvalo. No se vayan a engañar a ustedes mismos, porque a mi no me engañan. No se engañen ustedes mismos de poner uno que ya este hecho y copiarlo, les queda perfecto porque es que en el libro ya lo habían hecho. Entonces cogen y lo copian muy bien y sacan 10 puntos. Luego les pregunto en la evaluación y no saben nada, entonces de verdad es coger uno que no esté resuelto. Y último, quinto. Escoja un ejercicio donde se aplique el procedimiento de la tercera pregunta. ¿Qué procedimiento va en la tercera pregunta?

E: Multiplicar polinomio por polinomio.

P: Donde multiplica polinomio por polinomio y resuélvalo. Bueno entonces como había 14 libros van a trabajar de a dos personas. Si en esa pareja hay dos libros, prestan uno a otra pareja que no tenga libro. Persona que va terminando el ejercicio, me lo traen. Pueden empezar.

Luego de terminada la actividad relativa a la lectura la profesora continúa con el desarrollo en el tablero de uno o más ejercicios, mediante los cuales ilustra el procedimiento general y la forma de notación que debe usarse para realizar los demás ejercicios. En este desarrollo, la profesora destaca los términos que se van tomando, las operaciones que se realizan y el orden de las pasos a seguir, así como la forma apropiada de anotar. También durante esta actividad la profesora intercala preguntas para los estudiantes que implican una respuesta corta y muy puntual, y que pueden no ser contestadas por ellos. Una vez ejemplificado el procedimiento adecuado para solucionar los ejercicios, la profesora propone ejercicios para que los estudiantes los desarrollen individualmente o a veces en parejas; mientras esto sucede la profesora pasa por los puestos y tiene breves intercambios con algunos estudiantes; en ocasiones hace comentarios para todo el grupo relativos al trabajo, pero también es común que haga interpelaciones no ligadas con el trabajo académico. Los comentarios en ocasiones aluden a tópicos que ya se habían visto, y son repasos cortos de procedimientos. Más tarde la profesora se sienta en el escritorio a revisar las tareas hechas en la casa, para lo cual en general llama a los estudiantes uno por uno, comenta con ellos sus realizaciones y asigna puntos; también en esta situación mira el trabajo hecho en clase a los estudiantes que se le acercan. A veces, un estudiante que ha terminado de solucionar el ejercicio pasa al tablero y copia allí su desarrollo; la profesora repite oralmente este desarrollo y pide al resto de los estudiantes que primero atiendan a lo que se hace en el tablero, analicen el desarrollo y luego sí lo copien en sus cuadernos. La tarea que la profesora deja para la casa es estipulada con anterioridad durante la clase y corresponde usualmente a continuar el trabajo que se inició allí. Para terminar la clase la profesora se refiere a la clase que los estudiantes tienen a continuación en ese salón.

Otras clases de esta profesora se emplean en hacer un repaso de temas ya vistos, a través de guías o talleres que la profesora ha preparado con anticipación y por escrito, como la primera clase observada en donde se trabajó un taller con preguntas sobre distintos tópicos. También es común que se haga un repaso antes de las evaluaciones escritas que se llevan a cabo, el cual versa naturalmente sobre los temas que se van a evaluar.

Para la profesora un taller, que algunas veces llama guía, está compuesto de preguntas, ejercicios para solucionar o información que considera que los estudiantes deben conocer, que puede haber preparado por escrito y entonces entrega a los estudiantes, o bien puede ser dictado y los estudiantes tienen en primer lugar que poner el título de "Taller" y algunas veces un subtítulo que indica el tema sobre el que trata. Luego los estudiantes deben copiar las preguntas, las instrucciones o los números de los ejercicios del libro, que la profesora dicta. Las preguntas pueden ser relativas a la lectura realizada. Una vez copiadas las instrucciones y preguntas, o después de entregadas las hojas del taller, los estudiantes deben empezar a desarrollarlo en clase y si no alcanzan a terminarlo, deben acabarlo como tarea para la casa o en la clase del día siguiente. Algunas veces este desarrollo puede ser en parejas o individual. Los estudiantes puede pararse de sus puestos y preguntarle o mostrarle su trabajo al profesor.

Aunque no en todas las clases observadas se abordaron temas nuevos, pues la primera clase se dedicó al desarrollo de un taller de repaso y la tercera, a la realización de una evaluación escrita, el conjunto completo de clases observadas siguió una secuencia temática en cuanto a las actividades ejecutadas y a los tópicos tratados. No hubo eventos que desviaran dicha secuencia, ni relacionados con el trabajo de los estudiantes o su comprensión ni relativos a otros motivos. Las acciones usuales de la profesora en tales clases, encaminadas a obtener información sobre la comprensión de los estudiantes fueron corregir el trabajo desarrollado en clase a los estudiantes que se lo mostraban, hacer preguntas generales sobre la claridad de lo visto, que se discuten más adelante en este documento, en el apartado relativo a la interacción. La otra acción realizada con el mismo fin fue la evaluación escrita que se hizo.

Discusión

Las actividades que en general se dan en estas clases corresponden a una secuencia que incluye una introducción, una tarea inicial de lectura relacionada con el tema matemático, una exposición por parte de la profesora, trabajo por parte de los estudiantes y un final casi imperceptible. Estas actividades se inician y terminan por intervenciones de la profesora pero sus fronteras no son necesariamente claras; se intersectan en el tiempo durante minutos y no todos los estudiantes comienzan y terminan sincrónicamente dichas actividades y algunos continúan haciendo preguntas o comentando al respecto. Para actividades simultáneas, tampoco todos los estudiantes interrumpen la actividad que están llevando a cabo con el fin de participar o poner atención a lo que la profesora plantea. Algunos estudiantes que sí suspenden la actividad en desarrollo cambian momentáneamente el centro de su atención a lo que la profesora está diciendo.

Iniciación de la clase

Las clases se inician con la entrada de la profesora al salón e incluye la organización de los estudiantes en sus puestos, e inmediatamente después continúan con las intervenciones de la profesora acerca de asuntos no matemáticos. La intención de estas primeras intervenciones de la profesora, antes de entrar a trabajar con el tema matemático, son proveer información sobre asuntos de interés e importantes para los estudiantes relacionados con la clase y la institución; éste es casi el único momento en que la profesora puede dirigirse a todos ellos a la vez.

Desarrollo del contenido

El contenido en la clase se desarrolla casi siempre en primera instancia mediante la lectura de un texto propuesto por la profesora que apunta a suministrar información a los estudiantes. Aunque podría verse que la formulación de preguntas sobre el texto es una acción de la profesora encaminada a que los estudiantes comprendan este texto, las preguntas atienden más a dar cuenta de la comprensión que se ha producido que a propiciarla. A continuación la profesora expone en el tablero el desarrollo de ejercicios, con el cual ilustra el procedimiento general y la forma de notación que debe usarse en su realización. Esta exposición es muy corta en el tiempo; la mayor parte de las sesiones de clase se dedica para que los estudiantes desarrollen ejercicios, de manera individual o en parejas, en donde deben aplicar los procedimientos ejemplificados. Esto se percibe como un cambio que la profesora puede haber introducido intencionalmente en sus clases con respecto a un clase magistral, y que puede tener la intención de hacer algo para llevar a la práctica ideas de teorías como dar más participación al estudiante en la construcción de su conocimiento. Aun así no hay evidencias de la efectividad de la estrategia y no ayudan en ese sentido el hecho de que se provea la información, se requiera una respuesta correcta y una forma de anotar específica. Mientras los estudiantes trabajan la profesora alude y hace comentarios acerca del tema matemático que se trata o de otros que previamente se había abordado.

La intención del trabajo en torno a las matemáticas que se lleva a cabo en las clases tiene que ver con el aprendizaje relativo al procedimiento, al manejo simbólico y a la forma de anotar más que a la comprensión misma del tema.

La profesora durante las clases en ocasiones anuncia que a través de una tarea propuesta va a mirar qué tanto aprendieron, como cuando en la segunda clase observada dice: "Si, ejercicio, póngale de título 'Ejercicio'. Vamos a mirar, a ver, realmente que tanto [no se entiende], lo que vimos hoy, que tanto lo vamos a aprender", y al revisar el desarrollo de las tareas para algunos estudiantes detecta si hay dificultades o no; esto hace que a continuación la profesora indique de manera individual al estudiante si su desarrollo es adecuado o no, o a veces la lleva a destacar o recomendar algo para todo el grupo sobre el trabajo, pero no la conduce a otras acciones más definitivas para contribuir a una mejor comprensión por parte de los estudiantes, que seguramente cambiarían notoriamente el curso a seguir. Igualmente, a pesar de que en las clases mismas hubo situaciones motivadas por preguntas o por el trabajo de los estudiantes, en las que se abordaron de pasada tópicos vistos en cursos anteriores con el fin de recordar algo, estos incidentes no se pueden ver como desviaciones grandes que hayan cambiado el rumbo previsto para dicha clase.

A nivel de la secuencia de clases tampoco se puede decir que la información recogida, ni siquiera mediante la evaluación escrita, haya incidido en la organización de los contenidos y tareas para esta secuencia. Más bien parece que ésta obedece a una programación de acuerdo a una lista de temas con un orden específico, que es común abordar en el álgebra y que se propone en la mayoría de los libros de texto: expresiones algebraicas, polinomios, términos semejantes, suma, resta, multiplicación y división de polinomios. Incluso, en varios momentos la profesora alude a el tópico que tienen que ver a continuación. En la siguiente cita se ilustra una alusión al trabajo que se realizará en la clase siguiente luego de que la evaluación ha finalizado:

> *Para mañana [no se entiende] cuaderno, carpeta [no se entiende] y empezamos multiplicación. Si, traen las fotocopias también. Libro, fotocopias, cuaderno y carpeta. Buen, y corregimos esto.*

En resumen no se vio entonces que la profesora haga algo específico con la intención de saber si los estudiantes han comprendido que le permita decidir si pasa a abordar el siguiente tópico, o a cambiar el rumbo definido para las clases. No se percibió que las pocas acciones realizadas por la profesora que pudieron proporcionarle algún tipo de información sobre lo que estaba pasando con los estudiantes, desde el punto de vista del aprendizaje o la comprensión, modificaran lo que ella tenía preparado para las clases. No estamos diciendo que el camino planeado con anterioridad por la profesora permanezca completamente estático en las clases, sino que lo que hace allí es fiel y coherente en esencia con sus previsiones y no evoluciona, como si se sugiere en el modelo de enseñanza propuesto por Simon (1995, citado en Gómez, 2002), de acuerdo a una evaluación del aprendizaje de los estudiantes, ni como consecuencia hay una revisión de la trayectoria hipotética de aprendizaje que se había trazado. La profesora se atiene a la programación establecida y por el hecho de que el tema se trabajó en clase se asume que los estudiantes comprendieron o si no lo hicieron, no hay tiempo para detenerse. Si queda trabajo pendiente en la clase este se deja como tarea para la casa y ella lo revisa luego, puede ser en conjunto con el estudiante de manera individual, mientras los estudiantes hacen el trabajo de otra clase.

Asignación y revisión de la tarea para realizar fuera de la clase

Simultáneamente al trabajo de los estudiantes la profesora revisa las tareas asignadas en clases anteriores o el trabajo que están realizando los estudiantes, y lo hace pasando por los puestos o sentada en su escritorio con la presencia del estudiante en cuestión. Tiene breves intercambios con algunos estudiantes, comenta con ellos sus realizaciones. Establece quién ha realizado la tarea, cómo es la respuesta y el orden, y adjudica puntos. A veces hace comentarios para todo el grupo motivados por algo que ve en las tareas. La tarea que la profesora asigna para la casa corresponde usualmente a continuar el trabajo que se inició en la clase y así lo indica oralmente con anterioridad durante la clase. En consecuencia, el trabajo requerido en la tarea es el mismo que se exige en la clase, es decir, consultar información o aplicar procedimientos.

Visión panorámica de los temas abordados

Descripción

Con la siguiente descripción pretendemos dar una visión del camino recorrido desde el punto de vista matemático en las clases que se observaron; se incluyen las tareas abordadas en las clases y la secuencia en que fueron tratadas, los términos usados, las notaciones, convenciones, enunciados y procedimientos tratados.

Secuencia de actividades

Las actividades realizadas con respecto al trabajo con matemáticas en las clases observadas, se describen a continuación en el orden en que se llevaron a cabo.

Definición de variable y constante. Se hace una lectura que incluye unas definiciones de variable y constante. Como tarea para la casa los estudiantes deben averiguar el significado de palabras que aparecen en la lectura para las que desconocen el significado, como vectorial, matricial. Se hacen preguntas sobre la lectura y al revisar las respuestas se hace referencia explícita al significado de variable y constante. A partir de la expresión $y = n^2$ se explica la diferencia entre variable y constante, como que una variable puede tomar diferentes valores dentro de un cierto rango o en un cierto conjunto; en esta expresión n representa un entero y se puede reemplazar por diferentes números de manera que es posible calcular el valor de y para cada caso; se indican las operaciones aritméticas que se realizan. La constante se define como el número que en una expresión no cambia de valor. También se explica el significado de las palabras dependiente e independiente como que a medida que se decide el valor de$n$, se determina el valor de la otra variable, y.: Se indica que para sustituir valores negativos en n, ésta se debe escribir en la expresión usando el paréntesis.

Construcción geométrica de números irracionales. Para la representación de los números irracionales $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{6}$, propuesta en un taller planteado con el fin de repasar algunos temas ya vistos, se recuerda verbalmente lo que establece el teorema de Pitágoras, y se escribe la fórmula $h^2 = a^2 + b^2$, donde h es la hipotenusa y a y b los catetos. Se alude al primer número irracional que habían construido en clases anteriores, la raíz de dos y se hace un dibujo de un triángulo rectángulo de catetos de longitud uno; se indica cómo a partir de la fórmula del teorema se consigue el valor de la hipotenusa, raíz de dos, y se indica que "de ahí sale la raíz de dos".

Reducción de términos semejantes. En el mismo taller se presentan dos ejercicios para practicar la reducción de términos semejantes en expresiones simbólicas, como la siguiente: $9ab + 5bc - 3cd + 8ab - 9cd - 8bc$.

Representación de expresiones algebraicas. También en el taller se proponen tareas para representar las expresiones algebraicas correspondientes a enunciados verbales, como por ejemplo:

El cociente de dos números elevado a la quinta potencia.

Igualmente se plantea la tarea contraria, es decir dada una expresión algebraica describirla con palabras del lenguaje natural.

Tabulación y graficación de una función lineal. Mediante una lectura se habla de qué significa la palabra lineal y se dice que en definitiva quiere decir que "la gráfica que da, siempre, va a ser una recta". Se escribe la expresión algebraica de la función y se realiza en el tablero un ejemplo completo de cómo tabular y graficar. Se hace el formato de la tabla y se ilustra el procedimiento de la tabulación, para el que debe escribirse la expresión algebraica de la función reemplazando x por cada uno de los valores enteros que se consideran, generalmente de menos tres a tres, en orden ascendente e indicando el valor de la expresión ya evaluada. Se indica cómo hacer la sustitución de estos valores en la expresión algebraica de la función y después se muestra cómo hacer la gráfica, trazando los ejes, ubicando los puntos y uniéndolos con una línea recta. Se hace otra lectura donde se presenta otra forma de anotar el proceso de la tabulación y se resalta la equivalencia con la notación ya vista. A partir de los ejercicios propuestos en esta lectura se hacen aclaraciones con respecto a los procedimientos para multiplicar y dividir fracciones y la diferencia entre ellos.

La resta de polinomios. Se lee un texto que presenta la forma de escribir el enunciado de la resta con los polinomios entre paréntesis y el signo menos entre los dos polinomios. Se hacen algunas preguntas y se destaca la equivalencia de esta notación con la vista previamente, en la que se emplean las palabras 'restar' y 'de'. A partir de los ejercicios incluidos en la lectura se hacen aclaraciones sobre el coeficiente cero cuando no debe haber términos para una potencia dada, el coeficiente uno cuando la parte literal está sola, el exponente uno cuando la letra no tiene exponente. Se plantea un ejercicio que debe enunciarse en las dos formas de anotar y luego debe resolverse: 'encontrar dos trinomios que al restarse den como resultado el polinomio $x-2xy+y^2$'. Cuando el ejercicio se ha resuelto, se copia su desarrollo en el tablero empleando la forma de anotar llamada vertical, es decir se escribe el minuendo y debajo el sustraendo con los signos cambiados, y ubicando los términos semejantes en columnas; se traza la raya y debajo se escribe el polinomio resultante. Verbalmente se repiten los cálculos para verificar que la diferencia de la resta de los dos trinomios, es el polinomio dado. Este ejercicio da pie para aludir a la definición de monomio como "los que tienen un sólo término ¿cómo se llaman?", y de binomio y trinomio:

> *Lo que veo es un solo trinomio y ¿sabes que esto no es un trinomio? Porque éstos, todos los términos los tiene cuadrados. (...) Estos son x^2, otra vez x^2, otra vez x^2. Entonces ese en realidad no es un trinomio. Es decir, ahí lo que se puede decir, es que hay un monomio disfrazado de trinomio.*

Igualmente, este ejercicio es utilizado por la profesora para referenciar un error al realizar la operación de la potenciación, que expresa así: "la gente está multiplicando la base por el exponente, eso nunca se hace; ¿quién dijo que menos seis al cuadrado es menos seis por dos?".

La multiplicación de polinomios. Se hace en primer lugar una lectura acerca de cómo multiplicar polinomios, donde se diferencia el procedimiento para multiplicar un polinomio por un monomio del procedimiento para multiplicar un polinomio por otro polinomio. Se plantean unas preguntas al respecto de la lectura, donde se deben buscar ejercicios que ilustren ambos tipos de multiplicación y resolverlos, y se debe expresar cómo es el manejo de los signos. La pregunta correspondiente a esto último fue:

> Las leyes de los signos que se aplican en el proceso anterior, o sea en el proceso del primer punto, ¿son distintas a las de la suma?.

Se destaca repetidamente que cada término tiene su signo y se enfatiza en el manejo de los signos con frases como "¿Qué signo nos corresponde colocar?", "menos por más da menos". Posteriormente se desarrolla un ejercicio para multiplicar un monomio por un polinomio, desarrollo que se va explicando a medida que se va haciendo; se van dando indicaciones de la forma en que la palabra 'por' puede reemplazarse por paréntesis y el monomio puede colocarse a la derecha o izquierda del polinomio; los resultados que se van obteniendo al realizar las multiplicaciones deben anotarse en una línea, y se enfatiza en el orden y cuidado de esa notación. Cuando se habla de que el orden de los factores no altera el producto, que el monomio que se va a multiplicar puede colocarse a la derecha o a la izquierda del polinomio que es el multiplicando, se menciona la ley distributiva para la que se indica que distribuye o reparte. Se señala que la multiplicación se hace igual cuando los coeficientes de los polinomios son números fraccionarios. Luego se desarrolla un ejercicio de multiplicación de polinomio por polinomio, que se ilustra de la misma manera, con la diferencia de que la notación utilizada es la vertical, es decir, colocando el multiplicador debajo del multiplicando, trazando una raya horizontal y los resultados de las multiplicaciones de cada término debajo uno del otro, otra raya separando esto del resultado final obtenido al reducir los términos semejantes, y ubicando en columnas los términos semejantes para así facilitar las operaciones ente éstos. Luego se propusieron más ejercicios par desarrollar.

Los ejercicios que la profesora propone son principalmente de los libros de texto que se usan en el curso. Incluyen enunciados con las dos formas de notación y se trabajan ejercicios para encontrar el resultado de una resta, con combinación de operaciones, es decir, donde el minuendo y el sustraendo pueden ser el resultado de sumas de polinomios, y ejercicios con exponentes numéricos y literales.

Elementos del conocimiento conceptual

En la primera clase observada en que se hizo un repaso, la profesora menciona términos como constante, variable, expresión algebraica, cambio, dependiente, independiente, símbolo de igualdad, letra, igualdad, fórmula, valores, rango, conjunto, enteros, números irracionales, la mayoría de los cuales no define allí. Los términos que la profesora utiliza al referirse al tema de la función lineal, además de la expresión 'función lineal', son plano cartesiano, parejas ordenadas, tabulación, punto, recta, variable, fórmula, que habían sido estudiados con anterioridad. Al abordar la resta de polinomios, la profesora habla de términos semejantes, monomio, binomio, trinomio, fracciones, multiplicación y división de fracciones, sustraendo, minuendo, resultado, diferencia, restar, signos, paréntesis, al cuadrado, sumar, sumando, para la mayoría de los cuales no se aborda su significado en las clases. En el trabajo con la multiplicación de polinomios los términos distintos a los ya mencionados que la profesora usa son coeficiente, factor, multiplicador, multiplicando, simplificar, para los que tampoco en clase expresa su significado.

Los enunciados generales, la mayoría de ellos expresados por la profesora y por lo tanto presentados en forma textual, que hicieron parte del desarrollo del tema fueron:

- ▲ El valor de la variable en ocasiones cambia, a veces no. A una variable se le pueden dar valores. Si yo tengo una variable, ella puede cambiar de valor y cambia de valor porque por eso es que es variable. La palabra 'cambio' es una palabra fundamental.
- ▲ Una constante tiene un valor fijo, nunca cambia de valor.
- ▲ Una variable puede tomar valores dentro de un cierto rango o en un cierto conjunto.
- ▲ La gente está multiplicando la base por el exponente, eso nunca se hace. Cuando las bases son iguales y se está multiplicando, se suman los exponentes.
- ▲ y depende de n, entonces si yo cambio el valor de n, obviamente cuando se eleve al cuadrado obtengo el valor de y, y entonces ya obtengo un valor distinto; fíjense que aquí cambié la n, pero entonces ¿qué pasó? Que también la y cambió. Cuando hay algo dependiente y cuando hay algo que es independiente, algo independiente no depende de otras cosas, en cambio lo que es dependiente depende de algo, no está solo sino que está ligado con algo.
- ▲ El teorema de Pitágoras: cuando tengo un triángulo rectángulo y cada cateto mide una unidad, un centímetro, tomamos la unidad como centímetro; la hipotenusa al cuadrado es igual a cateto uno al cuadrado más el cateto dos al cuadrado. Para saber cuanto mide la hipotenusa saco raíz cuadrada, y queda la raíz cuadrada del cateto uno al cuadrado más el cateto dos al cuadrado; entonces la hipotenusa mide raíz de dos.
- ▲ Para que los términos sean semejantes, deben tener la misma parte que está escrita en letras y se llama la parte literal.
- ▲ Cuando se grafica una función lineal, la gráfica da una recta. Luego de colocar los puntos en el plano y al unirlos no debe quedar ninguno por fuera de la recta.
- ▲ Para el procedimiento de la resta, la notación con la palabra 'restar' y la palabra 'de' es equivalente a la notación con paréntesis y signo menos. La palabra 'restar', está representada en el signo menos que precede al segundo paréntesis.
- ▲ Para hacer la resta toca cambiar todos los signos que están después de ese menos o de la palabra 'restar'. Todo lo que esté negativo queda positivo; todo lo que esté positivo, queda negativo.
- ▲ Cuando no hay término semejante por el cual operarse, entonces significa que hay cero para ese literal.
- ▲ Cuando sólo está la parte literal y no dice el coeficiente, entonces el coeficiente es uno.
- ▲ Cuando la letra no tiene exponente, el exponente es uno.
- ▲ Para multiplicar un número que está en forma entera, y no tiene denominador, por un fraccionario, primero se escribe el entero en forma fraccional con denominador uno, y luego se multiplican los dos fraccionarios, numerador por

numerador y denominador por denominador directamente. Si se multiplica en cruz o en equis se está realizando una división de fraccionarios.

- ▲ Lo que forma un polinomio son términos; no son factores. Cuando uno habla de factores es porque todos se están multiplicando, mientras que en un polinomio lo que hay son signos más y signos menos en cada uno de sus términos. Cada término tiene su signo. No aparecen las cosas sueltas, sin signos, sin menos, sin más.
- ▲ Un trinomio tiene tres términos. Los que tienen un solo término se llaman monomios. Un binomio tiene dos términos.
- ▲ Cuando yo voy a hacer una resta, la resta es una operación binaria. Restar, restar esto de esto. Si yo voy a sumar debo tener al menos dos cosas, la suma de esto con esto.
- ▲ El resultado de la resta se llama la diferencia.
- ▲ Las leyes de los signos de la suma son distintas de las de la multiplicación.
- ▲ En la suma cuando los signos son diferentes, se resta y se pone el signo del mayor.
- ▲ El orden de los factores no altera el producto.
- ▲ Propiedad distributiva: cuando uno habla de distribuir algo, es porque lo va a repartir, entonces voy a repartir este factor sobre este trinomio que está aquí.

Las convenciones empleadas en la clase tienen que ver con las formas de expresar los enunciados en la resta de polinomios, utilizando las palabras 'de' y 'restar' y usando los paréntesis y el signo menos; con las maneras de plantear la resta, la multiplicación y los resultados parciales y finales, una vertical, y otra horizontal utilizando paréntesis, que en la multiplicación se asocia especialmente a la multiplicación de polinomio por monomio; con la forma de indicar los cálculos al reemplazar los valores en la variable independiente en la expresión algebraica de la función; con la necesidad de primero realizar la suma para obtener el minuendo o el sustraendo y luego sí realizar la resta como operación binaria. Igualmente se perciben convenciones que se refieren al uso del papel milimetrado para graficar funciones, al trazado de los ejes hasta los bordes de la hoja, el eje y a lo largo de la hoja y el eje x a lo ancho.

Elementos del conocimiento procedimental

Durante la enseñanza del tema se hizo uso de procedimientos como los que precisamos a continuación, para los que se establecieron los pasos a medida que se iban ejecutando.

Restar polinomios. Con la notación de paréntesis, escribir el polinomio que corresponde al minuendo, entre paréntesis, primero; luego en la misma línea el signo menos y a continuación entre paréntesis el sustraendo; enseguida escribir de nuevo el minuendo sin los paréntesis y luego el minuendo habiendo cambiado los signos de todos sus términos; después hacer la reducción de términos semejantes e ir escribiendo el polinomio resultante. Con la otra notación, se deben escribir el minuendo y debajo, en forma vertical, el sustraendo con los signos de todos los términos cambiados, ubicando en las mismas columnas los términos semejantes; trazar una raya debajo del sustraendo y reducir los términos semejantes e ir anotando los resultados en las columnas correspondientes debajo de la raya; este es el polinomio resultante.

Construir una tabla. Para hacer la tabla (el cuadro), se dan valores a x, usualmente valores de números enteros entre menos tres y tres; luego se reemplaza cada uno de estos valores en la expresión y ésta se evalúa para calcular el valor de y; para cada valor de x se debe escribir en una línea la expresión algebraica con el valor de x reemplazado y con el resultado del cálculo; los valores de y se escriben en la tabla.

Elaborar la gráfica de una función lineal conociendo la expresión algebraica. En primer lugar, se elabora la tabla; después se trazan los ejes de coordenadas del plano cartesiano, con los extremos dibujados hasta los bordes del papel milimetrado; se dibujan las divisiones que determinan la escala en ambos eje; se ubican los puntos, los cuales finalmente se unen con una línea recta.

Multiplicar polinomios. Con la notación de paréntesis, para la multiplicación de monomio por polinomio, se escribe el polinomio que corresponde al multiplicando entre paréntesis y luego en la misma línea se escribe, preferiblemente a la izquierda, el multiplicador que es un monomio; después se multiplica cada término del polinomio por el monomio, fijándose en los signos y se escriben los términos resultantes; después se reducen los términos semejantes y se va escribiendo el polinomio que queda. Con la otra notación, para multiplicar dos polinomios que no son monomios, se debe escribir el multiplicando y debajo, en forma vertical, el multiplicador; se traza una raya debajo del multiplicador, y se empieza a multiplicar el primer término de éste por cada uno de los términos del multiplicando, fijándose en los signos; se van anotando los términos resultantes debajo de la raya en una línea distinta para cada término del multiplicador y en las columnas correspondientes; se traza otra raya luego de terminar de hacer la multiplicación del último término del multiplicador por el multiplicando; se reducen los términos semejantes y se van anotando los resultados en las columnas correspondientes debajo de esta nueva raya; este es el polinomio resultante.

Discusión

A pesar de que es posible dar cuenta de una lista de temas que se tratan en las clases observadas, no se ve una estructura del tema en el sentido de que en la clase se establezcan conexiones expresas entre los temas tratados ni de éstos con otros temas. El contenido matemático que se aborda se enfoca y se organiza en torno a los procedimientos para los que se nombran los términos involucrados y sólo con algunas excepciones se enuncian definiciones breves y generales para éstos, sobre las cuales no se discute o la discusión que se hace consiste en alguna indicación por parte de la profesora sobre algún procedimiento relacionado con el término.

No se explicita conexión alguna entre la resta de polinomios y la suma como operaciones inversas, lo que permitiría darle un sentido más amplio a ambas operaciones, ni se relacionan entre sí el sustraendo y la diferencia, como elementos que se pueden intercambiar en la resta para obtener el otro; todo esto, además, serviría para verificar los resultados de la resta, y para encontrar el sustraendo o el minuendo cuando éstos se solicitan. Tampoco se abre expresamente la posibilidad a que los estudiantes trabajen la suma y la resta en conjunto, es decir que no se requiera sumar primero los polinomios para encontrar el minuendo o sustraendo, sino que operen los términos semejantes de todos los polinomios al mismo tiempo con el proceso conocido como 'reducción de términos', y puedan tener de esta manera otra experiencia con las propiedades conmutativa y asociativa de tales operaciones. Las relaciones de las operaciones entre polinomios con las operaciones aritméticas no se establecen de manera expresa. Se establecen diferencias para la multiplicación de polinomio con monomio y de polinomio con polinomio. Los ejercicios trabajados no plantean ninguna asociación de los polinomios con material concreto, o con geometría, por ejemplo con longitudes de segmentos o áreas de figuras, que ayude al estudiante a darle significado a las expresiones algebraicas o a ver alguna utilidad del tema. Todas estos hechos propician ver que asuntos que los estudiantes pueden explorar para ser descubiertos o por lo menos para aproximarse a ellos, son tratados de manera arbitraria en el sentido al que se refiere Hewitt (2002a, 2002b, 2002c), es decir como si fueran convenciones, establecidas por alguien, que es necesario respetar y comunicar para ser conocidas.

Ejercicios como el propuesto para encontrar el minuendo y el sustraendo en una resta de trinomios para una diferencia dada, pueden verse como ejercicios que presentan algunas características de la resolución de problemas, en tanto que no es posible aplicar los procedimientos conocidos y debe emplearse otra estrategia para su solución, que eche mano de conocimientos previos que puedan servir. A pesar de que se vio que los estudiantes ejercían razonamientos distintos de los implicados en el procedimiento de la resta, pero orientados al tanteo y a la prueba y error para deducir los términos correspondientes a un determinado exponente de la incógnita, no es claro que en su desarrollo se haya fomentado seguir una heurística de resolución de problemas o un proceso sistemático. Además fueron muy pocos los estudiantes que pudieron solucionarlo. Determinar un trinomio cualquiera y tener en cuenta la suma como operación inversa, o pensar en las operaciones aritméticas primero, no fueron estrategias comunes que se observaran. En la entrevista la profesora corrobora que la intención de este ejercicio era que los estudiantes se den cuenta de cómo se presenta el enunciado para que vean que los problemas se pueden presentar de varias maneras, y se fijen en la parte literal de los términos para que aprendan a manejar los términos semejantes; también tiene la intención de "dilucidar qué tanto habían aprendido de resta" los estudiantes.

En la multiplicación de polinomios no es clara la razón de la diferencia que se enfatiza entre multiplicar un polinomio por un monomio y multiplicar dos polinomios, ni de acentuar tal distinción con el empleo de notaciones distintas para estas operaciones. No se explicita que se está realizando el mismo procedimiento y por el contrario se espera el reconocimiento expreso de ejercicios de cada tipo. Una explicación plausible podría ser que el libro que se usa plantea el tema así, separando las dos operaciones. No se muestran las conexiones con otras operaciones, ni se ejemplariza o exige el uso de las propiedades de éstas, por ejemplo al usar la notación con paréntesis para cualquier multiplicación. Tampoco se destacan de manera intencionada formas de verificar los resultados, como la operación inversa, o los factores posibles, que podrían ser básicas por ejemplo, para el trabajo posterior con la factorización. Cuando la profesora habla de que el orden de los factores no altera el producto, y por lo tanto el monomio que se va a multiplicar puede colocarse a la derecha o a la izquierda del polinomio, parece que intenta hacer referencia a la propiedad conmutativa, pero termina hablando de que es la propiedad distributiva después de que los estudiantes han dicho tentativamente que es la asociativa o la modulativa.

Las conexiones que la profesora estableció entre los polinomios y la función lineal estuvieron determinadas por los ejercicios que se iban abordando, y fueron superficiales; se redujeron a indicar que las expresiones algebraicas de las funciones lineales eran polinomios y viceversa, que algunos polinomios tienen grado uno y por lo tanto son lineales, que hay otro tipo de exponentes que no son uno y en consecuencia no pueden ser lineales. En palabras de la profesora:

> *Por la forma que traían de pronto aquí los ejercicios. Entonces podía uno decirles mire aquí esto es lineal por tal y tal cosa… el exponente de la variable es tal. En otras por ejemplo ellos se tenían que dar cuenta porque había otro tipo de exponentes. Ya ahí no podía ser lineal porque había cosas al cuadrado, bueno ¿sí? Pero de una manera muy… También muy superficial.*

Dice la profesora en la entrevista que la idea que dio en clase de función es como "esa noción que le dan a uno al principio de que es una máquina, que recibe una materia prima, la transforma y sale un resultado". Así mismo, en el tratamiento de la función lineal que se observó se detecta una inclinación a tratarla como procedimiento para generar la tabla con el fin de poder hacer el procedimiento para graficar. En el procedimiento de la tabulación, se recalca la importancia de la sustitución de valores en la expresión algebraica y de dar cuenta de esto con la notación indicada por la profesora; luego se enfatiza en el trazo de los ejes y en la ubicación de los puntos en el plano cartesiano que deben unirse por una recta. Los estudiantes marcan las divisiones que determinan la escala en cada eje, y aunque varios estudiantes toman diferentes unidades para la escala del eje x y la del eje y, , en general conservan la distancia entre las marcas.

Aun así, como no se observaron todas las clases en que se abordó es posible que en este tema se hayan establecido relaciones entre los parámetros de la expresión algebraica con los puntos de corte de la recta con el eje y y el eje x, que llevan a la profesora a plantear ejercicios como el que propuso en la evaluación, donde dado un punto de corte el estudiante debe trazar una línea recta que pase por ese punto y encontrar la expresión algebraica de dicha recta. La profesora da instrucciones con respecto de esta tarea como "Dibujan la recta que quieren y luego acomodan esa recta a una función" o encuentran "la función correspondiente a esa recta".

La razón que la profesora indica para abordar la función lineal en el grado 8°, es que los estudiantes lleguen al grado 9° conociendo algo de este tema, para que en consecuencia allí se les facilite el estudio de lo que es una función en general y de la función lineal en particular:

> *De todas formas es importante que al menos sepan hacer una gráfica y una tabulación (…) En Octavo al menos dar esa noción cuando se pueda… con vista a lo que sigue… aunque desafortunadamente ellos olvidan muy rápido.*

Sin embargo, no se ve la necesidad de tratar este tema en el momento temático en que se hizo y la profesora reconoce que el tema de función lineal en este curso 8° se había podido tratar a final del curso y no en medio de las operaciones de polinomios. Alega que lo hizo así por el cansancio que implica la mecanización necesaria para trabajar las operaciones de polinomios y por la cantidad de ejercicios que deja:

> *Llega un momento en el que yo de pronto interrumpo cierto proceso, como por cambiar la actividad y hacer otra cosa, entonces les digo, bueno van a traer papel milimetrado… A ellos siempre les ha gustado eso.*

Aunque pareciera que la primera intención de la lectura es establecer un primer contacto de los estudiantes con los conceptos, procedimientos y ejercicios de una manera general, y aportar nuevos elementos, tal y como lo afirma la profesora en la entrevista, el contenido de las lecturas, que en general tiende a informar sobre procedimientos, la escasa discusión que se hace en torno a la lectura no posibilita ver que así sea ni tampoco que se perciba qué sucede en los estudiantes al respecto. No se dan oportunidades reales para negociar los significados de lo que se lee; las preguntas de la profesora acerca de la lectura, tanto cuando deben ser respondidas oralmente como por escrito, apuntan a que los estudiantes indiquen el procedimiento o la definición esperada por la profesora, que no necesariamente han podido captar de la lectura. En el caso particular de la lectura sobre variable y constante que se muestra en la Figura Nº 1 de este capítulo, no obstante que la profesora señala que su objetivo es que los estudiantes amplíen la definición de variable y constante, no es clara además la pertinencia de dicho texto ni las razones de la profesora para proponerlo. A lo largo del texto se alude a términos que son no sólo desconocidos por los estudiantes sino que son términos que hacen parte de contenidos de cursos matemáticos más avanzados y para los cuales es improbable que ellos entiendan su significado, aun cuando lo busquen en diccionarios o libros de matemáticas como lo sugiere la profesora.

La profesora señala que esta actividad de leer también tiene una intención relacionada con el problema grave que existe en el colegio con la lectura, que por ejemplo impide contestar un cuestionario simple por razón de que los estudiantes no entienden las preguntas al leerlas. Desde que los profesores están realizando este tipo de actividad han visto aportes con respecto a la lectura en sí misma, pues dice la profesora que "inicialmente ellos decían no entendemos, no entendemos nada, explíquenos (...) Ahora al menos algo entienden". La profesora anota igualmente que a veces promueve una discusión sobre la lectura de otra forma, por ejemplo en mesas redondas cuando la lectura se presta, en las que los estudiantes presentan en voz alta sus comentarios y ella les hace preguntas, reafirma o corrige lo expuesto y "mira la participación".

Al dar ejemplos de números irracionales los estudiantes hicieron diversos dibujos que no necesariamente representaban un número irracional. La profesora acepta no haberse dado cuenta de esto durante la clase, pues a veces pasa y mira por encima, y era necesario medir o por lo menos haber mirado en ese momento con detenimiento los tamaños y formas de las figuras que los estudiantes hacían; reconoce que más tarde cuando revisó los trabajos unos quince días después sí detectó los errores:

> *Me di cuenta que había una cantidad de problemas (...) Eso como era una secuencia (...) Al equivocarse en las primeras medidas pues obviamente que todo lo demás ya quedó... mal.*

Tanto la profesora como la compañera que asistió a la entrevista, reconocen que el tema de los números irracionales "realmente aquí en el colegio (...) se ha visto muy... en una forma muy superficial". Alegan que la "dificultad que tienen los muchachos para percibir ese concepto es tremenda (...) Lo que bien puedan (...) Por encimita (...) Pero realmente profundizar eso, no". A pesar de que la profesora en la entrevista dice que conoce la importancia de este tema pues su tesis de posgrado fue sobre números irracionales, disculpa el tratamiento que se le da "primero, por la intensidad horaria, segundo las bases que tienen los estudiantes" que a su vez están influidas por los problemas familiares, económicos y de nutrición que existen en el colegio.

Para referenciar temas ya tratados, no necesariamente la profesora ni los estudiantes, aluden a las ideas matemáticas involucradas; más bien señalan anécdotas relacionadas con el momento o las circunstancias donde se trataron tales temas, o el material concreto o instrumento utilizado en las tareas en cuestión, como en el caso de asociar la función lineal con un proceso realizado en papel milimetrado. Al respecto la profesora pregunta:

P: "Este procedimiento que aparece ahí, a lo largo de toda la página que leyeron, ¿cómo lo llamamos nosotros, cuando hacemos el trabajo en el papel milimetrado? Nosotros le dimos un nombre a ese proceso.

E: ¡Funciones lineales!

En estas clases el papel milimetrado es el único material concreto que se utiliza. Los recursos tecnológicos no se utilizan ni se menciona su existencia o sus posibilidades.

De acuerdo a la organización del contenido matemático como campo conceptual o procedimental[1] que Rico (1995, 1997) plantea, y teniendo en cuenta las consideraciones anteriores, nos parece que el conocimiento matemático que se favorece en estas clases es en esencia procedimental a un nivel de destrezas con énfasis en el manejo simbólico. Se pusieron en juego destrezas más que estrategias y razonamientos y se hizo referencia a los modos de ejecución ordenada de las tareas. Par los símbolos matemáticos se explica su significado en términos generales, tal y como Gravemeijer, Cobb, Bowers y Whitenack (2000) argumentan que es usual en el esquema tradicional de enseñanza o son tratados sin significado. Se recalca así en repetir y memorizar reglas para trabajar simbólicamente con expresiones algebraicas. Es claro que esto puede originarse en que en la mayor parte de las clases observadas, el tema que se trató fue cómo restar y multiplicar polinomios, procedimientos en sí mismos. Aun así, la insistencia en la notación —v.g., la colocación de los polinomios en forma vertical situando los términos semejantes en columnas—, en el orden a seguir para realizar las operaciones —v.g., la recomendación de ubicar el monomio que multiplica el polinomio a la izquierda o en la segunda fila del arreglo vertical que se haga para multiplicar —, en recordar reglas y su manejo, como las leyes de los signos, en diferenciar tales reglas para la suma y la multiplicación, en identificar la palabra 'restar' o el paréntesis con el signo menos, la palabra 'por' con el paréntesis, en ver como separados los procedimientos de la multiplicación dependiendo si uno de los polinomios es un monomio, en presentar la respuesta completa en términos de las palabras requeridas, en llegar a la respuesta correcta, y la falta de destacar la aplicación de las propiedades de las operaciones, la falta de exigencia por parte de la profesora, y por tanto la ausencia, de explicaciones o razones relativas a lo que hacen los estudiantes en las tareas que les propone, promueven la memorización y enfatizan el componente procedimental del conocimiento. La exigencia en la respuesta correcta en los términos de la profesora podría estar enfatizando también el conocimiento factual o de hechos, de acuerdo a Voigt (1995).

Son también indicadores del énfasis en lo procedimental y de propender por la memorización de los procedimientos, la falta de explicitar conexiones ya descrita, la insistencia en enumerar los pasos del procesos y en su notación, la repetición del procedimiento completo cada vez que desarrolla en el tablero un ejercicio, el análisis que la profesora hace de las producciones de los estudiantes y lo que acepta como adecuado: la ejecución correcta del procedimiento dado y su presentación en la forma vista, que de acuerdo con Cooney (1994) son reflejo de la conceptualización del profesor enfocada a los niveles en que el estudiante sigue un procedimiento conocido y de una orientación procedimental de las tareas. La profesora considera que debe repetir constantemente cómo

1. El conocimiento conceptual está constituido por hechos, conceptos y estructuras conceptuales y se caracteriza tanto por la cantidad de unidades de información como por la riqueza de relaciones entre tales unidades; el conocimiento procedimental está conformado por destrezas, razonamientos y estrategias, y hace referencia a 'los modos de ejecución ordenada de una tarea'.

hacer el procedimiento con el fin de repasar dicho procedimiento y dar una idea clara, pues a pesar de que los estudiantes habían ya estudiado, por ejemplo, cómo reducir términos semejantes, olvidan muy fácil, y sus respuestas a las preguntas que hace "son muy sueltas y ellos, aunque lean, ellos no se apropian de todo. Ellos como que cogen por poquitos".

Tales percepciones se confirman además por la aceptación de la profesora durante la entrevista de que es importante mecanizar ciertos procedimientos y de que hay que dar recetas; se refuerzan además con los textos usados en la clase que ponen énfasis en algoritmos y reglas. No obstante la profesora también dice que tiene que saberse por qué se hacen los procedimientos:

> *¿Por qué les pongo yo a trabajar en el álgebra de Baldor aunque hay personas que dicen que ya el álgebra de Baldor está mandada a recoger? ¿Por qué? Porque hay necesidad de mecanizar ciertos procesos. No aprenderlos como loros, porque eso es otra cosa, que hay gente que lo hace pero no sabe tampoco por qué lo hace, y entonces me tocaría devolverme a temas que ya tienen ustedes que conocer".*

La profesora señala así mismo, que el "ideal que yo he tenido siempre es que de pronto no sea necesario dar esa receta, porque uno lo que hace es que da una receta en el tablero de un algoritmo". Pero confirma que "toca darles esta receta" porque no ha sido posible que por ejemplo, los estudiantes lean y hagan las cosas con base en la lectura.

El destacar elementos del orden y la notación puede estar ligado al hecho de la llamada rigurosidad, precisión y orden de las matemáticas como ciencia en cuanto a los procedimientos, simbolización y respuestas, pero también según la profesora, está relacionado con el hecho de que estos elementos ayudan a la comprensión de los estudiantes y a la vez son indicios de dicha comprensión. En particular, para las dos formas de escribir la operación y de anotar los resultados parciales del procedimiento utilizado, vertical y horizontal utilizando paréntesis, que en ocasiones llama dos formas de proceso, la profesora expresa que lo que quiere es que los estudiantes vean formas diferentes de hacer lo mismo:

> *Hay otras formas. De lo que se trata hoy es de mirar que hay diferentes maneras de hacer un mismo proceso. Que solamente es en apariencia que es diferente, porque realmente en el fondo se está haciendo lo mismo que se está realizando antes.*

Sin embargo, el continuo señalamiento de las exigencias con respecto al orden, a la notación y a la forma de presentar el trabajo, en conjunto con la manera de enfatizar estos elementos al tratar los temas y al validar las producciones de los estudiantes, no ayuda a atenuar las apreciaciones anteriores a cerca del foco en lo procedimental.

En contraste con estas apreciaciones podrían alegarse, varios hechos observados. En primer lugar, que en las clases la profesora con frecuencia pide a los estudiantes que analicen y piensen, lo que se podría interpretar como que la profesora induce a los estudiantes a indagar y descubrir las razones de lo que se hace, a encontrar regularidades, a establecer conexiones y a ver relaciones. No obstante, consideramos que el empleo de esta palabra en la clase no conlleva obligatoriamente a las acciones enunciadas, ya que el sentido de la acción de analizar en dichas situaciones es que los estudiantes vean algo particular a lo que se está tratando, tal y como lo confirma la profesora misma en la entrevista al indicar que cuando da "una ecuación y le dijo analícela pues entonces yo lo que le estoy pidiendo es que la mire, la observe y como que saque los elementos que hay ahí". Este uso de analizar puede verse cuando hay un ejercicio desarrollado en el tablero y la profesora pide a los estudiantes que lo analicen: "Necesito que todo el mundo se siente y analice el ejercicio del tablero"; cuando los estudiantes deben leer algo y luego deben analizarlo:

> *Miremos por ejemplo, en la última parte, el último pedacito donde dice efectuemos la resta, que tiene una flecha, al final de la página, van a mirar esto y lo van a analizar, me van a decir en qué parte está representada la palabra restar. Primero lo piensan.*

Igualmente se ilustra el uso del verbo analizar cuando la profesora obtiene una respuesta incorrecta sus preguntas:

P: ¿De donde sale el cero x^2?, ¿quién me dice?

E: Eh, cero porque de x^2.

P: ¡No! Piensen antes de hablar! ¿Alguien ve, por qué dice ahí cero x^2?... ¿Por qué?

O cuando se refiere al tipo de respuesta que va a tener en cuenta dice por ejemplo, "Ahí no vamos a mirar la extensión de lo que escribió; claro que si yo escribo muy poco, de pronto, también... no sé, depende de qué tanto hayan podido analizar y sintetizar la cuestión", "Ese ejemplo le sirve pero falta analizar". En algún otro momento, la profesora también utiliza el verbo analizar en el sentido de ampliar o completar, cuando afirma que:

> *El concepto de variable y el concepto de constante no lo tenemos completo, no lo hemos analizado bien; no estoy diciendo que con lo que vamos a hacer hoy, ya ustedes quedaron expertos en esos dos conceptos pero tenemos que complementar esos dos conceptos porque hacen parte de las competencias del primer bimestre.*

En segundo lugar, el hecho de que la profesora pregunte por una opinión distinta de la expuesta por algún estudiante acerca de un tema podría conducir a interpretar que busca que los estudiantes contrasten, discutan y reconozcan otras perspectivas. No obstante, la falta de respuesta de los estudiantes, el contenido de lo tratado en estas alusiones y lo limitado de las posibilidades que los estudiantes podrían esgrimir ante la pregunta, apuntan a que las intenciones de la profesora son preguntar por otra opinión para ver si los estudiantes saben o se les ocurre "otra forma distinta" de notar el proceso o de interpretar una frase o palabra. La profesora en el transcurso de la entrevista dice que sí ha habido situaciones en ese curso de matemáticas donde los estudiantes expresan otro proceso diferente cuando por ejemplo hay alumnos nuevos que vienen de otro colegio o son repitentes.

P: Hay un menos. ¿Qué es esto?

E: Me imagino que...

P: Lo mismo. ¿Alguien tiene otra opinión?

E: ¡No!

P: ¿Alguien tiene otra opinión diferente? Miren, aquí hay unos paréntesis y efectivamente ese menos que precede el segundo paréntesis, es el que me está reemplazando la palabra restar. Yo puedo colocar el ejercicio mañana, o con la palabra restar o directamente con el signo. Esto que estoy diciendo ahoritica, es simplemente un repaso, ustedes ya lo sabían y fíjense que solamente dos personas me pudieron decir, donde estaba la palabra restar.

En tercer lugar, el hecho de que algunos estudiantes descubren cosas en clase durante su trabajo con los ejercicios que podría indicar que ésta es una intención expresa de la profesora con las tareas que propone. Por ejemplo, unos estudiantes luego de intentar trabajar en varios de los ejercicios que implicaban operar polinomios con exponentes no numéricos, los cuales no se habían trabajado en los ejemplos explicados durante las clases, al apoyarse en la respuesta del libro como primera instancia y luego tratar de dilucidar por qué es esa la respuesta al ejercicio propuesto, descubrieron y enunciaron en sus palabras reglas para operar los exponentes en general. No obstante, estos descubrimientos pasan no como consecuencia de acciones deliberadas de la profesora, ni es una intención que ella haya contemplado en torno a la utilización de la respuesta del libro, pues por el contrario la profesora indica mirar la respuesta del libro sólo después de hacer el procedimiento y únicamente con el fin de comprobar si la respuesta obtenida es correcta: "Las respuestas se miran después de hacer el ejercicio, no antes, porque si no ustedes son los que se van a perjudicar". Según ella para este caso en especial se esperaba que los estudiantes fueran capaces de desarrollar los ejercicios, pues las propiedades de la potenciación se habían estudiado con anterioridad. Alega que una intención tal como la mencionada, de pronto puede servir para otras personas que tienen un cierto tipo de formación pero no para sus estudiantes pues cree que "para estos muchachos (...) y para el nivel que ellos tienen de... de desarrollo, de todo eso... no me parece conveniente que lo hagan".

Interacción a través de la cual discurren la enseñanza y el aprendizaje

Descripción

Con la siguiente descripción pretendemos destacar aspectos relativos a la interacción de la profesora con los estudiantes y de ellos entre sí, en torno a la enseñanza y el aprendizaje de los temas abordados.

La interacción de la profesora con los estudiantes en clase se da a través de las intervenciones orales y escritas de cada uno y en diferentes escenarios. En general, esta profesora no utiliza gestos para comunicarle algo a los estudiantes.

Al inicio de la clase la profesora hace intervenciones acerca de asuntos de manejo de enseñanza y el aprendizaje, tales como las tareas, la evaluación, los paseos, las reuniones de padres, los permisos, etc., que en ocasiones dan pie para que los estudiantes a su vez intervengan con comentarios o preguntas alusivas a lo que se trata. Algunos ejemplos de estos comentarios son: "Ah, yo tengo el libro [los estudiantes se ríen]. Nosotras tenemos el libro", "Profe, profe ¿qué si usted da la respuesta?", "Y yo, yo, ¿cuántos [puntos] llevo?", "¿Hay que traer hojas milimetradas?".

Como parte de la exposición sobre el tema y mientras desarrolla ejercicios en el tablero explicando los procedimientos que está usando, la profesora hace preguntas que no están dirigidas explícitamente a alguien pero a las que uno o más estudiantes contestan, por ejemplo cuando expresa "entonces esto me está diciendo que es todo el menos seis al que voy a elevar al cuadrado. Bueno, y eso ¿cuánto da?". También a veces deja frases sin terminar que los estudiantes completan. Cuando la profesora advierte alguna respuesta incorrecta lo indica expresamente, o vuelve a preguntar, o responde ella misma a la pregunta antes de seguir adelante. Cuando la respuesta es correcta lo confirma, repite la respuesta o continúa el trabajo que está haciendo.

P: Se debe enunciar en las dos formas vistas, se debe enunciar en las dos formas vistas. ¿Cuál sería la primera forma? Utilizando las palabras...

E: 'De' y 'restar'.

P: De y restar, que ustedes muy bien saben que no siempre van en ese orden, ¿cierto? Porque hay ejercicios que comienzan con la palabra restar, pero yo siempre busco primero ¿cuál palabra?

E: La 'de'.

P: La palabra 'de', única forma que yo empiece con la palabra 'de', el ejercicio, yo lo primero que hago es buscar la palabra 'de' porque allí está la clave del [no se entiende]. Y¿ cuál es la otra forma?

E: Resta.

P: No, no, no. Una forma es con las palabras 'de' y 'restar'.

E: ¡Con el signo!

P: Y la otra forma es con el signo, utilizando ¿qué?... ¡Los paréntesis!

Cuando los estudiantes trabajan en el desarrollo de preguntas y ejercicios, la profesora se pasea por el salón y advierte cosas sobre el trabajo que la hacen detener y hablar con algún estudiante, porque ve algo incorrecto como que "un estudiante no está trabajando apropiadamente (...) o está muy atrasado" ya que, según dice, a veces hay personas que "difícilmente trabajan"; porque quiere indicarle al estudiante que está haciendo adecuadamente el trabajo que se espera que haga, o para contestar una pregunta del estudiante.

En estos casos o cuando revisa el trabajo de los estudiantes sentada en su escritorio pero en presencia del estudiante, o cuando los estudiantes se acercan a donde ella está y le preguntan sobre el trabajo realizado o se lo muestran, la profesora en general, habla para el estudiante en cuestión, v.g., "Tienes que decir: 'de la suma de esto y esto, restar' y falta otra vez, 'la suma de esto y esto'. Arréglame la operación y lo vuelves a hacer. Claro, es lo mismo, es que no hemos cambiado" . O también:

> *Pero es que mira, tú estás colocando x aquí, x acá y y, acá. Entonces, ahí tendrías que mirar quiénes están variables y quiénes están constantes. Ese ejemplo te sirve. Ahora te toca es señalar ahí quiénes son las variables y quiénes las constantes y decir por qué".*

Las intervenciones de la profesora pueden ser a su vez en forma de preguntas para el estudiante que se encuentra ante ella, que ni él ni la profesora necesariamente contestan pero que indican que hay algo incorrecto. Los siguientes ejemplos de intervenciones de la profesora ilustran lo anterior: "Eso ¿qué significa?", "¿Qué es esto realmente", "¿Qué hace este igual aquí? Si es $x-2$. ¿Qué valores va a tomar esta variable? ¿Qué números va a tomar esta variable? Está exactamente al revés", "¿Dónde está el enunciado, Eliana? Es la misma operación pero me falta el enunciado; el que dice 'de la resta de esto, esto y esto'", "Es esto con esto y la suma de esto, ¿con quién?".

En otras oportunidades, la intervención de la profesora es un comentario para todo el grupo relativo a la tarea matemática que se está desarrollando, cuando considera que la pregunta o el trabajo revisado lo amerita, como la alusión a la definición de variable y constante:

> *Curiosamente, las personas a las cuales les he leído lo que hicieron, en la parte de constante están más acertados que en la parte de variable, es decir, el concepto de constante parece que lo han entendido mejor que el de variable.*

O la referencia de la profesora a los trinomios que los estudiantes debían encontrar: "Esto no es un trinomio. Miren, quiero aclarar una cosa, porque ya he visto... a los que me han traído aquí el trabajo, observen esto porque yo se que muchos lo tienen así", o la repetida mención al cuidado con los signos: "Tengan presentes las leyes de los signos. Acuérdense que no están multiplicando, no están multiplicando, están sumando o restando según el caso". Otro ejemplo de estas intervenciones se dio cuando la profesora se dio cuenta de que varios estudiantes no habían realizado bien el punto del taller en que les pedía representar unos números irracionales, se dirigió a todo el grupo y les preguntó si recordaban qué decía el teorema de Pitágoras y empezó a trabajar con esto.

En ocasiones la interacción de la profesora hacia los estudiantes que han presentado sus producciones escritas, es también por escrito. En los cuadernos o carpetas ella marca las respuestas adecuadas con signos como un 'chulo' o una letra, y señala los errores con pequeñas frases o con signos de interrogación.

En este mismo ámbito de trabajo de los estudiantes o a veces cuando está exponiendo, la profesora aprovecha situaciones específicas, casi siempre generadas por la pregunta de un estudiante, para hacer alusiones a comportamientos relativos no sólo a la clase sino a la vida en general. Por ejemplo, cuando un estudiante pregunta si al desarrollo de la tarea propuesta la profesora le va a asignar puntos, ella contesta: "Mire, uno en la vida nunca hace las cosas solamente para que le paguen". Cuando en la realización de unas lecturas la profesora da instrucciones a los estudiantes sobre cómo hacerla:

> *Pueden mirar también en el libro que tienen; usted puede complementar si tiene un libro. Precisamente ahí está la riqueza de una lectura, cuando uno no solamente toma de una fuente la cuestión sino que mira de varios sitios; por eso es que tanto les he insistido que cada uno traiga un libro, pero no ha sido posible todavía.*

Al referirse a la multiplicación de fracciones que surge en uno de los ejercicios propuestos de multiplicación de polinomios con coeficientes fraccionarios, la profesora hace mención a que eso es tema de cursos anteriores y dice:

> *Yo sé que a ustedes les enseñaron eso y en primaria, para los que están desde primaria, pero entonces aprendemos entre comillas, para la evaluación; ya después de que pase la evaluación (...) Es decir, nunca aprendemos, eso no es aprender. Si mañana la gente me responde muy bien, lo del plano cartesiano y a los dos días le pregunto y ya no sabe, ¿ustedes creen que aprendí? (...) ¡Uno aprende esas cosas para la vida, no las aprende para el momentico, para cuando me pregunte la profesora! Eso se aprende para la vida, si no ¿qué van a hacer en el ICFES?*

Durante la evaluación cuando la profesora indica que "lean muy bien el enunciado del primer punto. En la lectura correcta está la clave de hacerlo bien". O cuando algún estudiante le entrega la evaluación porque ya ha terminado, le dice: "Haga algo útil mientras tanto.". Cuando propone una tarea para la clase que debe ser realizada en forma individual enfatiza que: "No debo ver ejercicios iguales, porque cada persona es un mundo, ¿cierto?".

La profesora se dirige a los estudiantes individualmente, o al grupo en general, con preguntas acerca de la claridad de lo que se acaba de hacer, tales como : "¿Queda alguna pregunta de esto?", "¿Queda entendido hasta ahí?". Los estudiantes en general o no contestan a esto, o hay respuestas con 'sí' por parte de algunos estudiantes.

Las intervenciones verbales de los estudiantes en clase con respecto al tema matemático que se está tratando se dan principalmente cuando ellos responden con frases muy cortas, preguntas puntuales formuladas por la profesora durante sus exposiciones o el desarrollo de un ejercicio; aunque no son frecuentes también hay intervenciones de los estudiantes cuando hacen en público preguntas que se refieren primordialmente a los asuntos que la profesora trata no directamente ligados con los tópicos matemáticos, sino con la asignación de puntos, la tarea que hay que hacer, la evaluación, etc. En privado cuando están cerca a la profesora, sí es más usual que los estudiantes hagan preguntas sobre el desarrollo de una tarea. Mientras desarrollan las tareas propuestas, normalmente los estudiantes trabajan de manera individual; de vez en cuando lo hacen en parejas, dependiendo de lo que la profesora indique. En ambos casos y aun en la evaluación, los estudiantes hablan entre sí acerca de la tarea, y de muchos otros tópicos. En especial, al realizar las tareas es común que se paseen por el salón, se rían, se llamen, se paren del puesto a hablar con sus compañeros; la profesora hace algunos llamados de atención como: "Deja de jugar, ponte a trabajar", "Siéntate y vas mirando lo del tablero, por favor", "¿Por qué hay gente que todavía está hablando?".

En algunas situaciones la profesora se dirige a un estudiante para pedirle que pase al tablero y copie allí su desarrollo del ejercicio. El único caso observado, el estudiante seleccionado fue el primero que terminó satisfactoriamente la tarea asignada y fue la profesora quien después de que ya estaba escrito en el tablero, repitió en voz alta las operaciones hechas y los resultados encontrados. Mientras se está escribiendo algo en el tablero bien sea por parte del estudiante o de la profesora misma, ella indica a los estudiantes que no copien todavía en sus cuadernos, que miren todos al tablero y no hagan otra cosa, que luego podrán copiar porque eso va a quedar escrito allí. Ejemplos de estas interpelaciones se presentan enseguida: "Necesito que dejen cualquier cosa que estén haciendo y miren al tablero", "En perfecto silencio, lean este ejercicio. Si hay alguna pregunta me dicen, pero primero mírenlo bien", "En el tablero va a quedar lo que yo voy a escribir, de tal manera que ahora nadie escribe, simplemente todo el mundo mira (...) Dejen los libros a un lado, no necesitan mirar nada". Los estudiantes ya conocen esta norma y cuando alguien pregunta si copian, ellos mismos contestan:

E: ¿No copiamos?

E: [Otros compañeros contestan] ¡No!, que ahorita ¡no!

Discusión

A pesar de que la interacción de la profesora con los estudiantes en clase se evidencia a través de las intervenciones orales y escritas de cada uno, no puede decirse que en las clases se establezca un diálogo ni una discusión entre profesora y estudiantes, en los que ambas partes intervengan de manera similar, no sólo en cuanto a que cada uno exprese sus ideas, las explique y éstas se consideren seriamente, sino en cuanto a que ambas partes dediquen el mismo tiempo para expresarse. Es claro que es la profesora quien domina la conversación, sin que esto quiera decir que sus intervenciones induzcan al diálogo, o confronten las concepciones o visiones de los estudiantes, o exhiban ideas completas, explicadas y justificadas desde el punto de vista matemático.

La interacción entre la profesora y los estudiantes se reduce así a las preguntas puntuales que la profesora hace en medio de sus exposiciones y que piensa que los estudiantes son capaces de contestar, a los comentarios que escribe o expone oralmente sobre el trabajo realizado, a las alusiones a aspectos de la vida en general, a las respuestas cortas que dan los estudiantes, a las preguntas orales que hacen sobre tópicos indirectamente vinculados al trabajo matemático, a las preguntas orales que expresan acerca de sus producciones, al trabajo escrito que ellos hacen y a las anotaciones escritas de la profesora relativas a dicho trabajo.

Aun cuando la profesora estipula que preguntas que formula a los estudiantes cuando individualmente les revisa su trabajo, intentan señalar el error y confrontar al estudiante en su conocimiento para que lo vea, la respuesta inmediata o la expresión a continuación de más preguntas o comentarios por parte de la profesora, la falta de respuesta del estudiante, no permiten tener muestras visibles de que necesariamente esto pasa. Más bien dado el tipo de muchas de estas interpelaciones, parecen que apuntan a que el estudiante se dé cuenta de que la respuesta no es correcta o de que algo anda mal, pero no de cuál es el problema. Igualmente las correcciones que la profesora hace por escrito en los cuadernos o carpetas de los estudiantes, señalan el error someramente sin describir la dificultad que lo causa o hacer preguntas que permitan que el estudiante la detecte.

Parecería que con las interpelaciones que la profesora hace a los estudiantes individualmente, o al grupo en general, con el fin de saber si entendieron algo que se acaba de hacer, espera detectar qué ha pasado en los estudiantes con respecto a las matemáticas abordadas en clase; la no respuesta de los estudiantes o la respuesta afirmativa generalizada, y la ausencia de preguntas adicionales de la profesora al respecto que indaguen más allá, sugieren que para los estudiantes estas preguntas no crean la oportunidad real de solicitar una nueva explicación. No obstante, en la entrevista la profesora alega que esas respuestas de los estudiantes se deben al temor a la burla de sus compañeros; anota que a veces hay estudiantes que se atreven y sí dicen que no entienden a pesar de que los otros estudiantes se ríen y entonces ella vuelve a explicar. Agrega que además cuando interroga a los estudiantes acerca de si hay preguntas sobre el tema tratado y ellos no hacen preguntas, eso no es para ella "un indicador de que todos entendieron". A la profesora le da "la pauta de que sí entendieron... cuando los confronta y les coloca un ejercicio y ve que lo hacen sin ayuda de ninguna clase".

La profesora en la entrevista confirma que aprovecha "ocasiones para decir asuntos no solamente de las matemáticas sino... a nivel de valores y a nivel de formación de la gente" con la intención de que con estas alusiones a larga sí pueda quedarles algo con respecto a valores morales y éticos, pero sin esperar una modificación de la conducta y las visiones de los estudiantes a corto plazo, porque según dice "nuestro trabajo tiene unos resultados muy lentos".

La interacción de la profesora con los estudiantes que pasan al tablero es poca, pues es frecuente tal y como lo señaló en la entrevista que pase al tablero a estudiantes que sabe que han desarrollado el ejercicio de forma correcta, con el fin de que los demás puedan ver tal trabajo y de demostrar que si hay alguien que pueda hacerlo bien; por consiguiente, sólo una vez que el estudiante ha terminado de copiar su trabajo, la profesora se dirige a todo el grupo para repetir oralmente el desarrollo del ejercicio. En la entrevista también, la profesora dice que otras veces pasa a un estudiante que sabe que necesita ayuda para guiarlo, no para ridiculizarlo, pero los estudiantes no siempre lo toman así y en ocasiones les da miedo que sus compañeros se rían; y en otras oportunidades pasa indistintamente a los estudiantes al tablero para calificarlos, para "sacar una nota" y mirar qué saben hacer.

Las intervenciones verbales de los estudiantes en clase con respecto al tema matemático que se está tratando, tanto las que hacen para todo el grupo como las que hacen de manera individual a la profesora, no dan cuenta de explicaciones o razones; tampoco éstas son exigidas por la profesora. Las preguntas que los estudiantes hacen a la profesora, no en público, sobre el desarrollo de una tarea, en general apuntan a solicitar ayuda en cómo se hace algo o a indicar que no entienden.

Los estudiantes interactuan entre ellos cuando trabajan en el desarrollo de ejercicios y comentan acerca de la tarea y de muchos otros temas, aun cuando no estén sentados juntos y en general hay bastante indisciplina. En las clases hay algunas intervenciones de la profesora, no muchas, con respecto a la disciplina y al alto nivel de ruido con el que se desarrolla la clase; en la entrevista la profesora explica diciendo que en primer lugar ya no se puede calificar la indisciplina y además que ahora "hay muchas cosas que implican problema para la profesora"; añade que en este curso en especial es difícil el manejo de la disciplina "por diferentes factores". También en varios momentos de la entrevista la profesora alega que el comportamiento de los estudiantes estuvo relacionado con la presencia de los observadores, ya que "había mucha gente indispuesta por las observaciones de clase" y los estudiantes se alborotan; recalca que en las clase había "una bulla impresionante, más de lo normal (...) En parte... eso que ocurrió fue por eso". Dice que si los observadores "ahorita pudieran ver una clase en estos días de factorización, pues ... verían de pronto la diferencia", pues a pesar de que hubo como un virus en ese curso y todos tosían al tiempo, ella explicó el segundo caso de factorización "perfectamente"; escuchó preguntas y se fue, y cuando pasaba por el salón veía a "todo el mundo trabajando". En particular señala que la grabación en video fue el principal promotor del desorden y que ella lo había previsto al comentar con su compañera una experiencia previa en ese sentido que en el colegio que había generado mucho desorden. Esta compañera quien también asistió a la entrevista corrobora que en sus cursos no se hubiera podido hacer la observación por el reducido tamaño del salón y por la indisciplina de los estudiantes. La profesora había dicho en principio que no quería grabación en video pero luego no objetó cuando ésta se realizó en las clases observadas. No obstante estas explicaciones, la misma profesora en un momento dado al hablar de otra cosa describe comportamientos de los estudiantes parecidos a los observados en esas clases, como usuales. Por ejemplo, cuando justifica el que los estudiantes se muevan entre los puestos como permitido por ella a veces, porque los estudiantes van a preguntarle a otro estudiante que puede ayudarles, que "es bueno", ya que a algunos no les gusta preguntarle a la profesora. O cuando al comienzo de la entrevista la profesora atribuye en parte a que esos estudiantes hablan muy duro, el hecho de que las transcripciones de las grabaciones de audio de las clases observadas, aparecen como cortadas y no permiten ver la clase con ilación.

Durante el desarrollo de las clases al abordar el contenido matemático es claro que la profesora juega un papel importante de 'proveedor de información'. Esto se evidencia en el tipo de preguntas que hace, puntuales y dirigidas, que incluyen la información necesaria y casi que la respuesta, para que los estudiantes digan lo que se espera, como cuando pregunta

P: Ese menos va entre paréntesis, ¿qué me está diciendo? ¿Qué procedimiento debo realizar?

E: Una resta.

P: Al hacer la resta, (...) ¿Qué debo hacer a los signos que están por dentro?

Así mismo, se detecta en el tipo de comentarios que la profesora hace cuando un estudiante presenta su solución a sus compañeros, pues es la profesora quien termina explicando al curso la respuesta del estudiante; en las explicaciones que la profesora da cuando ayuda a los estudiantes en el trabajo que realizan, que básicamente se limitan a dar instrucciones sobre lo que se debe hacer; en el énfasis en recordar los pasos de los procedimientos y la secuencia en que éstos se deben realizar. También se ve en el hecho de que la profesora insista en proponer ejercicios a los estudiantes que a juzgar por las pocas respuestas obtenidas a las preguntas que hace, parece que muchos no pueden resolverlos y por ello emplean el tiempo asignado a su solución en tratar de entender lo que el ejercicio pregunta.

Valoración de las producciones de los estudiantes

Descripción

Con la descripción que se presenta a continuación pretendemos resaltar aspectos relacionados con la valoración de las producciones de los estudiantes en las clases. En primer lugar, se intenta dar cuenta de qué de esas producciones se considera valioso, de quién lo valora y de cómo se hace esta valoración.

Los estudiantes trabajan los ejercicios para obtener la respuesta correcta, y en algunos casos la profesora explicita esta exigencia, como cuando señala: "en el quinto punto les doy unas frases para que las traduzcan en expresiones algebraicas, que ya saben cómo es; debe quedar perfecto", o cuando indica comparar la respuesta obtenida con la respuesta estipulada en el libro de texto. Además, cuando la profesora expresa enunciados o ideas ésas son correctas desde el punto de vista matemático.

La notación adecuada en la manera sugerida por la profesora durante las clases debe ser tenida en cuenta por los estudiantes en su trabajo. Es así cómo hace interpelaciones que indican que "las letras en álgebra, preferiblemente van en minúscula" o recomendaciones como:

> *Hay personas, que prefieren colocar el factor aquí, debajo trazar una línea y de la misma manera (...) hacia arriba. Igual les debe dar exactamente el mismo resultado. Si lo hago así, me debe quedar organizado, si lo hago de la otra manera, también me debe quedar organizado.*

Cuando la profesora ve lo que hacen los estudiantes dice cosas como: "Usted, ¿por qué está escribiendo los cuatro polinomios seguidos? Eso no es así y así no se lo voy a aceptar porque eso lo he dicho montones de veces".

Una respuesta para la que el estudiante ha usado una forma de anotar distinta a las trabajadas en clase, por ejemplo para el caso de la resta o multiplicación de polinomios dice la profesora que es aceptada por ella, siempre y cuando "el proceso que ellos hacen sea válido".

Igualmente la profesora recalca la exigencia en el orden y la buena presentación del trabajo. Por ejemplo, con respecto a la evaluación avisa que "Lo que yo no entienda, no lo califico, es decir si yo ahí veo una mezcolanza de cosas y no entiendo qué es cada cosa, no está eso como organizado, yo no lo miro siquiera"; con relación a unas tareas que los estudiantes desarrollan en clase, advierte que:

> *Ahorita cuando revise el taller, mientras ustedes van trabajando, me voy a tomar el trabajo de mirar los apuntes a ver como fue que los tomaron. Sí, porque es que hay unos aquí que ni siquiera toman bien los apuntes.*

O al mirar el trabajo de un estudiante, la profesora tiene un intercambio con él, en el que explicita sus exigencias de orden:

> P: Esto no es cierto. O sea, que si yo tengo dos polinomios, multiplico los números... y la parte literal ¿qué?
>
> E: Por eso...
>
> P: No señora. Vuélvelo a escribir bien escrito. Que quede organizado.

La profesora insiste en que los enunciados planteados como respuestas estén completos y con la notación que ha sido trabajada en clase. Así lo indica en intervenciones como: "A ver... El enunciado está muy bien escrito. Falta completar", "De la resta de esto, está mal enunciado, está mal enunciado, de la suma de éste con éste". O cuando a un estudiante al que ya le había revisado el trabajo, la profesora le reitera que no estaba escrito como se esperaba:

E: Profe, yo lo había hecho así. Al principio yo lo hice así.

P: Es que tú habías colocado 'de la suma de tal cosa', y si yo voy a sumar es porque hay algo, ¿cierto?

En algunos casos la profesora insiste en que los estudiantes deben incluir en sus respuestas escritas, el procedimiento realizado, es decir los pasos seguidos; por ejemplo al hablar acerca del punto de función lineal en la evaluación, dice: "obviamente que la tabulación debe ir con su procedimiento como se vio, así todo seguido".

Con respecto a unas preguntas sobre una lectura realizada, la profesora indica que lo que le importa es la definición dada como respuesta, y no la extensión del texto:

¡Ah!, no; yo no estoy... es decir, cuando yo lea lo que ustedes escribieron yo no voy a mirar el número de renglones que tengan llenos, sino que en lo que ustedes escribieron esté la esencia del concepto, es decir, ahí no vamos a mirar la extensión de lo que escribió; claro que si yo escribo muy poco, de pronto, también... no sé, depende de qué tanto hayan podido analizar y sintetizar la cuestión, pero no voy a mirar ni lo largo que esté escrito ni lo corto, sino voy a leer, a ver qué dice ahí, a ver qué tanto se apropió de la cuestión.

El trabajo de los estudiantes y lo que ellos dicen se aprueba o desaprueba en clase de manera verbal casi siempre.

Por medio de frases directas de la profesora que califican las producciones de los estudiantes explícitamente, tales como: "Ya hay uno hecho bien", "Bien hechesita", "Eso está mal", "A la siete, ¡muy bien!", "El único que está bien es el primero; revísenlos; están mal, éste y éste".

Por medio de la repetición por parte de la profesora de una misma pregunta al obtener de los estudiantes una respuesta no acertada, hasta lograr la respuesta correcta, como se ejemplariza en los fragmentos que se presentan a continuación:

P: Miren, $2x^2$ no tiene término semejante, ¿si? No tiene término semejante por el cual operarse, entonces ¿qué significa? Que hay cero x^2 en esa parte... Si uno coloca x^2 ¿cuántos x^2 está colocando?

E: Dos.

P: ¿Cuántos?

E: Uno.

P: ¿Cuánto nos da?

E: $+ 4x$.

P: ¿Cuánto dos da?

E: Menos cuatro.

P: Menos cuatro.

Por medio de preguntas de la profesora que no necesariamente deben ser respondidas por alguien, o que ella misma responde, ilustradas en las siguientes intervenciones de la profesora : "Usted¿ por qué está aquí sustituyendo por menos cuatro? Si yo les dije que usaran los enteros desde menos tres hasta tres", "Pero yo no entiendo, ¿cómo así que raíz de seis? Esto esta mal",

> P: 'De' y 'restar', que ustedes muy bien saben que no siempre van en ese orden, ¿cierto? Porque hay ejercicios que comienzan con la palabra 'restar', pero yo siempre busco primero ¿cuál palabra?
>
> E: La 'de'.
>
> P: La palabra 'de', única forma que yo empiece con la palabra 'de' el ejercicio, yo lo primero que hago es buscar la palabra 'de' porque allí está la clave del... Y¿ cuál es la otra forma?
>
> E: Resta.
>
> P: No, no, no. Una forma es con la palabra 'de' y 'restar'.
>
> E: ¡Con el signo!
>
> P: Y la otra forma es con el signo, utilizando ¿qué?... ¡Los paréntesis!

Por medio de la repetición por parte de la profesora de una respuesta de los estudiantes que es adecuada, como se ve en el siguiente ejemplo transcrito de la grabación de una de las clases:

> P: ¿Qué coeficiente?
>
> E: Dos... siete... eh... doce.
>
> P: Doce.

Por medio de la indicación de la profesora a los estudiantes, cuando la respuesta no es correcta, de que piensen antes de contestar con frases como "primero lo piensan".

Por medio del señalamiento de la profesora a todo el curso de que miren y analicen el ejercicio escrito en el tablero por un estudiante al que ella le ha solicitado que copie allí su desarrollo de un ejercicio, el cual ha sido previamente verificado por la profesora.

También en algunas oportunidades los estudiantes se corrigen entre ellos el trabajo. O en ocasiones cuando un estudiante copia en el tablero el ejercicio realizado, los estudiantes detectan fallas y lo expresan en voz alta, tal y como se ve en el siguiente fragmento de la segunda clase observada:

> E: Profe, le faltó el dos. [Se refiere a que en el resultado de la resta el estudiante no había escrito en el tablero el coeficiente dos del segundo término].
>
> P: [Se dirige al estudiante que copió su ejercicio en el tablero] Tráeme la hoja donde lo habías hecho. ¿Tú tenías este ese dos? [no se entiende]. Claro ahí si lo tenía pero no lo escribiste cuando lo pasó al tablero.

Las tareas para la casa, talleres y trabajo en clase de los estudiantes que la profesora considera adecuados son recompensados con puntos; las evaluaciones son calificadas con notas y todo esto cuenta para las notas finales. El sistema de puntos que se maneja en este curso es conocido por los estudiantes en forma general. La profesora asigna puntos cuando la respuesta es correcta, cuando hay orden y buena presentación del trabajo; en algunos casos por el procedimiento realizado. También puede quitar puntos por mal comportamiento o por incumplimiento. El número de puntos que asigna la profesora por la respuesta correcta depende de la complejidad de la tarea que se ha propuesto, a veces les da "puntos a los primeros que lo terminen", o a los que hayan trabajado más según lo indica: "quienes estén más adelantados, tendrán más puntos mañana, al principio de la clase". Los criterios para la asignación o disminución de puntos y para alcanzar los logros, no están definidos con precisión previamente, aunque la profesora los va comunicando a medida que se van dando las situaciones correspondientes, mediante interpelaciones como las siguientes: "Sí!... son diez, no once, son diez. Cada ejercicio valía diez y les había dicho que cada cuadrado valía diez, yo me acuerdo que cada cuadrado valía diez!", "De la mitad hacia arriba. Sí la persona que más lleva, lleva cincuenta; veintiséis puntos se necesitan para alcanzar el logro (...) Es la mitad más uno de la persona que más lleva". La profesora asigna trabajos de recuperación o refuerzo que permiten a los estudiantes recibir puntos adicionales y por lo tanto mejorar sus notas; así lo indicó en una de las últimas clases observadas: "Dada la premura del tiempo con el asunto de las notas, como les dije desde ayer, hoy tenemos que hacer el último trabajo de refuerzo".

Para las evaluaciones, la profesora repasa casi siempre el tema antes de hacerlas. A veces lo hace el mismo día de la evaluación u otras veces, en la clase anterior, dependiendo del tema que se este trabajando. En general no permite que los estudiantes en las evaluaciones consulten los apuntes o los libros de texto; durante la evaluación así lo expresó a un estudiante que le pidió el cuaderno: "¿Cómo así? Yo no te voy a dar el cuaderno. La evaluación no es con cuaderno".

Discusión

En esta clase es la profesora quien casi siempre valora, y por lo tanto aprueba o desaprueba las producciones de los estudiantes, bien sea orales o escritas. Es decir, indica la validez de lo que los estudiantes hacen y dicen, principalmente por medio del tipo de interpelaciones verbales ya señaladas en la descripción, que son en su mayoría indirectas; no obstante, en ocasiones la profesora expresa directamente lo adecuado o no del trabajo o de la respuesta de los estudiantes. Expresiones indirectas de la profesora al respecto, como repetir la misma pregunta varias veces, implican una interpretación de los estudiantes mediada por la cultura de la clase que se vive allí y que ya ha sido experimentada por ellos, y que está determinada en gran medida por las actuaciones de la profesora. Para los estudiantes

Mediante las interpelaciones que hace individualmente a los estudiantes, o las anotaciones que escribe en los cuadernos de ellos, la profesora a indica cuál puede ser el error que se presenta pero sin aludir a la dificultad que lo genera. Los estudiantes entienden que la respuesta no es correcta pero no se explicita la razón de esto.

El libro de texto también juega un papel de autoridad con respecto a la validez de las producciones en el desarrollo de ejercicios planteados, dado que los estudiantes corroboran sus respuestas con las consignadas en el libro.

En algunas pocas ocasiones son los estudiantes los que valoran e indican la validez de las producciones de sus compañeros, cuando expresan para todo el grupo una falta o error del trabajo que otro estudiante presenta en el tablero que es luego precisado por la profesora, o cuando entre ellos mismos se corrigen el trabajo realizado.

La respuesta correcta es lo más importante para la profesora y es aceptada por ella sin pedir explicaciones o justificación y sin que ella las provea tampoco. Se acepta así el juicio de la profesora o lo presentado en el libro para determinar la respuesta verdadera, independientemente de las razones matemáticas que puedan sustentarla y que se podrían cuestionar. Esto parecen saberlo los estudiantes y a veces la profesora lo explicita, o lo sugiere como cuando indica en la realización de los ejercicios, mirar la respuesta del libro para comprobar si la respuesta que los estudiantes han obtenido es la correcta. Para la profesora la respuesta correcta no sólo consiste en el resultado matemático apropiado, por ejemplo, el polinomio que es el resultado de la operación efectuada, sino que exige que vaya acompañada del planteamiento de la operación, de los resultados parciales y finales obtenidos, expresado todo con la notación completa y que ha sido trabajada en clase, incluso con las palabras usadas allí. Adicionalmente la respuesta adecuada debe estar presentada de manera ordenada. Esto es coherente con la manera en que la profesora expresa enunciados o ideas en clase, siempre correctas desde las matemáticas y anotándolas de una cierta forma y ordenadamente. Aun cuando la respuesta incorrecta genera reacciones diferentes por parte de la profesora en cuanto a que hay unas pocas interpelaciones más de la profesora al respecto, no puede decirse que éstas atiendan a indagar por las razones de la respuesta.

De acuerdo con la profesora, la notación en la manera sugerida por ella es importante y sí hace parte de lo que considera como respuesta correcta, por razón de la ayuda que puede representar para la comprensión del estudiante y de los indicios que provee sobre dicha comprensión, dada la rigurosidad y el orden que se requieren en el trabajo con las matemáticas, pues alega que "la matemática es una ciencia muy ordenada", y por ejemplo una demostración no se puede hacer en cualquier orden sino que lleva un orden lógico de razonamiento" para que los estudiantes "poco a poco se vayan formando en esa disciplina". Otros aspectos de la forma no parecen ser tan importantes para la profesora, como cuando la respuesta esperada es un texto, no necesariamente considera un texto más extenso mejor que uno corto, sino lo que le importa son las ideas allí consignadas.

Para explicar porque parte de lo que ella aprueba como correcto es la buena presentación del trabajo, la profesora afirma que:

> *El orden es fundamental, no sólo el orden físico de que yo mire la hoja y diga, sí está ordenada, sino el orden en el cual escriban ellos sus ideas. El orden que ellos tengan en cuenta para pensar, para… resolver un ejercicio.*

Este énfasis en el orden y claridad de los cuadernos, carpetas y evaluaciones, además tiene, según dijo la profesora en la entrevista, la intención de facilitar que ella entienda lo que el estudiante hace y de inculcar hábitos en él.

En algunos casos, la profesora también insiste en que los estudiantes deben indicar el procedimiento realizado como parte de una respuesta adecuada, aunque no necesariamente parece referirse a todo lo que hacen, sino a los resultados de los pasos intermedios realizados y los resultados parciales obtenidos; así por ejemplo dice:

> *Si yo en una evaluación, escúchenme bien, si yo coloco en una evaluación esta pregunta: multiplicar $x^3 + 2x^3 - x$ por x^2 y $-2x + 5$ aparece como por arte de magia, la respuesta está perfecta y no está el procedimiento, no vale nada. El procedimiento debe estar ahí, sino no vale nada. Es mas, yo miro la respuesta y si está bien, me devuelvo y reviso todo el procedimiento, si encuentro inconsistencias no vale nada la respuesta. Lo escriben ¡completo! Fíjense que escribí todos los signos, igual tienen que hacer ustedes. Luego no me resulten con lo de la vez pasada.*

Al preguntar la profesora por otra opinión en algunas ocasiones podría conducir a pensar que en la clase se consideran como válidas diferentes respuestas en un sentido amplio de esta palabra, pero estas preguntas se esgrimen básicamente en relación con formas diferentes de anotar cómo se hacen las cosas o con las distintas interpretaciones de una palabra.

De la misma manera al decir la profesora que acepta una respuesta para la que el estudiante ha usado una forma de anotar distinta a las trabajadas en clase, si ésta es correcta, por un lado apoya la percepción de la importancia en la respuesta correcta, pero por otro lado podría indicar que en la clase son bienvenidas distintas perspectivas, procedimientos y respuestas, y por consiguiente que el estudiante juega un papel más vital en la valoración de sus propias producciones. Sin embargo, al señalar la profesora que en general no deja que esas otras respuestas sean conocidas por los demás estudiantes y expresa que "no me gusta que lo diga y lo publique" porque según dice "a veces se presta también para que otros se confundan y ya no hacen ni el uno ni el otro y ya se les confunde todo" o porque la mayoría de las veces que los estudiantes presentan procedimientos distintos, éstos no son correctos, se refuerza la idea de que las respuestas que se consideran válidas son las correctas cuando están expresadas de acuerdo a lo visto en clase.

Como consecuencia de lo anterior y a pesar de que la profesora se refiere a las distintas notaciones como diferentes maneras de hacer lo mismo o diferentes procesos, se puede alegar que en la clase lo que se maneja como respuestas diferentes son simplemente variaciones en la manera de anotar el mismo proceso.

Según lo expresa la profesora en la entrevista, la intención de las evaluaciones escritas que lleva a cabo, es "primero mirar el avance que han tenido los alumnos más que calificar", porque ahora máximo un estudiante pierde el curso aunque según lo señala, haya "diez o doce que no saben ni donde están parados". Además añade que:

> *Como pedagoga sabe que la evaluación no es calificar sino que es mirar el proceso que lleva la gente y tratar como de ayudar y de mejorar tanto el trabajo del mismo maestro como el trabajo de los alumnos.*

Obviamente que también la profesora usa la evaluación para obtener notas de los estudiantes exigidas por el colegio. Dice que la información recogida en las evaluaciones sí incide y modifica, en consecuencia, "las clases siguientes… porque hay momentos en los que uno ve que definitivamente le toco retomar… por ejemplo la división de polinomios".

El sistema de puntos se usa como motivación durante la clase, y así lo confirma la profesora al definirlos como "un incentivo a la participación en la clase" de los estudiantes, es decir, parece que lo que realmente importa es tener la cantidad de puntos necesaria por razón de obtener una respuesta correcta y presentarla de manera ordenada, mientras que alcanzar una comprensión más de fondo se relega a un plano de menor prioridad. Consecuentemente con lo que parece ser adecuado para la profesora como una producción valiosa del estudiante, en la clase asignan puntos teniendo en cuenta la respuesta correcta, el orden y la presentación del trabajo; a veces también por el procedimiento realizado; se quitan puntos por indisciplina, o por falta de cumplimiento.

En resumen, la enseñanza de esta profesora puede asimilarse a la instrucción que varios autores, como Yackel (1995), han llamado, instrucción dominada por el profesor, en la que los estudiantes escuchan las explicaciones del profesor, responden a las directrices del profesor, y desarrollan experiencia usando procedimientos dados de solución.

Aspectos de la ruta pedagógica en un curso de matemáticas de grado noveno Caso 5

En este capítulo presentamos, a través de cuatro secciones, un análisis de una secuencia de cinco clases de álgebra desarrolladas con un grupo de grado noveno, en torno al tema *función cuadrática*. En cada una de las secciones incluimos un apartado de descripción de lo sucedido en las clases y uno de discusión de lo observado.

Este capítulo se alimenta y apoya en el análisis de las transcripciones hechas de las clases que observamos, las cuales recapitulan información procedente de un registro en video, dos en audio y las notas de un par de observadores; en este sentido, las citas textuales que incorporamos en este documento para ilustrar o ampliar las ideas presentadas, provienen de aquéllas. También nos apoyamos en el análisis de la transcripción de la entrevista realizada con la profesora después de concluida la observación. En las citas hemos cambiado los nombres de quienes intervienen y en algunas de ellas hemos utilizado las letras P y E para indicar que es la profesora o un estudiante (aunque no siempre el mismo, incluso en una misma cita) quien enuncia un determinado texto; además hemos incluido entre corchetes ([ ]) aspectos de lo sucedido en la clase que no fueron enunciados pero sí observados, hemos utilizado tres puntos suspensivos entre paréntesis ((...)) para denotar que excluimos parte de la cita y hemos hecho uso de las comillas dobles (" ") para citas breves. Cabe aclarar que estamos usando los genéricos "estudiante", "estudiantes", "alumno" y "alumnos" para referirnos tanto a hombres como a mujeres.

Esquema de las clases

Descripción

La clase se inicia con la entrada de la profesora al salón y la organización de los estudiantes en sus puestos. Al comenzar y durante el transcurso de la clase se puede reconocer un ambiente ruidoso que a veces es producido por los alumnos del curso y otras veces por lo que sucede afuera del salón. Eventualmente la profesora pasa lista.

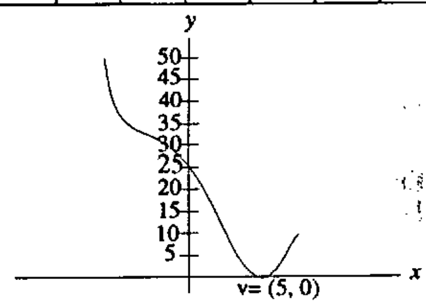
Si en la sesión anterior se asignó una tarea para la casa, ésta se revisa o "se corrige" en la primera parte de la clase. La manera usual de hacerlo incluye: (i) una pregunta de la profesora para ver si alguien quiere pasar al tablero a hacer un determinado ejercicio; (ii) luego un estudiante que haya realizado la tarea pasa al tablero —ya sea porque voluntariamente quiere pasar o porque la profesora le insiste para que pase— y copia el desarrollo que tenga en su cuaderno; mientras ello ocurre, algunos estudiantes atienden a lo que está escribiendo el alumno en el tablero, otros que no han hecho la tarea la van haciendo o la van copiando y otros están en algún asunto diferente; por su parte, la profesora, a la vez que se mueve por el salón, atiende a lo que se está escribiendo en el tablero sin intervenir; (iii) una vez que termina de escribir su solución en el tablero, el estudiante vuelve a su puesto y la profesora hace para todo el grupo diversos comentarios y preguntas, de los cuales algunos destacan determinados detalles de lo que quedó registrado en el tablero (e.g., los valores obtenidos en la tabla de valores, el tamaño de tales valores,), otros apuntan a conseguir información general acerca de si el grupo pudo hacer bien la solución del ejercicio, y otros son relativos al funcionamiento de la actividad de revisar tarea (e.g., "corrijan eso", "¿ya se puede borrar el tablero?"); la profesora da tiempo para que los alumnos puedan hacer en sus cuadernos las correcciones del caso o puedan copiar el desarrollo si no hicieron la tarea.

P: Vamos a corregir la tarea en el tablero. [Hay mucho ruido en el salón] ¿Quién quiere pasar a hacer el primero? [El enunciado del ejercicio es: Graficar $y = (x-5)^2$ y decir cuál es el vértice]

E: Pasó un alumno al tablero y durante el tiempo que estuvo allí consultó su cuaderno. Mientras escribía en el tablero fue disminuyendo un poco el ruido sin llegar a desaparecer. En el tablero quedó escrito algo como lo siguiente:]

$y = (x-5)^2$

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	49	36	25	16	9	4	1	0



P: Bueno ¿qué pasó aquí con los valores?, ¿cómo nos dieron?, ¿pequeños o grandes?

E: [Tres estudiantes responden al tiempo] Grandes.

P: Grandes, ¿no?

E: ¡Ah! es que ustedes comenzaron de -2.

P: Entonces vemos que hay valores bastante grandes y por consiguiente hay que hacerlo más pequeño para que les quepa en la hoja. Ponen una hoja oficio. Para menos uno da treinta y seis, para cero… [ruido de fondo fuera del salón] para cinco le dio cero, para seis… Entonces, ¿cuál es el vértice? —que es lo último que estábamos analizando la vez pasada.

E: Cinco, cero.

P: Corrijan eso, por favor. [Mientras decía eso, la profesora escribió $v = (5, 0)$ para señalar el vértice de la parábola en el dibujo] ¿Más o menos lo hicieron bien o no?

E: [Cuatro estudiantes responden en coro] Sí. [Se escuchan murmullos]

P: ¿Ya se puede borrar el tablero?

E: No. [Varios estudiantes no habían hecho la tarea entonces empezaron a copiar de otros cuadernos o del tablero]

Al revisar un ejercicio[1] asignado como tarea para fuera de la clase, que fue realizado por muy pocos estudiantes, un alumno que sí lo hizo pasa al tablero y copia de su cuaderno la solución. Con base en lo que él va escribiendo en el tablero, la profesora va haciendo preguntas que el alumno va respondiendo y también, comentarios para todo el grupo; los es-

1. En la sesión anterior se representaron ecuaciones de la forma $y = (x-h)^2$ para tres casos particulares, se hizo referencia a que el vértice de la parábola correspondiente a la ecuación de la forma $(y-k) = (x-h)^2$ tiene coordenadas (h, k) y para el caso $y-2 = (x-3)^2$ se estableció que su vértice es el punto (3, 2), sin embargo, no se representó gráficamente la ecuación; así que la solución del ejercicio asignado como tarea requería realizar un paso adicional con respecto a lo que se había hecho en la clase.

tudiantes están trabajando en sus puestos, algunos copiando del tablero y otros haciendo ellos mismos el ejercicio.

P: Miremos la segunda entonces [el ejercicio al que se está refiriendo pide hacer la gráfica de $y - 2 = (x - 5)^2$] ¿quién quiere trabajarla? La segunda... ¿no la pudieron hacer?

E: No. [Silencio en el salón]

E: Por votación.

P: Miremos la segunda, a ver qué pasó.

E: Pues sí daba parábola, pero no...

E: [Algunos alumnos se ríen] ¡Ja!

P: [Nadie se ofreció para pasar. La profesora dirigiéndose al puesto de una estudiante la miró insinuándole que pasara]

E: [En voz baja, hablando sólo para la profesora] No.

P: ¿Hiciste el ejercicio?

E: Sí. Pero no quiero pasar. [Finalmente accedió a pasar; en el tablero comenzó a copiar de su cuaderno la solución]

P: [Dirigiéndose al grupo] Atendemos al segundo ejercicio, por favor. Ahí tenemos una variación, ¿no? [pausa] Miremos primero antes de copiarla y atendamos a ver qué pasa.

E: [El alumno ha hecho una transformación sintáctica sobre la ecuación inicial]

P: ¿Cuál fue el primer paso?

E: [Responde el alumno que está en el tablero] El menos dos está restando, lo paso a sumar.

P: Entonces el menos dos está restando, lo pasó a sumar, y luego ¿qué se hace?

E: [Responde el estudiante que está en el tablero] Tabla de valores.

P: La tabla de valores.

E: [El alumno escribe la tabla de valores y comienza a hacer la gráfica para lo cual primero hace, a ojo, sobre el eje vertical, cinco divisiones que asocia con los números 10, 20, 30, 40 y 50 respectivamente y luego entre cada par de marcas consecutivas trata de hacer diez divisiones sin atender a que ellas sean del mismo tamaño. Entre tanto los estudiantes trabajan en sus cuadernos, casi en silencio —algunos copiando lo que el estudiante había escrito en el tablero y otros haciéndolo por su cuenta]

P: Miremos los valores. Para menos dos nos dio... cincuenta y uno ¿cierto?, menos uno, treinta y ocho. [Pausa]

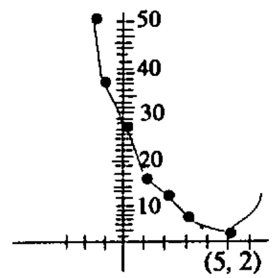
E: [Los estudiantes siguen trabajando en sus cuadernos. El estudiante localiza los puntos dados por la tabla y une, a mano alzada, al parecer, con segmentos de recta, cada par de puntos consecutivos que ha marcado] ¿Está bien la gráfica? [Le pregunta en voz baja a la profesora]

P: Un poquito torcida, pero bueno.

E: [Al final, la producción del alumno en el tablero es algo como lo siguiente:]

$$y-2 = (x-5)^2$$
$$y = (x-5)^2+2$$

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	51	38	27	18	11	6	3	2



P: [Se dirige al grupo] ¿Cuál es el vértice acá?

E: [Nadie respondió]

P: ¿Cuál es el vértice?

E: Cinco coma dos.

P: Cinco coma... [La profesora escribió en el tablero (5, 2)] Entonces, miremos la forma de la ecuación: y menos dos, igual a x menos cinco, al cuadrado [al tiempo que hablaba iba señalando en el tablero lo correspondiente de la ecuación] entonces el vértice nos dio cinco, dos ¿cierto?, cinco coma dos. (...)

En otra de las clases observadas, la revisión de la tarea tuvo un funcionamiento diferente: la profesora pasó puesto por puesto mirando en el cuaderno de cada alumno si había hecho o no la tarea. En caso de que estuviera hecha total o parcialmente ponía un visto bueno; en caso de que no hubiera nada al respecto, escribía una anotación; en esa ocasión, la profesora no tuvo en cuenta para nada el contenido de la producción de los estudiantes. Mientras se llevaba a cabo la revisión, los alumnos estaban realizando una tarea asignada por la profesora al comienzo de la clase; por momentos, la profesora interrumpía la revisión para atender preguntas de los estudiantes con respecto a la tarea en la que estaban involucrados.

Después de la revisión de la tarea, la profesora sigue desarrollando el tema a través de actividades específicas en las que combina la exposición de parte suya con la participación de los alumnos, fundamentalmente de dos maneras: como parte de su exposición, la profesora incluye algunas preguntas para que las respondan los estudiantes; también les plantea tareas muy puntuales cuya realización debe dar información requerida para continuar con la exposición. Terminada la exposición de un asunto específico, con frecuencia, la profesora plantea uno o dos ejercicios que se desarrollan usando procedimientos abordados de alguna manera —fue exhibida su utilización y, en algunos casos, se explicitaron detalles relativos a los pasos que los conforman— durante las exposiciones de la profesora; los estudiantes deben desarrollarlos de manera individual, pero cuando ella detecta que algunos tienen alguna dificultad para hacerlo, pasa al tablero y sobre el ejercicio en cuestión vuelve a exponer lo que considera que no se ha entendido. Después de dar un tiempo razonable para que todo el curso haya podido completar la tarea, algún alumno escribe en el tablero su solución y la profesora explicita directa o indirectamente su aprobación o señala, si es el caso, algún error y hace la corrección pertinente.

A continuación se presenta un ejemplo para ilustrar a qué nos referimos al decir que la exposición de la profesora incluye la participación de los estudiantes; el fragmento expuesto es relativo al evento que inicia en el curso la actividad "para aprender a hacer el gráfico [que representa a $y = ax^2 + bx + c$]".

P: (...) Bueno vamos a trabajar el gráfico de $y = x^2$. Miramos primero cómo se hace. Igual que habíamos trabajado en la recta, vamos a formar una tabla de valores, dándole unos valores a x y otros a... [murmullos que no se entienden] y, ¿dónde vamos a ubicar los puntos?

E: En el plano cartesiano.

P: ¿En qué?

E: En el plano cartesiano.

P: En el plano cartesiano; bueno acá está x [dibuja el eje X] y acá esta y [dibuja el eje Y]. Yo les voy a dar algunos valores para que a todos nos quede igual el ejercicio; vamos a darle a x el valor de -2, -1, 0, 1 y 2; esos no más y ustedes van a hallar el valor de y e intentamos hacer el gráfico. [En el tablero, la profesora hizo un formato para la tabla de valores asignando a x los valores -2, -1, 0, 1, 2; también dibujó los ejes de coordenadas]. Hagan los valores de y y ubicamos los puntos en el plano.

E: [Pasaron unos veinte segundos y algunos alumnos la llamaron para hacerle alguna pregunta]

P: [A raíz de lo dicho por los alumnos, la profesora se dirigió al tablero y allí realizó la tarea que había propuesto a los estudiantes] A ver, ¿qué es lo que van a hacer? Yo di la expresión $y = x^2$; le estamos dando unos valores a x: cuando x vale menos dos, menos uno, cero, uno y dos, entonces vamos a hallar el valor de y cuando x vale menos dos. ¿Qué tengo que hacer?

E: ¿Ubicar en el plano?

E: Hallar el valor de y.

P: Sí, pero ¿cómo hallo ese valor de y, entonces?

E: Reemplazando los valores de x.

P: Hagamos el primero, ¿cuánto vale x?

E: Dos.

P: Acá. [En el tablero, la profesora señala un número de la tabla]

E: Menos dos.

P: Y, ¿qué debo hacer con ese menos dos?

E: Dos por dos.

E: Elevarlo.

P: Elevarlo ¿a qué?

E: Al cuadrado.

P: Entonces y es menos dos al cuadrado. ¿Cuánto es?

E: Cuatro.

P: Entonces, cuando x vale menos dos, y ¿vale?

E: Cuatro.

P: Entonces, ¿cuál es el primer punto que voy a ubicar?

E: Menos dos coma cuatro.

P: Ese sería el primer punto. A ver, les repito: x vale menos dos, la cuestión dice que debo hallar el valor para y cuando y es igual a x al cuadrado, entonces reemplazo el x por ¿quién? por menos dos, ¿cuánto les da menos dos al cuadrado? Cuatro, porque es menos dos por menos dos, que es cuatro, entonces obtengo el primer punto:

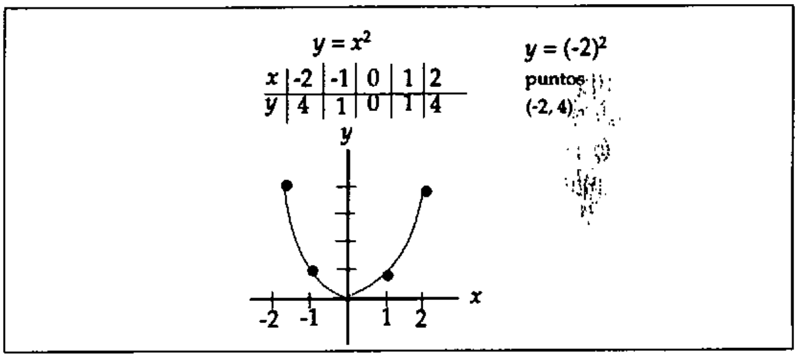
> cuando x vale menos dos, y vale cuatro para poderlo ubicar en el plano cartesiano. Bueno, hallen los otros.

En su exposición —actividad que lleva a cabo de manera oral, pero apoyada significativamente por la escritura en el tablero y la referencia a lo que queda escrito— es frecuente que la profesora muestre cómo realizar un procedimiento completo o partes de él, llevándolo a cabo frente al curso para un caso particular, acompañado de preguntas o comentarios; esta descripción se puede constatar en el ejemplo anterior que da cuenta de cómo la profesora expone aspectos del procedimiento para "formar una tabla de valores" asociada a una determinada ecuación.

En algunas ocasiones, en su exposición, la profesora explicita oralmente muy poca información con respecto a cómo llevar a cabo un determinado procedimiento y cuando muestra su ejecución frente al curso, las preguntas o comentarios al respecto pueden no ser todo lo puntuales que sería necesario para ayudar a los estudiantes a ver con cierta precisión, en qué deben enfocar su atención al llevarlos a cabo. Esto es así en el caso del procedimiento para determinar el vértice de una parábola en la correspondiente gráfica cartesiana; en tal ocasión, la profesora se refiere indirectamente al vértice, por primera vez en el curso, en términos de "de dónde parte la parábola" —alusión que formula después de haberse referido a "hacia dónde se dirige la parábola"— información que ella proporciona al señalar con el dedo un cierto punto sobre una gráfica que no ha sido realizada técnicamente (un esbozo) y más adelante —después de haber hecho algo similar para otros tres casos— complementa diciendo que el punto que ha señalado en cada caso es un punto mínimo o máximo, punto que se llama vértice. También el caso del procedimiento para unir los puntos que se han determinado en el plano con base en la información de la tabla de valores, sirve para ilustrar la mención hecha al comienzo de este párrafo. En el siguiente fragmento se puede ver la utilización de dos procedimientos matemáticos: la ubicación de puntos en el plano cartesiano y la unión de tales puntos para trazar la gráfica de la relación correspondiente. Aunque en la exposición, para ninguno de los dos procedimientos, la profesora explicita de manera oral cómo llevarlos a cabo, al parecer, el primero no es nuevo para los estudiantes y en todo caso, la profesora algo explicita mediante gestos con el dedo sobre el plano en el que está trabajando y lo hace para cada uno de los puntos que ubica; el otro procedimiento, sí es nuevo para los estudiantes, y la profesora lo hace de una sola vez, sin hacer más comentario que el relativo a que los puntos se unen "con una curva suave".

> P: Voy a hacerlo para los que todavía están como... volando. Ubicamos los puntos. Miramos por favor. El primer punto es el punto menos dos, cuatro; x vale menos dos y y vale cuatro [la profesora va haciendo la gráfica: marca sobre los ejes unas divisiones y señalando con el dedo sobre cada eje el correspondiente valor, ubica el respectivo punto] cuando x vale menos uno, ¿cuánto vale y?
>
> E: Uno.
>
> P: Entonces tenemos el punto menos uno, uno; cuando x vale cero, y vale cero, entonces tengo el punto cero, cero, que es el origen de las coordenadas; cuando vale uno
>
> E: Uno.
>
> P: Entonces uno para x, uno para y; cuando vale dos,
>
> E: Cuatro.
>
> E: [Refiriéndose al gráfico que está haciendo la profesora, dos alumnos intervienen en voz alta] Profe, el primer punto le quedó mal.
>
> P: No; está bien, pero lo que... [no se entiende lo que dice] lo que pasa es que no está bien a escala esto, ¿no? Toca correr esto más. Y lo que hacemos es unir esos puntos

con una curva suave. Entonces ese es el gráfico de la parábola y ¿igual a qué? a x al cuadrado. [Al final en el tablero queda algo como lo siguiente:]



En sus exposiciones, la profesora también presenta ideas matemáticas referidas a objetos y/o conceptos matemáticos. Ella comunica algunas de tales ideas ligadas a procedimientos que involucran el concepto; esto es así, por ejemplo, en el caso relatado antes con respecto al vértice: la idea de que *el vértice es el punto mínimo o máximo de una cierta clase de parábolas* se comunica adjunta al procedimiento para determinar dicho punto sobre la gráfica. Otras de las ideas matemáticas incluidas en su exposición se explicitan tras haber considerado algunos casos particulares en los que se puede reconocer alguna regularidad, ésta se expresa a manera de conjetura para otro caso particular, se pone a prueba tal conjetura haciendo el mismo proceso a través de la cual surgió, y cuando se constata que funciona, se enuncia la idea de manera general. Es así como la profesora llega, por lo menos en parte, a comunicar la idea de que *el vértice de la parábola representada por la ecuación* $y - h = (x - k)^2$ *es* (k, h). El evento que se reporta a continuación ocurre inmediatamente después de haber realizado las gráficas de las ecuaciones $y = (x - 1)^2$ y $y = (x - 2)^2$ y en cada caso haber determinado a partir de la gráfica las coordenadas de los respectivos vértices.

P: (...) El último, a ver. La última parábola $y = (x - 3)^2$.

E: ¿Con los mismos números?

P: ¿Cuál será el vértice?

E: [Un estudiante dice algo que no quedó registrado]

P: ¿Cuál es?

E: Tres coma cero.

P: Tres coma cero, ¿cierto? (...) [Después de cinco minutos en que los estudiantes han estado trabajando] Bueno entonces el vértice ¿les dio?

E: Tres coma cero.

P: Tres coma cero. [La profesora dibuja la gráfica en el tablero, para lo cual marca, a ojo, tres divisiones sobre el eje X y ubica así el vértice, luego sin marcar ningún otro punto de la parábola traza una porción de cada una de las ramas] Entonces tenemos una parábola que abre hacia arriba con vértice tres coma cero. [Se escucha ruido generado por los alumnos] En general, podemos escribir esa misma ecuación [la profesora indica la ecuación $y = (x - 3)^2$] en la forma $y - h = (x - k)^2$. [Señala el segundo miembro de la igualdad y pregunta] Si escribo esta expresión acá, ¿cuál será el centro[sic.]?

E: [No se escucha bien]

P: ¿Cuál será el centro[sic.] de la parábola?

E: [Varios alumnos hablan al tiempo y no se entiende lo que dicen]

P: Coloquémosla así. [La profesora borra el primer miembro de la igualdad y escribe en su lugar y] Si escribo [habla mientras escribe] $y = (x-k)^2$, ¿cuál sería el vértice la parábola?

E: k.

P: ¿k sola? [La profesora escribe en el tablero (k,]

E: k coma cero.

P: [La profesora asiente con la cabeza al tiempo que repite la respuesta obtenida y completa lo que estaba escribiendo: $(k, 0)$] k coma cero. Por eso hemos encontrado en éste [señala la ecuación $y = (x-2)^2$ mientras habla] dos coma cero y en el anterior uno coma cero. Ahora voy a escribir esta expresión [la profesora escribe $y-h = (x-k)^2$ y primero dice y menos h igual a k menos k al cuadrado y luego se corrige]

E: ¿Nos dio negativo? [La pregunta anterior se escucha claramente pues en ese momento no hay ruido, sin embargo, no hay respuesta a ella]

P: Entonces, ¿cuál será el vértice de una parábola de ecuación así?

E: ¿k cuadrado?

P: [La profesora escribe en el tablero (k,]

E: Menos h.

P: k coma…

E: k coma

E: h

P: k coma h [la profesora termina de escribir (k, h)]. Cuando escribo la ecuación general [señala la ecuación mientras habla] y menos h igual a x menos k, al cuadrado, represento una parábola de vértice (k, h). Entonces, ¿qué pasaría si escribo y menos dos igual a x menos tres al cuadrado? [La profesora escribe en el tablero $y-2 = (x-3)^2$] Es una ecuación de una parábola. ¿Cuál es el vértice?

De modo ocasional, la exposición de una idea está ligada a una tarea enfocada intuitivamente en la que se utiliza un material concreto para que los estudiantes puedan ver un hecho matemático. Por ejemplo, atendiendo indicaciones de la profesora, cada alumno construye en cartulina un pedazo de cono y lo corta con un plano paralelo a una generatriz; y puesto que se afirma haber obtenido una parábola a partir de un tal corte, se enuncia la idea *la parábola es una cónica*.

También en sus exposiciones, cuando va a comenzar a tratar algo más del tema, la profesora presenta explícitamente su visión de cómo se ha desarrollado el tema en la clase o en las clases anteriores; eventualmente repasa detalles de los asuntos enfocados en las exposiciones previas.

(…) La clase pasada habíamos visto que la parábola era el gráfico de la ecuación ¿de qué? [escribiendo en el tablero, verbaliza la expresión $y = ax^2 + bx + c$] ¿cierto? e hicimos algunos gráficos. Hoy estamos viendo la parábola como un corte de un… cono [pausa]. (…) Bueno, entonces lo que vamos a hacer ahorita es recordar las gráficas que trazaron la vez pasada. La vez pasada trazamos la gráfica de $y = x^2$. ¿Recuerdan cómo quedó la gráfica de la parábola? ¿Hacia dónde? (…) Entonces ahora van a hacer el gráfico de… $y = (x-1)^2$, hacen el gráfico lo mismo que hicimos la vez pasada, tabulando, localizamos los puntos en el plano y graficamos y me dicen cuál es el vértice.

Vamos entonces a hacer un recuento de todo lo que hemos visto sobre las características de la parábola para completar las que nos hacen falta. (...) La primera vez vimos la parábola como una ecuación... ¿de qué forma? de forma y igual a ¿qué? (...) Entonces, el gráfico de $y = ax^2 + bx + c$ *ya sabemos que el gráfico es una... parábola. Vimos algunos ejemplos de unas parábolas que nos quedaron en sentido hacia arriba y otras, en sentido hacia abajo, (...) de acuerdo al signo ¿de quién? (...) específicamente es por el valor de* a*, o sea del coeficiente que está acompañando la variable que está al cuadrado. Entonces si* a *es mayor que cero, la parábola se abre hacia arriba, como nos dio en este ejemplo [señala la ecuación* $y = x^2$*]. (...) Luego, ¿qué más hicimos? Luego trabajamos con los... vértices, ¿recuerdan? Tenemos* $y - k = (x - h)^2$*, ¿cuál es el vértice? (...) Entonces, acá tenemos una parábola con vértice en* (h, k)*. Bueno, ayer trabajamos hasta tener ejemplos de este estilo, ¿cierto? Graficamos* $y = (x - 1)^2$*. Nos dimos cuenta de que es lo mismo que graficar* y *igual ¿a qué? (...) desarrollamos el cuadrado, entonces sabemos que el gráfico de esta parábola es exactamente el mismo gráfico de esta parábola [la profesora señala en el tablero las dos formas de la ecuación], sólo que aquí nos lo dan desarrollando el cuadrado, y aquí nos lo dan factorizado. ¿Cuál es el vértice acá? (...) uno coma cero. Y si yo les doy aquí la ecuación* y *igual a* x *al cuadrado menos dos* x *más uno (*$y = x^2 - 2x + 1$*) ¿ustedes me pueden dar el vértice de una vez, no es cierto? Tendríamos que pasarlo a la forma factorizada. Entonces ese es el trabajo que vamos a hacer hoy. Yo les voy a dar la ecuación en esta forma para que ustedes repasen factorización, podamos hacer el vértice y podamos hacer el gráfico. ¿Está claro?*

En sus exposiciones, es usual que la profesora explicite información a los estudiantes con respecto a lo que pretende que aprendan, para qué van a realizar algún ejercicio y qué van a tratar.

Entonces lo que vamos a aprender hoy es a hacer ese gráfico; a hacer el gráfico de las parábolas. (...) Vamos a hacer otro ejercicio, vamos a tomar $y = x^2 + 3$ *para poder seguir viendo las características de la parábola. (...) A ver, hacemos la gráfica de* $y = x^2 - 3$ *] para hacer la comparación [se refiere a comparar las gráficas correspondientes a cuatro ecuaciones].*

Entonces la próxima vez lo que vamos a hacer es el proceso contrario. Les voy a dar las expresiones en esta forma para que podamos hallar el vértice.

Así, pues, el desarrollo del contenido en cada clase se hace mediante la exposición de la profesora —actividad que toma una gran proporción del tiempo de la sesión de clase— y la realización de una o dos tareas —según que haya tiempo para hacerlas— por parte de los estudiantes, en las que deben desarrollar el procedimiento que fue objeto de la exposición. De esa manera, es la profesora quien va asignando durante el transcurso de la clase las tareas para los estudiantes y así, éstas siempre quedan concluidas en la sesión. La profesora casi siempre plantea las tareas a través de enunciados orales que apoya con el correspondiente registro escrito en el tablero; por su parte, los estudiantes deben desarrollar las tareas de manera escrita.

En algún momento de la clase (e.g., al final o en medio del desarrollo del tema) se lleva a cabo lo que los alumnos y la profesora llaman "la actividad". La profesora plantea un acertijo y los alumnos intentan solucionarlo en un trabajo individual; para ello disponen de un tiempo limitado (entre cinco y quince minutos según la dificultad para el grupo), tiempo después del cual si algún alumno lo solucionó, expone su solución y si no, la profesora lo hace. Se trata de problemas de distinta índole que no tienen relación con el tema matemático que se está desarrollando. A continuación se presentan los enunciados de los acertijos propuestos en cuatro de las clases observadas.

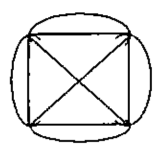
Con cuatro palillos armar tres. Con tres palillos armar cuatro. Con catorce palillos formar doce.

Un cuarto tiene cuatro ángulos. En cada ángulo está sentado un gato. Frente a cada gato hay sentados tres gatos. En cada rabo está sentado un gato. ¿Cuántos gatos hay en total en el cuarto?

Vamos a hacer un alfabeto numérico. Tengo BC por BC igual a ABC, donde esto es una multiplicación. Busquen los números A, B y C para que eso sea cierto.

$$\begin{array}{r} B\,C \\ \times\, B\,C \\ \hline A\,B\,C \end{array}$$

Van a trazar un cuadrado como el que se muestra en la figura y lo van a hacer sin levantar el lápiz, sin repetir línea.



Hacia el final de la clase —faltando unos pocos minutos para su terminación— la profesora indica para todo el curso que va a formular la tarea para la siguiente sesión y lo hace tanto de forma oral como por escrito en el tablero; los estudiantes, por su parte, la registran en sus cuadernos. La tarea incluye realizar por escrito el desarrollo de unos pocos ejercicios. En algunos casos, se trata de ejercicios relacionados con lo hecho en la clase; pueden ser ejercicios del mismo tipo que los trabajados en clase para cuya realización hay un procedimiento conocido por los alumnos, o en todo caso, ejercicios para cuya realización, la clase debió aportar elementos.

Graficar y hallar el vértice de $y = (x-5)^2$ *y* $y-2 = (x-5)^2$.

Escribir en qué situaciones de la vida real, de la naturaleza, del medio en que ustedes viven encuentran movimientos parabólicos, o sea dónde un objeto que se translada me va a describir esas curvas que vimos hoy. Segundo, dibujar objetos que tengan forma de parábola.

En otros casos, los ejercicios están relacionados con lo que se va a abordar en la siguiente sesión; bien puede tratarse de repasar un procedimiento ya estudiado que se requiere para el desarrollo del tema, o bien, "para que miren a ver qué hacen y qué les da".

Repasar cómo se completa trinomio cuadrado perfecto y hacer un ejemplo.

Graficar $x = y^2$, $x = y^2+1$, $x = -y^2+1$, $x = -y^2$.

Discusión

Para dar cuenta del esquema general de las clases observadas identificamos seis segmentos en los que se organiza su desarrollo. A continuación puntualizamos algunos rasgos característicos de cada uno de ellos.

Iniciación de la clase

Identificamos un segmento inicial corto que corresponde a la entrada de la profesora al salón, la llegada de los estudiantes y su organización en los puestos que tienen asignados, lo que incluye alistar los útiles que requieren y no necesariamente implica que todos estén en silencio. Como parte de este segmento no identificamos acciones habituales de la profesora que nos hayan resultado relevantes, excepto que ella extiende este segmento hasta que hayan llegado si no todos los estudiantes, la mayoría.

Revisión de la tarea asignada en la clase anterior

Reconocemos un segundo segmento que comienza en el momento en que la profesora indica a todo el grupo que van a revisar o corregir la tarea que tenían asignada para realizar fuera de la clase. Aunque encontramos regularidades que nos permiten aludir a la revisión de la tarea como una actividad habitual en la clase de esta profesora, no en todos los casos la revisión de la tarea implica las mismas acciones ni, tampoco, a nuestro parecer, responde a las mismas intenciones.

Por lo general, la revisión de la tarea consiste en que un estudiante que la haya hecho la copia en el tablero, la profesora hace comentarios y preguntas al grupo relativas a lo que está escrito, indicando así, directa o indirectamente que aprueba o no lo escrito, y los estudiantes del grupo utilizan el tiempo de ese segmento para completar o modificar lo que hayan hecho en sus cuadernos, teniendo como referencia lo escrito en el tablero; desde nuestra perspectiva, la intención de revisar las tareas de esa manera puede ser, por una parte, darle al estudiante que pasa al tablero información que le permita saber si lo que hizo es aceptado o no por la profesora y, por otra parte, darle información al curso —ya no a partir de lo que haga la profesora en el tablero para ilustrar la ejecución de los procedimientos abordados sino a partir de lo que haga un estudiante— con respecto a qué se acepta como solución correcta a un determinado tipo de ejercicio.

Advertimos que revisar la tarea en estas clases puede tener un matiz diferente con respecto a lo que acabamos de explicitar según que parte de la tarea o toda ella haya o no sido objeto de exposición de parte de la profesora en una clase anterior. Si la profesora considera relevante para la solución de un ejercicio un punto que no ha sido tratado por ella en su exposición y dicho punto emerge en la solución que está escribiendo el estudiante en el tablero, la profesora interviene con preguntas para destacar ante todo el grupo el punto en cuestión.

No obstante, por lo general, los comentarios de la profesora en la actividad de revisión de la tarea permanecen supeditados a lo que ha abordado y explicitado durante su exposición; de esa manera, aunque la producción de un estudiante en el tablero podría ser una oportunidad para llamar la atención, cuestionar y dar explicaciones sobre algún elemento relevante del tema que se estudia, esto no sucede así. Lo dicho se puede corroborar al considerar algunos comentarios y preguntas que habría sido pertinente formular frente a la producción de un alumno (véase página 147); con respecto a tal producción podría haberse destacado la forma de la parábola en lo que tiene que ver con su concavidad, también podría haberse centrado la atención en el uso de escalas diferentes en los dos ejes e incluso en lo que significa usar una escala, habría podido indagarse también cómo saben los estudiantes que un determinado punto es el vértice de la parábola y qué significa que un punto sea el vértice. El hecho que aquí hemos señalado nos impide ver que la revisión de la tarea pueda tener una intención de explorar la comprensión de los alumnos y/o incidir en ella.

Eventualmente, la revisión de la tarea puede consistir en que la profesora mira, uno a uno, los cuadernos del grupo enfocando su atención en si está hecha o no la tarea y escribe en el cuaderno según el caso la respectiva anotación; al revisar las tareas de esa forma, la intención quizás sea tener información, por medio directo, con respecto a qué alumnos no hicieron la tarea y tener la oportunidad de decirle por escrito a esos alumnos algo del estilo 'advertí que no hizo la tarea'; con esta forma de revisar la tarea, la profesora tiene algún registro escrito en el cuaderno de cada estudiante acerca de si cumplió o no con determinado trabajo asignado durante el proceso de aprendizaje; sin embargo, dado que de las cinco tareas cuya revisión observamos en este estudio, sólo una se revisó de esta forma y que coincidencialmente se trata de una tarea para cuyo desarrollo no había un procedimiento establecido que replicar, es probable que la asignación de la misma no tuviera un propósito de aprendizaje claro y así mismo tampoco su revisión tuviera una intención clara, diferente a lograr coherencia con el principio pedagógico de revisar de alguna forma toda tarea que se asigna a los estudiantes.

Desarrollo del contenido

Reconocemos un tercer segmento que se inicia cuando termina la revisión de la tarea e inmediatamente la profesora le comunica al curso qué van a realizar en la sesión de clase o, antes de ello, hace algún recuento de lo hecho en clases anteriores. Este segmento, que toma gran parte del tiempo de la sesión de clase, corresponde al desarrollo de asuntos específicos del tema matemático que se está tratando y se puede ver constituido por uno o dos ciclos de actividad en la que hay: (i) exposición del contenido por parte de la profesora; (ii) realización de un ejercicio que la profesora asigna y que los estudiantes desarrollan en forma individual pero hablando entre ellos y parándose a donde la profesora u otros compañeros están, mientras la profesora se pasea por entre los pupitres y ocasionalmente se detiene ante algún estudiante y habla con él; (iii) desarrollo del ejercicio o tarea en el tablero por parte de la profesora o de un estudiante y los comentarios de ella al respecto.

En su exposición, la profesora se enfoca principalmente en la utilización de algunos procedimientos matemáticos ligados con el tema que se está tratando en la clase; no obstante, también presenta ideas matemáticas relativas al objeto matemático de estudio, presenta con alguna frecuencia recuentos de lo que ha sucedido en la clase con respecto al desarrollo del tema (i.e., qué aspectos han tocado, cómo lo han hecho, qué ideas se han enunciado), tratando de conectarlo con el contenido que se va a tratar y eventualmente repasa partes de lo expuesto con anterioridad; así mismo, de manera ocasional, presenta indicaciones generales y breves con respecto a qué van a tratar, para qué y qué pretende que los alumnos aprendan. Desde nuestra perspectiva, consideramos valiosas las prácticas de hacer recuentos sobre lo que se ha tratado en clase y de dar indicaciones a los alumnos con respecto a lo que se pretende que ellos logren en términos de comprensión; tenemos la hipótesis de que ese tipo de información puede ayudar a los estudiantes a forjarse una visión más completa, integrada y articulada de lo trabajado, y a tener una visión —aunque sea vaga— de hacia dónde se dirige su proceso de aprendizaje de las matemáticas. Ahora bien, nos preguntamos la viabilidad de convertir los recuentos en una tarea que realice no sólo la profesora sino también los estudiantes, con la intención de que puedan expresar su visión de lo hecho y la puedan confrontar con la de sus compañeros.

Es un hecho que la profesora en su exposición abre espacios para la participación de los estudiantes mediante la formulación de preguntas que ellos deben responder y la asignación de tareas cuyo desarrollo se requiere para continuar la exposición; tal característica podría llevar a pensar que a través de tal actividad, estudiantes y profesora están"construyendo conocimiento" sobre el tema tratado; sin embargo, desde nuestra perspectiva, consideramos que no es muy probable que esto ocurra debido principalmente al tipo de preguntas y tareas en las que compromete la profesora a los estudiantes y el papel que juegan las respuestas dadas por los estudiantes en el discurso que se genera con ese tipo de exposición. Se trata de preguntas muy puntuales, que por lo general tienen una sola respuesta correcta y en todo caso, si tienen más de una respuesta aceptable, la profesora busca una determinada respuesta y hace lo posible por obtenerla sin prestar atención a las que se aparten de lo esperado por ella; responder correctamente a tales preguntas no necesariamente es indicador de una buena comprensión. Las tareas, fundamentalmente, se refieren a aplicar procedimientos establecidos previamente. Por otra parte, la participación de los alumnos no incluye prácticamente nunca la formulación de preguntas sobre el tema expuesto o la explicitación de explicaciones. Así, pues, atendiendo al contenido de la participación de los alumnos durante la exposición de la profesora, vemos que la intención de propiciar esta participación puede estar relacionada con buscar estrategias para mantener la atención en lo que se está exponiendo y/o hacerle seguimiento a dicha atención; podría también estar relacionada con la búsqueda de estrategias para ayudar al estudiante a que vaya memorizando parcial o totalmente la realización de los procedimientos que son el objeto central del aprendizaje en estas clases; de ninguna manera podemos ver que la intención esté relacionada con la construcción de significados personales o compartidos.

Planteamiento de un acertijo

Incluido en este gran segmento podemos ver un cuarto segmento en el que la actividad es la resolución de un acertijo que no tiene relación directa con el tema de la clase; se inicia con el anuncio que hace la profesora y continúa más o menos con la misma forma de trabajar, es decir, la profesora expone el enunciado del acertijo, los estudiantes lo trabajan individualmente, se paran, hablan, preguntan, y después de unos minutos la profesora verifica que ya terminaron, y alguien que haya solucionado el acertijo expone la solución ante todo el grupo de alumnos; la profesora comenta las soluciones que algunos estudiantes le muestran aprobándolas y repite la solución en el tablero. Y finalmente dice que ya se termina. La profesora vuelve a las tareas relativas al tema que estaba tratando. La clase sigue como antes hasta que se acaba el tiempo y la profesora así lo anuncia y esto termina el gran segmento. Desde nuestro punto de vista, la intención de este cuarto segmento puede estar relacionada con la motivación de los estudiantes hacia la clase y con hacer un descanso; esta apreciación concuerda, por lo menos parcialmente, con lo que señaló al respecto la profesora en una entrevista:

> *Como al comienzo del año no conocía a los estudiantes quería hacerles un ejercicio de descanso, de relajación cuando se están cansando con el cuento. Y también mirar cómo responden ellos a un ejercicio aunque sea sencillo en el que tienen que trabajar la parte lógica. Yo elegí acertijos sin ningún... fíjense que hay varios que no tienen relación con la clase. Era para ver cómo trataban de resolverlos.*

No nos resulta evidente que una intención sea "ver cómo trataban de resolverlos" dado que no identificamos en la clase acciones tendientes a explorar diferentes maneras como los alumnos podrían haberse aproximado a la solución; percibimos, en cambio, un interés de parte de la profesora y de los alumnos centrado en obtener la respuesta apropiada.

Asignación de las tareas para realizar fuera de la clase

Reconocemos un quinto segmento que comienza cuando la profesora anuncia que va a dictar el enunciado de la tarea para la siguiente sesión; este segmento toma los últimos minutos de la hora de clase y en él, además de enunciar la tarea, si se requiere la profesora hace algunas aclaraciones sobre ella. La mayoría de las tareas asignadas para realizar fuera de clase consisten principalmente en el desarrollo de procedimientos matemáticos que han sido establecidos previamente en la clase o estudiados con anterioridad; en ninguna de ellas identificamos que se les preguntara a los alumnos por algún aspecto conceptual, tampoco que se les pidiera describir o explicar el procedimiento empleado (e.g., para determinar las coordenadas del vértice a partir de la ecuación); mucho menos que se les pidiera establecer relaciones o conexiones entre conceptos o representaciones (e.g., relacionar las gráficas correspondientes a $y = (x-5)^2$ y a $y-2 = (x-5)^2$).

Atendiendo al contenido de las tareas para realizar fuera de clase y al hecho de que la asignación de las mismas, al parecer, es una actividad habitual, desde nuestra perspectiva la intención de tales tareas puede ser, por un lado, dar información a los estudiantes con respecto al tipo de tareas que se espera aprendan a realizar (información que también reciben durante la clase), y por otro lado, propiciar oportunidades para que los alumnos sin ayuda de la profesora usen los procedimientos enseñados durante la clase y desarrollen así la habilidad para resolver cierto tipo de ejercicios. En una entrevista con la profesora, ella señala el hecho de que los alumnos "no trabajan por fuera de clase" y, en consecuencia, "no estoy dejando mucha tarea (...) estoy tratando de que trabajen lo más que se pueda en clase y les dejo un ejercicio de tarea". Esta anotación de la profesora nos hace pensar que ella no tiene una intención clara y específica con la asignación de tareas para la casa pues en últimas no ve que el aprendizaje de los estudiantes pierda posibilidades al no realizar tareas extraclase.

Cabe mencionar que para dos de las tareas asignadas —dibujar objetos que tengan forma de parábola y hacer la gráfica de $x = y^2$, véanse los enunciados completos en la página 183), los estudiantes no contaban con un procedimiento preestablecido y por ello, realizar tales tareas se podría ver como resolver dos problemas, y se podría entrever una intención relacionada con la comprensión de algún aspecto específico del contenido matemático involucrado. Sin embargo, consideramos que tales ejercicios no fueron abordados como problemas ni por los estudiantes ni por la profesora, en el sentido de que hacer la solución o revisarla no implicó ningún examen, ningún análisis, ninguna reflexión para aproximarse a una solución razonable. En el primer caso, los estudiantes respondieron lo que buenamente se les ocurrió teniendo en mente que forma de parábola es sinónimo de contorno curvo y la profesora no hizo alusión alguna a las respuestas de los estudiantes. En el segundo caso, la solución del ejercicio la hizo un alumno en el tablero para todo el grupo sin explicar ni sustentar lo que se hacía ni tampoco relacionarlo con los procedimientos estudiados. Así, pues, vemos que efectivamente la intención de las tareas no incluye apoyar la comprensión de aspectos particulares del contenido matemático, y en ocasiones, algunas tareas pueden no tener una intencionalidad clara y/o pertinente dentro de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

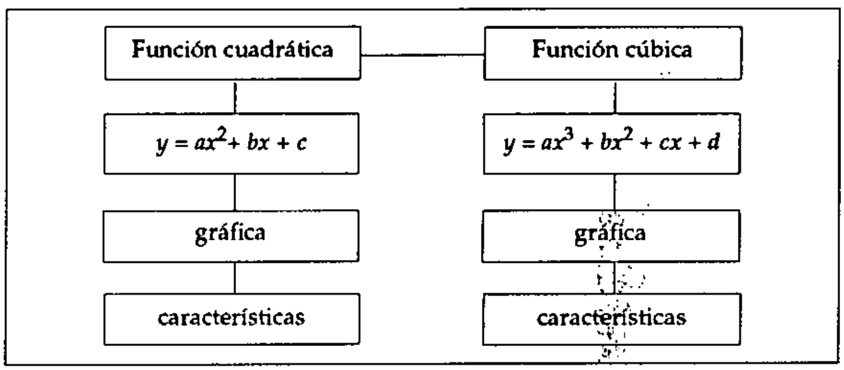
Terminación de la clase
Al final de la clase, reconocemos un sexto y último segmento que corresponde a la salida de la profesora del salón después de haberse despedido.

Visión panorámica del tema abordado

Descripción

Con la descripción que se presenta en esta sección pretendemos reconstruir en la medida de lo posible el recorrido por el cual la profesora condujo a los alumnos durante la secuencia de cinco clases en las que desarrolló el tema en cuestión. Esta descripción hace referencia, en primer lugar, a las tareas y actividades que la profesora les planteó a sus estudiantes; en segundo lugar, establece el conocimiento matemático implicado en la propuesta curricular implementada.

Al comenzar el desarrollo del tema, la profesora presenta un esquema en el que especifica lo que van a considerar; dicho esquema muestra que algo similar se hará para la función cúbica.



Secuencia de actividades
En términos generales, el desarrollo del tema matemático se hizo mediante una secuencia de nueve actividades diferentes que precisamos a continuación:

1) Se hacen dos dibujos para representar dos eventos: la trayectoria de una piedra al ser lanzada y la de un chorro de agua que sale por una manguera para rociar unas matas; sobre los dibujos se indica una cierta forma y se establece que la curva descrita por esas dos trayectorias se denomina parábola: "Este camino que recorre tanto la piedra como el chorro de agua recibe el nombre de parábola".

2) Luego se define la parábola como "el gráfico que representa a $y = ax^2 + bx + c$, (a, b, c son valores fijos)". Inmediatamente después se consideran tres casos de expresiones de la forma indicada para los cuales se identifican los valores de los coeficientes a, b y c. En los tres casos, los coeficientes son números enteros no negativos; en uno de ellos, el valor de a es 1 y el de los otros dos coeficientes es 0; en otro de los casos, sólo el valor de c es 0; y en el otro caso, los valores de los tres coeficientes son diferentes de 0 y de 1. Después de ejemplificar la expresión, se procede a hacer la gráfica cartesiana de cuatro ecuaciones[2], haciendo primero una tabla de valores, ubicando los correspondientes puntos en el plano y uniendo con "una curva suave" tales puntos. Las expresiones representadas gráficamente son: $y = x^2$, $y = -x^2$, $y = x^2 + 3$, $y = x^2 - 3$; en los cuatro casos se asignan los mismos valo-

res para x: -2, -1, 0, 1 y 2; para hacer las gráficas se marcan, a ojo, divisiones sobre los ejes y una vez ubicados los cinco puntos se unen con una curva; en los cuatro casos, la gráfica obtenida "termina" en los puntos de abscisa -2 y 2. Una vez se tienen las cuatro gráficas, se pide compararlas teniendo como criterio hacia dónde abren y se asocia esta característica de las gráficas con el signo del coeficiente de x^2.

3) Se pide a los estudiantes dibujar "objetos que tengan forma de parábola". Los cuadernos presentan una gran diversidad de casos, la mayoría de ellos tienen forma redonda o en todo caso, se trata de formas curvas, algunas abiertas y otras cerradas (e.g., arco iris, montaña, luna, tienda de campaña, llama de una vela, vaso, giro de un carro).

4) Cada estudiante debe construir un cono[3], hacerle un corte con un plano paralelo a una generatriz y finalmente observar qué resulta. La construcción del cono con un pedazo de cartulina se hace sin recurrir a ninguna técnica especial (envuelven sobre sí misma la cartulina y recortan el material sobrante hasta llegar a obtener un objeto de la apariencia pretendida), el corte se hace sobre el cono aplanado y para observar qué se obtiene, se intenta desaplanarlo para volverlo a la forma original, sin embargo, el aspecto del corte obtenido es más bien el de un ángulo lineal. A la pregunta "¿qué curva nos quedó?" Algunos alumnos responden "una parábola". A partir de esa observación se enuncia que "la parábola se obtiene al cortar un cono con un plano paralelo a una generatriz; por eso es que se dice que la parábola es una cónica".

5) Se hace un esbozo de las gráficas obtenidas en la clase anterior para los cuatro casos tratados y se describen en términos de (i) hacia dónde abren y (ii) a partir de qué punto. Con base en la observación hecha, los puntos "de donde parten" las gráficas se describen como el mínimo o el máximo de las parábolas y se establece entonces que en cada parábola hay un punto mínimo o un máximo. Se informa que ese punto de la parábola se denomina vértice y se define el término diciendo que "el vértice va a ser el punto máximo o el punto mínimo de la parábola". Luego, para cada una de las gráficas —en las que se ha resaltado el vértice— se identifican las coordenadas del vértice.

6) Para cada una de las ecuaciones $y = (x-1)^2$, $y = (x-2)^2$ y $y = (x-3)^2$ se hace una representación gráfica en el plano cartesiano —procediendo de manera similar a como se hace para obtener las primeras gráficas: se elabora una tabla de valores, se ubican los puntos en el plano y se unen— y se determina cuál es el vértice de las respectivas parábolas. Para el tercer caso tratado, se responde a la pregunta cuál es el vértice antes de hacer la gráfica. Durante el desarrollo de los tres ejercicios, se hacen explícitas algunas alusiones con respecto a los valores de x: "se puede dar muchísimos valores para trazar una curva, pero para representarla basta con algunos valores", "se pueden dar infinitos valores, y si nosotros trazáramos todos los puntos, la parábola se prolonga, se prolonga [indefinidamente]. Entonces sólo estamos tomando una porción de esta parábola".

2. En nuestra opinión no se representaron gráficamente las ecuaciones sino sus conjuntos solución; sin embargo, expresamos el hecho de esa manera porque la profesora sí se refiere al gráfico de una ecuación en afirmaciones como por ejemplo "ecuaciones cuyo gráfico va a ser una parábola", "Si yo escribo la ecuación [escribe en el tablero] $y = x^2 - 2x + 1$, ¿cuál será el gráfico de esa parábola?".
3. La profesora informa a los alumnos que en realidad no es un cono completo lo que van a construir.

Se establecen las coordenadas del vértice de las parábolas cuyas respectivas ecuaciones son $y = (x-k)^2$, $y-h = (x-k)^2$, $y = (x+k)^2$ y $y+h = (x+k)^2$. Para ello se hace un ir y venir de lo particular a lo general y viceversa que pasa por:

(i) establecer, a partir de una gráfica, las coordenadas del vértice para la parábola de ecuación $y = (x-3)^2$, ver que tal ecuación se puede escribir en términos generales como $y = (x-k)^2$ y que entonces su vértice ha de ser $(k, 0)$, constatar que ese resultado también vale para los casos particulares $y = (x-1)^2$ y $y = (x-2)^2$;

(ii) informar que para una ecuación de la forma $y-h = (x-k)^2$ el vértice de la correspondiente parábola es (k, h) y usar tal información para establecer el vértice en el caso de $y-2 = (x-3)^2$;

(iii) establecer para $y = (x+3)^2$, $y = (x+5)^2$, $y = (x+k)^2$ y $y+h = (x+k)^2$ las coordenadas del vértice de las respectivas parábolas.

Posteriormente se hacen las gráficas de las ecuaciones $y = (x-5)^2$ y $y-2 = (x-5)^2$ y se determinan las coordenadas del vértice de las respectivas parábolas.

7) Se recuerda que el desarrollo de la expresión $(x-1)^2$ es x^2-2x+1; en consecuencia, se establece que la gráfica de $y = (x-1)^2$ es la misma gráfica de $y = x^2-2x+1$ y así, para hacer la gráfica de expresiones de la forma $y = x^2+bx+c$ donde el trinomio es cuadrado perfecto, se factoriza para llegar a una expresión de la forma $y = (x-h)^2$ y a partir de ese punto ya se sabe cómo proceder. Las ecuaciones consideradas son: $y = x^2+4x+4$, $y = x^2+6x+9$, $y = x^2+2x+1$.

8) Se realizan las gráficas de las ecuaciones $x = y^2$, $x = y^2+1$, $x = y^2+3$, $x = y^2-3$ y $x = -y2+1$, y se caracterizan estableciendo las coordenadas del vértice y hacia dónde abre la parábola. Para cada una de las dos primeras ecuaciones se hace la tabla dando a la variable y los valores -2, -1, 0, 1 y 2, luego se hace la gráfica, se establecen las coordenadas del vértice y hacia dónde abre. Cuando se requiere, la ecuación particular con la que se trabaja se expresa en la forma $x-h = y^2$. Para las otras ecuaciones, antes de hacer la gráfica, e incluso la tabla, se pregunta por el vértice, dato que se espera obtener examinando la ecuación teniéndola escrita en la forma $x-h = (y-k)^2$.

9) Dado un caso particular de la ecuación de la forma $y = x^2+bx+c$ (donde el trinomio no es cuadrado perfecto), haciendo la factorización requerida y la transformación correspondiente para expresar la ecuación en la forma $y-k = (x-h)^2$, se determina el vértice y luego se hace la gráfica de la respectiva parábola. Se consideran las siguientes ecuaciones: $y = x^2+4x-5$, $y = x^2-6x+8$. En el desarrollo del primer ejercicio se informa sobre un

hecho que debe ocurrir con respecto al vértice: "si es el vértice, se reemplazaba x por h y y por k en la ecuación y se obtenían los ceros"[4].

Elementos del conocimiento conceptual implicado

A continuación incluimos una descripción que se enfoca en el contenido matemático implicado en el desarrollo curricular que observamos. En la exposición de la profesora al desarrollar el tema, es posible reconocer la presencia de hechos y procedimientos matemáticos especializados. Sin pretender ser exhaustivos pero tratando de no dejar de lado elementos relevantes para el tema tratado, a continuación hemos identificado y discriminado términos, notaciones, convenciones y enunciados, por un lado, y por el otro, técnicas y procedimientos. Además incluimos información relativa a las razones dadas de manera explícita para explicar, justificar o sustentar los hechos y procedimientos relativos al tema enseñado.

Aunque con diferente frecuencia, las expresiones o términos especializados que utiliza la profesora en su exposición son: función cuadrática, gráfica, curva, trayectoria de un objeto en movimiento, parábola, variable, ecuación de la forma $y = ax^2 + bx + c$, tabla de valores, plano cartesiano, escala, curva suave, signo del coeficiente de x^2, cono, generatriz, plano paralelo a una generatriz, vértice de la parábola, ecuación de la forma $y - k = (x - h)^2$, ecuación de la forma $x - h = (y - k)^2$, forma usual de la ecuación, trinomio cuadrado perfecto, factorización, completación de cuadrado perfecto. De estos términos, los más empleados son: gráfica, parábola y vértice de la parábola.

En el desarrollo del tema hay referencia tanto a casos particulares como a la situación general que los engloba; análogamente, las notaciones empleadas algunas veces hablan de casos particulares y otras, de una situación general —para la cual no se explicita el conjunto de referencia en el que se está considerando. Específicamente se utilizaron las siguientes expresiones en forma general: $y = ax^2 + bx + c$, $y = (x - h)^2$, $y = (x + h)^2$, $y - k = (x - h)^2$, $y + k = (x + h)^2$, $x - h = (y - k)^2$. Otras dos notaciones usadas durante el desarrollo del tema fueron las relativas a pareja ordenada y al formato para organizar los datos en una tabla de valores.

Sin que la ubicación de puntos en el plano cartesiano, al hacer las gráficas, haya sido una acción que siguiera de manera estricta unas pautas (e.g., no se determinó una unidad de medida con la cual trabajar sobre cada eje), en todo caso, se respetaron unas convenciones (e.g., en la recta numérica los números positivos se localizan a la derecha o arriba del punto que representa al número cero; en la ubicación de puntos en el plano, el primer número de la pareja se representa sobre el eje X).

Aunque no hemos hecho cita textual en todos los casos, a continuación se presentan los resultados o enunciados generales que hicieron parte del desarrollo del tema:

- ▲ La curva descrita por la trayectoria de algunos objetos en movimiento es una parábola.
- ▲ La parábola es el gráfico que nos representa a $y = ax^2 + bx + c$ donde a, b, c son valores fijos.

4. Probablemente, la mención tiene que ver con el hecho de que como el vértice de la parábola es un punto de la misma, sus coordenadas satisfacen la ecuación y en consecuencia al reemplazar las variables x y y por las coordenadas del vértice se obtiene $0 = 0$.

- El gráfico de $y = ax^2 + bx + c$ se obtiene al unir con una "curva suave" los puntos asociados a las parejas de números que satisfacen la ecuación y que se han obtenido por tabulación.
- Una característica de la parábola alude hacia dónde abre ella.
- Una parábola abre hacia arriba o hacia abajo según si el coeficiente de x^2 es positivo o negativo.
- En la vida real existen movimientos parabólicos y objetos con forma de parábola.
- La parábola es una cónica.
- Otra característica de la parábola alude al punto de dónde ella parte.
- En cada parábola de ecuación $y = ax^2 + bx + c$ hay un punto mínimo o máximo.
- El vértice es el punto máximo o el punto mínimo de la parábola.
- La gráfica de ecuaciones de la forma $y \pm k = (x \pm h)^2$ es una parábola.
- Las coordenadas del vértice de las parábolas de ecuaciones $y - h = (x - k)^2$ y $y + h = (x + k)^2$ se pueden determinar a partir de las ecuaciones y son (k, h) y $(-k, -h)$ respectivamente.
- Si las dos variables de la ecuación estuvieran al cuadrado, la gráfica no sería la de una parábola.
- La gráfica de una ecuación de la forma $x - h = (y - k)^2$ es una parábola que abre a partir del punto (h, k).

Elementos del conocimiento conceptual implicado
A continuación precisamos los procedimientos matemáticos que el desarrollo curricular implementado pone en juego ya sea porque los requiere o los expone. Cabe aclarar que en pocos casos se dio la actividad de establecer verbalmente los pasos de cada procedimiento.

Hacer el gráfico de las ecuaciones dadas. A partir de la ecuación dada obtener las coordenadas de unos pocos puntos, ubicarlos en el plano cartesiano y unirlos con una "curva suave", instrucción que ilustró la profesora cuando hizo en el tablero la gráfica de $y = x^2$.

Hacer la tabla de valores. Dar valores a una de las variables y obtener los correspondientes valores de la otra variable; para el caso de ecuaciones de la forma $y - k = (x - h)^2$, se sugiere dar siempre los valores -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 a la variable x; para el caso de ecuaciones de la forma $x - h = (y - k)^2$ se recomienda escribir la ecuación dada en la forma $x = (y - k)^2 + h$, dar valores a la variable y y aunque no se explicita una sugerencia con respecto a los valores que se asignen a la variable y, los valores asignados en los casos tratados fueron 0, -1, 1, -2, 2.

Calcular el valor de una variable para un valor dado de la otra variable. Interpretar la expresión en términos de operaciones que se deben realizar en un cierto orden y hacer operaciones aritméticas con enteros; es un procedimiento que se requiere durante el desarrollo del tema, que ocupa gran parte del esfuerzo de la profesora y del tiempo de las clases.

Identificar en la gráfica el vértice de la parábola. De los puntos ubicados en el plano cartesiano elegir el que está más arriba o más abajo que todos los demás; dicho de otro modo hay que advertir "de dónde parte la parábola". Para el caso de las parábolas que abren hacia la derecha o hacia la izquierda la identificación del vértice sobre la gráfica se hace advirtiendo "de dónde parte la parábola".

Reconocer para casos particulares de h, que la expresión $x^2 - 2xh + h^2$ es equivalente a la expresión $(x-h)^2$. Esta destreza se requiere para justificar que lo hecho para la parábola de ecuación $y = (x-h)^2$ es válido para las expresiones de la forma $y = x^2 - 2xh + h^2$ y, en consecuencia, hacer la gráfica y determinar el vértice de la parábola de ecuación $y = x^2 - 2xh + h^2$ pasa por la correspondiente transformación sintáctica de la ecuación.

Establecer las coordenadas del vértice de la parábola a partir de la ecuación escrita en "la forma usual" (hace referencia a $y - k = (x-h)^2$). Lo importante es nombrar primero al valor que acompaña a *x* y luego al valor que acompaña al valor de *y*; además, cambiar el valor al signo que aparezca después de la variable.

Reconocer la expresión general que hay detrás de una expresión particular y viceversa. Destrezas requeridas durante el desarrollo del tema, para las cuales la profesora no hace un trabajo especial.

Factorizar un trinomio cuadrado perfecto. Procedimiento que se requiere durante el desarrollo del tema y al que se le dedica tiempo para repasarlo con algún detenimiento.

Completar trinomio cuadrado perfecto. Procedimiento que se requiere durante el desarrollo del tema y al que se le dedica tiempo para repasarlo con algún detenimiento.

Determinar las coordenadas del vértice de una parábola a partir de su ecuación que tiene la forma $x = y^2 + k$. Se transforma la ecuación en $x - k = y^2$ y la abscisa del vértice es el número que acompaña a la variable con el signo cambiado; "... pasamos este 1 al otro lado y nos queda $x - 1 = y^2$, entonces el vértice será 1 coma (escribimos lo contrario), uno coma cero".

Después de haber identificado los hechos y procedimientos que configuraron el desarrollo del tema queremos precisar en alguna medida las razones dadas de manera explícita para explicar, justificar o sustentar algunos hechos o procedimientos centrales.

1) Se particulariza el enunciado "La parábola es el gráfico que nos representa a $y = ax^2 + bx + c$ donde *a, b, c* son valores fijos" diciendo que $y = 2x^2 + 5x + 3$, $y = 3x^2 + 6x$, y $y = x^2$ "son ejemplos de ecuaciones cuyo gráfico va a ser una parábola", después de haber hecho para cada ecuación la identificación de los respectivos valores de *a, b* y *c*.

2) A partir de las gráficas hechas para $y = x^2$, $y = x^2 + 3$, $y = x^2 - 3$ se evidencia que las respectivas parábolas abren hacia arriba mientras que la gráfica de $y = -x^2$ abre hacia abajo; este último hecho se vincula al signo menos de la ecuación "Entonces este menos hace que los valores nos queden negativos ¿cierto?", luego de lo cual la profesora establece que "(...) abren hacia arriba, porque el coeficiente de x^2 es positivo; mientras que $y = -x^2$ abre hacia abajo porque el coeficiente de $-x^2$ es negativo. Entonces tiene que ver con este coeficiente." De ahí en adelante la pregunta *¿hacia dónde se dirige la parábola?* está presente y se responde para todos los casos tratados, sin requerimiento alguno de explicaciones o justificaciones al respecto.

3) Con respecto a la asignación de valores a la variable x para hacer la tabla a partir de la cual se hace la gráfica, aunque en algunas ocasiones la profesora afirma que se puede dar cualquier valor, ella insiste en dar siempre los mismos valores y además en dar pocos valores. Las razones para justificar tal insistencia tienen que ver con la rapidez para tener la respuesta y el hecho de tener gráficas unificadas.

> *No es que esos sean los únicos valores que vamos a tomar, sino que como son valores más pequeños hacen que el ejercicio sea más rápido. Podemos dar cualquier valor positivo o negativo para x, sólo que voy a dar esos mismos para que los gráficos nos queden unificados.*
>
> *Vamos a trazar ahora el siguiente, pero háganlo con menos valores para que no nos demoremos tanto [escribe en el tablero $y = (x-2)^2$].*

Para responder la pregunta de un estudiante con relación a la cantidad de valores asignados para realizar la tabla, la profesora presenta las siguientes consideraciones:

> *¿Por qué yo di más valores? A ver. Uno puede dar muchísimos valores para trazar una curva, pero para representarla basta con algunos valores. La vez pasada sólo dimos cuatro [sic] valores. Sólo grafiquemos desde menos dos para que nos quede un poco más rápido. (...) Fíjense que podíamos dar infinitos valores, que si nosotros trazáramos todos los puntos, la parábola se prolonga, se prolonga, y va a ser ¿cómo? ¿cómo queda la parábola? [la profesora hace un movimiento con el brazo para indicar que una rama de la parábola trazada podría continuar] (...) Entonces sólo estamos tomando una porción de esta parábola.*

Para hacer la gráfica de $y = (x+3)^2$ la profesora dice que van a tomar "la escala desde menos dos hasta dos, no más"; el estudiante que está realizando el ejercicio en el tablero hace la correspondiente tabla y se dispone a hacer la gráfica con base en tales valores cuando un alumno desde su puesto le pregunta a la profesora "profe, ¿cuál es el vértice". La profesora revisa lo escrito en el tablero, se da cuenta de que la pregunta del alumno apunta al hecho de que en la tabla elaborada no aparece el punto correspondiente al vértice, y en respuesta a la pregunta arregla la situación sin dar explicación al respecto.

P: ¿Qué pasó?

E: [No se escucha claramente lo que dice una estudiante desde su puesto]

P: ¿El vértice? Miremos a ver. [La profesora se detiene un momento a mirar el tablero; después de ello sonríe al alumno que le hizo la pregunta] ¡Ah!, nos falta graficar... de todas maneras, tenemos que dar más valores para poderlo encontrar. [La profesora señala la tabla, a la derecha del valor dos para x, e indica que debe incluirse el menos tres]

E: [Otro alumno] Pero, ¿por qué menos tres?

E: [Murmullos de otros estudiantes]

P: [La profesora toma el marcador y escribe en el tablero a la vez que va preguntando por el correspondiente valor de y para cuando x es menos tres, luego hace lo mismo habiendo asignado el valor tres para x; luego le devuelve el marcador al alumno para que haga la gráfica]

4) Para llegar a establecer que la parábola de ecuación $y-h = (x-k)^2$ tiene vértice en (k, h) se recorre el siguiente camino: se hacen tablas de valores y las correspondientes gráficas de $y = (x-1)^2$ y $y = (x-2)^2$; observando las gráficas se establece que sus respectivos vértices son $(1, 0)$ y $(2, 0)$. Para $y = (x-3)^2$ se establece la conjetura de que su vértice es $(3, 0)$ y ésta se verifica a partir de la realización de la gráfica. Teniendo en cuenta esos tres casos, se establece el enunciado general "la parábola de ecuación $y = (x-k)^2$ tiene vértice en $(k, 0)$". Luego, para la ecuación $y-h = (x-k)^2$ se afirma que su vértice está dado por (k, h), "Cuando escribo la ecuación general [señala la ecuación mientras habla] y menos h igual a x menos k, al cuadrado, represento una parábola de vértice (k, h)".

5) Para llegar a establecer que el vértice de la parábola de ecuación $y = (x+k)^2$ es $(-k, 0)$, la profesora pregunta cuál puede ser el vértice de la parábola $y = (x+3)^2$; se conjetura que el vértices es $(3, 0)$, se hace la gráfica después de tener una tabla de valores y se observa que el vértice no es $(3, 0)$ sino $(-3, 0)$. Después pregunta por el vértice de la parábola $y = (x+5)^2$ y luego sí escribe el enunciado general.

6) Puesto que $(x-1)^2 = x^2-2x+1$, las gráficas cartesianas de $y = (x-1)^2$ y $y = x^2-2x+1$ son iguales. Para determinar el vértice de la parábola representada por la expresión $y = x^2-2x+1$ es necesario transformar (factorizar) dicha expresión en $y = (x-1)^2$ y a partir de ese punto ya se sabe cómo determinar el vértice de la parábola.

7) Para dar una explicación distinta a la ya dada con respecto a la forma de obtener las coordenadas del vértice a partir de la ecuación, dado que algunos estudiantes se equivocan al dar el signo de la abscisa del vértice, la profesora menciona la posibilidad de reescribir la ecuación $y = (x+2)^2$ como $y = (x-(-2))^2$ y dice que el vértice es $(-2, 0)$.

> *Ya vimos que [la profesora señala en el tablero las ecuaciones escritas, a la vez que las lee]* $y = x^2+4x+4$ *es lo mismo que* $y = (x+2)^2$. *De acuerdo a la secuencia que hemos hecho, reconocemos el vértice como menos dos coma cero. ¿Por qué? Porque esto lo podemos escribir como x menos menos dos al cuadrado; menos por menos nos da más; entonces, el vértice da menos dos coma cero.*

8) Reconociendo que las ecuaciones $x = y^2$, $x = y^2+1$, $x = y^2+3$ y $x = y^2-3$ se diferencian de las trabajadas en la primera sesión, en cuál es la variable que está al cuadrado,

se hacen tablas asignando valores a la variable y, y se hacen las respectivas gráficas para lo cual se asume sin explicación alguna que también se tratan de parábolas. Para determinar el vértice de la parábola, la profesora informa sobre la conveniencia de emplear la ecuación expresada "en la forma usual", $(x-h) = (y-k)^2$:

> *(...) porque fíjense la ecuación [se refiere a $x = y^2 + 1$] cómo queda en la forma usual: pasamos este uno al otro lado [hace el ademán con el dedo mientras va escribiendo la ecuación resultante y lee] y nos queda x menos uno igual a y cuadrado, entonces el vértice será uno coma [señalando el signo menos] —escribimos lo contrario— uno coma cero.*

9) Con respecto a la asignación de valores para tabular en los casos de las ecuaciones de la forma $x-h = (y-k)^2$, la profesora expone las siguientes consideraciones:

> *Aquí es más fácil darle los valores a y que darle los valores a x, (...) es el término que está al cuadrado, entonces se le dan los valores a y (...) es más cómodo darle los valores a la variable que está al cuadrado para que no tengamos que sacar raíz cuadrada.*

Discusión

Considerando las nueve actividades descritas en el apartado anterior, a través de las cuales se llevó a cabo el desarrollo curricular, advertimos que en cada una de ellas se aludió de manera más o menos explícita a una idea matemática. Así, nuestro resumen enfocado en tales ideas es el siguiente: En el mundo que nos rodea existen movimientos que dan lugar a trayectorias cuyas curvas se denominan parábolas. La parábola es el gráfico que representa a $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c son valores fijos). En el mundo que nos rodea hay objetos que tienen forma de parábola. La parábola es una cónica. El vértice es el punto mínimo o máximo de las parábolas que abren hacia arriba o hacia abajo. Las coordenadas del vértice de una parábola de ecuación $y-h = (x-k)^2$ son (k, h) y se pueden establecer a partir de la ecuación misma. Las coordenadas del vértice de una parábola de ecuación $y = x \ + bx + c$ (cuando el trinomio es cuadrado perfecto) se pueden obtener transformando la ecuación dada a la forma $y = (x-h)^2$. Si en las ecuaciones $y = x^2 + k$ y $y-k = (x-h)^2$ y es la variable que se eleva al cuadrado y la x, no, la gráfica cartesiana es una parábola que abre hacia la derecha o hacia la izquierda y las coordenadas de su vértice se pueden obtener a partir de la ecuación misma. Las coordenadas del vértice de una parábola de ecuación $y = x^2 + bx + c$ (cuando el trinomio no es cuadrado perfecto) se pueden obtener transformando la ecuación dada a la forma $y-k = (x-h)2$.

Sin duda, reconocemos que el desarrollo curricular aborda un contenido matemático específico del que se presentan varias ideas matemáticas y lo hace atendiendo a una cierta organización; sin embargo, consideramos que sería posible precisar más y sustentar mejor la mayoría de tales ideas, de manera que el estudio del tema en cuestión, aunque elemental, tratara desde el punto de vista didáctico, las propiedades y relaciones del objeto de estudio con el status que les es propio: son cuestiones necesarias, es decir, no podrían ser de otra manera y en consecuencia, por lo menos, algunos alumnos podrían hacerse conscientes de ellas mediante tareas que les proponga el profesor para el efecto (Hewitt, 2002c).

El término 'parábola' surge la primera vez como el nombre de una curva que la profesora señala con el movimiento de su brazo sobre un par de dibujos —realizados por los estudiantes a petición de la profesora— que representan respectivamente el movimiento de una piedra lanzada y el del agua que sale por una manguera. No hay alusión verbal alguna a cómo es esa curva, sólo se da una idea intuitiva de su forma. Así que para comenzar, el término 'parábola' queda asociado de manera vaga a una forma curva.

Luego, sin que los estudiantes hayan estudiado previamente algo en relación con la gráfica de la ecuación $y = ax^2 + bx + c$, la profesora define el término 'parábola' como dicha gráfica, lo cual en ese momento no pasa de ser una definición nominal que comparada con la dada inicialmente tiene incluso menos posibilidad de haber generado alguna imagen conceptual en los estudiantes que la escucharon.

Sin embargo, en ese punto del desarrollo curricular se inicia un proceso que tiene como propósito "aprender a hacer ese gráfico; a hacer el gráfico de las parábolas". La primera tarea propuesta para ese propósito es hacer la gráfica de $y = x^2$; su realización se enfoca de manera principal en hacer una tabla de valores, ubicar los correspondientes puntos en el plano cartesiano y luego, trazar la curva. Para completar la tabla de valores, el trabajo se centra en el cálculo de los correspondientes valores de y para los valores asignados a x por la profesora; no hay, desde las matemáticas, discusión alguna con los estudiantes —y ni siquiera una mención— en torno a puntos como, por ejemplo, los valores que puede tomar la variable x (el dominio de la relación son los reales), la cantidad de valores para asignar a x y los valores mismos que puede ser conveniente tomar para obtener un buen representante de la gráfica, las características de la correspondencia en términos de la cantidad de valores de una variable asociados a un determinado valor de la otra variable (la relación es funcional pero no es inyectiva), los valores que puede tomar la variable y (el recorrido de la función son los reales no negativos); en contraposición, la profesora dispone asignar a x, los valores enteros desde -2 hasta 2, esgrimiendo como razón algo que no tiene que ver con las matemáticas "Yo les voy a dar algunos valores para que a todos nos quede igual el ejercicio". Para comenzar a hacer la gráfica, la profesora traza los ejes de coordenadas y sobre ellos, a ojo, marca unas divisiones, luego menciona sin entrar en explicación alguna que el punto (-2, 4) es un punto de la gráfica y luego el trabajo se centra en la localización de los puntos determinados por los valores de la tabla; no hay discusión ni explicación alguna al respecto de esta tarea, a pesar de que la intervención de unos estudiantes para señalar que "el primer punto [ubicado por la profesora] le quedó mal" daba pie para hacer algunas consideraciones relativas a la escala y al parecer, la profesora así lo reconoce dada la respuesta que da a la anotación de los alumnos, "No; está bien, pero lo que... lo que pasa es que no está bien a escala esto, ¿no? Toca correr esto más." Una vez ubicados los cinco puntos en el plano, para obtener la gráfica, la profesora indica que deben unir tales puntos con una curva suave; al respecto no hay ninguna aclaración verbal de lo que esto significa y el único elemento que pudo aportar una noción intuitiva al respecto es el trazo que la profesora hace en el tablero. Consideramos que se puede precisar en alguna medida lo que significa unir los puntos ubicados con una curva suave al indagar si es lícito unir dos puntos consecutivos con un segmento de recta, e imaginar la respuesta a esta pregunta para cada dos puntos consecutivos de la gráfica.

Con el mismo propósito de que los alumnos aprendan a hacer el gráfico de las parábolas y con la intención particular de que vayan "tomando ideas de qué características se nos van a presentar en las parábolas", la profesora plantea después de la primera tarea, la realización de las gráficas de tres ecuaciones más. Al realizar una de tales gráficas, la profesora —que ha seguido insistiendo en que los valores que se asignen a x sean los enteros desde -2 hasta 2— enuncia, sin explicación o discusión alguna, que se puede asignar a x cualquier valor positivo o negativo, y presenta una justificación de por qué y para qué se están tomando unos valores y siempre los mismos, justificación que no alude a las matemáticas sino a la rapidez para hacer el ejercicio y al hecho de tener gráficos unificados (véase página

194). Con excepción de la anterior, no se presenta durante esas realizaciones alguna explicación o justificación adicional a lo dicho para la primera gráfica. Por otra parte, después de tener las cuatro gráficas, la profesora pide que las comparen y es ella quien enuncia que tres de tales gráficas abren hacia arriba y la otra abre hacia abajo y establece que lo observado tiene que ver con el signo del coeficiente de x^2 (véase página 182): también es la profesora quien sobre las gráficas realizadas destaca el hecho de que las parábolas "parten de un punto", enuncia que en cada parábola hay un punto mínimo o máximo y lo denomina vértice de la parábola.

Con base en lo expuesto en los párrafos anteriores, resumimos el contenido matemático que el desarrollo curricular ha puesto en juego hasta este punto, así: La parábola, que es la gráfica que representa a $y = ax^2 + bx + c$, tiene una forma curva, abre hacia arriba o hacia abajo según si el coeficiente de x^2 es positivo o negativo respectivamente y tiene un punto mínimo o máximo. Ello es así porque contando con unos valores calculados de acuerdo con la relación establecida por una ecuación dada, al hacer la gráfica, —tal como lo indica la profesora— con una curva suave, se ve lo enunciado, y se ha visto en cuatro casos particulares de la ecuación.

Puesto que no identificamos en el desarrollo curricular observado ninguna otra actividad que haya tenido la intención expresa de explicar o justificar algo adicional sobre la forma de la gráfica en cuestión, consideramos que el contenido matemático que se tocó al respecto es insuficiente para aportar una imagen conceptual cercana a la que podría ser deseable que lograran los alumnos en una primera aproximación al tema. Vemos esta apreciación respaldada en las producciones de los alumnos cuando la profesora les solicita que dibujen objetos que tienen forma de parábola y ellos presentan dibujos alusivos a objetos de diversas formas para las cuales lo común es la forma curva. Teniendo como índices las respuestas de los estudiantes a la tarea mencionada y algunas de las gráficas de parábolas hechas durante el desarrollo curricular tanto en el tablero (véase página 177) como en algunos de los cuadernos —en las que se ven, por ejemplo, segmentos de recta para unir puntos 'consecutivos' de las parábolas, o, curvas que no son suaves—, ponemos en duda la precisión y riqueza del significado construido por los estudiantes con respecto a cuál es la forma de parábola.

Relacionado con la poca elaboración que el desarrollo curricular hace en torno al asunto de la forma de la gráfica en cuestión y, sobre todo, con la no exigencia de explicitación de razones en las respuestas de los estudiantes, nos parece importante destacar las respuestas de los estudiantes a la cuarta actividad (véase página 189). Al preguntarles qué curva habían obtenido al abrir el cono, varios alumnos dijeron que una parábola y sin discusión alguna se finalizó la actividad enunciando que la parábola es una cónica porque se puede obtener haciendo un corte a un cono con un plano paralelo a una de sus generatrices. La respuesta acertada de algunos alumnos nos sugiere preguntas como: ¿con base en las actividades realizadas, a qué características de la parábola podrían acudir los estudiantes para reconocer como parábola el perfil obtenido?, ¿qué tan válido sería interpretar la respuesta correcta como índice de que los estudiantes que la dieron están reconociendo la curva en cuestión?, ¿qué tan improbable es que esos alumnos hubieran dicho ver una parábola si se les hubiera indicado cortar el cono con un plano paralelo a su eje de simetría?, ¿por qué algunos estudiantes pudieron responder correctamente la pregunta sin que eso requiera o implique reconocer características específicas de la parábola?

El enunciado "la parábola es el gráfico que representa a $y = ax^2 + bx + c$, (a, b, c son valores fijos)" está en la base del desarrollo curricular porque se explicita desde el comienzo a manera de definición y además, a partir de ese momento, en las actividades realizadas se emplea el término "parábola" para referirse a la gráfica cartesiana asociada a las ecuaciones tratadas; sin embargo, ni la profesora ni los estudiantes toman de manera explícita tal enunciado como referencia para las actividades realizadas ni tampoco para examinar el significado que se le construye a través de las diferentes actividades. Por una parte, de las diecisiete ecuaciones —correspondientes a casos de función cuadrática— representadas gráficamente en el plano cartesiano, sólo una tiene como coeficiente de x^2 a -1; para las demás, dicho coeficiente es 1. Frente a este hecho nos llama la atención que ningún estudiante expresara explícitamente curiosidad acerca de cómo sería la gráfica correspondiente a una ecuación en la que el valor de a no fuera 1 o -1. Desde nuestra perspectiva, vemos que el acercamiento a la función cuadrática se realizó a través de tratar un solo objeto: aquel cuya representación algebraica es $f(x) = x^2$; las demás funciones consideradas —excepto una, que es una reflexión— son translaciones del objeto mencionado. Por supuesto, no esperamos que nuestra perspectiva con relación a este asunto coincida con la de la profesora y menos con la de los alumnos; no creemos que éstos hayan advertido que se trataba del mismo objeto ubicado en diferentes partes del plano o en diferente posición; de haber sido así, las gráficas cartesianas hechas con la misma escala por una misma persona se habrían parecido más entre sí y quizás habría podido surgir una forma alterna de llegar a gráficas aceptables sin tener que hacer cálculos a partir de las fórmulas que definen las funciones. Por otra parte, aunque en el esquema presentado por la profesora al iniciar el desarrollo curricular se asocia función cuadrática con la ecuación de la forma $y = ax^2 + bx + c$ y en el enunciado al que nos estamos refiriendo se afirma que la parábola es el gráfico de tal ecuación, una de las actividades realizadas consiste en hacer la representación gráfica de ecuaciones de la forma $x = y^2 + h$, gráficas a las que sin ninguna explicación o justificación también se les da el nombre de "parábolas" y para las que se habla de vértice aunque en estos casos, el vértice no sea máximo o mínimo de la gráfica tal como se había establecido anteriormente para las parábolas que sí representan funciones. Frente a este hecho advertimos de nuevo que ningún estudiante de manera explícita señala no haber entendido algo o estar sorprendido de algo cuando hay asuntos que podrían ameritar su intervención en caso de que estuviera involucrado activamente en el discurso que se está llevando a cabo.

Atendiendo a la organización del contenido matemático como campo conceptual o procedimental[5] que Rico (1995, 1997) plantea, consideramos que el desarrollo curricular observado para la función cuadrática, no obstante haber tocado varias ideas que se concretaron en varios enunciados matemáticos, no propicia preponderantemente un conocimiento conceptual en la medida que deja de considerar tanto elementos relevantes para precisar significados específicos como conexiones entre los elementos implicados. Por ejemplo, no se establece conexión alguna entre los enunciados *la parábola es una cónica* y *la parábola es el gráfico que representa a* $y = ax^2 + bx + c$, el enunciado *la gráfica que representa a* $y = ax^2 + bx + c$ sólo se asocia con tres enunciados *es curva, puede abrir hacia arriba o hacia abajo* y *tiene punto mínimo o máximo*, y falta alusión a otras características de la curva (e.g., es abierta, simple, ilimitada, simétrica con respecto a un determinado eje); *la gráfica es curva* no se asocia con otro enunciado en busca de precisar su significado; los enunciados *puede abrir hacia arriba o*

5. El conocimiento conceptual está constituido por hechos, conceptos y estructuras conceptuales y se caracteriza tanto por la cantidad de unidades de información como por la riqueza de relaciones entre tales unidades; el conocimiento procedimental está conformado por destrezas, razonamientos y estrategias, y hace referencia a 'los modos de ejecución ordenada de una tarea'.

hacia abajo y *tiene punto mínimo o máximo* no se conectan entre sí. De otra parte, considerando dos representaciones de la función (i.e., la algebraica y la gráfica), reconocemos algunas relaciones importantes como por ejemplo, que se conecta hacia dónde abre la gráfica con el coeficiente del término en x^2 y también se conectan las coordenadas del vértice de la gráfica con los parámetros de la ecuación expresada en una determinada forma. Sin embargo, estas conexiones están sustentadas sólo por el reconocimiento de un patrón al observar algunos casos particulares, no hay ningún trabajo específico para tratar de explicar tales relaciones.

Por otra parte, advertimos que el desarrollo curricular observado requiere y enfatiza el desarrollo de varias destrezas y procedimientos, razón por la cual afirmamos que enfatiza el conocimiento procedimental. Con relación a este punto, reconocimos que en la clase no se explicitan de la misma manera todos los procedimientos que se usan; algunos de ellos se llevan a cabo de manera intuitiva, hecho que desde nuestra perspectiva puede generar malos entendidos en los estudiantes. Veamos un caso: determinar el vértice de una parábola mirando en su gráfica cartesiana el punto máximo ó mínimo puede ser más o menos aceptable como procedimiento matemático dependiendo de si la gráfica representa efectivamente la correspondiente relación; en el desarrollo curricular que nos ocupa la mayoría de las veces, la gráfica con la que se trabaja puede no ser la más precisa, así que podría ponerse en tela de juicio la pertinencia de utilizar ese procedimiento intuitivo; claro que el comentario anterior pierde fuerza si se considera que todas las relaciones están 'cuadradas' para que su vértice tenga abscisa entera en el rango de valores que se considera para la elaboración de la tabla. Otro caso ya mencionado tiene que ver con la forma de realizar el trazo de la gráfica: aunque se dice que se deben unir los puntos con una curva suave, tal expresión no parece ser significativa para algunos estudiantes quienes unen los puntos con segmentos de recta o con curvas muy irregulares.

En lo que concierne a la forma de asignar valores a la variable x para obtener los correspondientes valores de la variable y, consideramos innecesaria —y hasta contraproducente— la insistencia de la profesora en dar unos ciertos valores (los enteros desde -3 hasta 3) puesto que según cuál sea el vértice tales abscisas podrían corresponder a puntos de la misma rama de la parábola con lo cual no se obtendría un buen representante gráfico de la parábola en cuestión.

Se podría pensar que "los modos de ejecución ordenada de una tarea" aluden exclusivamente al establecimiento de una secuencia de pasos para realizar la tarea, sin embargo, no tiene que ser así; el conocimiento matemático procedimental tiene la posibilidad de ser explicado y justificado en la medida en que se conecte con el correspondiente conocimiento conceptual. Atendiendo al comentario que se acaba de hacer, vemos que por lo menos en lo que concierne al procedimiento para obtener las coordenadas del vértice de una parábola a partir de su ecuación cuando ella está expresada en la forma $y-k = (x-h)^2$, aunque al procedimiento se llegó encontrando una regularidad en los casos tratados y haciendo una conjetura, no hubo una explicación que permitiera entender por qué el procedimiento es como es; en el enunciado *si es el vértice, se reemplazaba x por h y y por k en la ecuación y se obtenían los ceros*, presentado por la profesora hacia el final de la secuencia de actividades, reconocemos un intento de aportar a los estudiantes un mecanismo de control para que ellos puedan saber por sí mismos si han encontrado o no correctamente las coordenadas del vértice de una parábola; sin embargo, es un intento que no se desarrolla.

Siguiendo a (Hewitt, 2002a, 2002b), la perspectiva que hemos presentado en este apartado nos lleva a identificar en este desarrollo curricular una tendencia de la profesora y los alumnos a tratar el contenido matemático como si fuera arbitrario, es decir, como si no hubiera razones matemáticas que sustenten las acciones y los resultados centrales y en consecuencia el papel principal de la profesora fuera informar a los estudiantes de ciertos hechos y procedimientos matemáticos que considera deben conocer o saber y el de los alumnos fuera memorizarlos mediante la ejercitación con el apoyo de la profesora que es quien conduce tal ejercitación.

Finalmente, queremos aludir al tipo de tareas que el desarrollo curricular le confía a los estudiantes. Sin lugar a duda, éste se ocupa de manera principalísima de que al final, los estudiantes puedan trazar el gráfico de ecuaciones de la forma $y = x^2 + bx + c$, a partir de expresar la ecuación en la forma canónica y también a partir de tal ecuación puedan identificar las coordenadas del vértice. De manera coherente con este interés, el desarrollo curricular observado le plantea —casi que exclusivamente— a los estudiantes tal tipo de tarea en el que se espera que ellos sigan las instrucciones dadas por la profesora para realizarla. En la entrevista, refiriéndose a la evaluación, la profesora señala que:

> *[La evaluación tuvo] La misma forma que desarrollamos en clase. Se les dio una ecuación, hallar el vértice. Una ecuación general donde factorizaban y la expresaban en forma… o sea similar a los ejercicios realizados en clase; no hice otro tipo de evaluación. Fue una evaluación individual escrita. En tres ocasiones les coloqué ejercicios, les di una ecuación general para que la factorizaran, haga la gráfica, determine el vértice, hacia dónde va dirigida. (…) Los resultados no fueron malos. Les fue bien. Lo que de pronto les di, lo aprendieron. Eso que les pedí lo pudieron hacer, como era lo mismo que ellos habían estado manejando en la clase, pues no tuvieron dificultad.*

Interacción a través de la cual discurren la enseñanza y el aprendizaje

Descripción

Con la siguiente descripción pretendemos destacar aspectos relativos a la interacción de la profesora con los estudiantes y de ellos entre sí, en torno a la enseñanza y el aprendizaje del tema abordado.

El intercambio verbal entre la profesora y el grupo de alumnos se da principalmente en el escenario de la exposición del tema por parte de la profesora. Como parte de su discurso, ella hace preguntas que no están dirigidas de manera explícita a alguien, pero que en la mayoría de los casos son respondidas simultáneamente por uno o más estudiantes. Se trata de preguntas muy puntuales, que se pueden responder con unas pocas palabras, sobre algo que la profesora quiere destacar en su exposición. Cuando no hay respuesta inmediata de los estudiantes o la profesora advierte que alguna de las respuestas dadas es incorrecta o no es la esperada por ella, reitera la pregunta, con frecuencia acompañada de alguna señal (e.g., cambio en el tono de la voz) que les indica a los estudiantes que deben dar otra respuesta. En algunas ocasiones la profesora hace algo al respecto (e.g., retomar la pregunta en un caso diferente, señalar en lo escrito algo específico) antes de continuar con la exposición.

P: Entonces este menos hace que los valores nos queden negativos, ¿cierto? Entonces nos queda aquí ¿cuánto? [Señala en la tabla]

E: Menos cuatro, menos uno, cero, menos uno, menos cuatro.

P: Y, ¿el gráfico entonces nos da?

E: [Varios estudiantes hablando al tiempo]. Una parábola abierta hacia abajo.

P: ¿Hacia dónde?

E: Hacia abajo.

P: Bueno, entonces ya vamos tomando ideas de qué características se nos van a presentar en las parábolas.

P: Entonces... vamos a decir nosotros, de una forma sencilla..., miramos, miramos y luego copiamos, ¿recuerdan? [leyendo del tablero] que la parábola es el gráfico que nos representa a $y = ax^2 + bx + c$ donde a, b, c son valores fijos. Por ejemplo, si tenemos $y = 2x^2 + 5x + 3$, en que dos, cinco y tres van a ser valores fijos, y la variable ¿cuál es?

E: [Varios alumnos responden al tiempo] x.

P: [La profesora escribe en el tablero la expresión $y = 3x^2 + 6x$] ¿Aquí cuánto valdría c?

E: Tres.

P: [La profesora entiende que ha dicho c] c, sí; ¿cuánto valdría c?

E: Tres.

P: [La profesora vuelve a hacer referencia a la primera expresión, señalando en ella los coeficientes] Fíjense que a, acá está representado ¿por quién?

E: Por dos.

P: Y, ¿b?

E: Por cinco.

P: Y, ¿c?

E: Por tres.

P: Entonces en ésta, escrita acá, ¿c cuánto vale?

E: Cero.

P: Cero ¿cierto? Tengo $y = x^2$ ¿cuánto vale a?

E: Uno.

P: ¿Cuánto vale b?

E: Cero.

P: ¿Cuánto vale c?

E: Cero.

P: Entonces, estos son ejemplos de ecuaciones cuyo gráfico va a ser una parábola.

P: Bueno, ¿hacia dónde se va entonces la... [parábola]?

E: [Tres o cuatro estudiantes respondieron] Hacia abajo.

P: Hacia abajo, ¿cierto?

También como parte de la exposición, pero menos frecuente, la profesora hace preguntas que, igual que las mencionadas antes, no están dirigidas de manera explícita a alguien, pero que es ella quien las responde. Se trata de preguntas que no se pueden responder con dos o tres palabras sino que requieren la construcción de una oración, o de preguntas cuya respuesta no tiene por qué conocer el estudiante, como la que se ejemplifica en los textos siguientes:

En este cono, estas rectas que aparecen... [sobre el dibujo hecho, la profesora indica a qué se refiere] cualquier recta que esté en el cono, cualquier recta se va a llamar generatriz. Entonces, ¿qué es lo que quiero que hagan con el cono? Después de que tengan el cono van a imaginarse *que hay un plano paralelo a la generatriz; vamos a dibujarlo hacia arriba [hace un segundo dibujo para mostrar de qué está hablando].*

Bueno, vamos entonces a hacer un recuento de todo lo que hemos visto sobre las características de la parábola para completar las que nos hacen falta. (...)Bueno, ¿qué hicimos la primera vez? La primera vez vimos la parábola como una ecuación... ¿de qué forma? de forma y igual a ¿qué? (...)

Aunque muy pocas, en el escenario de la exposición del tema hubo ocasiones en las que un estudiante por iniciativa suya hizo en voz alta una interpelación a lo que estaba diciendo la profesora, logrando generar un breve intercambio verbal con ella, que se presenta enseguida.

P: Luego, ¿qué más hicimos? Luego trabajamos con los... vértices, ¿recuerdan? Tenemos $y - k = (x - h)^2$, ¿cuál es el vértice?

E: [Varios estudiantes dicen algo que no se entiende claramente. Uno de ellos alude a que las letras h y k están usadas "al revés" de como se usaron en la clase pasada al escribir la ecuación $y - h = (x - k)^2$]

P: No es que sea al revés o sea al derecho; este término lo puedo colocar indistintamente, lo importante es que yo nombre primero al valor que acompaña a x y luego al valor que acompaña al valor de y. Entonces, el vértice escrito así, será... ¿qué?

E: h, k.

P: Si yo escribo, por ejemplo, $y - a = (x - b)^2$, ¿cuál es el vértice?

E: b coma a.

P: ¡Claro! se dan cuenta, no importa la letra que yo escriba, sino que yo entienda que primero ubico el valor de x y luego el valor de y. Entonces, acá tenemos una parábola con vértice en (h, k) y acá con vértice (a, b).

P: Cuando escribo la ecuación general [la profesora señala en el tablero la ecuación mientras habla] y menos h igual a x menos k, al cuadrado, represento una parábola de vértice (k, h). Entonces, ¿qué pasaría si escribo y menos dos igual a x menos tres, al cuadrado? [La profesora escribe en el tablero $(y - 2) = (x - 3)^2$]. Es una ecuación de una parábola. ¿Cuál es el vértice?

E: Tres coma dos.

E: Menos dos.

P: [La profesora escribe $v = (3, 2)$]

E: Profe, ¿si los dos están elevados al cuadrado...?

P: No... no sería la ecuación de una parábola. ¿Qué pasa si escribo esto, a ver? $y = (x + 3)^2$ ¿Cuál será el vértice de esta parábola?

En este escenario, en ocasiones la profesora pregunta a los estudiantes si entendieron algo que se acaba de hacer con preguntas generales como "¿Ahora sí queda clara esta parte?", "¿Ahora sí está claro?", "¿Está claro?", y pocas veces los estudiantes responden. En un momento cuando la profesora pide que hagan algo, los estudiantes sí se atreven a decir que no entendieron y la profesora repite lo dicho[6]:

6. La cita se refiere a la primera clase observada, en la que el tema tratado fue la solución de sistemas de ecuaciones de primer grado con tres incógnitas, usando la regla de Cramer.

P: Sólo planteé aquí la matriz de los coeficientes; ustedes, planteen la matriz ampliada.

E: Yo no entendí.

P: No planteamos la matriz ¿qué? ampliada. ¿Cómo nos queda la matriz ampliada?

En otros casos la profesora para saber qué tan claro había quedado para los estudiantes la explicación les propone otro ejercicio similar a lo que se acaba de hacer.

Otro escenario en el que ocurre con alguna frecuencia el intercambio verbal entre la profesora y los alumnos, ya no en grupo sino a nivel individual, es el que queda definido cuando los estudiantes tienen que realizar una tarea específica como parte de su actividad en la clase. En este tipo de intercambio se enmarcan las preguntas[7] o comentarios que los estudiantes hacen a la profesora acerca de puntos específicos de la exposición en los que tienen duda; ante esto, en ocasiones, la profesora responde al alumno particular y otras veces, hace alguna aclaración para todo el curso. Los siguientes dos ejemplos (tomados de la segunda y tercera clases observadas) pueden ilustrar lo dicho:

E: [Mientras la profesora da tiempo para que los alumnos copien lo que ella ha escrito en el tablero, recorre el salón pasando por los puestos y algunos alumnos aprovechan para hacerle, en voz baja, alguna pregunta relativa a la explicación dada en la que ella mostró tres casos particulares de la ecuación $y = ax^2 + bx + c$. Un alumno le pregunta o le comenta algo relativo a la solución de la ecuación]

P: Aquí yo no estoy solucionando ningún ejemplo, yo no estoy solucionando $y = 2x^2 + 5x + 3$; esto es un ejemplo, este es otro, y este es otro. [Mientras decía lo anterior, la profesora iba señalando las expresiones escritas en el tablero y las numeraba]

E: [Varios alumnos exclamaron] ¡Ah!, gracias.

P: Vamos a trazar ahora el siguiente, pero háganlo con menos valores para que no nos demoremos tanto. [La profesora escribe en el tablero $y = (x-2)^2$]

E: [El estudiante que le había hecho anteriormente la pregunta acerca del número de valores para x, le pregunta en voz muy baja algo que no se escucha bien, pero que ella parece parafrasear].

P: [La profesora responde en voz alta para todo el grupo] ¿Por qué yo di más valores? A ver. Uno puede dar muchísimos valores para trazar una curva, pero para representarla basta con algunos valores. La vez pasada sólo dimos cuatro valores. Sólo grafiquemos desde menos dos para que nos quede un poco más rápido. Menos dos... [va escribiendo en el tablero los valores para x] menos uno, cero, uno, dos y tres. Fíjense que podíamos dar infinitos valores, que si nosotros trazáramos todos los puntos, la parábola se prolonga, se prolonga, y va a ser ¿cómo? ¿cómo queda la parábola? [La profesora hace un movimiento con el brazo para indicar que una rama de la parábola trazada podría continuar; «infinita»] Entonces sólo estamos tomando una porción de esta parábola. Entonces vamos a ver con esos valores tracen el otro vértice; gráfico y vértice.

En el intercambio verbal que se da en este escenario, se incluyen también las preguntas de los alumnos a la profesora con respecto a si sus elaboraciones son o no correctas, preguntas a las que la profesora responde, en la mayoría de los casos, dando las explicaciones correspondientes cuando detecta errores. Pero no siempre es el alumno el que se acerca a la profesora, quizás es más frecuente lo contrario: la profesora se acerca al puesto de un alumno,

7. Por razones obvias, infortunadamente no tenemos registro textual ni visual acerca del contenido de tales interacciones.

observa lo que éste ha escrito y en ocasiones le hace preguntas muy breves que apuntan al centro de interés de la tarea, otras veces, le hace explicaciones muy similares a las expuestas para todo el curso. El siguiente texto que hace parte de la transcripción de la tercera clase observada puede ilustrar el tipo de intercambio al que estamos aludiendo:

P: [La profesora está en la parte de atrás del salón atendiendo el llamado de uno de los alumnos que le muestra lo que ha hecho en el cuaderno y le pregunta].

E: ¿Así, profe?

P: La profesora asiente con la cabeza. Un alumno se dirige hacia ella y le muestra su cuaderno; la profesora le pregunta] ¿Cuál es el vértice?

E: [No responde].

P: ¿Cuál es el vértice?

E: [No se escucha la respuesta y el alumno se aleja].

E: .[La profesora se detiene ante el puesto de un alumno y con él trabaja en la tabla de valores. Un alumno se ha parado a mostrarle la gráfica] ¿Cuál es el vértice? ¿Cuál es el vértice?

E: [Señalando con el lápiz sobre el cuaderno hace un movimiento hacia abajo].

P: Se dijo que el vértice es el punto mínimo o el punto máximo; ahí, ¿cuál es?

E: [Señala en el cuaderno un punto].

P: Ahí es el punto mínimo, ¿cuál es?

E: Uno, cero; o sea, hay dos puntos mínimos.

P: [La profesora disiente con la cabeza y dice algo que no se escucha].

E: ¡Ah!, sí.

En el mismo escenario definido por el trabajo individual de los estudiantes mientras desarrollan una tarea específica, ocurre de manera espontánea el intercambio entre dos o más estudiantes en torno a sus elaboraciones, para comparar sus respuestas o para explicarse entre ellos detalles de las soluciones que han hecho. A continuación se transcribe un fragmento del intercambio entre dos alumnos acerca de los valores de una tabla buscando aclarar para uno de ellos por qué el valor correspondiente para x igual a menos dos en $y = (x-2)^2$ es dieciséis.

E: (...) Dos por dos; acá, dos por dos, cuatro, sí, vea en el primero, vea; acá, es dos por dos, cuatro, y cuatro, menos dos y como es negativo se suman.

E: Y, ¿por qué se multiplica acá por dos?

E: Porque no ve que x vale dos?

E: No, x vale uno.

E: Pero, menos dos por uno, menos dos, menos dos, cuatro.

E: Eso, cuatro.

E: Cuatro por cuatro, dieciséis

En ese escenario, en algunas ocasiones, la profesora advierte que algunos estudiantes no están pudiendo hacer el procedimiento esperado o tienen algún error; después de haber hecho una interacción personal con algunos de esos estudiantes, su reacción es realizar ella misma la tarea frente a todo el grupo, hablando en voz alta, haciendo algunas preguntas y escribiendo en el tablero algunas de las cosas dichas. Ese puede ser el caso reportado en el siguiente fragmento de la transcripción de la tercera clase observada; después de hacer las gráficas de $y = x^2$, $y = -x^2$, $y = x^2 + 3$, $y = x^2 - 3$, los estudiantes deben hacer la gráfica de $y = (x-1)^2$ y para ello tienen que hacer una tabla de valores.

P: [Después de plantear la tarea, la profesora se dirigió hacia los estudiantes ubicados cerca a la puerta, se detiene ante algunos y habla con ellos].

E: [En el cuaderno de una estudiante registrado en el video se ve que ella asignó a los valores $-2, -1, 0, 1, 2$ y ya había calculado algunos de los valores correspondientes para y. Algunos estudiantes miraban en el cuaderno las páginas anteriores. Unos estudiantes se pararon de sus puestos].

P: [Después de unos minutos, la profesora va al tablero, señala y escribe mientras hace una explicación] Bueno vamos mirando los valores, porque parece que hay problemas con los cuadrados. [En el formato de la tabla escrito en el tablero, la profesora escribe para x los valores -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3]. Miremos, por ejemplo, menos... tres. Reemplazamos el x por menos tres. Menos tres menos uno ¿cuánto nos da?

E: Menos cuatro.

P: Menos cuatro. ¿Al cuadrado? ¿Menos cuatro al cuadrado?

E: Menos dieciséis.

P: [La profesora repite de nuevo la pregunta].

E: Dieciséis; profe ¿cuántos números son?

P: Vamos a poner un... en el intervalo menos tres hasta tres. Menos dos. Menos dos lo reemplazamos. ¿Menos dos menos uno?

E: Menos menos tres, menos tres

P: ¿Elevado al cuadrado?

E: [No se entiende lo que contestan los estudiantes].

E: r

P: [La profesora escribe nueve en el tablero] Menos uno. Menos uno menos uno... menos dos. ¿Elevado a cuadrado?

E: Cuatro.

P: ¿Cuando vale cero? Cuando vale cero, ¿qué nos queda?

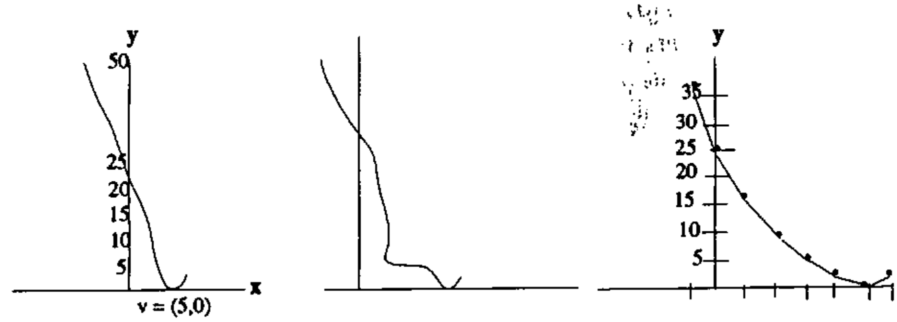
E: Ceeerooo.

P: Cero menos uno.

E: Menos uno.

P: ¿Elevado al cuadrado? Uno. [La profesora añade los valores 1, 2 y 3 para x en la fila correspondiente de la tabla que ha elaborado en el tablero] Ahora hagan lo mismo ustedes para los otros.

A continuación señalamos un elemento de las elaboraciones de los alumnos al que la profesora no reacciona con alguna alusión para todo el grupo. Tiene que ver con la forma como los estudiantes unen los puntos localizados en el plano cartesiano para obtener una representación gráfica de la ecuación con la que estaban trabajando. En su exposición, la profesora indica que los puntos ubicados se debían "unir con una curva suave". Frente a ello, hay alumnos que efectivamente unen los puntos con una curva suave, pero también varios estudiantes unen los puntos con segmentos de recta trazados usando regla y otros unen los puntos sin ninguna atención a la apariencia que pudiera llegar a tener la curva. Con respecto a ninguno de los tres casos, la profesora hace algún comentario. En la cuarta clase observada se registraron gráficas como las siguientes en los cuadernos de los estudiantes:



En la tercera clase observada también pudimos advertir que la profesora no reaccionó al contenido de las elaboraciones de los alumnos en una tarea que les había propuesto para realizar en la casa. La tarea les pedía:

> *Escribir en qué situaciones de la vida real, de la naturaleza, del medio en que ustedes viven encuentran movimientos parabólicos, o sea dónde un objeto que se translada me va a describir esas curvas que vimos hoy. (...) Segundo, dibujar objetos que tengan forma de parábola.*

En esta clase, la profesora revisa el cuaderno de cada estudiante teniendo en cuenta sólo si ellos habían hecho algo de tarea y no se detiene a mirar las respuestas. A través de la observación directa hecha por las observadoras a los cuadernos de algunos estudiantes, cerca de los que estaban ubicadas, y de la grabación de video, se registra que para el segundo punto de la tarea, varios estudiantes dan como ejemplo de objetos que tienen forma de parábola, los siguientes: pelota, vaso, sol, arco iris, arco de una puerta, montaña, tienda para acampar, giro de un carro, puerta rectangular, río, montaña, disco, plato, transportador, luna, naranja, cola de botella, tapa de botella de gaseosa, arepa, pizza, casco, llama de una vela, hoja de plátano, campana, torre de una iglesia, anillo, sombrero, curva de una carretera, una estrella, una 'u'; con respecto al primer punto en el que se pide identificar movimientos de trayectoria parabólica, algunos estudiantes se refieren a arrojar una pelota y a agitar un lazo.

En algunas situaciones la profesora pide a un estudiante que pase al tablero y copie allí su desarrollo del ejercicio. Mientras se está escribiendo algo en el tablero bien sea por parte del estudiante o de la profesora misma, ella indica a los estudiantes que no copien todavía en sus cuadernos, que miren al tablero, como cuando dice "Miramos, miramos y luego copiamos, ¿recuerdan?".

Discusión

A pesar de que la interacción de la profesora con los estudiantes en clase se evidencia a través de las intervenciones orales y escritas de cada uno, no puede decirse que en las clases se establezca un diálogo ni discusión entre profesora y estudiantes en el que ambas partes intervengan de manera similar, no sólo en cuanto a que cada uno exprese sus ideas y las explique y éstas se consideren seriamente, sino en cuanto a que ambas partes dediquen el mismo tiempo para expresarse. Es claro que es la profesora quien domina la conversación, sin que esto quiera decir que sus intervenciones induzcan al diálogo, o confronten las concepciones o visiones de los estudiantes, o se puedan ver como ideas completas, explicadas y justificadas desde el punto de vista matemático.

La interacción entre la profesora y los estudiantes se reduce así a las preguntas y comentarios que la profesora hace en medio de sus exposiciones o cuando interactúa con un estudiante. Principalmente son preguntas puntuales que se pueden responder con unas pocas palabras y que piensa que los estudiantes son capaces de responder. Nos parece que el sentido de tales preguntas —y la profesora aceptó nuestra interpretación— puede ser obtener alguna información acerca de si están siguiendo el hilo de la exposición y si están entendiendo, y a los comentarios que escribe o expone oralmente sobre el trabajo realizado. Para otro tipo de preguntas más esporádicas que la profesora hace y cuya respuesta es una oración que no necesariamente el estudiante conoce, los alumnos intuyen que en realidad no funcionan como pregunta, quizás por el mismo tipo de preguntas y porque no se deja espacio para la respuesta, y no intentan contestarlas. Nos parece que tales preguntas —y la profesora aceptó nuestra interpretación— pueden ser un recurso de la profesora para centrar la atención de los estudiantes en lo que va a decir a continuación, dado que con la pregunta lo destaca o enmarca. Un tercer tipo de preguntas son las que la profesora hace preguntando sobre la claridad de lo tratado. Parecería que la profesora espera así detectar qué ha pasado en los estudiantes con respecto a las matemáticas abordadas en clase; la no respuesta de los estudiantes o la continuación de la profesora con sus explicaciones, sugieren que para los estudiantes estas preguntas no crean la oportunidad real de solicitar una nueva explicación.

Las intervenciones verbales más frecuentes de los estudiantes en clase con respecto al tema matemático que se está tratando, son las respuestas cortas que dan, pero que no dan cuenta de explicaciones o razones, ni tampoco éstas son exigidas por la profesora. Cuando hacen preguntas orales a la profesora, no en público, sobre el desarrollo de una tarea, en general éstas no apuntan a pedir explicaciones sino a solicitar cómo se hace algo. En un caso en que un estudiante por iniciativa suya hizo en voz alta una interpelación a lo que estaba diciendo la profesora, logra generar un breve intercambio verbal con ella; sin embargo, más que un diálogo fue la respuesta de la profesora a la pregunta o comentario del estudiante. También hay interacción de los estudiantes hacia la profesora a través del trabajo escrito que ellos hacen y que la profesora mira. En esta situación es usual que la profesora pase por los puestos mirando lo que ellos están escribiendo en sus cuadernos. La reacción de la profesora a las producciones de los alumnos varía y naturalmente es selectiva y coherente con los énfasis que ha hecho durante la exposición del tema. Algunas veces reacciona con alguna alusión para todo el grupo y es ella quien conduce la realización de la tarea. Es probable que esta decisión de la profesora tenga que ver con el hecho de que dicho procedimiento no ha sido explicado en el curso ya que se podía esperar que todos los estudiantes lo supieran hacer, por tratarse de un tema del currículo del curso anterior. Otras veces la profesora reacciona dirigiéndose sólo al estudiante en cuestión; en otros casos no advierte o por lo menos no reacciona a los errores en las producciones de los estudiantes, o no tiene en cuenta el hecho de que algunos de los alumnos sí pudieron hacer lo esperado y ellos tendrían algo qué decir con respecto a la tarea en cuestión.

Mientras desarrollan las tareas propuestas, normalmente los estudiantes trabajan de manera individual y es usual que hablen entre sí acerca de la tarea, y de muchos otros tópicos. En especial, al realizar las tareas propuestas por la profesora es común que se paseen por el salón, se rían, se llamen, se paren del puesto a hablar con sus compañeros.

La profesora con frecuencia pasa al tablero a estudiantes que sabe que han desarrollado el ejercicio de forma correcta, de manera que lo expuesto en el tablero sirva de referencia a todo el curso para hacer las correspondientes correcciones en sus cuadernos. Quien escribe la solución del ejercicio en el tablero casi siempre copia la solución que hizo en su cuaderno y nunca trata de explicar qué hizo o por qué y la profesora usualmente tampoco le pide hacerlo. La interacción de la profesora con los estudiantes que pasan al tablero es poca y sólo una vez que el estudiante ha terminado de copiar su trabajo, la profesora se dirige a todo el grupo para repetir oralmente el desarrollo del ejercicio.

Las intervenciones verbales de los estudiantes en clase con respecto al tema matemático que se está tratando, tanto las que hacen para todo el grupo como las que hacen de manera individual a la profesora, no dan cuenta de explicaciones o razones; tampoco éstas son exigidas por la profesora.

Los estudiantes interactúan entre ellos cuando trabajan en el desarrollo de ejercicios y comentan acerca de la tarea y de muchos otros temas, aun cuando no estén sentados juntos y en general hay bastante indisciplina. En las clases hay algunas intervenciones de la profesora, no muchas, con respecto a la disciplina y al alto nivel de ruido con el que se desarrolla la clase; en la entrevista la profesora justifica el hecho diciendo que "se trata de un asunto institucional ya que hay problemas fuertes de disciplina y asistencia en todos los cursos, y frente a lo cual la institución ha tomado varias acciones pero no han funcionado".

Durante el desarrollo de las clases al abordar el contenido matemático es claro que el papel de la profesora es de 'proveedor de información'. Esto se evidencia en el tipo de preguntas que hace puntuales y dirigidas que incluyen la información necesaria, y casi que la respuesta, para que los estudiantes digan lo que se espera. Así mismo, se detecta en el tipo de comentarios que la profesora hace cuando un estudiante presenta su solución, pues es la profesora quien usualmente termina explicando al curso la respuesta del estudiante; en las explicaciones que la profesora da cuando ayuda a los estudiantes en sus puestos, que básicamente se limitan a dar instrucciones sobre lo que se debe hacer; en el énfasis en recordar los pasos de los procedimientos y la secuencia en que éstos se deben realizar. También se ve en el hecho de que la profesora proponga ejercicios a los estudiantes que parece que muchos no pueden resolver y que por ello emplean el tiempo asignado a su solución en tratar de entender lo que el ejercicio pregunta. En la entrevista la profesora indica que la razón de que en un caso determinado los estudiantes no hubieran hecho un ejercicio, fue que les dio muy poco tiempo para su desarrollo.

Valoración de las producciones de los estudiantes

Descripción

El trabajo realizado por los estudiantes y lo que ellos dicen se aprueba o desaprueba en clase de manera verbal casi siempre, según que la respuesta sea la apropiada o no. En ocasiones es importante el hecho de que los estudiantes hayan realizado el trabajo asignado, como cuando la profesora para revisar la tarea que se deja para la casa, pasa por cada puesto, mira el cuaderno de cada estudiante y tiene en cuenta sólo si el estudiante hizo o no la tarea, escribe un visto bueno o "No hizo tarea" según el caso. En esta situación la profesora no se fija en las respuestas que dieron los estudiantes, algunas de las cuales según se observó no tenían relación con la forma de una parábola.

Para algunos de los acertijos que se trabajan en la clase, se aceptan dos respuestas diferentes, es decir pueden ser dos resultados numéricos distintos para el problema, que son ilustrados por estudiantes a los cuales la profesora les pide que pasen al tablero y los presenten. Ella luego repite oralmente los desarrollos presentados.

Por medio de frases directas de la profesora. Se acerca a un estudiante que ha calculado mal los valores de la tabla, le indica expresamente que están mal y le hace el mismo tipo de preguntas que había hecho durante la explicación inicial para mostrarle cómo se hace el cálculo de los valores de y para un determinado valor de x y luego se aleja; el estudiante borró e hizo de nuevo los cálculos, esta vez, correctamente. Después de mirar el trabajo que los estudiantes realizaron y consignaron en los cuadernos, la profesora anuncia: "Vamos a hacerlo entre todos porque parece que les dio dificultad", o cuando alguien ha encontrado la respuesta adecuada dice: "Ya aquí le dio a una niña. Ya hay una". Dos estudiantes le muestran a la profesora lo que habían hecho en el cuaderno, y ella comenta "Un poquito torcida, pero bueno". Luego de que los estudiantes responden que el vértice de una parábola es "*b* coma *a*", la profesora dice "¡Claro!". En un momento entró en la clase la coordinadora del área, quien revisó el trabajo que estaban haciendo algunos estudiantes y a uno le dijo "lo hizo bien".

Por medio de la repetición por parte de la profesora de una misma pregunta al obtener una respuesta no acertada:

P: ¿Cuál es el vértice?

E: Cero.

P: ¿Cuál es el vértice de acá?

P: Si yo escribo la ecuación $y = x^2 - 2x + 1$,¿cuál será el gráfico de esa parábola?

E: [murmullos].

P: A ver. Hicimos el gráfico de $y = (x-1)^2$ que es una parábola que tiene vértice en... uno cero. Si yo resuelvo esto, [señala la expresión que acaba de escribir] o sea resolvemos el cuadrado $y = x^2 - 2x + 1$, ¿cuál es el gráfico de esta parábola? ¿Cuál es? ¿Cuál es el gráfico? ¿Cuál es el gráfico?

P: Nos dimos cuenta de que es lo mismo que graficar y igual ¿a qué?

E: [murmullos].

P: ¿A qué?

E: A x a la dos.

P: ¿A qué?

P: ¿Cuál es el vértice acá?

E: [Silencio].

P: ¿Cuál es el vértice acá?

E: [Murmullos].

P: ¿Cuál es, cuál es?

E: [Murmullos en volumen más alto].

P: ¿Cuál es?

Por medio de preguntas de la profesora que no necesariamente deben ser respondidas por alguien o que ella misma responde:

E: ¿Cero?

P: ¿Cero? Cero coma cero.

P: ¿Tres menos uno?

P: Cuatro.

P: [escribe 2 en el tablero] ¿Al cuadrado?

Por medio de la repetición por parte de la profesora de una respuesta de los estudiantes o de ella misma que es adecuada y que la profesora valida, diciendo o no "¿cierto?", a continuación:

P: Bueno, ¿hacia dónde se va entonces la...?

E: Hacia abajo.

P: Hacia abajo, ¿cierto?

P: ¿Cuál sería el vértice de la parábola?

E: k.

P: ¿*k* solo?

E: k coma y.

P: *k* coma *y*, ¿cierto?

P: se abrirá ¿hacia dónde?

E: [Pausa, nadie responde].

P: ¿Hacia dónde se abre?

E: Hacia arriba.

P: Hacia arriba, ¿cierto?

P: Menos tres menos uno ¿cuánto nos da?

E: Menos cuatro.

P: Menos cuatro.

P: ¿Cuál fue el primer paso?

E: El menos dos está restando, lo pasa a sumar.

P: Entonces el menos dos está restando, lo pasó a sumar, y luego ¿qué se hace?

E: Tabla de valores.

P: La tabla de valores.

Por medio de la continuación del trabajo por parte de la profesora:

P: ¿Cuál es el primer punto que voy a ubicar?

E: Menos dos coma cuatro.

P: Ese sería el primer punto.

Por medio de la instrucción de la profesora de que se prosiga con el trabajo:

P: ¿Ya lo hizo? No creo.

E: Da lo mismo pero hacia abajo.

P: ¡Ah!, hágalo.

Por medio de la solicitud de la profesora a un estudiante de que copie en el tablero su desarrollo correcto de un ejercicio, que ha sido previamente verificado por la profesora o de hacerlo ella misma: "Bueno ya les dio, entonces hagámoslo" y de decir que miren al tablero: "Entonces, miremos acá, por favor. Vamos a fijarnos en el camino que recorre la piedra; este camino que recorre la piedra y en el camino que recorre el chorro de agua".

Por medio de la indicación de la profesora a los estudiantes, cuando la respuesta no es correcta, que piensen antes de contestar:

P: ¿Cuántos gatos hay en total en el cuarto?

E: [Un estudiante responde inmediatamente] Veinte.

P: Primero pensamos, leemos, luego me dicen.

Por medio de comentarios generales, seguidos de acciones de la profesora cuando un estudiante está en el tablero y lo que copia allí no parece tan adecuado:

P: [Al mirar la gráfica de la función cuadrática $y = (x-5)^2$] Bueno, ¿qué pasó aquí con los valores?, ¿cómo nos dieron?, ¿pequeños o grandes? [Añade valores a la tabla escrita en el tablero y va preguntando el valor de la expresión evaluada; también da instrucciones de cómo hacer la gráfica con una escala más pequeña para que quede bien] Corrijan eso, por favor [Cabe anotar que en esta situación la profesora no hace comentarios explícitos sobre el hecho de que la línea de la gráfica tuviera varios puntos de inflexión sino que parece referirse únicamente al hecho de que la gráfica no se ha dibujado de manera simétrica por no haber contemplado los valores necesarios de x].

E: [Hace la tabla, escribe los valores de x y de y; y pregunta cómo hacer la gráfica; los valores de y crecen bastante rápido y empieza a dibujar las divisiones de la escala muy cercanas entre sí; traza la curva hacia abajo] ¿Quedó mal?"

P: [Borra lo hecho] Miremos a ver qué pasó. [Empieza a calcular los valores y va preguntando al grupo; los estudiantes también borran en sus cuadernos].

E: [Pasa un estudiante al tablero que dibuja varias flores].

P: [Le dice a otro estudiante que pase al tablero a completar el dibujo] Sin borrar. [Se refiere a lo hecho por le estudiante anterior].

Por medio de la indicación de la profesora a los estudiante que "Corrijan lo que escribieron en sus cuadernos" a partir de lo que quedó expuesto en el tablero.

El trabajo de los estudiantes y lo que ellos dicen, también se aprueba o desaprueba a través de gestos de la profesora. Cuando algunos estudiantes la interrumpen y le muestran una gráfica, la profesora mueve la cabeza hacia abajo en señal de asentimiento. O cuando alguien dice "la parabólica" la profesora hace un gesto de asentimiento con la cabeza al tiempo que varios estudiantes abuchean, y luego indica "No, no está mal; ¿quién dijo que está mal?".

Los estudiantes usualmente comparan entre sí sus trabajos y opinan acerca de lo correcto o incorrecto de éste, y en la comparación alguno de ellos cae en la cuenta de las diferencias y por lo tanto de posibles errores. Por ejemplo, dos estudiantes comparan la gráfica de una función que han hecho; uno dice "Está mal, ah si me faltó el 3!".

En una oportunidad dos estudiantes al referirse al gráfico que está haciendo la profesora en el tablero, dicen "Profe, el primer punto le quedó mal" otro contesta "No; está bien, pero lo que...", la profesora termina la frase señalando cual es el problema "Lo que pasa es que no está bien a escala esto, ¿no? toca correr esto más".

Después de que los estudiantes han dado una respuesta no apropiada la profesora sugiere que la comprueben o desechen mediante una tarea que deben hacer. Al terminar el trabajo, la profesora vuelve a hacer la pregunta, confirma la respuesta y concluye con respecto a la validez de la primera respuesta dada.

P: ¿Qué pasa si escribo esto, a ver? $y = (x+3)^2$ ¿Cuál será el vértice de esta parábola? ¿Cuánto?

E: [Respuestas confusas].

P: ¿Cuál? ¿Tres coma cero? Dibújenla entonces. Dibújenla, dibújenla y miramos. No.... Bueno hagamos el gráfico a ver. Háganlo rápidamente. Háganlo, háganlo por favor. Entonces hagan el gráfico de $y = (x+3)^2$. Y miramos si es cierto lo que me dijeron o no.

P: Entonces si escribimos $y = (x+k)^2$. ¿Cuál es el vértice?

E: Menos k coma cero.

P: Menos k coma cero. Entonces no es cierto lo que me dijeron antes.

En las clases observadas no se dedicó tiempo para hacer evaluaciones escritas u orales preparadas con tal fin.

Discusión

En este curso es la profesora quien predominantemente indica la validez o no de las producciones matemáticas de los estudiantes, aprobando o desaprobando lo que ellos hacen y dicen, principalmente por medio del tipo de interpelaciones verbales ya señaladas en la descripción, que son en su mayoría indirectas aun cuando en ocasiones expresa directamente lo adecuado o no del trabajo o de la respuesta. Pero también la profesora valida este conocimiento mediante gestos y acciones. En general, los gestos que hace la profesora son de asentimiento y no son difíciles de interpretar acertadamente pues pertenecen a la cultura occidental, pero acciones particulares como pedirle a otro estudiante que pase al tablero luego de que el anterior estudiante ha hecho algo no apropiado o intervenir en lo que hace el estudiante borrando el tablero, y expresiones como repetir la misma pregunta varias veces, implican una interpretación de los estudiantes mediada por la cultura de la clase que ya ha sido experimentada por ellos. La profesora determina igualmente esta validez por medio de indicaciones que escribe en los cuadernos de los estudiantes al revisarles el trabajo hecho.

En algunas ocasiones la profesora ante un respuesta no adecuada pide a los estudiantes que la comprueben y podría pensarse que la profesora está abriendo un espacio para que sean los estudiantes quienes puedan descubrir la validez de sus producciones con respecto a asuntos muy puntuales del tema que se trata en la clase. Entonces podría verse esto como una oportunidad para que los estudiantes hagan conjeturas y las corroboren o desechen. Sin embargo, dado que la situación surge por el hecho de una respuesta no correcta y teniendo en cuenta que esta forma de proceder de la profesora no es usual, que no se hace ninguna discusión ni énfasis en que la respuesta se vea como una conjetura ni en el procedimiento para verificarla, y que luego de que los estudiantes terminan el trabajo y encuentran la respuesta correcta, la conclusión relativa a la validez de la supuesta conjetura es expresada por la profesora y no por los estudiantes, es difícil ver que en estas situaciones son ellos los que validan sus realizaciones.

Sólo mediante algunas de estas interpelaciones, como las preguntas que hace individualmente a estudiantes, la profesora concreta en tales circunstancias cuál puede ser el error que se presenta. En los demás casos se entiende que la respuesta no es correcta pero no se explicita la razón de esto.

Es unas pocas ocasiones son los estudiantes los que indican la validez del conocimiento puesto en juego, cuando expresan para todo el grupo una falta o error del trabajo que se presenta en el tablero que es precisado por la profesora, o cuando comparan entre ellos mismos sus trabajos y se dan cuenta de los posibles errores.

La respuesta correcta es lo más importante para la profesora y es aceptada por ella sin pedir explicación o justificación. También parece que en algunas ocasiones es relevante el hecho de que los estudiantes hayan realizado el trabajo asignado, sin importar cómo son las respuestas. No se tienen indicios de que la profesora pida al estudiante que indique o explique el procedimiento realizado. Aunque como respuesta a algunos de los acertijos se aceptan resultados diferentes que se exponen, no es claro que está sea la constante para esta clase. En el trabajo observado relativo a la función cuadrática la profesora exigía la respuesta correcta y única sin dar cabida en general no sólo a una aceptación de otra respuesta sino tampoco a la exploración de una respuesta distinta.

Durante la entrevista la profesora alude a las intenciones de las evaluaciones al decir que la evaluación deben sistematizarla más y eso hace referencia a que "les pueda detectar más el número de errores, las dificultades; a uno se le pasan una cantidad de vacíos que los chicos tienen". Obviamente que también la profesora usa la evaluación para obtener notas de los estudiantes exigidas por el colegio. Al señalar que hizo tres evaluaciones "Para tener tres notas" ya que "Con lo de las filmaciones, con lo de todas las actividades… era el grupo que menos notas tenía, cuando fui a ver a los otros cursos les tenía once valoraciones y con noveno no tenía. Yo tengo que tener más de una prueba". Anota ahora no les está avisando que al día siguiente hay evaluación sino al final de la clase les dice "Hagamos este ejercicio y se los recojo". Algunas veces las evaluaciones las pueden trabajar en parejas, otras veces les deja sacar el cuaderno.

La profesora dice asignar trabajos adicionales a los estudiantes que llegan tarde que le sirven para obtener información sobre lo que el estudiante sabe o no. Sin embargo en las clases observadas no se dio esta situación a pesar de se vio llegar tarde a varios estudiantes.

Visión de la enseñanza proporcionada por los casos

En este capítulo presentamos, a través de cuatro secciones, una descripción y análisis de algunos aspectos de la enseñanza reconocida en las clases de matemáticas de los cinco cursos que constituyen los casos observados y estudiados. Las descripciones y discusiones específicas respecto de tales aspectos en cada uno de los casos constituyen el contenido de los capítulos 6 a 10 de este documento.

Cada una de las cuatro secciones aborda aspectos diferentes, pero interrelacionados, de tal enseñanza. Así, en la primera sección abordamos el estudio de los esquemas de las clases observadas resaltando la revisión y asignación de tareas como una acción común a la mayoría de los casos estudiados, pero reconociendo diferentes tipos e intencionalidades de éstas. También presentamos una caracterización de la manera de presentar la información matemática en los diferentes casos. En la segunda sección, Visión panorámica de los temas abordados, sintetizamos las descripciones y los análisis hechos con respecto a la organización temática reconocida en los diferentes casos y a los énfasis en elementos conceptuales o procedimentales en la manera en que se desarrolla la enseñanza de los temas. En la sección titulada Interacción a través de la cual discurren la enseñanza y el aprendizaje, mostramos que la interacción entre profesores y estudiantes es bastante limitada cuando la forma de trabajo se aproxima a las clases magistrales y que las clases dialógicas ofrecen un panorama potencialmente más expedito para que haya una interacción dialógica entre profesor y estudiantes, o entre los estudiantes. En la sección relativa a la valoración de las producciones de los estudiantes presentamos la idea de que si bien se valoran los aspectos matemáticos de las producciones, también se valoran otros aspectos no matemáticos; además establecemos que las reacciones de los profesores constituyen un aspecto descriptivo de la cultura de la clase a través del cual los estudiantes identifican la validez de sus respuestas.

Esquema de las clases

La mirada a los esquemas de las clases observadas en cada uno de los cinco casos nos permite reconocer que existen algunas acciones que son comunes a la mayoría de ellos. La asignación de tareas para la casa, la revisión en el aula del desarrollo de tales tareas, la asignación y desarrollo de tareas para el aula; y, la presentación de aspectos matemáticos, son unas de tales acciones. Estas acciones están contempladas en la hipótesis A que describe el problema de estudio, como las que realizan los profesores en sus clases de matemáticas. A continuación presentamos una descripción y análisis de las mismas.

Asignación y revisión de tareas

Una de las responsabilidades que de manera natural —y no muy cuestionada— se le atribuyen al profesor en las clases, es la asignación de las tareas que deben desarrollar los estudiantes dentro y fuera de las clases. En términos bastante generales, el desarrollo de tales tareas y específicamente la actividad intelectual promovida por éstas buscan suscitar o condicionar el aprendizaje de las matemáticas en los estudiantes. Idealmente, este aprendizaje contempla aspectos generales tales como la disciplina de trabajo, la concentración en una actividad, la distribución del tiempo, el desarrollo de la autoestima, el reconocimiento y valoración de habilidades y debilidades, el reconocimiento del orden y la organización, la valoración del cumplimiento y la puntualidad, etc. También contempla aspectos específicos tales como razonar matemáticamente, comunicar ideas matemáticas, resolver problemas a través del uso de las matemáticas, hacer conexiones entre ideas matemáticas, o comprender un concepto o un procedimiento matemático. En este sentido, las tareas que el profesor propone determinan las oportunidades de aprendizaje de las matemáticas que los estudiantes puedan tener; el desarrollo de las actividades matemáticas que tales tareas promuevan constituyen el referente de acción para que los estudiantes puedan configurar una idea de lo que es "hacer matemáticas" y de lo que es la matemática misma. Esta idea que los estudiantes construyen se nutre y apoya en las acciones que alrededor de las tareas se realizan en el aula de clase.

Esta visión de las tareas escolares en matemáticas, constituye una justificación para examinar elementos relativos a dichas tareas en las clases observadas. Consideramos que las tareas configuran un ámbito de análisis y caracterización de las clases de los diferentes casos estudiados.

Para hacer la discusión, inicialmente trataremos por separado las tareas asignadas por el profesor para ser desarrolladas fuera y dentro del aula. Sin embargo, como se expresará luego, existen muchas más características que hacen semejantes a las tareas asignadas para dentro y fuera de la clase, que aquellas que podrían diferenciarlas.

Asignación y revisión de tareas para desarrollar fuera del aula

Al examinar los esquemas de las clases de los cinco casos estudiados identificamos que cuatro de ellos reportan la asignación de la tarea para la casa y la realización de la revisión de tarea como una de las actividades que los profesores realizan en las clases observadas. En efecto, salvo en el Caso 2, en los demás casos se reconoce la realización de actividades que se enmarcan en la asignación y revisión de las tareas para ser desarrolladas en horarios diferentes a los de las clases de matemáticas.

En la mayoría de las clases observadas de los casos estudiados, la asignación de la tarea para la casa constituye el último o el penúltimo segmento de la clase, aunque en el Caso 4, la profesora lo hace en cualquier momento de la sesión de clase. En algunos de los casos estudiados los profesores enuncian o copian la tarea y los estudiantes tienen tiempo suficiente de registrarla por escrito; en otros, es frecuente que los profesores enuncien la tarea de manera oral en medio de un ambiente disciplinario que no favorece que los estudiantes escuchen y la registren por escrito.

Los aspectos relativos a las matemáticas, implicados en las tareas, no son tantos ni tan diversos. Sin pretender ser exhaustivos, los aspectos relativos específicamente a las matemáticas[1] que reconocemos en las tareas asignadas en los casos contemplados son sólo dos, a saber: consultar información matemática y desarrollar procedimientos matemáticos. Con el tipo de tareas propuestas es probable que se esté promoviendo una visión de que las matemáticas son información registrada en los textos y algoritmos para desarrollar ejercicios, y en consecuencia se deduce que hacer matemáticas es leer tal información y aplicar correctamente dichos algoritmos.

Ahora bien, mientras que con el segundo tipo de tareas los profesores parecen buscar que los estudiantes ganen habilidad para desarrollar procedimientos matemáticos rutinarios (casi siempre algorítmicos) de forma fiable y eficaz, con las tareas del primer tipo los profesores parecen pretender que los estudiantes estudien y comprendan la información consultada. A pesar de esta intención lo que se evidencia es que generalmente los estudiantes se limitan a copiar textualmente dicha información y que no le asignan un significado o el asignado no es suficientemente consistente. Consideramos que esta situación se presenta debido a la carencia de acciones docentes o a la poca efectividad de

1. Hay aspectos en algunas tareas que no son de este tipo; por ejemplo, una de las tareas pretende enterar a los padres o acudientes del resultado de una evaluación, y otra procura que los estudiantes dispongan para la siguiente clase de una cinta métrica.

éstas en actividades tales como la revisión de tareas en las que hay que consultar una información; además, cuestionamos el papel real de este tipo de tareas, pues si bien reconocemos que una de las habilidades matemáticas que se debería promover en la escuela es la lectura comprensiva de información matemática, creemos que durante las clases no se hacen actividades que conlleven tal fin y que quizá difícilmente en las casas se propicia un ambiente y acciones que favorezcan el desarrollo de tal habilidad. En este sentido creemos que a los estudiantes les queda como alternativas copiar textualmente la información, o copiar el texto cambiando una que otra palabra y/o suprimiendo algunos fragmentos del texto que consultan.

No obstante lo anterior, en algunas de las tareas asignadas se pueden reconocer aspectos potencialmente diferentes a los dos tratados antes, que no logran concretarse efectivamente a través de las mismas. De manera específica reconocemos en el Caso 5 una tarea[2] que plantea la posibilidad de tratar una idea o procedimiento matemático de manera intuitiva y un par de tareas[3] en el Caso 1 que podrían haber llegado a catalogarse como de solución de problemas y como de validación de respuestas por parte de los estudiantes.

Por otra parte, los profesores de los cuatro casos realizan acciones para revisar las tareas propuestas para trabajar en casa. Estas acciones parecen tener dos intenciones claramente distinguibles: de un lado, a los profesores les interesa determinar quién hizo la tarea y quién no, de otro lado, les interesa establecer la calidad de los desarrollos a las tareas y/o usar los desarrollos para realizar la clase.

Con respecto a la primera intención, evidenciamos que la acción de reconocer los estudiantes que hacen o no las tareas conlleva desde propósitos loables tales como determinar con qué estudiantes dialogar y conminar a mejorar su desempeño, pasando por la intención de disponer de información para valorar el desempeño del estudiante, hasta intenciones superfluas o desconocidas.

Con respecto a la intención de establecer la calidad de los desarrollos a las tareas y/o usar los desarrollos para realizar la clase, identificamos que, por un lado, la revisión pretende reconocer, de manera personal o pública, respuestas correctas o errores en la elaboración de un ejercicio o procedimiento matemático; en este sentido las acciones encaminadas a tal fin no involucran la indagación acerca de las causas y/o motivaciones de las respuestas correctas o incorrectas, y para el caso de las segundas no se logra una aproximación siquiera inicial a las dificultades que subyacen a los errores en tanto expresión de las mismas. De otro lado, identificamos que la revisión hace parte central de la clase, en tanto que a partir de ella se intenta construir una significación de información matemática, propósito que no siempre parece alcanzarse. Así, en sentido estricto, los desarrollos de las tareas no son usados como ventanas al aprendizaje y comprensión logrado por los estudiantes.

De manera específica, la mirada a los cinco casos permite advertir la existencia de diversas estrategias y propósitos para la revisión de las tareas. En la mayoría de los casos algunos de los desarrollos elaborados por los estudiantes se utilizan en el curso de la clase. En el Caso 1, en la mayoría de las tareas, la profesora utiliza la información que los estudiantes han consultado y que le presentan de manera verbal como fuente para presentarles y sintetizar información matemática que pretende que tenga un significado

2. La tarea podría haber tenido la intención de iniciar una aproximación a la idea de parábola como curva descrita por las trayectorias en algunos movimientos y la forma de algunos objetos. En las producciones de los estudiantes como respuesta a dicha tarea se reconoce que al parecer ellos están asociando la forma "curva" de un objeto, con la palabra 'parábola'.

3. Una de las tareas consistía en reconocer los diferentes segmentos determinados por seis puntos ubicados en una recta. Sin embargo, los estudiantes dieron cuenta de la tarea que se proponía sin que ello pareciera constituir un problema matemático legítimo, pues una vez reconocieron los cinco segmentos determinados por puntos 'adyacentes' no hubo nada que problematizara su respuesta.

para los estudiantes. En el Caso 3, el profesor utiliza los desarrollos y elaboraciones de los estudiantes como aspecto sobre el cual indagar y construir —ante todo el grupo de estudiantes y con la mayoría de ellos— un significado de algunos aspectos conceptuales pero sobre todo de aspectos procedimentales. En el Caso 5, la profesora elige un estudiante para que copie de su cuaderno el desarrollo, luego de revisar lo que está escrito en el tablero hace comentarios a todo el grupo de estudiantes respecto de lo copiado o expone lo que quedó registrado en el tablero. En el Caso 4 la profesora revisa en su escritorio el desarrollo de las tareas asignadas en la anterior clase y si la tarea cumple los requisitos de validez le asigna puntos, de lo contrario eventualmente hace comentarios generales a través de lo cual manifiesta que el desarrollo no es completamente adecuado.

Asignación y revisión de tareas para desarrollar en el aula

En los cinco casos estudiados los profesores son los encargados de asignar las tareas a los estudiantes para que las desarrollen durante las sesiones de clase. En uno de estos casos las tareas asignadas durante la clase pueden no alcanzarse a realizar durante ésta y su conclusión queda como tarea para la casa; en el Caso 2 las tareas asignadas pueden no concluirse en la sesión y su conclusión se hace en la siguiente o siguientes sesiones de clase. En los otros tres casos la totalidad de las tareas se terminan durante la sesión de clase.

En los cinco casos la asignación de las tareas se hace a través de enunciados orales y escritos. Sin embargo, en la mayoría de los casos son más frecuentes los enunciados orales —eventualmente acompañados de algún breve registro escrito en el tablero— como forma de asignar las tareas. En el Caso 2, a pesar de que la asignación de tareas se hace fundamentalmente de manera escrita a través de las guías que las profesoras han preparado y entregado a los estudiantes, es frecuente que en la interacción de las profesoras con los grupos de estudiantes ellas planteen de manera oral ampliaciones o explicaciones a las tareas propuestas que, en cierto sentido, constituyen nuevas tareas. En todos los casos, la gran mayoría de las tareas debe desarrollarse de manera escrita; no obstante no en todos los casos este registro es objeto de valoración al momento de revisar el desarrollo logrado para la tarea.

Los aspectos e intenciones —referidos a las matemáticas— que se abordan a través de las tareas propuestas para desarrollar en el aula no son considerablemente diferentes a las propuestas para la casa. En efecto, reconocimos en la mayoría de los casos que los profesores asignan como tarea la identificación de información matemática a través de una lectura y/o la realización de ejercicios en los que de manera prioritaria se replican los procedimientos matemáticos —casi siempre algorítmicos— presentados previamente. Consideramos que estas dos clases de tareas coinciden en que la respuesta esperada es única y preestablecida. En otras palabras, la información que se debe identificar y resaltar corresponde a los enunciados matemáticos válidos y a los procedimientos estandarizados —su significación no es libre sino ajustada a lo que está "matemáticamente" establecido. De igual manera, los procedimientos están preestablecidos y su adecuada o inadecuada aplicación permite o no resolver de manera correcta o incorrecta los ejercicios. En este sentido, se puede estar consolidando la idea de que las matemáticas son "exactas, únicas, preelaboradas" y que sirven principalmente para resolver ejercicios.

No obstante lo anterior, reconocemos que existen acciones que no van en la misma dirección. Particularmente en el Caso 2, identificamos algunas tareas que no necesariamente propenden por la búsqueda de *la* respuesta o que tengan como fin que el estudiante lleve a cabo un procedimiento matemático preestablecido; en éstas hay un mayor grado de libertad para la actividad intelectual del estudiante y en cierto sentido admiten más de una solución y conminan al estudiante a especular y validar sus elaboraciones. En los otros casos identificamos tareas que quizá pretenden ofrecer una alternativa diferente a la búsqueda de información y al desarrollo de ejercicios; sin embargo, consideramos que las intenciones de estas tareas no siempre parecen haber sido concientizadas por los profesores lo cual conlleva a que no siempre identifiquemos una intención explícita detrás de éstas. Particularmente, reconocemos que los profesores propusieron algunas tareas que propenden por la introducción de ideas matemáticas desde una perspectiva intuitiva (v.g., la medición de una longitud con unidades arbitrarias, la construcción de un cono y su corte con un plano paralelo a una generatriz) y algunas otras que abordan la solución de problemas (v.g., resolver acertijos y problemas de razonamiento, desarrollar tareas para las cuales no se ha discutido ni presentado previamente una estrategia de solución). En las primeras reconocemos falencias que impiden que la intención de la tarea se logre ya que no son los estudiantes sino el profesor quien termina enunciando la idea a la que pretendía que ellos se aproximaran; con tal actuación, no permite que los estudiantes especulen acerca de lo que su observación y análisis de la situación les permite concluir, impidiendo de paso saber si efectivamente la tarea conlleva el reconocimiento de tal idea. En las tareas que abordan la solución de problemas, advertimos que en la mayoría de estos casos, quizá excepto en el Caso 2, la intención de trabajar en los problemas no va más allá de encontrar la respuesta correcta y de verificarla. En efecto, los profesores no realizan acciones a través de las cuales se reconozca un interés legítimo por abordar junto con sus estudiantes la exploración de estrategias y caminos que no prosperaron en la solución del problema, la indagación de las interpretaciones del enunciado del problema, la validez de la respuesta encontrada respecto del contexto del problema, la existencia de una única o varias soluciones —entre otras; en el Caso 2, una de las profesoras se esfuerza por promover con sus estudiantes acciones en torno a los aspectos mencionados antes. De esta manera, se recalca la idea de que los problemas en matemáticas tienen una única solución y una estrategia para hallarla, con lo cual se ratifica lo mencionado antes como ideas que se promueven de hacer matemáticas y de las matemáticas mismas.

En términos generales, para la revisión de las tareas propuestas para el aula, los profesores de los Casos 1, 3, 4 y 5 proceden de la misma manera que lo hacen para las tareas propuestas para la casa. También reconocemos que las intenciones de la revisión de estas tareas son las mismas que las de aquellas. En este orden de ideas concluimos que en estos casos la revisión de las tareas propende más por intentar dar algún significado a la información matemática y por reconocer respuestas correctas o incorrectas que por permitir oportunidades de actividad matemática legítima en los estudiantes y la opción para el profesor de reconocer los procesos mentales de sus estudiantes.

De otra parte, reconocemos también que unas de las tareas habituales que los profesores esperan que los estudiantes desarrollen es prestar atención a las explicaciones que él o —muy eventualmente— sus compañeros hacen y que los estudiantes respondan las preguntas que los profesores o sus compañeros les hacen. A este respecto, algunos profesores manifestaron que advierten que no es posible lograr que todos los estudiantes estén atentos a lo que se está discutiendo en clase y que admiten que algunos de ellos se distraigan durante la clase. Consideramos que esta actitud llevada a un extremo no beneficia la configuración de un ambiente de aprendizaje propicio y que en ocasiones se puede ver como una manera de hacer más agradable la clase por razón de establecer relaciones laxas entre estudiantes y profesor. Ahora bien, consideramos que las acciones llevadas a cabo por los profesores y el tipo de tareas asignadas no permiten que se den las condiciones fundamentales que posibiliten que los estudiantes estén interesados en escuchar a sus compañeros para entablar discusiones con respecto a lo que presenten.

Presentación de aspectos matemáticos

Una aproximación inicial a las estrategias que implementan cada uno de los profesores de los cinco casos estudiados nos permite advertir una diversidad de éstas. No obstante, al examinar con más detalle tales estrategias reconocemos que tal variedad es relativamente aparente y en consecuencia encontramos elementos comunes entre las estrategias que las identifican más de lo que las diferencian.

En primer lugar, señalemos que, con excepción del Caso 2[4], en todos los casos estudiados reconocemos que los profesores hacen exposiciones a través de las cuales pretenden transmitir una información matemática que se refiere prioritariamente a procedimientos matemáticos, aunque ocasionalmente también trata ideas matemáticas referidas a conceptos y objetos matemáticos; esta información se comunica generalmente enseñando[5] cómo se aplica el procedimiento para resolver un ejercicio.

Si bien todos los profesores de estos casos hacen exposiciones, los estilos de las exposiciones varían de un profesor a otro. Las profesoras de los Casos 4 y 5 realizan exposiciones del contenido matemático en el tablero frente a sus estudiantes y los involucran en éstas a través de preguntas que les formulan o de breves tareas que les proponen y que vinculan en la exposición; en cierto sentido, no sólo hacen la exposición *para* los estudiantes sino también *con* ellos. Ambas profesoras luego de realizar su exposición de procedimientos, de manejo sintáctico de signos y símbolos y de la manera de notar y escribir, proponen ejercicios para ser desarrollados por sus estudiantes; estos ejercicios eventualmente se titulan con la palabra "taller" pero generalmente tan sólo implican la réplica de un procedimiento enseñado durante la exposición bajo las reglas sintácticas y de notación expresadas en la misma. En ambos casos las profesoras acostumbran incluso a exponer los procedimientos hechos por los estudiantes y copiados por ellos en el tablero como respuesta a una tarea. En los Casos 1 y 3 reconocemos algunas pequeñas diferencias con los dos aludidos inmediatamente antes. En su exposición, el profesor del Caso 3 incorpora notablemente las respuestas de sus estudiantes a preguntas que va planteando durante la misma e incluso aborda detalladamente algunas de tales respuestas para intentar aclarar el sentido de las mismas o los significados y afirmaciones que éstas contienen; no obstante este interés en las respuestas de los estudiantes, es relativamente fácil identificar que a través de estas acciones el profesor está transmitiendo una información matemática preestablecida. Particularmente, el profesor ilustra la manera como se verifica que un número satisface un criterio de divisibilidad y propone siempre tres preguntas que pretenden evidenciar los aspectos centrales de la aplicación del criterio. Por su parte, la profesora del Caso 1 si bien casi siempre propone una tarea que conduce a que los estudiantes desarrollen una actividad que podría constituirse en una aproximación a una idea matemática, frecuentemente después del trabajo de los estudiantes, es ella quien verbaliza y concluye la idea matemática a la que los estudiantes deberían haberse aproximado y que generalmente no pueden verbalizar, a pesar de los intentos de la profesora para que lo hagan.

En nuestra opinión los profesores en un intento de abandonar la estrategia de exposición magistral —tan criticada por algunos— implementan otras estrategias a través de las cuales hacen jugar a sus estudiantes un papel diferente al de auditorio pasivo; a pesar de ello las actividades en las que comprometen a sus estudiantes no parecen generar el aprendizaje ni la comprensión de las ideas matemáticas objeto de estudio. Quizá la fuente de ello sea más que las estrategias mismas, la idea de que en la escuela se debe transmitir una información matemática contenida en los textos escolares o en el saber matemático del profesor. Esta perspectiva de la información casi siempre relega a un úl-

4. En este caso, si bien las profesoras en ningún momento hacen exposiciones orales para todo el grupo, sí hacen exposiciones escritas a través de algunas guías (v.g., taller 4 y 5). En este caso los estudiantes sí hacen exposiciones orales al grupo; en efecto, reconocimos un momento en el que un grupo de estudiantes expone a sus compañeros aspectos matemáticos relativos a su trabajo en alguno de los talleres. Consideramos que esta situación fue provocada más por nuestra presencia en las clases y por nuestra indagación por la existencia de una actividad de aula que comprometiera a todos los estudiantes y profesores de manera simultánea, que por ser ésta una actividad usual en tal caso.
5. Aquí, enseñar parece ser entendido por los profesores como sinónimo de mostrar o exhibir.

timo plano la formación matemática de los individuos como fin fundamental de las experiencias matemáticas escolares. Por otro lado la idea de que en la escuela los estudiantes deben estar en contacto con un conocimiento matemático institucionalizado, sea éste resultado de su construcción a través de actividades o de su enunciación por parte del profesor o de un texto, hacen que la exposición de éste sea una de las obligaciones del docente reconocidas institucionalmente.

En segundo lugar, señalemos que en casi todos los casos estudiados, salvo en los Casos 3 y 5, se utiliza la estrategia de lectura de un texto escrito como manera de poner en contacto —y en cierto sentido transmitir— una información relativa a las matemáticas. Por ejemplo, en una de las clases observadas, la profesora del Caso 1 propone a los estudiantes leer en grupos, recapitular y transcribir individualmente una información de un libro de texto; para ilustrar lo que espera que hagan para recapitular la información, la profesora hace que un estudiante lea una breve parte de la información y les pregunta a los estudiantes qué es lo importante de lo leído; ellos contestan fragmentos de la información leída y la profesora registra en el tablero palabras alusivas a dichos fragmentos pero menciona que lo que espera es que ellos escriban las ideas y no sólo palabras. De manera similar, la profesora del Caso 4 incorpora frecuentemente como parte de su estrategia docente proponer a los estudiantes la lectura de un texto la que acostumbra a acompañar de una "guía" o "taller" que consiste en una serie de preguntas relativas al contenido del texto; luego de que los estudiantes realizan la lectura y responden las preguntas, es ella quien habitualmente hace un recuento de la información contenida en la lectura, quien dirige una acción en torno de las preguntas hechas, y quien presenta finalmente la información del texto. En ambos casos las profesoras enfatizan en que no se trata de "copiar" la información sin lograr una comprensión de la misma y escribirla de la manera en que la han entendido; no obstante el ilustrar lo que se debe hacer y formular preguntas, en las clases en las que utilizaron la estrategia de leer un texto no advertimos una acción docente realmente efectiva que pudiera potenciar en los alumnos la comprensión de la información que debían leer. Al contrario, percibimos algunas condiciones que no facilitaban la consecución de tal intención; el hecho de que en los textos existan palabras que se refieren a conceptos e ideas matemáticas avanzadas para el grado de los estudiantes (v.g., integral indefinida, para el grado octavo) o el tener que compartir un mismo texto para cuatro o más estudiantes, constituyen dos ejemplos de tales condiciones. Ante esto, y ante la ausencia de una genuina disposición de los estudiantes para cuestionar la información que leen y su significado, no parece quedar otra opción a los estudiantes que copiar textualmente la información que pretende ser comunicada por el texto o escribir lo que medianamente entienden del texto sin que necesariamente capturen los aspectos centrales del mismo. Por otra parte, en el Caso 2, identificamos que en algunos de los talleres propuestos para ser desarrollados por los estudiantes, se presenta información matemática que pretende ser transmitida a los estudiantes a través de su lectura —propuesta en el mismo taller— o de hacer algún trabajo con ésta, o se sugiere la lectura de libros de texto para recapitular información allí presentada. En este caso, las tareas propuestas por las profesoras a través de los talleres pretenden también que los estudiantes logren significar tal información, utilizarla y eventualmente recapitularla; esta acción se acompaña de la interacción con las profesoras en la que parece discutirse tales significados, usos y recapitulaciones.

Desde nuestra perspectiva la lectura de textos matemáticos es una actividad bastante exigente para los estudiantes y constituye uno de los objetivos de aprendizaje de las matemáticas en la escuela. Al analizar lo observado en las clases, consideramos que la cantidad y calidad de acciones docentes encaminadas a tal fin deben ser reflexionadas profundamente por los profesores, pues la mayoría de las acciones que pudimos observar no parece beneficiar efectivamente la consecución de tal objetivo; además creemos que el significado de la actividad de "leer matemáticas" debe ser estudiado con más detenimiento y profundidad. Por otra parte, creemos que quizá buscando alternativas para no necesariamente exponer la información en el tablero, los profesores utilizan la lectura de textos por parte de los estudiantes, la cual en esencia no difiere de la exposición en el tablero ni supera sus ampliamente reseñados problemas para el aprendizaje. En efecto, en ambos casos se enfrenta a los estudiantes a una información matemática poco significativa, a la cual deben asignar un significado a partir de lo que saben, casi siempre sin una estrategia que beneficie tal asignación, y posterior o simultáneamente deben usarla para lograr la comprensión de una idea o procedimiento matemático.

Visión panorámica de los temas abordados

En cada una de las secciones —bajo el mismo título de ésta— de los capítulos que tratan cada uno de los casos se describen y discuten las secuencias de actividades desarrolladas en los cursos para tratar los temas matemáticos, y se establece una perspectiva de los elementos conceptuales y procedimentales de los conocimientos abordados. En esta sección presentamos una mirada sintética de tales visiones, advirtiendo que en aquellas se encuentra información específica a cada caso que puede llegar a ser mucho más significativa que la aquí sintetizada.

En primer lugar señalemos que en cada uno de los casos las actividades realizadas configuran una organización de la(s) temática(s) tratadas. Esta organización puede darse alrededor de un tema matemático macro, en torno a varios temas matemáticos específicos y relativamente interrelacionados, o alrededor de temas atomizados. La divisibilidad es el temas macro que se estudia en el Caso 3. En el Caso 1 los objetos geométricos básicos y la medición de longitudes constituyen los dos temas específicos estudiados. En el Caso 4, si bien podría considerarse que las operaciones con polinomios es el tema macro estudiado, preferimos reseñar que en este caso se aborda el estudio de temas atomizados, puesto que hay también un tratamiento entrecruzado de la definición de variable y constante, de la representación geométrica de algunos números irracionales, de la representación algebraica de enunciados verbales y de algunos aspectos de la función lineal. De manera similar, en el Caso 5 podría pensarse que la función cuadrática es el tema macro estudiado; sin embargo el hecho de que se hayan abordado aspectos relativos a la parábola (v.g., la parábola como cónica o parábolas de eje paralelo al eje x) asignan un carácter atomizado a los temas abordados. Por su parte, el hecho de que en el Caso 2 se aborde el estudio de la clasificación de objetos, la solución de problemas de razonamiento aritmético y el estudio de algunos elementos de la geometría plana, nos conducen a ver éste como un caso donde se estudian temas atomizados.

El reconocimiento del carácter atomizado de los temas estudiados en tres de los cinco casos incluye también la identificación de ausencia de conexiones explícitas y/o efectivamente significativas entre tales temas, establecidas a través de las actividades desarrolladas. Por ejemplo, en el Caso 4 no se evidenció la existencia de conexiones entre la suma y resta de los polinomios y la suma y resta de los números que hubiese sido importante para —entre otras— establecer la solución a un problema propuesto a los estudiantes (y resuelto sólo por un número bastante exiguo de ellos); o en el Caso 5, la ausencia de una significación precisa acerca de la 'forma' de la parábola y de los casos en que ésta es la gráfica de una función cuadrática. Para el Caso 1 la conexión entre el estudio de los objetos geométricos y la medición de longitudes es bastante débil pues se reduce al reconocimiento de que hay segmentos que notados de diferente manera comparten la misma medida; en este sentido no hay un estudio de las características de los objetos geométricos y la determinación de cuáles de ellas constituyen magnitudes medibles y de los aspectos específicos de la medición de éstas, aspecto que pudo haber dado mayor cohesión entre los temas. En el Caso 3, existe conexión entre los criterios de divisibilidad y reside fundamentalmente en la oportunidad que se tiene de contrastar tales criterios a través de responder tres preguntas; no obstante, reconocemos que esta conexión pudo haber sido mucho más fuerte si para algunos criterios se hubiesen seleccionado unos enunciados diferentes a los estudiados.

En la mayoría de los casos algunos reconocemos que las organizaciones temáticas parecen estar preestablecidas por el profesor y lo que sucede con sus estudiantes (sus respuestas, reacciones, intereses, etc) no modifican tal organización. Esta organización parece pre-existir como un esquema preestablecido o guión y éste parece inmodificable, que seguramente tiene referencia en la tradición curricular que se muestra anquilosada e inmutable, a pesar de los esfuerzos y diseños curriculares innovadores producidos por la comunidad académica en Educación Matemática.

En segundo lugar, reconocemos que en la mayoría de los casos se aborda fundamentalmente un conocimiento procedimental de las matemáticas y que a pesar de estudiar algunas ideas, notación y términos matemáticos se relega a un segundo plano el estudio de elementos conceptuales.

Con respecto a la afirmación sobre el énfasis en el aspecto procedimental del conocimiento matemáticos podemos establecer que en el Caso 3 y en los Casos 4 y 5 (que abordan temáticas referidas a la aritmética y el álgebra, respectivamente) el aprendizaje de los criterios de divisibilidad y de los algoritmos para establecer los resultados de operaciones entre polinomios o para construir una tabla y hacer una gráfica cartesiana, constituyen el centro de atención. En contraste, en el Caso 1, el aspecto procedimental del conocimiento geométrico no parece ser el centro de atención; de igual manera en los talleres 4 y 5 propuestos en el Caso 2 para el estudio de la geometría tal aspecto procedimental no configura un centro notable de interés. Estos hechos permiten reconocer que en aritmética y álgebra los procedimientos son esenciales en tanto que en geometría no; esto se debe quizá a la falta de precisión acerca de cuáles son los elementos esenciales del aspecto procedimental del conocimiento geométrico y/o a la ausencia de reflexión acerca de la existencia y réplica de una aproximación casi que exclusivamente algorítmica a algunas disciplinas matemáticas.

No obstante este énfasis en los aspectos procedimentales, reconocimos que la mayoría de los procedimientos tratados se presentan sin una justificación o argumentación matemática o que ésta es muy débil y no reside en las conexiones y dependencias que se pueda establecer con los aspectos conceptuales que los sustentan. Por ejemplo, esta es la situación del trazado de la curva que *une* los puntos correspondientes a un conjunto de parejas de números de una tabla; la profesora del Caso 5 sólo menciona que se debe trazar una curva suave que pase sobre los puntos pero no hace referencia alguna a la 'uniformidad de la variación conjunta de las variables relacionadas', al carácter continuo o denso de los conjuntos de partida y llegada de la función, o al dominio de la función, características conceptuales de la función que sustentan tal modalidad de trazo.

La apreciación acerca del énfasis en los aspectos procedimentales no puede entenderse como una ausencia de un tratamiento de aspectos conceptuales. De hecho, en cada uno de los casos —excepto en el Caso 3— reconocemos que los profesores presentan notaciones y hacen que los estudiantes las utilicen; a este respecto advertimos en el Caso 4 un énfasis por parte de la profesora en el uso correcto e imprescindible de las notaciones en la escritura de la solución de algunos ejercicios (v.g., el uso de la notación algebraica de la función para el cálculo de los valores de las imágenes de valores numéricos predeterminados en una tabla, o la escritura de las palabras 'de' 'restar' en el enunciado de un ejercicio de resta de polinomios y su distinción con el enunciado estrictamente simbólico del mismo), así como las observaciones verbales de la profesora y estudiantes del Caso 1 acerca de la notación de los segmentos y de las rectas.

También, en todos lo casos se enuncian y se estudian términos matemáticos relativos y específicos a la temática abordada, es decir, que se refieren a objetos o conceptos matemáticos con significados precisos. Sin embargo, consideramos que la aproximación que a través de las actividades de los profesores y estudiantes se pretende hacer a los significados matemáticos de dichos términos, no siempre conducen a los estudiantes a abandonar la significación cotidiana de tales términos y a asumir una significación matemática específica. En cada uno de los casos encontramos ejemplos que ilustran la anterior aserción. En el Caso 1 se hace una alusión distante del significado matemático para el término 'infinito', se refieren los objetos geométricos como los dibujos de los mismos o se le asocian diversos significados para el término 'centímetro'. En el Caso 2 se alude a diferentes términos (v.g., forma, altura, grosor, tamaño) pero no se hace un trabajo de significación de los mismos o se asumen diferentes acepciones para un mismo término (v.g., figura) sin precisar o concretar alguno de ellos. En el Caso 3, se enuncian los términos 'número', 'cifra' y 'dígito' sin hacer una distinción entre sus significados que genera en algunos momentos dificultades en la comunicación entre el profesor y los estudiantes. En el Caso 4, para el término 'simplificar' —entre otros— no se aborda actividad alguna que le permita a los estudiantes lograr algún significado y para términos como 'variable' o 'constante' el significado asociado parece no corresponder con el procurado a través de la actividad de lectura de un texto donde se les define. En el Caso 5, la palabra 'parábola' sólo constituye una forma diferente de denotar formas curvas, pues ninguna de las actividades realizadas permiten concretar rasgos descriptivos adicionales.

Además de las notaciones y los términos, en cada uno de los casos se hace algún trabajo para aproximarse a una idea matemática o a un enunciado matemático. Tal trabajo contempla acciones como enunciar la idea y luego ejemplificarla, ilustrarla con casos particulares y luego enunciarla o hacer una actividad en donde se descubra la idea o el enunciado. Tenemos la percepción que dichas aproximaciones casi siempre quedan a medio camino o son incompletas, por tanto, en la mayoría de los casos, los estudiantes deben aprender los enunciados sin lograr una comprensión efectiva de las ideas matemáticas que les dan significados, o eventualmente la referencia al enunciado o idea matemática no va más allá del recuerdo de la actividad desarrollada o de los materiales o instrumentos que se utilizaron en la misma, como lo pudimos evidenciar en algunos casos. Por ejemplo, en el Caso 4, los estudiantes debieron aprender el enunciado "la parábola es una cónica" a través de una actividad de corte de un cono con un plano sin hacer un estudio de las características de la curva obtenida; estos mismos estudiantes recordaron una actividad en torno a la función lineal sólo cuando se les mencionó que el aquella habían utilizado papel milimetrado.

Al margen de los aspectos procedimentales y conceptuales de los temas matemáticos tratados, en algunos de los casos se aborda el estudio de algunos aspectos historiográficos de las matemáticas y casi siempre se obtiene datos o anécdotas de los mismos. Por ejemplo, en el Caso 1, la profesora propone a sus estudiantes una tarea para que consulten la historia del metro (en tanto patrón de medida) y en el Caso 2 se incluye un taller con referencias a la historia de la geometría y otro con referencias a la historia de los sistemas de numeración. Esta incorporación de la Historia de las matemáticas a los desarrollos curriculares ha sido ampliamente cuestionada y como resultado de ello se están haciendo intentos para que sean los aspectos epistemológicos de las nociones, conceptos y procedimientos matemáticos los que se incorporen y determinan los diseños curriculares, quedando relegado a un plano secundario los aspectos historiográficos; visión que compartimos plenamente.

Finalmente, reconocemos que no hay un uso de material concreto en el estudio de los aspectos aritméticos y algebraicos y que sólo en el estudio de aspectos geométricos se hace uso de tal material y de actividades con el mismo. También identificamos que en ninguno de los casos hay uso de herramientas tecnológicas ni referencia a lo que éstas pueden hacer, al margen de los instrumentos de medición utilizados en geometría. Este hecho no deja de ser preocupante, pues a través de esto se promueve la idea de que el trabajo en matemáticas es de papel y lápiz, desvirtuándose el papel que la tecnología puede cumplir en el 'hacer' y 'aprender' matemáticas.

Interacción a través de la cual discurren la enseñanza y el aprendizaje

En esta sección destacamos aspectos relativos a la interacción de los profesores con los estudiantes y de los estudiantes entre sí, en torno a la enseñanza y el aprendizaje de los temas abordados. Para ello hemos creído conveniente destacar que hay dos escenarios en los que la interacción en clase se manifiesta de maneras un poco diferentes. El primer escenario lo constituyen las exposiciones o presentación de los temas matemáticos; el segundo lo configura el trabajo individual o en grupos de estudiantes en torno a tareas propuestas por los profesores.

Para dar cuenta de la interacción hemos creído conveniente configurar un intervalo para el cual uno de los extremos está definido por las interacciones que típicamente se dan en lo que se conoce como monólogo y el otro por las interacciones que se dan en los diálogos. En el primer extremo existe un único personaje que habla o plantea reflexiones en voz alta y —como en una obra dramática— un auditorio que le observa y escucha. En el extremo opuesto se reconoce una plática entre dos o más personas, que alternativamente manifiestan sus ideas o afectos. En el primero, la interacción entre el personaje y el auditorio es casi que inexistente y las acciones del personaje parecen ser unidireccionales, es decir, parecen no modificarse sustancialmente por las reacciones del auditorio; en el segundo, se establecen un sinnúmero de interacciones entre los participantes y son definitivamente bidireccionales, es decir parecen depender de las reacciones de unos y otros.

El escenario de las presentaciones o exposiciones de los temas matemáticos

Para este escenario, los extremos del intervalo permiten ubicar sendos y correspondientes tipos de clases, a saber: las clases magistrales y las clases dialógicas. Como es de esperarse en cada uno de estos tipos de clases se definen las interacciones de manera diferente. Para precisar éstas, comenzamos, por las interacciones en las clases magistrales. En una clase de este estilo es usual que el maestro comunique a sus estudiantes un cúmulo de información teórica o práctica relativa a las matemáticas. Esta comunicación se puede dar a través de una conferencia, entendida ésta como una disertación en público sobre algún punto doctrinal en la que se pretende que el alumno participe del saber del profesor al escucharlo y verlo actuar. En ésta, el profesor hace uso de la palabra la mayor o casi totalidad del tiempo; los estudiantes (i.e., el auditorio) tienen la palabra una vez que el profesor ha expuesto y su uso se restringe a hacer preguntas al expositor para que aclare o amplíe una idea. Aquí la exposición inicia y termina según lo disponga el expositor o el horario previsto. En estas clases expositivas o bien las afirmaciones enunciadas tienen por lo regular un carácter asertivo que las asemejan a dogmas, o las justificaciones, explicaciones o demostraciones que sustentan tales afirmaciones son dogmáticas; ante esto, al auditorio no le queda más opciones que convencerse y/o memorizar tales afirmaciones. Continuemos, ahora, con las interacciones en las clases dialógicas. En una clase de este tipo normalmente se da un diálogo o plática entre dos o más personas, que alternativamente manifiestan sus ideas. En estas clases existe, en consecuencia, la posibilidad de una discusión. El uso de la palabra se alterna entre las personas que dialogan y no es normal que una de ellas se apodere de la palabra. El diálogo sobre un tópico termina cuando las personas que en éste intervienen así lo deciden y la finalización no implica que necesariamente se haya agotado la discusión. En este tipo de clases quienes intervienen en el diálogo hacen afirmaciones, formulan hipótesis o conjeturas, enuncian preguntas, etc., que vehiculan el diálogo.

Si bien intentar ubicar la interacción que se manifiesta en cada uno de los casos en una posición específica de tal intervalo es una tarea quijotesca, sí es posible establecer una posición relativa en el intervalo que permita enunciar una tendencia hacia alguno de los extremos del intervalo de la interacción de cada uno de los casos.

Como se relató en la primera sección de este capítulo, al menos cuatro de los profesores utilizan estrategias que se aproximan —más o menos— a las clases magistrales y, en este sentido, las interacciones en tales clases, al momento de presentar un tema matemático, tienden a las que se dan en un monólogo. No obstante la semejanza en la tendencia de estos casos, entre ellos podemos hacer distinciones que se definen a través del tipo de interacción que se da con sus estudiantes.

Como se reportó en la primer sección de este capítulo, en las clases de los Casos 4 y 5, las profesoras hacen exposiciones de los temas matemáticos y durante éstas involucran a los estudiantes a través de preguntas y en uno de los casos con breves tareas. Las preguntas usualmente pueden ser contestadas con una palabra o con una breve frase, pero casi nunca se formulan preguntas que exijan como respuesta una o más oraciones que expresen una idea matemática completa; las tareas son casi siempre ejercicios cortos involucrados en el procedimiento que la profesora explica en el tablero y quizá tienen como intención que los alumnos puedan ir entendiendo y memorizando fragmentos de lo que hay que hacer para llevar a cabo un determinado procedimiento. En este sentido, estas preguntas y tareas no logran vincular a los estudiantes con los aspectos centrales del tema de estudio, sino con aspectos secundarios y no ofrecen una opción legítima para que los estudiantes respondan de manera amplia. No obstante, si se asume que las preguntas tienen por intención indicar si los estudiantes están siguiendo el hilo de la presentación, podría reconocerse que las respuestas de los estudiantes sí cumplen un papel de realimentación respecto del grado de atención de ellos en la exposición, pues en algunas oportunidades ante la ausencia de respuesta las profesoras reaccionan con llamados de atención respecto de la disciplina o enfatizan algún aspecto de la exposición. Además, consideramos que para las profesoras de estos dos casos es muy importante que los estudiantes presten atención a la exposición y que no se distraigan en otras actividades, ni siquiera en copiar lo que se está exponiendo, pues esta actividad puede hacerse una vez la exposición haya terminado. En consecuencia, reconocemos que a pesar de haber una interacción a través de preguntas, tareas y respuestas, ésta es bastante restringida y, en consecuencia, no se puede hablar de la existencia de diálogo entre las profesoras y los estudiantes durante las exposiciones.

Los profesores de los Casos 1 y 3 si bien no hacen exposiciones del mismo estilo que las profesoras de los Casos 4 y 5, sí exponen temas matemáticos en sus clases, pero la interacción con sus estudiantes se da en términos un poco diferentes, dado que en ambos casos (1 y 3) los profesores involucran a los estudiantes en la exposición a través de preguntas y tareas que deben ser respondidas y desarrolladas para vehicular la exposición. Los profesores de los Casos 1 y 3 le dan la palabra a los estudiantes para que expresen públicamente y muy frecuentemente de manera oral los desarrollos a tareas que ellos han propuesto. Cuando los estudiantes están presentando sus desarrollos, los profesores y algunos pocos estudiantes escuchan la respuesta, la cual puede generar o no reacción en los profesores y casi nunca —o muy eventualmente— genera alguna reacción en sus compañeros. Las reacciones de la profesora del Caso 1 pueden indicar que la respuesta es incorrecta, que incluye algún elemento destacable (el cual casi siempre escribe de manera sintética en el tablero), que es necesario someter la respuesta a debate, que está replicando aspectos de una respuesta anterior, o que está presentando información nueva; como respuesta a estas reacciones casi nunca hay una reacción de los estudiantes que difiera de querer presentar otros desarrollos (incluso similares) aunque en ocasiones las preguntas de los profesores son asumidas por los estudiantes como adivinanzas e incorporan en sus respuestas las frases o palabras que el profesor ha mencionado, obteniendo eventualmente una aprobación tácita a tal estrategia. Por su parte, el profesor del Caso 3, además de asumir reacciones similares a las citadas antes, reacciona a las respuestas de los estudiantes formulando contrapreguntas que por lo general intentan aclarar el sentido de las mismas o los significados y afirmaciones que éstas contienen; estas reacciones generan nuevas respuestas del estudiante quien enunció la respuesta inicialmente o de algunos pocos de sus compañeros. En algunas oportunidades, esta interacción se repite varias veces con un mismo estudiante pues sus respuestas generan que el profesor enuncie nuevas contrapreguntas. En este caso, el hecho de que el profesor cumpla una función de cuestionador recurrente y el estudiante sólo se encargue de contestar las preguntas no permite que pueda ser considerada esta interacción como dialógica; aquí no se reconoce que tanto profesor como estudiantes efectivamente expresen sus ideas.

En los cuatro casos anteriores (1, 3, 4 y 5), los profesores son quienes deciden qué aspectos discutir y cuáles no, y son ellos quienes determinan cuándo se inicia y termina una discusión o cuándo no hay necesidad de enunciar preguntas y de escuchar respuestas. Por su parte, los estudiantes casi nunca cuestionan la validez de lo expuesto por el profesor o sus compañeros, muy esporádicamente enuncian preguntas, casi nunca hacen afirmaciones que sean deducciones de lo que se está exponiendo. Eventualmente, cuando preguntan, no indagan por aspectos matemáticos sino por cuestiones de forma u organización de la clase.

De otra parte, las afirmaciones que enuncian los profesores de los Casos 1, 3, 4 y 5 como parte de la presentación del tema, tienen un carácter asertivo que no ofrece la posibilidad de establecer dudas respecto de su veracidad —cuestión que al parecer a los estudiantes no les debe preocupar— y la comprensión de las mismas no va más allá de memorizarlas para repetirlas o reproducirlas en los ejercicios. Este carácter asertivo se referencia en la hipótesis E. que describe el problema de estudio del presente proyecto.

En contraste con la tendencia de los cuatro casos anteriores, el Caso 2 es el que más se aproxima al extremo donde hemos ubicado las interacciones de las clases dialógicas y el diálogo mismo. En el conjunto de clases observadas para este caso no reconocimos una sola en la que las profesoras desarrollaran una exposición oral de un tema matemático. En cada una de las clases casi siempre los estudiantes estuvieron trabajando —organizados en grupos— en talleres y las profesoras —rotándose por los grupos— interactuaban con los estudiantes en torno de los desarrollos que lograban respecto de las tareas y preguntas propuestas en las guías. De esta manera el escenario donde se da la interacción en este caso es en la revisión de las tareas desarrolladas por los estudiantes. La interacción consiste en intervenciones verbales entre alguna de las profesoras y uno de los grupos de trabajo. Esta interacción puede ser iniciada a solicitud de los estudiantes —quienes llaman a la profesora para consultarle alguna duda o para presentarle el resultado de su trabajo con las tareas del taller— o puede ser promovida por alguna de las profesoras quien indaga por las respuestas de los estudiantes a las tareas del taller. En esta interacción la profesora inicialmente se informa del aspecto a tratar (v.g., a través de la respuesta de un estudiante a una pregunta, o a través de la pregunta hecha por el estudiante) y reacciona con contrapreguntas, pide y da explicaciones, explicita o solicita que se explicite un significado, hace recomendaciones y/o sugerencias. De manera general podemos catalogar muchas de tales interacciones como diálogos en los que los estudiantes y las profesoras pueden elaborar sus intervenciones sin un condicionamiento real sobre el tiempo, sin que sean interrumpidos, sin necesidad de usar un lenguaje especializado, sin el temor a preguntar.

El escenario del trabajo individual o en grupo de estudiantes

Uno de los escenarios en que se manifiesta la interacción entre profesores y estudiantes, o entre estudiantes, lo constituye el trabajo individual o en pequeños grupos. Este tipo de trabajo comúnmente se da cuando el profesor ha asignado una tarea para ser desarrollada en clase. La interacción entre los estudiantes y el profesor se genera a partir del momento en que se propone la tarea si ésta no es comprendida por los estudiantes; en este caso los estudiantes preguntan qué deben hacer, aunque es más frecuente la pregunta acerca de cómo deben hacerlo, y el profesor vuelve a enunciar la tarea, o les explica, o inicia el desarrollo de la tarea. Cuando los estudiantes logran alguna comprensión de la tarea, inician su desarrollo y la interacción se da cuando ellos le presentan al profesor sus elaboraciones. En este caso, algunas veces los profesores manifiestan su acuerdo o desacuerdo con el desarrollo presentado, eventualmente les hacen preguntas a los estudiantes sobre el mismo o les señalan un error y en algunas oportunidades se dirigen a todo el grupo para hacer una recomendación. Así, el trabajo de los estudiantes es la fuente para que los profesores hagan comentarios personales o realicen comentarios a todo el grupo, es decir, haya una interacción entre profesor y estudiantes.

En todos los casos una vez que los profesores han asignado la tarea a ser desarrollada en el salón de clase y que los estudiantes han iniciado su desarrollo, los profesores se pasean por el salón y parecen observar los desarrollos de los estudiantes. El tiempo de duración de esta actividad es muy variado. La profesora del Caso 4 tan sólo se pasea durante un par de minutos y luego se sienta a revisar los desarrollos de tareas anteriores; otros profesores se pasean por el salón observando a los estudiantes durante la casi totalidad del tiempo asignado para el desarrollo de la tarea. En los Casos 1 y 4, como resultado de la observación de los desarrollos hechos por los estudiantes, las profesoras reaccionan con comentarios en voz alta a todo el grupo o con comentarios dirigidos a un estudiante en particular; los aspectos implicados en los comentarios aluden a errores matemáticos detectados, incluyen reconvenciones disciplinarias o sugerencias "de vida" en torno a cuestiones éticas o de comportamiento. En este sentido, las profesoras en este escenario no establecen diálogos con sus estudiantes y su interacción mantiene la proximidad con la que se establece en los monólogos. El profesor del Caso 3 casi nunca hace sus comentarios a todo el grupo y buena parte del tiempo es abordado por los estudiantes quienes le muestran los resultados de su trabajo para que él lo avale o les señale algún error, papel que cumple normalmente; en algunas oportunidades cuando el profesor decide abordar a algún estudiante al parecer lo hace porque sabe que tal estudiante requiere de un apoyo especial y la manera de darle dicho apoyo es preguntándole por lo que está haciendo y explicándole cuando el estudiante no contesta o lo hace de forma errónea. Este tipo de interacción se aproxima un poco a la que se establece en un diálogo, aunque no puede reconocerse como idéntica.

Si la intencionalidad de pasearse por el salón mirando lo que los estudiantes hacen fuera la de identificar desarrollos erróneos a las tareas, su efectividad sería cuestionable, pues en al menos dos de los casos hay evidencia de que varios estudiantes hicieron desarrollos erróneos y las profesoras no lo advirtieron. Quizá, sin embargo, sea más sensato suponer que los desplazamientos por el salón tienen como finalidad verificar que los estudiantes trabajen en la tarea, más que observar los desarrollos logrados. Por ello, tal vez, en este escenario algunas veces los profesores reaccionan ante la disciplina que expresa el grupo de estudiantes, aunque para algunos la disciplina no parece ser un elemento fundamental; en este sentido hay profesores que permiten que los estudiantes deambulen por el salón, desarrollen otro tipo de actividades y hablen de aspectos no siempre matemáticos.

En el Caso 2 este escenario de trabajo de los estudiantes y observación del mismo por parte de las profesoras es característico del trabajo de este caso y por tanto es fundamental para establecer las interacciones entre el profesor y los alumnos y entre los estudiantes. En estas interacciones se establecen diálogos en los que hay tiempo suficiente para expresar las ideas, preguntas, conjeturas y explicaciones; además, se reconoce un interés por indagar por aspectos que van más allá de los resultados, tales como la estrategia utilizada, o por la opinión ante una respuesta. Como habitualmente los estudiantes trabajan en grupo, la interacción con las profesoras también regularmente se establece con el grupo aunque eventualmente hay una interacción con alguno de los integrantes del grupo.

Esta visión de la interacción de los profesores con sus estudiantes, cuando éstos están desarrollando una tarea en clase, permite en suma reconocer que existe una correspondencia con el tipo de interacción que se establece en la presentación del tema. En efecto, en los casos que utilizan una estrategia de presentación que incorpora rasgos de una clase magistral o se aproxima a la misma —y por tanto de una interacción a través del monólogo—, no existe tampoco una interacción legítima y dialógica en la revisión y observación del trabajo de los estudiantes. En tanto que en los casos que se aproximan a una presentación del tema a través de una estrategia cercana a la implicada en clases dialógicas, existe mayor tendencia a establecer diálogos con los estudiantes en torno a sus elaboraciones, es decir a lo que pueden o no hacer y a sus justificaciones.

Durante el trabajo en grupos los estudiantes interactúan entre sí, aunque no siempre sus interacciones incorporan aspectos matemáticos. En el trabajo individual, también los estudiantes interactúan, aun trasgrediendo la condición explícita del carácter individual expresada por los profesores (por ejemplo, en una evaluación escrita). En la mayoría de los casos estudiados, las interacciones entre los estudiantes —que se establecen en el trabajo en grupo como en el individual— que se refieren a aspectos matemáticos implican la comparación de los ejercicios realizados, la indagación (con uno de los estudiantes de mejor rendimiento) acerca de la forma de hacer un ejercicio y la consiguiente explicación, la comparación de las respuestas dadas a las preguntas formuladas, entre otras. Si el aspecto no es matemático, pero ligado a la tarea, los estudiantes interactúan verbalmente para definir, por ejemplo, quién lee y quién escribe, qué y cómo se copia una respuesta, dónde se ubica el grupo y por quiénes está constituido. Ahora bien, la exigua información registrada al respecto de la interacción de los estudiantes, nos impide proporcionar más detalles de los generales ya mencionados. Sin embargo, nos atrae el hecho de que no exista una distinción en acto del trabajo individual y en grupo.

Valoración de las producciones de los estudiantes

Al estudiar los documentos de los cinco casos en cuanto al aspecto del que se ocupan las secciones cuyo título coincide con el de esta sección, se evidencia que lo válido de las producciones de los estudiantes incorpora tanto la validez matemática de las mismas como otros aspectos específicamente no matemáticos. A continuación nos referiremos, en primer lugar a aspectos de la validez matemática y enseguida a los aspectos no matemáticos.

Para abordar el aspecto de la validez matemática reconozcamos, inicialmente, que aún muchas personas suponen —a pesar de los trabajos de Gödel— que la verdad de los enunciados matemáticos depende de la posibilidad de deducirlos, por métodos hipotético-deductivos, de otros enunciados. También suponen que la validez de los procedimientos se debe reconocer en la conexión de éstos con los aspectos conceptuales y en la correcta aplicación. En últimas, se considera que en matemáticas los procesos de argumentación, explicación, demostración y comprobación son fundamentales a la hora de decidir sobre la validez de una producción matemática. En éste sentido, la validez de las ideas matemáticas debería recaer en la racionalidad. No obstante, en la mayoría de las clases observadas este principio de racionalidad no es el que orienta la validez. Al parecer tiene más peso o poder de validez una afirmación enunciada por el profesor o encontrada en un texto —por el hecho de que quién lo enuncia debe tener el conocimiento para no decir falsedades—, que las conexiones que se puedan establecer de manera racional para argumentar, explicar o demostrar.

En efecto, salvo en algunas situaciones presentadas en el Caso 2, en los demás casos los profesores son quienes tienen y hacen uso del poder de decisión sobre la validez de una de las respuestas expresadas por los estudiantes. Este papel protagónico del profesor está considerado en la hipótesis F. que ayuda a describir el problema de estudio del presente proyecto de investigación. En los Casos 1, 3, 4 y 5, el texto es considerado también una fuente de validación, sobre todo cuando se realizan ejercicios allí planteados y se dispone de un listado de respuestas a tales ejercicios. En estos casos las explicaciones o argumentaciones dadas por un estudiante no son suficientes para sustentar una postura sobre un aspecto o procedimiento matemático, si no son corroboradas por el profesor o por el texto; en este sentido, los intentos de dar participación a los estudiantes en la determinación de la validez parecen quedar a medio camino.

Este reconocimiento a la persona o al texto como fuente de verdad puede verse respaldado en el hecho de que la mayoría de las veces el profesor no enuncia ideas falsas, siempre enuncia ideas matemáticas verdaderas. El texto no puede tener información falsa, y no es frecuente cuestionar la información allí contenida; quizá la comprensión de las ideas del texto en algún momento sea objeto de estudio, pero en ningún momento la validez de las mismas se constituye en objeto de estudio. Tampoco la validez de las ideas que el profesor enuncia son objeto de estudio, aunque sí se hace un trabajo para lograr su comprensión. De esta manera se puede afirmar que la argumentación razonada no es la norma que moviliza la discusión, la enseñanza ni el aprendizaje. La pregunta acerca del por qué no es usualmente planteada por ninguno de los actores de las clases. También puede ser fuente de estas ideas el hecho de considerar que los profesores, por su saber erudito, no pueden equivocarse. Este reconocimiento parece acentuarse ante la idea de que no es usual que los profesores reconozcan cometer errores y que sea natural que lo hagan. En lo que vimos, casi siempre que un profesor comete un error, y ante la evidencia se disculpan tales errores y en cierto sentido se disculpa por ello. Además, es usual que el profesor atribuya el error a algo externo a él (por ejemplo, al hecho de que los estudiantes no estaban poniendo atención y que ellos deberían haberlo percatado al momento de suceder, o a un problema en las escalas de los dibujos hechos, etc.).

Si bien el principio de racionalidad no parece guiar la determinación de la validez de las producciones, sí lo hacen otros aspectos matemáticos. La notación constituye uno de tales aspectos. En algunos de los casos estudiados, los profesores enfatizan en que la notación matemática se debe emplear ajustada a sus normas matemáticas; por ejemplo, la profesora del Caso 1 hace reconvenciones sobre la notación de algunos objetos geométricos empleada por los estudiantes cuando pasan al tablero a escribir los desarrollos de una tarea, específicamente se preocupa por que la notación de los segmentos incluya las letras que nombran sus extremos en mayúscula, y que la línea horizontal esté ubicada sobre éstas y en sus extremos tenga dibujados pequeños segmentos verticales que denotan que "tienen principio y fin". El carácter correcto de la respuesta es otro de tales aspectos. Cuando los profesores de los Casos 3, 4 y 5 proponen como tarea la realización de un ejercicio, parecen esperar que los estudiantes, a través de la adecuada aplicación del procedimiento, encuentren *la* respuesta correcta al ejercicio. Como en la mayoría de los ejercicios esta respuesta es única, cualquier otra es incorrecta, por tanto sólo hay una opción de acertar, la cual es valorada positivamente por el profesor y por los estudiantes. Esta idea de la existencia de *la* respuesta correcta en algunas oportunidades parece proyectarse a tareas que no involucran un ejercicio matemático sino que implican el trabajo con información o con experiencias matemáticas. En este sentido, es usual que ante algunas preguntas de los profesores de los Casos 1, 3, 4 y 5 los estudiantes respondan con palabras o frases cortas que podrían ser adecuadas pero que no corresponden con la que los profesores esperar escuchar, poniendo a los estudiantes en situaciones muy parecidas a las que ofrecen las adivinanzas; como ejemplo, reseñamos un evento en el que la profesora del Caso 1 pretendía que los estudiantes contestaran que "medir es comparar", para lo cual propuso una serie de preguntas y realizó algunas actividades a las que los estudiantes contestaban correctamente aún sin enunciar la palabra 'comparar' ante lo cual fue enunciando sílabas para que los estudiantes fueran armando la palabra. La aparición en las producciones escritas de los estudiantes de las operaciones realizadas y de los pasos implementados de un algoritmo, constituyen otro de tales aspectos cuyo interés se destaca en los Casos 3 y 4. Por ejemplo, en varias oportunidades el profesor del Caso 3 solicita a los estudiantes que escriban completas las operaciones aritméticas que realizan para juzgar la divisibilidad de un número.

De otra parte, en la interacción con los estudiantes, y más precisamente con sus producciones, se observa en los Casos 1, 3, 4 y 5 que ante respuestas correctas hay una aceptación tácita o explícita por parte del profesor. Esta aceptación se reconoce a través de diferentes reacciones del profesor; por ejemplo, es usual que los profesores expresen frases cortas de aceptación a las producciones, que parafraseen la respuesta del estudiante, que hagan un gesto que evoque la aceptación, e incluso que continúen el trabajo sin cuestionar la respuesta. Este tipo de reacciones parecen configurar parte de la cultura del salón y particularmente de las clases de matemáticas; cultura que los estudiantes interiorizan y asumen de manera natural; así, interpretar tales eventos culturales constituye la forma de saber si la respuesta presentada es o no correcta. De esta cultura también hacen parte las reacciones de los profesores ante una respuesta errónea o incompleta; en efecto, los estudiantes aprenden a reconocer que por lo general los profesores sólo cuestionan las respuestas incorrectas o incompletas, repiten una pregunta varias veces cuando las respuestas que escuchan no les satisfacen, no prosiguen la clase hasta encontrar la respuesta esperada o anuncian explícitamente que la respuesta es incorrecta o que van a hacer algo (fuera del libreto o guión de la clase) para que los estudiantes puedan responder correctamente; particularmente, frente a las respuestas erróneas se señalan los errores cometidos, pero no hay un trabajo acerca de la dificultad que subyace al error evidenciado.

El Caso 2 exhibe un manejo un tanto diferente al reportado antes; allí, como parte de la cultura del salón de clase se intenta promover la argumentación como elemento de validación de las producciones de los estudiantes; son precisamente los estudiantes quienes tienen que "convencerse" y "convencer" a sus compañeros de grupo y a sus profesoras de que han comprendido lo que están estudiando, que han solucionado el problema de manera adecuada, que lo que escribieron es suficientemente claro y da cuenta efectiva del proceso y de la respuesta. Este propósito es apoyado por las profesoras a través de acciones en las que se exige y promueve la discusión de las elaboraciones.

De otra parte, como lo señalamos arriba, lo válido en la clase no sólo atiende a lo válido de las matemáticas. Incorpora otros aspectos tales como la forma de anotar las operaciones, el orden en el desarrollo de un ejercicio, el uso de sustantivos en las oraciones, la escritura de respuestas con sus respectivas preguntas, el recapitular ideas sin copiarlas textualmente. Para la profesora del Caso 4 es sumamente importante que los estudiantes desarrollen los ejercicios que les propone utilizando la misma forma de anotar que ha utilizado en su explicación y que los ejercicios estén escritos con bastante orden a tal punto que condiciona la revisión de las producciones de los estudiantes a la satisfacción de tales criterios. A los profesores de los Casos 1, 2 y 4 parece interesarles mucho que lo que los estudiantes registren por escrito en sus cuadernos como desarrollo de las tareas propuestas, tenga la información relevante y esté escrito con un lenguaje generado por los mismos estudiantes. A la profesora del Caso 1 le interesa que las respuestas verbales de los estudiantes incorporen el sustantivo al que se refieren (en el caso de que la pregunta se refiera a una definición de un objeto o procedimiento) y que al tomar nota los estudiantes copien tanto la pregunta como la respuesta.

Si bien estos requerimientos son expresados por los profesores como imprescindibles en las respuestas y producciones de los estudiantes y constituyen criterios de validez de las mismas, las acciones de los profesores mismos no siempre contribuyen a ello. Por ejemplo, es usual que la profesora del Caso 1 no copie en el tablero frases u oraciones completas y con significado para los estudiantes, sino que se limita a escribir palabras o frases breves, pero que exija que los estudiantes en sus cuadernos escriban definiciones completas a través de oraciones bien estructuradas.

Visión de la enseñanza proporcionada por las respuestas al cuestionario del profesor

Este capítulo se desarrolla a través de dos secciones en las que presentamos primero una descripción de las respuestas dadas al cuestionario del profesor y luego hacemos una discusión al respecto.

Descripción de las respuestas de los profesores al cuestionario

Antes de presentar la descripción que anuncia el título de esta sección, incluimos una breve caracterización del cuestionario. Éste está compuesto de cuatro secciones tituladas 'Clase' (quince preguntas), 'Preparación de la clase' (dieciocho preguntas), 'Planeación anual institucional' (cinco preguntas) e 'Información general' (doce preguntas). Siete preguntas del cuestionario son abiertas en el sentido de que para ellas no se sugieren respuestas posibles (e.g., la pregunta 6). Las otras preguntas plantean una serie de posibilidades, a cada una de las cuales se espera que el profesor responda, y para ello debe elegir una opción de varias planteadas (e.g., la pregunta 3 tiene siete posibilidades y cada una de ellas tiene tres opciones de respuesta: 'nunca', 'a veces', 'siempre o casi siempre'); en algunos casos, con respecto a tales posibilidades, se consideran dos o tres aspectos, con sus respectivas opciones (e.g., la pregunta 5 tiene veinticuatro posibilidades, dos aspectos a considerar y cada uno de ellos tiene tres opciones). Debido a la gran cantidad de información, se abordó el estudio de las respuestas al cuestionario con un análisis estadístico univariado —basado en estimaciones de porcentajes y medidas de tendencia central y dispersión para caracterizar las distribuciones de los datos. Sin embargo, al revisar los resultados de tales análisis se sospechó acerca de la presencia de algunas correlaciones, razón por la cual se decidió realizar para algunos pares de variables un análisis bivariado —i.e., cruzar la información de variables para indagar por la presencia de posibles correlaciones.

Es claro que el reporte de los resultados (ver Apéndice N° 5) obtenidos de las respuestas al cuestionario del profesor han implicado el procesamiento de una gran cantidad de información. En realidad, la matriz de datos que se manejó para analizar las respuestas al cuestionario del profesor contiene más de trescientos veinte variables por profesor, correspondientes a las diferentes posibilidades de respuesta que se debían considerar para cerca de cincuenta preguntas que contiene el cuestionario.

La descripción de las respuestas está organizada en cuatro apartados que corresponden con las cuatro secciones del cuestionario. En ocasiones, se agrupan los resultados correspondientes a varias preguntas con la intención de dar cuenta de manera conjunta de su revisión; ese es el caso, por ejemplo, con las dos primeras preguntas del cuestionario. Lo anterior no significa que se vayan a presentar en esta sección resultados de los análisis bivariados de correlación; es en la sección de discusión en la que comentaremos algunos de los resultados que se derivan de tales análisis.

Puesto que identificamos algunas inconsistencias en las respuestas de los profesores al cuestionario, al final de esta sección presentamos el resumen de un breve análisis hecho con el propósito de cuantificar el grado de inconsistencia para tal conjunto de respuestas.

Clase

1. y 2. Libros de texto

Sólo una quinta parte de los profesores (19%) exige siempre un libro de texto específico para sus clases. El resto de los profesores o bien no exigen un determinado libro de texto para sus clases (40%) de matemáticas o sólo a veces lo hacen (41%). Por el contrario, la mayoría sí sugiere siempre el uso de otros libros de texto (60%), y a veces el uso de otros documentos (56%). Con respecto a esto último, hay aclaraciones diversas, entre las cuales la más mencionada alude a la búsqueda de datos o documentos en internet (15%) y luego la de cualquier otro texto que tenga la información requerida (11%). Un poco menos de la mitad de los profesores utiliza siempre guías para hacer sus clases (46%) mientras que el 51% lo hace ocasionalmente.

3. Utilización de recursos en las clases

Es claro que para realizar sus clases, la mayoría de los profesores no utilizan recursos distintos al tablero, los libros de texto y el papel y lápiz, y sólo a veces el trabajo que asignan a los estudiantes implica el uso de materiales como papel milimetrado, cartulina, plastilina (71%), instrumentos como compás, escuadra, transportador (63%), juegos como las regletas, el ábaco, el geoplano, el pentominó (66%) y calculadoras no graficadoras (51%). En el caso de los instrumentos, el resto de los profesores (37%) los emplean siempre en sus clases. Un poco menos de la tercera parte de los profesores involucra siempre en sus clases el uso de materiales (26%) y sólo muy pocos profesores (8%) utilizan los juegos. Para recursos como los computadores y las calculadoras graficadoras, el no uso de ellos es incluso más crítico pues la gran mayoría de los profesores nunca los usa (58% y 83%). Por otro lado, sólo a veces los profesores (71%) proporcionan a los estudiantes trabajo que requiera consultar información con otras personas.

4. Actividades en las clases

Las actividades que más se destacan son la revisión de la tarea (76%) como primera actividad de la clase (74%); el repaso de temas vistos en clases anteriores (52%), bien como primera actividad (50%) o posiblemente involucrada en la revisión de la tarea como segunda actividad (40%); la exposición del tema por parte del profesor (57%) que se da indistintamente en diversos momentos de la clase; la resolución de ejercicios o problemas de manera individual (67%) o en grupo (57%) por parte de los estudiantes, que también ocurre en diferentes momentos de la clase; y finalmente la asignación de tareas para la casa (71%) como última actividad de la clase. Aunque el 68% de los profesores dice que en sus clases se desarrollan guías de trabajo siempre, este dato no coincide con lo reportado en la primera pregunta, donde sólo el 46% señala que usa guías para sus clases. Algunas otras actividades como la lectura de un texto corto o máxima (59%), una dinámica de integración (60%), la resolución de un acertijo (66%), la realización de una lectura (72%), las discusiones plenarias (62%), el trabajo de estudiantes en el tablero (54%), el trabajo por fuera del salón (52%), las evaluaciones cortas escritas (60%) u orales (69%), el desarrollo de parte de la tarea para la casa (60%), y las exposiciones por parte de los estudiantes (81%) son propiciadas sólo en ocasiones por la mayoría de los profesores; en general se llevan a cabo en distintos momentos de la clase, con excepción del desarrollo de parte de la tarea (52%), las evaluaciones cortas escritas (56%), las evaluaciones cortas orales (58%), el trabajo fuera del salón (82%) y la resolución de acertijos (50%) que se realizan en la parte final de las clases. Cabe destacar que la revisión de la tarea, el repaso de lo visto en clases anteriores y la asignación de tareas para la casa, son actividades que todos los profesores llevan a cabo con mayor o menor frecuencia, en sus clases.

Los tiempos de duración de las actividades más destacadas para por lo menos el 50% de los profesores que respondieron la encuesta oscilan entre diez y veinte minutos para la revisión de la tarea; entre cinco y diez minutos para el repaso; entre diez y veinticinco minutos para la resolución individual de ejercicios o problemas o entre veinte y treinta y cinco minutos para la resolución en grupo; para la exposición del tema por parte del profesor entre quince y veinte minutos y para la asignación de la tarea entre cinco y diez minutos.

5. Tareas en las clases

Algunas tareas matemáticas también pueden verse como comunes a las clases de la mayoría de los profesores, por razón de que se llevan a cabo siempre en sus clases y además son realizadas en general por todo el grupo. Estas son la búsqueda o construcción de ejemplos (60% y 61%), el análisis de ejemplos para concretar la teoría (78% y 52%); el análisis de enunciados matemáticos como definiciones, propiedades, etc., (75% y 58%); la expresión de ideas matemáticas relacionadas con los tópicos matemáticos que se tratan (53% y 60%); la sustentación de las ideas matemáticas que se exponen (68% y 38%); el establecimiento de procedimientos para resolver tipos de tareas matemáticas (51% y 50%); la formulación de preguntas relativas al tema matemático de estudio en la clase (78% y 52%); el manejo del lenguaje simbólico de las matemáticas (84% y 57%); la búsqueda de conexiones entre conceptos (59% y 62%); la búsqueda de conexiones entre procedimientos y conceptos (59% y 56%) y la búsqueda de conexiones entre temas matemáticos (57% y 49%); el análisis de enunciados de problemas (84% y 66%) y el diseño de estrategias de solución de problemas (71% y 54%); la formulación de problemas (63% y 47%). De estas tareas hay siete con respecto a las cuales todos los profesores dicen hacerlas alguna vez en sus clases; se trata de la formulación de preguntas relativas al tema matemático de estudio, el manejo del lenguaje simbólico de las matemáticas, la búsqueda de conexiones entre conceptos y la búsqueda de conexiones entre temas matemáticos, búsqueda o construcción de ejemplos, análisis de ejemplos para ver cómo se concreta la teoría y análisis de enunciados tales como definiciones o propiedades. Es interesante destacar que hay varias tareas que algunos profesores no realizan nunca en sus clases, a saber: la construcción de esquemas conceptuales (13%), la construcción de maquetas o modelos físicos (45%) y la elaboración de conjeturas (10%). Aunque se trata de bajos porcentajes de profesores, que varían entre 2% y 6%, se encontraron tareas que ellos nunca propician en sus clases y que a veces coinciden con tareas que la mayoría también dice hacer siempre. Estas son: búsqueda o construcción de contraejemplos, expresión de ideas relacionadas con los tópicos matemáticos que se tratan, elaboración de pruebas matemáticas, análisis y evaluación de pruebas, aplicación de enunciados matemáticos generales para casos particulares, establecimiento de enunciados matemáticos generales como resultado de estudiar casos particulares, establecimiento de procedimientos para resolver tipos de tareas matemáticas, utilización de diversas representaciones para un mismo concepto, traducción entre diversos sistemas de representación, búsqueda de conexiones entre procedimientos y conceptos, diseño de estrategias de solución de problemas y formulación de problemas. La única tarea en la que la mayoría de profesores dice ser ellos mismos los realizadores principales es la de la elaboración de pruebas matemáticas.

6. Tareas realizadas con frecuencia en la clase y descritas en el cuestionario

De las tareas que con más frecuencia se realizan en clase, proponer análisis de enunciados de problemas —elegida en la pregunta anterior por un alto porcentaje de profesores— fue la tarea descrita por el mayor porcentaje de profesores (19%). Por otra parte, proponer la formulación de problemas, tarea que ocupó el segundo lugar por haber sido descrita por 13% de los profesores, en la pregunta anterior no quedó dentro de las cinco reportadas como las que se realizan casi siempre. De resto, proporciones inferiores al 7% de los profesores describieron otras tareas.

7. Tareas realizadas que les son satisfactorias

Dada la diversidad de tareas descritas para esta pregunta, no se puede identificar algún tipo de tarea que sea más sobresaliente y con la cual los profesores estén altamente satisfechos porque consideran que son útiles para el aprendizaje de sus alumnos. De todas maneras, a partir de una breve mirada a las respuestas, una posible clasificación de las mismas, en cuatro categorías, es así: hay un primer tipo de tareas, en las que se identifica alusiones a algún tema particular de matemáticas (e.g., "medir el diámetro de una circunferencia con hilo y luego la longitud y se les pregunta las posibles relaciones", "graficar con figuras geométricas para conceptualizar el tema de factorización", "elaboración de limonada para trabajar el concepto de proporcionalidad"); otra, en la que se alude a acciones asociadas a la resolución de problemas (e.g., "construcción de problemas", "buscar varias soluciones a un problema", "que los alumnos inventen sus propios ejercicios", "trabajo en grupo para solucionar problemas matemáticos", "análisis de enunciados de problemas"); una tercera, en la que se identifica la alusión a actividades lúdicas o que pretenden motivar al estudiante (e.g., "colocar ejercicios sobre temas vistos y motivarlos a hacerlos con un premio en especial", "concurso diario de preguntas a cualquier estudiante de temas anteriores", "realización de un cuento con temas matemáticos", "utilización del juego didáctico llamado Rummy-Q); y una última, que contiene sugerencias de acciones metodológicas de carácter general (e.g., "consultas en páginas web", "investigación y exposición de un tema no tratado por parte del estudiante", "exposición individual en el tablero", "consulta acerca del tema o su aplicación en algo concreto de la matemática").

8. Actividades previas o posteriores a la clase
Mientras que la mayoría de los profesores (70%) siempre estudia acerca de los temas matemáticos que se tratan en las clases y los demás lo hacen a veces, menos de la mitad (40%) considera siempre con cuidado lo que pasó en la clase y el 60% lo hace sólo algunas veces.

9. Interpelaciones del profesor a los estudiantes
Las intervenciones orales de más de la mitad de los profesores siempre hacen referencia a los objetivos de aprendizaje de la clase (57%); a ideas sobre el tema matemático (67%); a instrucciones para realizar las tareas (63%); a preguntas generales sobre la claridad de lo visto (63%); a preguntas específicas sobre la comprensión (71%); a asuntos matemáticos ya tratados (68%); a comentarios sobre el hilo conductor del discurso (65%). De estos tipos de interpelaciones, cuatro de ellos están presentes en la clase por lo menos en algunas ocasiones: ideas sobre el tema matemático, preguntas generales sobre la claridad de lo visto, preguntas específicas para indagar sobre la comprensión de lo abordado y asuntos matemáticos ya tratados. La mayoría de los profesores, sólo a veces, hablan en la clase sobre las reglas de juego (61%), llaman la atención a los estudiantes (63%), formulan preguntas que ponen en conflicto las concepciones de los estudiantes (65%), y hacen comentarios sobre la validez de las participaciones (62%). Un bajo porcentaje de profesores (5%) nunca hace interpelaciones en sus clases que apunten a las reglas de juego de éstas.

10. La validez de las respuestas del estudiante
La mayoría de los profesores dijeron ser ellos quienes siempre validan las respuestas del estudiante, haciendo la corrección de la respuesta (63%) o haciéndole otras preguntas al estudiante para que vea el error (62%), estrategia esta que todos los profesores dicen utilizar en algún momento. Más de la mitad de los profesores hacen la corrección frente al curso completo (54%) y casi tres cuartas partes de los profesores, en algunas ocasiones piden a otro estudiante que corrija la respuesta de su compañero (72%). Un 13% de los profesores nunca pide a otro estudiante que corrija un error.

11. Acciones en la enseñanza
La mayoría de los profesores formalizan en algún grado los elementos teóricos con la colaboración de los estudiantes (53%) y proponen casos particulares para que los estudiantes apliquen los elementos teóricos (62%). Esta última acción se lleva a cabo aunque sea en momentos por los demás profesores. Más de la mitad de los profesores, sólo en ocasiones pone en práctica otras acciones como: presentar elementos de la teoría correspondiente a

un tema (52%), exponer elementos de la teoría a partir de casos particulares (54%), formalizar en cierta medida la teoría sin la participación de los estudiantes (62%), ilustrar mediante casos particulares la aplicación de elementos teóricos ya presentados (67%) y generar una discusión con los estudiantes que les aporte a su comprensión (59%). No pocos profesores (35%) dicen que nunca formalizan la teoría sin la participación de los estudiantes. Finalmente, presentar elementos de la teoría correspondiente a un determinado tema es también otra acción que realizan todos los profesores con frecuencia u ocasionalmente.

12. Tópicos de aritmética

La mayoría de los profesores trabaja en aritmética las operaciones de los naturales (76%) como tema inicial (61%). El orden en los naturales también es abordado por muchos profesores (54%) en primer lugar. Los demás tópicos considerados en la pregunta también son tratados en esa asignatura por la mayoría de los profesores. En particular, algunos de los temas más usualmente trabajados son: operaciones con números enteros (89%), números enteros y representación en la recta (88%), propiedades de los números enteros (88%), operaciones de números racionales (86%) y operaciones de números fraccionarios (85%), entre otros. Sin embargo, dado que la dispersión de las distribuciones que describen el orden en que se considera un tópico son todas diferentes[1] y varían entre 0.75 y 4.65, en general, no es posible establecer diferencias significativas entre el orden en que se considera un tópico específico y el orden en que se considera el tópico que le sigue o antecede (e.g. no hay una diferencia significativa entre el orden 3 en que quedaría ubicado el tópico 'Múltiplos de números naturales' y el orden 4 en que quedaría ubicado el tópico 'Operaciones con números enteros' o el orden 2 en que quedaría ubicado el tópico 'Propiedades de los números naturales'). Si a pesar de este señalamiento, tenemos en cuenta la tendencia sugerida por las medianas de las distribuciones generadas como respuesta para cada tópico, la secuenciación de tópicos sería la que se presenta en la Tabla N° 1:

Orden	Tópicos
1	Operaciones de los números naturales Orden de los números naturales
2	Propiedades de los números naturales Números enteros y representación en la recta
3	Factores de números naturales Divisores de números naturales Múltiplos de números naturales
4	Operaciones con números enteros Propiedades de los números enteros Orden de los números enteros
5	Números fraccionarios
6	No quedó definido algún tópico para este orden
7	Operaciones de números fraccionarios Fraccionarios equivalentes Números racionales

Tabla N° 4. Tópicos de aritmética considerados y posición promedio en el que se ubican.

1. Se utilizó la desviación intercuartílica como medida de dispersión.

Orden	Tópicos
8	Expresión decimal de los números fraccionarios Orden de los números racionales Números irracionales
9	Operaciones de números racionales Representación en la línea numérica de los números racionales
10	Razones y proporciones Operaciones de números decimales

Tabla N° 4. Tópicos de aritmética considerados y posición promedio en el que se ubican.

Por otra parte, los temas menos abordados por los profesores son los números irracionales (44%), las razones y proporciones (35%) los factores (32%) y divisores (31%) de los naturales.

13. Tópicos de álgebra

La mayoría de los profesores trabaja en álgebra los números fraccionarios (91%) como tema inicial (92%). Los demás tópicos considerados en la pregunta también son tratados en esa asignatura por la mayoría de los profesores pero debido a que la dispersión de las respuestas es muy grande para la mayoría de tópicos, no se puede establecer un orden común con el que los abordan, aunque se pueda indicar el orden sugerido por las medianas de cada tópico como se muestra en la Tabla N° 2. Los temas menos abordados por los profesores son las inecuaciones en una variable (24%), el orden de los números racionales (19%) y la expresión decimal de los números fraccionarios (19%). Los temas más usualmente trabajados son los números racionales (97%) y su orden (97%), las expresiones algebraicas (94%), las ecuaciones de una variable (94%) y las representaciones de la función lineal (94%).

Orden	Tópicos
1	Números fraccionarios
2	Operaciones de números fraccionarios Fraccionarios equivalentes Expresión decimal de los números fraccionarios Operaciones de números decimales
3	No quedó definido algún tópico para este orden
4	Números racionales Operaciones de números racionales
5	Orden de los números racionales Inecuaciones de una variable
6	Representación en la línea numérica de los números racionales Expresiones algebraicas
7	Representaciones (tablas, gráficas, ecuación) de función cuadrática
8	Representaciones (tablas, gráficas, ecuación) de función lineal
9	Ecuaciones de una variable

Tabla N° 5. Tópicos de álgebra considerados y posición promedio en el que se ubican.

14. Tópicos de geometría

Los tópicos que menos trabajan los profesores en sus clases de geometría son los poliedros (28%), las homotecias (35%), las reflexiones (47%), rotaciones (49%) y traslaciones en el plano (50%). Los demás temas considerados en la pregunta son tratados por la mayoría de los profesores, pero no hay un orden común con el que los abordan, con excepción de las magnitudes como longitud, área, volumen, la medición de longitudes y los ángulos que un poco menos de la mitad de los profesores trata como tópicos iniciales. El orden que se puede establecer a partir de las medianas de los órdenes asignados a los tópicos se presenta en la Tabla N° 3

Orden	Tópicos
1	No quedó definido algún tópico para este orden[a].
2	Magnitudes: longitud, área, volumen Medición de longitud
3	Medición de área Ángulos Medición de ángulos Medición de perímetros
4	Medición de volumen Triángulos Cuadriláteros Polígonos regulares
5	Polígonos irregulares Líneas de los polígonos Congruencia de polígonos Translaciones en el plano Reflexiones en el plano
6	Circunferencia Rotaciones en el plano
7	Poliedros
8	No quedó definido algún tópico para este orden
9	Homotecias

Tabla N° 6. Tópicos de geometría considerados y posición promedio en el que se ubican.

a. En realidad los tópicos mencionados por cada uno de los siete profesores que respondieron la opción de otro tópico de inicio, fueron: "Posición de rectas", "Verticalidad y horizontalidad", "Líneas notables del triángulo", "Perpendicularidad y paralelismo", "Semejanza de figuras, relaciones métricas en triángulos y circunferencia", "Punto, línea, semirrecta, segmento y plano" y "Solución de problemas cotidianos y actividades lúdicas".

15. Otras asignaturas de matemáticas enseñadas

Más de la mitad de los profesores (68%) no respondió la pregunta. De los profesores que sí la respondieron, 15% mencionó que está considerando la estadística como asignatura del currículo de matemáticas; sin embargo, apenas la cuarta parte de ese grupo detalló los contenidos incluidos en tal asignatura.

Preparación de clase

16. 17. 18. y 19. Participación de otros en la preparación de clase

Todos los profesores preparan clase; 38% lo hacen tanto en su jornada laboral como fuera de ella; 46% lo hacen exclusivamente fuera de su jornada laboral y 16%, sólo en su jornada laboral. No es usual que la preparación de las clases se realice en conjunto con otras personas y únicamente en algunas oportunidades esto se da para un poco más de la mitad de los profesores (59%). En general, estas personas son el coordinador de área, el grupo total de profesores del área, los estudiantes, y otras personas. De los profesores que dicen preparar la clase en conjunto con alguien, ninguno lo hace con sólo una parte de los profesores del Área de Matemáticas. La mayoría sólo a veces lleva un registro escrito de dicha preparación (62%) y únicamente el 36% lo hace siempre.

20. 21. y 22. Metas generales de la formación matemática y objetivos de aprendizaje

Casi todos los profesores (97%) establecen metas generales relativas a la formación matemática de sus estudiantes, entre las cuales se destacan, en los dos primeros lugares, las que aluden al desarrollo de la capacidad de resolución de problemas (27%) y luego las que se refieren a la adquisición de conceptos básicos (14%). Así mismo, muchos profesores (78%) explicitan objetivos de aprendizaje para los distintos temas matemáticos que tratan en sus clases, lo que no concuerda con las respuestas expresadas en la pregunta 9, en donde sólo el 57% dijo hablar de los objetivos a sus estudiantes. Además la mayoría de los profesores indica que la influencia de dichos objetivos en lo que prepara para sus clases es definitiva (74%) y que preven algún procedimiento para verificar el cumplimiento de dichos objetivos (78%). Los demás profesores ocasionalmente preven este procedimiento y sus preparaciones de clase están sólo a veces influidas por los objetivos.

23. Preparación de clase

Una práctica común parece ser la preparación de toda una secuencia de clases a la vez, lo que la mayoría de los profesores hace siempre (80%) y el resto lo hace a veces; en algunas oportunidades los profesores preparan una sola clase (43%) o las clases de una semana (55%), y un número menor de profesores no lo hace nunca (16% y 24%).

24. 25. y 26. Recursos utilizados en la preparación de clase

El único recurso que la mayoría de los profesores utiliza siempre, y el resto de los profesores a veces, para la preparación de clase es el plan de estudios de la asignatura (75%), y en alguna medida la información sobre las clases anteriores (54%). Los demás recursos son usados solamente en ocasiones y por números variables de profesores. Se resaltan recursos como los aportes de los colegas (80%), los lineamientos curriculares (71%), las respuestas de los estudiantes (63%), el libro de texto (55%), las preparaciones de clases hechas previamente (52%) y otros documentos (59%). Las calculadoras graficadoras y los computadores no son usados por gran cantidad de profesores (70%) y (41%); el 45% de los profesores utiliza computadores en las preparaciones pero no se indica si es con el fin de planear actividades para que los estudiantes trabajen con dicho recurso. Esto concuerda con lo expresado por los profesores en la pregunta 3, en especial lo que hace referencia a las calculadoras graficadoras. De los profesores que emplean un libro de texto para la preparación de clase, la mayoría consulta a veces de manera indistinta la forma de presentar la teoría (77%), los problemas o ejercicios (52%) y otras ideas (68%) que allí se exponen. El 53% de los profesores que utiliza documentos en la preparación de sus clases, hace siempre consultas de tipo matemático y el resto de estos profesores, lo hace a veces. Las consultas de tipo didáctico, histórico o de otro tipo las hacen la mayor parte de los profesores, ocasionalmente (67%, 51%, 57%, respectivamente). Un 4% de los profesores nunca hace consultas de tipo didáctico y un 18% de tipo histórico.

27. Propósito de las evaluaciones

Las evaluaciones que hacen más de la mitad de los profesores a sus estudiantes tienen siempre el propósito de determinar el conocimiento adquirido (65%), conocer el estado de comprensión (89%), detectar dificultades (84%), dar realimentación (59%) y realimentar su práctica (58%). Para un poco menos de la mitad de los profesores, las evaluaciones siempre tienen como propósito ejercitar habilidades o algoritmos (42%) y para la mitad, desarrollar habilidades de comunicación (50%). Para una proporción alta de profesores las evaluaciones nunca tienen la intención de cumplir con un requisito administrativo (65%) y para una proporción menor de profesores, las evaluaciones nunca se hacen con la intención de entrenar a los estudiantes en resolución de evaluaciones (38%).

28. y 32. Quién hace la evaluación

La mayor parte de los profesores son los encargados de hacer la evaluación de los estudiantes (77%), mientras que en algunas oportunidades los profesores (73%) propician que sea el mismo estudiante quien haga su propia evaluación. De los profesores que dicen que ellos sólo evalúan algunas veces (23%), apenas el 7% propone que el que siempre evalúe sea el mismo estudiante u otro estudiante del curso. (Lo que significa que para cerca de una quinta parte de los profesores podrían existir evaluaciones en los que ni ellos ni tampoco los estudiantes son los que evalúan). La evaluación a cargo de otros estudiantes del curso nunca se da para la mitad de los profesores (50%) y a veces para el 41% de los profesores. Para evaluar a los estudiantes, 65% de los profesores lo hacen casi siempre a través de trabajo individual, mientras que 37% casi siempre lo hacen mediante trabajo en grupo. En ocasiones, el 35% de los profesores hace evaluación individual y el 60%, en grupo. Unos pocos profesores (3%) nunca hacen evaluación en grupo.

29. Cómo se hacen las evaluaciones

Aunque el 58% de los profesores dice evaluar a sus estudiantes siempre a través del trabajo realizado en clase durante el proceso de aprendizaje, y el resto de los profesores dice hacerlo a veces (42%), más de la mitad de los profesores evalúa en ocasiones a sus estudiantes mediante pruebas escritas (56%), orales (73%), o trabajo realizado por fuera de la clase (56%) al final de un proceso de aprendizaje. Un 60% de profesores, a veces, evalúan a sus estudiantes durante el proceso de aprendizaje utilizando trabajo realizado por fuera de clase y, en ocasiones, un 68% de profesores lo hace usando entrevistas para ahondar en los procesos realizados. Una pequeña proporción de profesores (4%) afirman que nunca realizan pruebas orales o escritas al final de un proceso particular de aprendizaje, y un poco más que nunca hacen entrevista a sus estudiantes para evaluarlos (24%).

30. Qué tienen que responder los estudiantes en las evaluaciones

Gran parte de los profesores dicen hacer evaluaciones a sus estudiantes donde deben siempre resolver problemas (61%). Más de la mitad de los profesores hace ocasionalmente evaluaciones que implican distinto tipo de trabajo de parte del estudiante, como responder preguntas de selección múltiple (62%), responder preguntas de verdadero o falso (56%), responder preguntas de completar información (56%), responder preguntas cuya respuesta es conocida (66%), aplicar procedimientos o algoritmos conocidos (65%), presentar diversas estrategias de solución (57%), construir ejemplos (70%), formular problemas (60%), escribir textos (67%), probar enunciados (63%) y realizar proyectos (54%). Algunos profesores nunca proponen a sus estudiantes en las evaluaciones tareas como las cuatro primeras (33%, 42%, 38%, 23%, respectivamente) que se indicaron, y como escribir textos (26%), probar enunciados (17%) y realizar proyectos (36%).

31. En las evaluaciones es posible usar recursos
Pocos profesores contemplan siempre para las evaluaciones de los estudiantes la consulta de apuntes o del libro de texto (35%), el uso de material didáctico (12%), de computadores o calculadoras graficadoras (3%) o de otras calculadoras (5%), y para estos dos últimos recursos el número de profesores que nunca los utiliza es alto (66%, 50%, respectivamente). En preguntas anteriores sobre el desarrollo y preparación de las clases, también las respuestas al empleo de computadores o calculadoras graficadoras han sido escasas, en coherencia con lo dicho aquí. En ocasiones varios de los profesores contemplan el uso de los recursos mencionados durante las evaluaciones (56%, 75%, 31%, 45%, respectivamente).

33. Qué se tiene en cuenta en las evaluaciones
Los indicios de aprendizaje que más de la mitad de los profesores siempre tienen en cuenta en las evaluaciones de sus estudiantes, son las estrategias seleccionadas (62%), los procedimientos realizados (74%), las representaciones utilizadas (58%), los enunciados construidos (54%), los argumentos planteados (69%) y las explicaciones suministradas (53%). Por otro lado, más de la mitad de los profesores considera a veces como indicios de aprendizaje de sus estudiantes, las fórmulas usadas (58%), los algoritmos seguidos (53%) y los textos elaborados (54%). Cabe resaltar que un poco menos de la mitad de los profesores (47%) sólo ocasionalmente considera la respuesta final como indicio de aprendizaje y un 30% nunca la tiene en cuenta.

Planeación anual institucional

34. 35. y 36. Planeación anual
En casi todas las instituciones en las que laboran los profesores se hace planeación anual (97%), y en ésta participan principalmente el coordinador académico (54%), el jefe del Departamento de Matemáticas (78%), el coordinador del Área de Matemáticas (70%) y los profesores (95%) del Area de Matemáticas. En pocas instituciones participa el rector (19%) y los profesores de otras áreas (35%). El papel de la mayoría de los profesores de matemáticas en dicha planeación siempre es activo y consiste en hacer propuestas (68%), hacer análisis de las propuestas planteadas (63%), participar de las decisiones (73%), escuchar y comentar críticamente (73%). Es así como el 82% de los profesores asegura que nunca en la planeación se sienta a escuchar y no participar.

37. Asuntos que se tratan en la planeación
Asuntos como la selección de los libros (97%) y los materiales didácticos (86%) que se van a usar en las clases, los temas matemáticos que se van a tratar allí (70%), el enfoque que se va a adoptar para la resolución de problemas (90%), los objetivos de tal enfoque (76%), los indicadores de logro (92%) y el esquema de recuperación de logros (81%), la realización de actividades como las olimpíadas matemáticas (70%), y lo relativo a la atención a padres (78%) y la entrega de informes (71%), son tratados en la planeación de la mayoría de las instituciones. También allí en menos instituciones se abordan cuestiones relativas a la carga laboral (63%), las condiciones para la pérdida de año (62%), los horarios de clase (54%) y otras actividades como exposiciones o ferias (54%). En un número aun menor se tratan los demás asuntos considerados en la pregunta.

38. Influencias en la determinación del currículo de matemáticas
Una influencia marcada y definitiva en la determinación del currículo de matemáticas en un poco más de la mitad de las instituciones (57%) son los mismos profesores de matemáticas. Los padres de familia tiene poca influencia en dicha determinación en el 32% de las instituciones y ninguna en el 57%. El rector tampoco tiene mucha influencia en general y en el 32% de las instituciones no tiene ninguna. Los demás factores considerados en la pre-

gunta influyen en el currículo sólo en ocasiones en números de instituciones que varían entre el 40% y el 46%.

Información general

39. 40. 41. y 42. Género, edad, experiencia y educación

De los profesores de matemáticas encuestados, 54% son mujeres y los demás, hombres. Las edades del 58% de los profesores oscilan entre los treinta y los cuarenta y nueve años. Solamente el 5% tiene menos de veinticinco años y el 2% más de sesenta años. El 49% ha hecho una Licenciatura en Matemáticas. Varios profesores tienen Licenciatura en Física (21%) y un número reducido sólo ha cursado estudios hasta terminar el bachillerato (24%). El 38% ha hecho una especialización y el 11% tiene una maestría. Ninguno ha hecho estudios de doctorado. Con respecto a la experiencia laboral, si bien se reportan dos casos extremos —uno, de menos de un año y el otro, de treinta y cinco— por lo menos el 50% de la muestra tiene una experiencia en la enseñanza de las matemáticas que oscila entre los siete y los veinte años.

42. 43. y 44. Grados en que enseña y ha enseñado

Un 40% de los profesores enseña este año matemáticas en grado 9°; porcentajes similares de profesores enseñan matemáticas en los grados 6°, 7° y 8°. Algunos de estos mismos profesores también están enseñando en los grados 10° (29%) y 11° (24%). De igual manera la mayoría de estos profesores han enseñado en casi todos los grados de secundaria; 6° (70%), 7° (66%), 8° (76%), 9° (74%), 10° (65%), 11° (55%). El promedio de estudiantes de los cursos del 50% de los profesores oscila entre treinta y siete y cuarenta y cinco, de los demás cursos los casos extremos son los de un cursos que tiene cincuenta y tres alumnos y el de otro que tiene veintiséis alumnos.

46. Horas a la semana dedicadas para actividades

De aquellos profesores que durante la jornada laboral o en ambas jornadas dedican algo de su tiempo a la realización de actividades como las mencionadas en la pregunta, el 50% le dedica durante la jornada laboral de una a cuatro horas a la semana para evaluar a sus estudiantes, entre dos y cuatro horas para la preparación de clase[2] y de una a dos horas, para las demás actividades consideradas en la pregunta. Por otra parte, de aquellos profesores que fuera de la jornada laboral o en ambas jornadas dedican algo de su tiempo a la realización de actividades como las mencionadas en la pregunta, el 50% de los profesores dedica por fuera de la jornada laboral de dos a cinco horas a la semana a la preparación de clase —aumento que podría explicarse por lo dicho en la pregunta 23 donde se dice que el 80% de los profesores prepara clase de una vez para toda una secuencia de clases— entre media hora y cuatro horas, a la atención y evaluación de los estudiantes, entre dos y tres horas a la elaboración de parceladores o informes administrativos, entre una y dos horas a la atención a padres u otras labores administrativas, entre dos y cuatro horas en actividades como dirección de grupo y celebraciones y máximo una hora para reuniones de área.

47. y 49. Otras actividades de desarrollo profesional

El 59% de los profesores encuestados realiza siempre lecturas de documentos relativos a su práctica y los demás profesores lo hacen a veces (41%). En ocasiones los profesores escriben sobre experiencias de su práctica (62%), se reúnen con colegas para discutir asuntos de su práctica (63%) o hacen presentaciones o charlas sobre su trabajo (62%). Tanto la

2. La proporción de profesores que respondieron a la pregunta 46a, sin importar la respuesta numérica que dieran, no fue similar a la de los profesores que respondieron en la pregunta 18, que indagaba acerca de quiénes preparaban la clase en la jornada laboral o en ambas jornadas. Así pues, este es un ejemplo entre otros, de algunas inconsistencias que se detectaron en los análisis de datos y que se reportan en el último apartado de la descripción.

escritura de documentos como las presentaciones son actividades que algunos profesores nunca llevan a cabo (21% y 15% respectivamente). Con respecto a la participación en actividades relacionadas con las matemáticas o con la Educación Matemática como seminarios, congresos, programas de formación, proyectos de innovación o investigación, un número no muy alto de estos profesores lo hacen a menudo (32%, 28%, 27% y 20% respectivamente), mientras que mayor cantidad de estos profesores lo hace a veces (65%, 60%, 64%, 56%, respectivamente). Los congresos o eventos y los proyectos de innovación o investigación son las dos actividades a las que mayor porcentaje de profesores dicen nunca asistir (12% y 24%).

48. Asuntos que dificultan la enseñanza

Un asunto que siempre dificulta la enseñanza para más de la mitad de estos profesores, es la gran cantidad de estudiantes por curso 52%. Los demás asuntos mencionados en la pregunta son todos causa de dificultad algunas veces para varios de los profesores. Asuntos como la falta de motivación, de conocimiento matemático o didáctico, y de experiencia del profesor, nunca generan dificultades en su enseñanza para más de la mitad de los profesores (53%, 78%, 59%, 74%, respectivamente). También para más de la mitad de los profesores, asuntos como el deterioro de las instalaciones físicas de la institución (64%), la rigidez del plan de estudios de la asignatura (66%), la presión de las directivas (60%), las diferentes visiones de los compañeros (61%), nunca dificultan su enseñanza.

Consistencia de algunas respuestas de los profesores

El listado de los pares de preguntas que permiten controlar la consistencia en las respectivas respuestas dadas, se presenta en el siguiente cuadro. Dichas parejas de preguntas configuran casos en los que la respuesta que se dé a una de las preguntas de la pareja debe afectar la respuesta que sería razonable dar a la otra pregunta, si se está respondiendo de manera coherente. En la primera fila del cuadro se hace referencia a las parejas de preguntas de acuerdo con la respectiva numeración en el cuestionario. En la segunda fila del cuadro se presenta para cada pareja de preguntas el porcentaje de cuestionarios en los que se identificó inconsistencia; tal porcentaje se obtuvo revisando los cuestionarios, uno a uno.

Preguntas de control	46a, 18	1c, 4q	3d, 24j	3f, 24i	16, 7	24a, 25(a, b, c)	24g, 26	9c, 21
Porcentaje inconsistencia	23%	10%	22%	22%	9%	6%	0%	0%

A partir de los valores porcentuales presentados en el cuadro, se puede calcular el porcentaje promedio de inconsistencias que resulta ser de 11.5%, lo cual en términos absolutos significa que siete profesores en promedio, de los sesenta y tres que respondieron el cuestionario no respondieron en forma consistente a las preguntas de control que se presentan en la tabla.

Discusión acerca de las respuestas de los profesores

La discusión que ahora nos proponemos abordar va a incorporar algunos comentarios relativos a la valoración de las correlaciones sugeridas por los análisis de correlación; además, se contrastarán algunas de las tendencias más llamativas que fueron reportadas en la descripción, con los resultados que aportan la observación directa de las clases. Por lo general, en la discusión se aludirá en algunas partes a posiciones particulares reportadas en la literatura con respecto al asunto en cuestión. Por ejemplo, en el primer apartado, se hará mención a asuntos que Gregg (1995, p. 443) plantea como descriptores de una práctica tradicional tales como la rutina de las actividades de clase, las formas que toma la interacción verbal entre profesor y estudiantes y a la autoridad del profesor y del libro de texto en el salón de clase con respecto al conocimiento matemático.

Para la discusión, las ideas relativas a los asuntos que tienen que ver con la clase se han organizado en categorías de análisis similares a las empleadas para la descripción y discusión de los análisis de los cinco casos. En el resto de la discusión se consideran algunos asuntos que no fueron enfocados en la observación de clase bien porque se decidió no hacerlo o porque no se podía dar cuenta de ellos a través de la observación directa.

Así, pues, la discusión sobre asuntos de la clase alude en primer lugar a aspectos del esquema general de la clase en términos de las actividades principales que se desarrollan en ella, del orden en que se realizan, del tiempo que se dedica a ellas y de los recursos utilizados por los profesores en las clases. Luego, se da cuenta de aspectos relativos a la interacción a través de la cual discurren la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en términos de las interpelaciones que el profesor le hace al estudiante en la clase, de las principales tareas que se ponen en juego en el desarrollo de la misma y del tipo de acciones que acompañan el desarrollo curricular. Después, con el propósito de discutir si es posible establecer una ruta temática para la enseñanza de cada una de las áreas consideradas, se da cuenta de los tópicos que son abordados con más frecuencia en los currículos de aritmética, álgebra y geometría y al posible orden en el que ellos se abordan en el desarrollo curricular. Por último y para cerrar esta primera parte de discusión, se alude brevemente a la manera como se validan las repuestas del estudiante por parte del profesor.

En cuanto a lo que se refiere a la segunda sección del cuestionario, 'Preparación de la clase', se pueden identificar dos grandes bloques de preguntas: unas preguntas (las preguntas 8[3] y 16 a 26) que se enfocan en la actividad de preparación de clase y consideran asuntos tales como: con quién suele el profesor preparar la clase y en qué momento lo hace, qué metas para la formación matemática de los estudiantes establece y qué recursos suele utilizar; por otra parte, hay un segundo bloque de preguntas (preguntas 27 a 33) que enfocan aspectos de la evaluación tales como los medios que utiliza el profesor para evaluar, tipos de preguntas que debe responder el estudiante y esquemas de valoración a los que recurre y asuntos en los que se fija el profesor al evaluar. Así pues, la discusión asociada a esta parte, se dividirá en dos apartados uno titulado 'Preparación de la clase' y el otro 'Evaluación'.

La planeación anual institucional y la información general sobre los profesores son las dos partes finales que contiene el cuestionario. Los resultados considerados en lo que tiene que ver con la planeación permiten hacer algunos breves comentarios alusivos al papel que juegan en la planeación algunos de los miembros de la institución implicados en las decisiones sobre los asuntos de enseñanza. Por otra parte, la mayoría de preguntas consideradas en la sección de información general, con excepción de la pregunta 48, remiten a la descripción de características demográficas de la muestra de estudio, asunto del que se da cuenta en el marco metodológico. Por ello, en el último apartado de esta discusión sólo se hace alusión a los asuntos que desde la perspectiva de los profesores dificultan la enseñanza de las matemáticas.

La clase

Esquema general

El esquema general de la clase que parece imperar entre los profesores de matemáticas que respondieron el cuestionario, está configurado por actividades como la revisión de la tarea asignada para realizar por fuera de la clase, el repaso de temas vistos en clases anteriores, la exposición de un nuevo tema por parte del profesor, la resolución —individual o en grupos— de ejercicios o problemas por parte de los estudiantes y la asignación de la tarea para la siguiente clase. Este resultado está en consonancia con lo observado al res-

3. Aunque la pregunta 8 está propuesta en la sección del cuestionario titulada 'Clase', para propósitos de la discusión encontramos que es más pertinente agruparla con el primer bloque de preguntas de la sección titulada 'Preparación de la clase'.

pecto para los casos considerados en este estudio y también concuerda con la caracterización hecha por Gregg (1995, p. 443) en lo que concierne a la rutina de las actividades de clase en su descripción de las matemáticas tradicionales. Lo más usual es que la revisión de la tarea se haga al comenzar la clase y la asignación de la tarea para la siguiente sesión al finalizar, mientras que las otras actividades se realizan en momentos intermedios de la clase. Se halló una diferencia relativamente importante entre el porcentaje de profesores que dicen —en la pregunta 4q, referida a las actividades de clase— que en sus clases siempre se desarrollan guías de trabajo y los que dicen —en la pregunta 1c, referida a los documentos utilizados en clase— que siempre propone el uso de guías. Esta diferencia que podría interpretarse como una falta de coherencia en las respuestas de los profesores, la vemos más bien como un índice de que diferentes profesores dan diferente significado a la expresión 'guía de trabajo', e incluso, un mismo profesor puede no tener un significado preciso y único para la expresión. Esta apreciación tiene su origen en la observación a las clases de los profesores. En una de las clases observadas pudimos advertir que se habló de "guía de trabajo" (o "taller") para referirse a un grupo de ejercicios del libro de texto que constituyeron una tarea para los estudiantes durante la clase, después de haber sido explicado un procedimiento que ejemplificaba cómo solucionarlos; en otras clases, el término hizo referencia a una serie de tareas enunciadas por escrito en un documento que se entregó a los alumnos, tareas para las cuales no hubo una explicación previa de parte de las profesoras, y para las mismas profesoras, otras guías de trabajo hacían referencia a un documento en el que presentaban la teoría del tema que se iba a tratar, los ejemplos y los ejercicios y tareas que debían realizar los estudiantes.

Una mirada a los resultados referentes a los recursos utilizados por el profesor en la clase, pone de manifiesto que la tendencia de los profesores a no exigir un libro de texto específico para el desarrollo del currículo de matemáticas, no redunda en la utilización más frecuente de guías de trabajo. De hecho, el análisis más cuidadoso de los resultados en torno a este asunto no sugiere la presencia de una relación estadística entre los hechos de recurrir al uso de guías y el de asignar un texto específico para utilizar en el aula ($p = 0.40$)[4] o el de sugerir el uso de otros libros de texto ($p = 0.34$) y sustenta la hipótesis de que no hay relación entre estos hechos, independientemente de lo que los profesores encuestados entiendan por usar guías de trabajo.

En lo que se refiere a la utilización habitual de recursos diferentes al tablero, al lápiz y al papel, lo apenas destacable —y que aplica más a los currículos de geometría— es la utilización de instrumentos como el compás, la escuadra, el transportador, etc. Es llamativa la poca utilización de las calculadoras graficadoras o de los computadores para el desarrollo de las clases. Una revisión detenida a los resultados de la pregunta 3 del cuestionario, permitió corroborar que un porcentaje considerable de los profesores que nunca utilizan la calculadora graficadora o el computador, recurre al menos ocasionalmente a la utilización de materiales tales como el papel milimetrado, la cartulina, la plastilina, etc.; en realidad se encontró una correlación muy significativa ($p = 0.001$) entre la utilización de materiales y calculadora graficadora, y una correlación moderadamente significativa ($p = 0.12$) entre la utilización de materiales y computador. Con respecto a este resultado hay dos cuestiones que cabe señalar. Por un lado, la diferencia en la grado de significación de los dos casos mencionados posiblemente se pueda explicar por la disponibilidad del recurso, ya que mientras en la mayoría de los colegios considerados hay computadores disponibles para uso de los docentes, en muy pocas instituciones cuentan hay calculadoras graficadoras. Sin

4. Puesto que se utilizaron pruebas de significación estadística para tratar de identificar relaciones de dependencia entre las respuestas dadas a preguntas del cuestionario, seleccionadas por los investigadores, de ahora en adelante, en los casos en que se haga referencia a posibles correlaciones, se expondrán entre paréntesis, los resultados de los p-valores de significación estadística asociados a la hipótesis en cuestión. Cabe señalar que el uso de los valores de significación en este estudio sólo pretenden ser descriptores de la intensidad de una relación y en consecuencia no tienen un carácter inferencial: sólo describen características de la muestra.

embargo y por otro lado, una idea que parece ser compartida por una buena cantidad de profesores es que en el aprendizaje del estudiante se deben abrir espacios para que éste tenga oportunidades de hacer por sí mismo tareas que desarrollen sus habilidades de cálculo o para elaborar gráficas, y entonces, las calculadoras graficadoras o los computadores no incentivan este tipo de trabajo, ya que hace por el estudiante las cosas y por tanto. Así pues, bajo esta perspectiva es explicable que el profesor que está dispuesto a usar materiales concretos que propician el hacer del estudiante, no esté bien dispuesto a promover el uso de un recurso tecnológico. En todo caso, lo anterior sólo concuerda parcialmente con lo observado en las clases donde se vio que en pocas situaciones se utilizaron algunos materiales e instrumentos como los señalados.

Interpelaciones, tareas y acciones de enseñanza que predominan

Son varios los tipos de interpelaciones, en términos de su contenido, que altos porcentajes de profesores (más de 56%) dicen hacer usualmente en sus clases. Sin embargo, esos resultados no siempre coinciden con las observaciones realizadas en la clases. En la Tabla N° 4 se presentan en la primera columna y orden decreciente el tipo de interpelaciones que predominan según las respuestas de los profesores al cuestionario y en la segunda columna se contrasta este resultado con la manera como dicho asunto fue registrado en las clases observadas.

Contenido de las interpelaciones usuales de los profesores según los resultados de los cuestionarios	Validación del tipo de interpelación en las clases observadas
Preguntas específicas para indagar en la comprensión (71%).	En cuatro de los colegios se presentaron con alguna frecuencia; incluso, en todas las clases de uno de ellos se registraron interpelaciones de este tipo. Sin embargo, con muy poca frecuencia se registraron en las clases de otro de los colegios.
Recordar asuntos matemáticos ya tratados (68%).	En un colegio esto nunca se registró. En los demás sí se registró este tipo de interpelaciones por lo menos en una o más de las clases.
Ideas sobre el tema matemático que se está tratando (67%).	Siempre que en la clase se trató un tema matemático, algunas de las interpelaciones del profesor se referían a ideas matemáticas.
Comentarios que indican el hilo conductor del discurso en clase (65%).	Pocas veces se registraron este tipo de comentarios e incluso en dos de los colegios nunca se presentaron.
Preguntas generales sobre la claridad de lo visto (63%).	En los cinco colegios se presentaron, con frecuencia, interpelaciones —no necesariamente preguntas— de este tipo.
Instrucciones para realizar algo (63%).	Con excepción de las clases observadas en uno de los colegios, en las demás fueron muy frecuentes las interpelaciones del profesor para dar instrucciones
Objetivos de aprendizaje de la sesión (57%).	En tres de los casos observados se hacía una breve alusión a los objetivos de la sesión aunque no en todas las clases. Incluso en uno de los colegios, en ninguna de las clases observadas el profesor aludió a los objetivos de aprendizaje. Por otro lado, en otro colegio siempre se explicitaron los objetivos en la guía de trabajo

Tabla N° 7. Interpelaciones que predominan y validación de las mismas a través de la observación directa de clases.

Si de los resultados obtenidos en los cuestionarios con respecto al tipo de interpelaciones del profesor en su clase, nos enfocamos en aquellos en que se ve concordancia con las observaciones hechas de manera directa, parece razonable afirmar para los profesores encuestados que las interpelaciones que con más frecuencia hacen en sus clases tienen que ver con las instrucciones para realizar algo o se refieren a ideas sobre el tema matemático que estén tratando; con alguna frecuencia se encontrará que los profesores hacen preguntas generales sobre la claridad de lo visto o formulan preguntas específicas para indagar en la comprensión; y será mucho menos frecuente que se refieran a los objetivos de aprendizaje de la sesión o hagan comentarios para indicar el hilo conductor del discurso en clase.

Los demás tipos de interpelaciones no mencionados en la Tabla N° 4 se registraron con diferente frecuencia en las clases observadas. En realidad, se podría esperar que interpelaciones de tales tipos se presenten con mayor o menor frecuencia si atendemos a lo registrado en las clases observadas. Por ejemplo, bien podría suceder que en sus clases un profesor de la muestra de estudio, haga llamados de atención sobre asuntos disciplinarios o haga comentarios directos sobre la validez del trabajo y de las respuestas de los estudiantes, con más frecuencia que la que aparece reportada en los cuestionarios; por otra parte, de manera más ocasional un observador podría registrar que el profesor se refiere a las reglas del juego para la clase o formula preguntas que ponen en conflicto las concepciones de los estudiantes.

Con respecto a las tareas que se llevan a cabo en la clase, los resultados del cuestionario destacan dos tipos de ellas: el manejo del lenguaje simbólico de las matemáticas y el análisis de enunciados de problemas. El primero, tal como se observa en por lo menos tres de los casos estudiados, es consecuente con una visión de las matemáticas en la que el formalismo de las mismas, se promueve a través de prestarle más atención al manejo sintáctico de los símbolos que al significado propio de la notación. Esta caracterización particular del manejo simbólico la vemos sólo como eso, y no como un resultado que apoye o sustente la idea de que hay un mayor énfasis "en las matemáticas formales —es decir, en las matemáticas presentadas como una colección de hechos y procedimientos" (Greg, 1995)— que sea precisamente el que explique el énfasis en el manejo del lenguaje simbólico.

Por su parte, el resultado que alude a que frecuentemente se plantea un trabajo conjunto de interacción entre profesor y todo el grupo de estudiantes en torno al análisis de enunciados de problemas, difiere de manera considerable de lo observado en las clases. Sólo en dos colegios vimos hacer algo para analizar el enunciado de problemas: en uno de ellos, tal tarea estuvo ligada al tema de la solución de sistemas de ecuaciones y los enunciados involucrados se podían traducir casi que directamente de la forma verbal a la simbólica; en el otro colegio, la tarea estuvo inmersa en una actividad cuya realización requería más de una hora de clase y dado que pretendía promover el razonamiento lógico, se puede ver como un caso más claro de análisis de enunciados de problemas. Quizás el resultado tan destacado en las respuestas de los cuestionarios con respecto a esta tarea, puede obedecer más a la intención de los profesores de expresar un "deber ser" que a lo que en la práctica realmente logran materializar.

Otras tareas que se llevan a cabo en la clase, y que los resultados del cuestionario también las destacan son: el análisis de ejemplos para concretar la teoría, que se observó en al menos tres de las clases; la formulación de preguntas relativas al tema matemático de estudio en la clase, que apenas se observó en dos de las clase, en las que de todas maneras las preguntas fueron mínimas y se contestaban con dos o tres palabras. Por otra parte, las demás tareas que ahora mencionamos prácticamente no se evidenciaron en las clases observadas: el análisis de enunciados matemáticos —como definiciones, propiedades, etc.— no se propició en las clases observadas; el diseño de estrategias de solución de problemas, sólo fue observado en una de las clases; la sustentación de ideas matemáticas que se exponen en clase, que lo observado en las clases fue que no se solicitaban y por tanto no se sustentaban las ideas por parte de los estudiantes; y por último, la formulación de problemas, tarea que no se impulsó en ninguna de las clases observadas. Por el contrario, es decir, algo que no fue tan resaltado en las respuestas a los cuestionarios pero que fue muy evidente en las observaciones directas de clase, es el establecimiento de procedimientos para resolver tipos de tareas matemáticas. Esto, que fue apenas respondido en los cuestionarios por la mitad de profesores, contrasta con la alta frecuencia con la que a ello se recurre, en la clases observadas.

En suma, si se conjugan los resultados de los cuestionarios y lo que aporta la observación directa de las clases, posiblemente habrá tres tipos de tareas que más se promoverá en una clase de matemáticas de los profesores de la muestra de estudio: el manejo del lenguaje simbólico de las matemáticas, el análisis de ejemplos para concretar la teoría y el establecimiento de procedimientos para resolver tipos de tareas matemáticas. Todas ellas posiblemente se realicen en el esquema de preguntas iniciales del profesor, respuestas de los estudiantes, y contra preguntas del profesor. Sin embargo, cualquiera que sea el esquema de clase que se observe, lo sugerido por los resultados de los cuestionarios de que el realizador principal es todo el grupo, es infortunadamente poco sustentado a la luz de lo observado en las clases.

Finalmente, con respecto a las acciones de enseñanza de las matemáticas que pueden verse como comúnes a la mayoría de los profesores y que están en concordancia con lo observado en las clases, están la de formalizar en algún grado los elementos teóricos con la colaboración de los estudiantes y la de proponer casos particulares para que los estudiantes apliquen los elementos teóricos. En realidad, la formalización de la teoría en las clases observadas la hace el profesor, y es usual que a partir de casos particulares se expongan los elementos de la teoría; en general, salvo una excepción, en el salón de clase los profesores no suelen propiciar discusiones de todo el grupo o entre grupos, pero esto contrasta con el hecho de que no pocos profesores dicen que nunca formalizan la teoría sin la participación de los estudiantes.

Contenidos matemáticos considerados y rutas temáticas

A pesar de que los resultados reportan que prácticamente todos los tópicos de aritmética, álgebra y geometría que aparecen listados en el cuestionario, son considerados por la mayoría de los docentes, casi todos ellos dicen también considerar otros temas. Sin embargo, en el caso de los tópicos de álgebra los profesores en general son más decididos para responder si consideran o no un tópico, que en el caso de los tópicos de aritmética o geometría. Los números racionales, las operaciones con números racionales, las expresiones algebraicas, las ecuaciones con una variable y la función lineal son por ejemplo, temas de álgebra que prácticamente son considerados por todos los profesores. Para el caso de la geometría, hay tópicos que considera una buena proporción de los profesores, pero al contrario de lo que ocurre con las otras dos áreas temáticas, se puede dar cuenta de algunos temas que la mayoría de los profesores no consideran en el currículo como son los poliedros, las homotecias y las reflexiones y rotaciones en el plano. Si bien con base en los resultados se puede esbozar una posible secuenciación para los diferentes tópicos de la aritmética, el álgebra o la geometría —a partir de estimadores de la tendencia central tal como las medianas de los órdenes asociados a cada uno de los tópicos indicados en el cuestionario propuesto — infortunadamente la diferencia estadística entre valores de medianas que son consecutivas (e.g. entre una mediana de valor dos y una mediana de valor tres) para el caso de cada área temática no es significativa[5], y por ello las posibles secuencias que se pudieran establecer a partir de la descripción de los resultados y en particular con base en las Tablas 1, 2 y 3, sólo se deben considerar como una expresión de las

5. A través de una prueba no paramétrica de "signos pareados" que compara las medianas o de una prueba paramétrica de "comparación de medias" para muestras relacionadas, es posible determinar la no significación estadística a la que se alude.

posiciones de orden más frecuentes que ocuparían dichos tópicos dentro de una gran diversidad de secuencias posibles de tópicos que se puedan seguir y en donde la menor incertidumbre sólo se presenta en los tópicos con los que se inicia el desarrollo curricular. Sin embargo, no deja de ser llamativo, el hecho de que el primer tópico de la secuenciación de temas para las áreas de aritmética y álgebra si se pueda establecer con relativa claridad, mientras que para la geometría, no hay una decisión unánime acerca de cómo comenzar, con todo y que los resultados sugieran que tópicos como el de magnitudes de longitud, área, volumen y medición de longitudes y ángulos, deban ser algunos de los primeros temas a tratar en geometría.

En conclusión, lo resultados no permiten establecer que exista una secuenciación o una ruta temática que refleje un orden principal al que se acojan la mayoría de profesores para abordar los diferentes tópicos considerados en cada área temática. Sin embargo, con base en la información analizada si se puede argumentar es que hay unos pocos tópicos específicos, que suelen ser con los que se inicia el desarrollo curricular de cada una de las áreas consideradas.

Validación de las respuestas de los estudiantes

En realidad el cuestionario propuesto dedicó muy pocas preguntas a indagar sobre este aspecto. De todas maneras, con respecto a la validez de las respuestas de los estudiantes los resultados obtenidos están en concordancia con los observado en las clases. La mayoría de los profesores son quienes usualmente validan las respuestas del estudiante al corregir sus respuestas con el estudiante o frente a todos los estudiantes, o al hacerle preguntas al estudiante para que él vea el error. Además, se encuentra que hay una correlación significativa ($p=0.032$) entre el hecho de corregir la respuesta frente a todos los estudiantes y el de indicarle a otro estudiante que corrija la respuesta, lo cual sugiere que los profesores que tienden a realizar una de las dos acciones usualmente no harían la otra acción.

Preparación de clase

De los resultados referentes a los asuntos que tienen relación con la preparación de la clase llama la atención en primer lugar, que haya una mayor preocupación por la preparación de la clase en lo que se refiere al estudio de los temas matemáticos a considerar en la clase misma que en lo que se refiere a la consideración cuidadosa y sistemática de lo sucedido en ella. Este resultado, es consonante con la hipótesis de que el profesor, al preparar la clase, le presta más importancia al estudio de los contenidos de las matemáticas escolares que a la reflexión sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje que suceden en la clase. Esta hipótesis también es coherente con las apreciaciones de Perry et al. (1998, pp. 29-30) quienes citando a Romberg (1988) afirman que "no es posible sostener que el trabajo del profesor de matemáticas —tal como se realiza en la actualidad, rutinario, y encasillado dentro de esquemas rígidos— le exija el ejercicio de su juicio profesional". Romberg, concretamente afirma que:

> *El trabajo del profesor no guarda relación con una concepción del conocimiento matemático que se propone enseñar, ni con una comprensión de cómo ocurre el aprendizaje, ni con un conocimiento acerca de los resultados posibles de diversas actividades instruccionales. El conocimiento especial sobre las matemáticas o los hallazgos de investigaciones recientes en aprendizaje o enseñanza no son relevantes porque las decisiones y juicios del profesor no dependen de tal conocimiento. (p. 230)*

Por otro lado, desde la mirada a los análisis de correlación estadística, el hecho de observar que por un lado, un poco más de la tercera parte de los profesores lleva casi siempre un registro cuidadoso de la preparación de la clase, y por otro, que una frecuencia similar de profesores reporta que suele considerar de manera cuidadosa y sistemática lo sucedido en la clase, sugería la presencia de alguna relación entre estos dos comportamientos. Sin embargo, dicha hipótesis se descarta, ya que se obtiene una muy baja significación estadística asociada a la correlación entre estas dos acciones ($p = 0.41$). Este resultado, parece apoyar en parte la hipótesis sugerida al iniciar la discusión de este apartado, ya que a pesar de que haya profesores que pregonen que llevan un registro cuidadoso de sus clases, este hecho no necesariamente va dirigido a la consideración cuidadosa de lo que suceda en la clase y posiblemente este registro cuidadoso tenga más un énfasis en anotaciones de contenido matemático, pero no enfoque aspectos de enseñanza o aprendizaje que guíen su reflexión.

Por un lado, el hecho de que el foco principal de la preparación de clase sea el contenido matemático, contribuye a que la participación de otras personas en la preparación de las clases no sea una práctica usual de los profesores, y por otro lado, el hecho de que cuando la clase se prepara con otros, y esos otros precisamente suelen ser el coordinador y/o todo el grupo de profesores, quizás refleja porque dichas reuniones se llevan a cabo la mayoría de las veces en las reuniones de área. Por otra parte, desde los análisis estadísticos de contingencia estos hechos se pueden relacionar con la identificación de una correlación significativa ($p = 0.019$) entre el hecho de que alguien más participe en la preparación de clase y el momento en que se realiza dicha preparación; además, este resultado hizo advertir que la mayoría de los profesores que dicen preparar clase por fuera de la jornada laboral son precisamente los que más frecuentemente dicen no preparar la clase con otra persona.

Para establecer un contraste entre lo insinuado por los resultados de los cuestionarios y los casos estudiados, fue infortunado no tener acceso a todos los registros de preparación de clase llevados por los profesores observados, aunque es claro que para los profesores que utilizan guías de trabajo esta preparación podría estar consignada, en buena medida, en las guías mismas. En realidad, sólo un profesor señaló llevar un registro y entregó unos textos generales que nombran corrientes y metodologías educativas que dice emplear en sus clases, pero que no enfocan detalles particulares de atención cuidadosa o sistemática de lo que sucediera en sus clases.

En suma, los resultados discutidos en este apartado no sugieren que los profesores realicen una preparación de clase en la que se perciba intenciones de considerar de manera sistemática aspectos de enseñanza y aprendizaje de los estudiantes, que vayan más allá del interés, que desde luego es necesario pero no suficiente, de centrarse esencialmente en el estudio de los aspectos de contenido matemático.

Evaluación

Un primer resultado que llama la atención es el que alude a la resolución de problemas como algo que siempre deben hacer los estudiantes en la evaluaciones que le propone el profesor. Infortunadamente, al igual que en el caso ya comentado de 'uso de guías', lo que se entiende por 'resolución de problemas' puede ser interpretado por los profesores en un sentido restringido. En particular, las observaciones de clase sugieren que la palabra 'problema' se está entendiendo para muchos profesores como ejercicios rutinarios cuya solución era la que se había propuesto o enseñado en clases anteriores. Una excepción en las clases observadas, fue el caso en dónde se desarrollaron guías, en la que se propuso la 'resolución de problemas', con un significado más amplio, significado que estaría más en consonancia con el que sería deseable esperar que interpretara el profesor al momento de considerar la 'resolución de problemas' en la evaluación.

A pesar de que esta problemática del significado que se da a la 'resolución de problemas' entorpece la posibilidad de validar cuál es el verdadero énfasis que los profesores implicados en el estudio le dan a este tipo de actividad en la evaluación, asumir una postura, como la que pregonan García y Acevedo (2000) "acerca de la matemática y la matemática escolar, en las que se hace énfasis en su dimensión constructiva y en el reconocimiento de la relación que existe entre el conocimiento matemático y el contexto cultural" —y que da cabida no sólo al énfasis en la 'resolución de problemas' como principio orientador, sino también a otra diversidad de aproximaciones asociadas al aprendizaje — implica adherir a una concepción de la enseñanza en la que se llegue a reconocer como primordial, en el trabajo escolar, la propuesta de diferentes tipos de tareas para evaluar la competencia del estudiante. Sin embargo, lo que vimos en las clases observadas —en donde casi no se presentaron oportunidades de trabajo para que los estudiantes tuvieran que formular problemas, realizar proyectos, probar enunciados, escribir textos, o en donde tareas como construir ejemplos pocas veces se percibieron— no permite concluir que los profesores den muestras de que realizan un trabajo que siga orientaciones consonantes con la postura sugerida.

Otra tarea relacionada con la resolución de problemas, considerada en los cuestionarios, fue la de presentar diversas estrategias de solución aun problema. Los resultados no sugieren que los profesores le presten mucha atención a este asunto, lo cual es consistente con lo observado en las clases donde dicha tarea fue poco detectada con excepción de la clase en la que se implementaron guías donde aunque era posible presentar variedad de estrategias, el hecho no se destacaba por parte de los profesores. sin embargo, lo que sí se observó fue un mayor énfasis en tareas como la de dar cuenta de los procedimientos realizados, apuntando a que se registraran los resultados de las operaciones o de los procesos realizados.

Con respecto al momento en que los profesores suelen realizar las evaluaciones, llama la atención que la mayoría de los profesores afirman que usualmente evalúan a sus estudiantes a través del trabajo realizado en clase durante el proceso de aprendizaje, cuando en realidad lo observado en las clases muestra diferencias con esto y entre las clases mismas. Por ejemplo, en el curso en el que las clases se realizan mediante el trabajo en grupo de los alumnos para desarrollar guías, los profesores sostienen que evalúan permanentemente, y dicen evaluar a través de las interacciones que hacen con cada grupo y estudiante; en tanto que el caso del profesor que revisa lo hecho por los alumnos en sus cuadernos y asigna puntos, podría entenderse como más acorde con lo dicho; en los demás casos no se puede decir que lo afirmado se vea que pasa en las clases. Sin embargo, un resultado que parece validarse coherentemente con lo observado en las clases, es la decisión del profesor de realizar una evaluación escrita al finalizar un proceso particular de aprendizaje ya que en las clases, dos de los profesores observados realizaron evaluaciones escritas al final de procesos de aprendizaje específicos y precisamente esta acción se presenta en una proporción muy similar con lo registrado en los resultados del cuestionario.

En lo que tiene que ver con la intención de la evaluación que el profesor hace a sus estudiantes, consideramos de manera prioritaria, en el marco de la evaluación por competencias, los criterios "tomar decisiones en cuanto al contenido y los métodos de la docencia de las matemáticas" (García y Acevedo, 2000, p. 95) y "tomar decisiones en cuanto al ambiente de la clase" (NCTM, 1991). Dentro de este marco no es tan claro, cómo dos de los propósitos principales señalados en los resultados de los cuestionarios —conocer el estado de comprensión de los estudiantes y detectar sus dificultades— le aportan al profesor elementos para mejorar el ambiente de la clase; aunque muy posiblemente si le ayudan a los profesores a tomar decisiones sobre contenidos a enfatizar o incluso a evadir durante el desarrollo curricular, tampoco es claro cómo incidan en decisiones acerca de los propios métodos de enseñanza a los que decidan los docentes recurrir. Por otra parte, a pesar de que una buena cantidad de profesores sostenga que al evaluar tiene en cuenta principalmente los procedimientos realizados, los argumentos planteados, las estrategias seleccionadas, los enunciados construidos y las explicaciones suministradas, es indudable que sólo en la medida en que para éstas acciones se pueda evidenciar —y propiamente a través de proyectos enfocados en las prácticas de evaluación— que a través de ellas el docente realimenta verdaderamente su propia práctica, es que se podrá sostener si las prácticas evaluativas del profesor se realizan en consonancia con algunos de los criterios de la evaluación por competencias como los planteados. De todas maneras, en las clases observadas con excepción de la clase en donde se utilizaron guías, no se apreció un trabajo que propiciara la realización de tareas para que los estudiantes presentaran diversas estrategias, hicieran distintas representaciones de un concepto, construyeran enunciados, justificaran o explicaran sus respuestas o elaboraran textos; además, lo observado en las clases, sugiere que en general la respuesta correcta tiene un gran peso para que el profesor acepte un trabajo de los estudiantes como válido, lo cual está un tanto en contradicción con uno de los asuntos en los que supuestamente los profesores no se fijaban tanto.

Planeación anual institucional

Es claro que prácticamente en la totalidad de las instituciones en las que laboran los profesores se hace algún tipo de planeación anual y que en dicha planeación los más comprometidos son los profesores y el coordinador del área de matemáticas y el jefe del departamento de matemáticas. Por otra parte, además de que la participación del rector o de los profesores de otras áreas no es muy relevante, no se puede afirmar —dado que no se identificaron correlaciones significativas entre las variables asociadas a las participaciones de aquellos y los asuntos a tratar en la planeación— que cuando esta participación efectivamente se da, esté relacionada con algún asunto particular a tratar en la planeación, mientras que la participación de los demás si está claramente relacionada con los asuntos que principalmente se abordan, como por ejemplo, la selección de los libros y materiales didácticos a usar en las clases, los temas matemáticos que se van a tratar y los indicadores de logro, entre varios más.

En lo que se refiere a influencias en al currículo de matemáticas, aunque es claro que los profesores son quienes tienen una influencia más definitiva en su determinación, relegando a un segundo plano la importancia de documentos como el de los lineamientos curriculares o el del P.E.I., también llama la atención el que haya una correlación significativa ($p = 0.065$) entre el hecho de que participe el rector y su influencia en la determinación del currículo, resultado que sugiere que el rector tiene una influencia importante en la determinación del currículo cuando decide participar en la planeación anual, esto se corrobora de manera muy significativa ($p = 0.004$) al cruzar las respuestas relativas a las influencia del rector y de los profesores en cuanto a su poder de determinación del currículo.

Asuntos que dificultan la enseñanza

Entre las principales demandas que se esperaría que haga un profesor para mejorar su enseñanza estaría la de reducir el número de estudiantes en su curso. Sin embargo, dado que se identificaron correlaciones significativas entre lo que piensa el profesor acerca de la cantidad de estudiantes como dificultad de enseñanza y otros aspectos tales como el desinterés de los estudiantes ($p = 0.004$), la indisciplina de los estudiantes ($p = 0.006$), el conocimiento previo de los estudiantes ($p = 0.01$) y la heterogeneidad del grupo de estudiantes ($p = 0.0005$), lo más probable es que el mismo profesor que alegüe acerca del tamaño del curso como problema de la enseñanza, también alegará que a los estudiantes no les interesa las matemáticas, que ellos vienen con conocimientos previos muy deficientes, que el curso es muy heterogéneo, etc. Los demás asuntos expuestos no parecen tener trascendencia para el profesor como problemas que asuma el profesor y que dificulten la enseñanza.

Visión del aprendizaje proporcionada por las respuestas al cuestionario del estudiante

Descripción

En este capítulo se presenta una descripción de las respuestas al cuestionario del estudiante, obtenida luego de un análisis detallado de los datos que se reportan en el Apéndice N° 6. En general, damos cuenta de las frecuencias más altas o más bajas que pueden indicar una tendencia. Sin embargo, en algunas preguntas en que los porcentajes son similares para todas las posibilidades y opciones de las preguntas, y por lo tanto no se perciben tendencias, lo que se reporta es esta situación.

Antes de presentar la descripción anunciada, queremos recordar que este cuestionario contiene treinta y una preguntas, de las cuales una es abierta y el resto son de escogencia múltiple. En éstas se plantean una serie de posibilidades a las que el estudiante debe responder eligiendo una opción de varias indicadas como 'nunca', 'a veces', 'casi siempre', 'siempre'; en otras preguntas debe contestar con 'si' o 'no' a las distintas posibilidades y en otras, con un número que indique tiempo en minutos.

La descripción de las respuestas está organizada pregunta a pregunta, en dos apartados que corresponden a las dos secciones del cuestionario. En ocasiones, se agrupan los resultados correspondientes a varias preguntas con la intención de dar cuenta de manera conjunta de sus resultados .

El primer párrafo incluido para cada pregunta presenta los resultados cuando se consideraron en conjunto las respuestas de todos los estudiantes encuestados; en el segundo y tercer párrafo se exponen los resultados para los estudiantes del profesor del Caso 2 y para los estudiantes del resto de los profesores, respectivamente.

Información general

1. Actividades relacionadas con las matemáticas

Los estudiantes de los cinco profesores. Más de la mitad de los estudiantes nunca toma clases particulares de matemáticas (59%) y la mayoría nunca participa en clubes de matemáticas (94%), nunca hace exposiciones sobre matemáticas (80%) o asiste a conferencias o talleres fuera de la clase (73%). Sólo a veces el 62% de los estudiantes explica matemáticas a otros estudiantes y el 54% de los estudiantes estudia temas de matemáticos distintos de los que se tratan en clase. Un 10% de los estudiantes siempre se prepara para las olimpíadas matemáticas, mientras que más o menos la mitad del resto no lo hace y la otra mitad lo hace en ocasiones. Pocos estudiantes realizan siempre el tipo de actividades descritas en esta pregunta.

Los estudiantes del profesor del Caso 2. Un poco menos de la mitad de estos estudiantes nunca toma clases de matemáticas (41%), y la mayoría nunca participa en clubes (76%), hace exposiciones de matemáticas en (83%), asiste a conferencias (58%). El 66% de estos estudiantes explica a veces matemáticas a otros estudiantes. Sólo el 1% se prepara siempre para las olimpíadas matemáticas.

Los estudiantes del resto de los profesores. El 63% de estos estudiantes nunca toma clases particulares, el 98% nunca participa en clubes, el 80% nunca hace exposiciones sobre matemáticas, 76% nunca asiste a conferencias; el 12% lo hace siempre. El 60% a veces explica a otros estudiantes.

2. Tiempo dedicado a las tareas de matemáticas y otras actividades

Los estudiantes de los cinco profesores. El promedio del tiempo dedicado a hacer tareas de matemáticas en la casa es de 30 minutos, mientras que los tiempos promedios dedicados a otras actividades son mayores. Para ver televisión, jugar o hacer deporte el promedio de minutos es de 80, para ayudar en las labores de la casa es de 60, hacer trabajo pagado es de 50, y para otros es de 70.

Los estudiantes del profesor del Caso 2. Estos estudiantes utilizan en promedio 30 minutos para hacer tareas. El tiempo dedicado a ver televisión es en promedio de 65 minutos, igual que para labores en la casa.

Los estudiantes del resto de los profesores. Estos estudiantes utilizan en promedio 30 minutos para hacer tareas, 100 minutos para ver televisión y jugar, 70 minutos en las labores de la casa, 30 minutos en trabajo pagado, 70 para otros trabajos.

3. 4. y 5. Rendimiento en matemáticas

Los estudiantes de los cinco profesores. Según los estudiantes mismos, más de la mitad de ellos tiene en ocasiones un rendimiento excelente (65%) o aceptable (51%). El rendimiento de sólo un 33% es siempre excelente o de un 35% siempre es aceptable. La mayoría nunca tiene un rendimiento mediocre (87%) ni malo (91%). Estos datos son muy similares a lo que según los estudiantes opinan sus padres y maestros.

Los estudiantes del profesor del Caso 2. El rendimiento de estos estudiantes según ellos es excelente a veces (61%) o aceptable (30%) y sus padres y profesores piensan que en ocasiones es excelente (46%) y un 46% que casi siempre lo es. Todos estos estudiantes piensan que nunca su rendimiento es malo y lo mismo dicen que creen sus padres (70%) y profesores (90%).

Los estudiantes del resto de los profesores. El rendimiento de estos estudiantes según ellos es excelente (66%) a veces y casi siempre (31%). A veces es excelente para sus padres (51%) y para sus profesores (65%). El 55% de estos estudiantes piensan que su rendimiento es aceptables a veces. Piensan que su rendimiento nunca es mediocre (84%) ni malo (89%).

6. Factores determinantes en el rendimiento

Los estudiantes de los cinco profesores. La mayoría de los estudiantes cree que tener disposición (73%), estudiar y hacer las tareas (72%) y escuchar atentamente al profesor (78%), son factores importantes para tener un buen rendimiento en matemáticas. Cabe destacar que ningún estudiante considera que estos tres factores no influyan en el rendimiento. Un porcentaje un poco menor (60%) de estudiantes cree que también es determinante para un buen rendimiento, el seguir todas las instrucciones del profesor en clase. Un alto porcentaje de estudiantes (82%) no cree que copiarse las respuestas influya en el buen rendimiento, mientras que el resto (18%) piensa que a veces sí ayuda.

Los estudiantes del profesor del Caso 2. La mayoría de estos estudiantes cree que tener disposición (69%), seguir todas las instrucciones del profesor en clase (74%), escuchar atentamente al profesor (69%) son factores que influyen siempre en el rendimiento. Un 61% piensa que a veces hay que memorizar los apuntes, y un 69% que hay que estudiar y hacer tareas. Un porcentaje alto (84%) no cree que copiarse las respuestas influya en el buen rendimiento, pero el 15% sí lo cree.

Los estudiantes del resto de los profesores. Muchos de estos estudiantes piensan que tener disposición (75%), estudiar y hacer las tareas en la casa (72%), escuchar al profesor (80%) siempre es importante para tener un buen rendimiento. Un porcentaje un poco menor (55%) de estos estudiantes cree que también es determinante seguir siempre todas las instrucciones del profesor en clase. Un 80% no cree que copiarse las respuestas influya en el buen rendimiento, pero el 19% sí lo cree.

Clase

7. Razones por las que les agrada la clase de matemáticas

Los estudiantes de los cinco profesores. Todas las razones consideradas en la pregunta con excepción de la indisciplina que se puede hacer en clase (20%), contribuyen a que a la mayoría de los estudiantes (entre 75% y 97%) les agrade la clase de matemáticas; las razones más aducidas son la manera en que el profesor hace la clase (97%), la importancia de las matemáticas (95%), la preparación de la clase por parte del profesor (94%), la manera de ser del profesor (92%), el conocimiento matemático del profesor (91%) y la atención especial que el profesor les dedica (88%). Sólo 16 estudiantes expresaron otras razones por las que les agrada la clase de matemáticas; algunas de estas razones aluden a la experiencia del profesor, a que la clase sea dinámica y animada, a que pueden participar en la corrección de tareas, a los puntos que dan por cada trabajo, a la forma que hace que el estudiante se interese mucho por la clase, a las clases en que se trabaja en grupo, a que el profesor repite la explicación; un estudiante dice que el hecho de que el profesor regale notas no contribuye a que le agrade la clase.

Los estudiantes del profesor del Caso 2. Todos estos estudiantes reconocen la importancia de las matemáticas como razón de su agrado por éstas. Otras razones que aducen la mayoría son la manera en que el profesor hace la clase (92%), el conocimiento matemático del profesor (92%), la preparación de la clase por parte del profesor (94%), la atención especial que el profesor les dedica (88%), la manera del ser del profesor (84%), la forma de evaluar (85%). Un 100% piensa que la indisciplina que se puede hacer en clase no influye en su agrado por las matemáticas.

Los estudiantes del resto de los profesores. Para un alto porcentaje de estos estudiantes la importancia de las matemáticas (94%), la manera del ser del profesor (92%), la manera en que el profesor hace la clase (98%) , la preparación de la clase por parte del profesor (94%), el conocimiento matemático del profesor (90%), la atención especial que el profesor les dedica (86%), son razones que influyen en su agrado por la clase de matemáticas. El 76% piensa que la indisciplina que se puede hacer en clase no influye en este agrado.

8. Razones por las que les desagrada la clase de matemáticas

Los estudiantes de los cinco profesores. También para más de la mitad de los estudiantes (entre 57% y 94%) las razones consideradas en esta pregunta no son causa de que la clase les desagrade, con excepción del desinterés de los estudiantes (54%) y la indisciplina de los estudiantes (66%). Para algunos estudiantes, la falta de conocimiento de los estudiantes (43%), el mal estado del salón de clase (38%), las diferencias en el rendimiento de los estudiantes (33%), la dificultad de las matemáticas (32%) y la atención del profesor sólo a algunos estudiantes (31%), son causa del desagrado que les puede producir la clase de matemáticas. Sólo 8 estudiantes dieron otras razones por las que les desagrada la clase matemáticas como la falta de compromiso del estudiante, que la clase sea aburrida, la pereza de los estudiantes, la forma de ser de algunos estudiantes y el mal vocabulario de ellos, no escuchar atentamente al profesor, que en el salón haya goteras, el mal estado de los puestos de trabajo y la incomodidad que genera esto; estas últimas razones se explicitaron a pesar de que entre las posibilidades de respuesta dadas para la pregunta, una de ellas se refería al mal estado del salón de clase.

Los estudiantes del profesor del Caso 2. En un 100% de los estudiantes no influye la manera de ser del profesor en el desagrado de la clase, pero sí influye el desinterés de los estudiantes (61%) y la indisciplina (61%). Otras razones que para algunos de estos estudiantes inciden en su desagrado son la falta de conocimiento de algunos estudiantes (38%), la atención del profesor sólo a algunos estudiantes (30%), las diferencias en el rendimiento (30%), el mal estado del salón (23%).

Los estudiantes del resto de los profesores. En su desagrado por la clase de matemáticas, para la mayoría de estos estudiantes no influye la manera de ser del profesor (86%) ni la forma de hacer la clase (90%). Sí incide el desinterés de los estudiantes (50%), la indisciplina (69%), la falta de conocimiento de algunos estudiantes (42%), la dificultad de las matemáticas (36%), la atención del profesor sólo a algunos estudiantes (30%), el mal estado del salón 42%.

9. y 10. Objetivos de aprendizaje

Los estudiantes de los cinco profesores. Sólo el 21% de los estudiantes acepta conocer siempre los objetivos de aprendizaje para los temas que abordan en clase, el 36% casi siempre, el 39% a veces y el 4% nunca, aunque los profesores de estos estudiantes dicen explicitar los objetivos específicos de aprendizaje. No obstante, el 80% de los estudiantes que los conocen dicen que esto sucede gracias a que el profesor los dice en clase o porque los reconoce en el trabajo que se hace en clase (77%). Sólo el 32% de los estudiantes los lee en algún documento.

Los estudiantes del profesor del Caso 2. El 30% de estos estudiantes acepta conocer los objetivos siempre y un 40% dice conocerlos casi siempre, a pesar de que en las guías de trabajo que emplean estos estudiantes, los objetivos están indicados. Nadie contestó que nunca los conoce. Los que dicen conocer los objetivos, lo hacen mediante el trabajo en clase (69%), porque su profesor lo dice (60%), la mitad de los estudiantes dice leerlos en un documento y la otra mitad dice lo contrario.

Los estudiantes del resto de los profesores. El 19% de estos estudiantes dice conocer los objetivos siempre, el 41% a veces, el 34% casi siempre, el 4% dice que nunca los conoce. De estos estudiantes que dicen conocer los objetivos el 79% dice que los reconoce en el trabajo en clase, el 84% porque el profesor los dice en clase, el 27% los lee en algún documento.

11. Recursos exigidos para la clase

Los estudiantes de los cinco profesores. La mayoría de los estudiantes reconocen que un elemento requerido siempre en las clases de matemáticas es llevar un cuaderno de apuntes (78%). Más de la mitad de los estudiantes dice que siempre en las clases de matemáticas se exige llevar instrumentos como regla, escuadra, compás, etc. (55%), lo cual coincide con lo dicho por los profesores. También es coherente con esto, el hecho de que la mayoría de los estudiantes alegue que nunca se les exige calculadora graficadora (84%) ni otro tipo de calculadora (75%). Sólo 9 estudiantes expresaron otros recursos exigidos siempre por el profesor para las clases, tales como elementos de medida, hojas de papel milimetrado, hojas para el trabajo; unos de estos estudiantes aluden a que el profesor siempre exige aprenderse lo enseñado, llevar las tareas, tener cuaderno y carpeta en orden, tener los materiales de trabajo, hacer silencio; otros de estos estudiantes mencionan que nunca deben traer juguetes u hojas aparte de los cuadernos.

Los estudiantes del profesor del Caso 2. Estos estudiantes dicen que el profesor les exige siempre llevar instrumentos como regla, escuadra, etc., (92%), una carpeta con los talleres o guías de trabajo (61%), llevar siempre un cuaderno de tareas (30%), y un cuaderno de apuntes (38%). Nunca les exige llevar calculadora graficadora (100%) ni otro tipo de calculadora (92%).

Los estudiantes del resto de los profesores. El profesor les exige llevar siempre un cuaderno de apuntes (88%), instrumentos (48%), cuaderno de ejercicios (45%), una carpeta con los talleres o guías de trabajo (30%). Nunca se les exige calculadora graficadora (80%) ni otro tipo de calculadora (70%).

12. Actividades de la clase

Los estudiantes de los cinco profesores. No se perciben actividades de las consideradas en esta pregunta, que una gran parte de los estudiantes piense que se realizan siempre durante las clases. En muchas de las actividades los porcentajes de estudiantes que dicen que se lleva a cabo la actividad son menores que los que dicen que participan en la actividad y no tiene sentido que haya estudiantes participando de una actividad que no se realiza. Por ejemplo, mientras que el 51% de los estudiantes dice que en clase siempre se proponen guías, talleres o problemas, el 57% dice que siempre los desarrolla por escrito; el 47% dice que el profesor siempre explica en el tablero mientras que el 58% señala que siempre copia lo que está escrito en el tablero. Se aprecia que quizás la forma en que se presentaron las posibilidades no fue entendida por los estudiantes y parecería más bien que más estudiantes marcaron estas posibilidades para aludir a su trabajo en clase en general, desligado de las actividades específicas propuestas por el profesor que se planteaban como posibilidades en la pregunta. Se detectaron así incoherencias puntuales en un mismo estudiante entre la respuesta a la actividad propuesta por el profesor y la actividad que el estudiante realiza: el 1% de los estudiantes dice que aunque nunca se proponen guías, talleres, problemas para hacer en la clase, ellos casi siempre las desarrollan por escrito; el 2% de los estudiantes nunca hace exposiciones pero siempre participa en ellas; otros estudiantes dicen que nunca se realizan tareas para avanzar en algún proyecto, pero siempre participan de esas tareas. Esto podría verse como dos respuestas a dos preguntas no relacionadas entre sí y que los estudiantes consideran que participan en las actividades de clase, independientemente de lo que sean.

Los estudiantes del profesor del Caso 2. En las respuestas de estos estudiantes se ven las mismas inconsistencias que en las respuestas de todo el grupo, es decir aunque para algunos estudiantes el profesor no haga la actividad, ellos la realizan. Para un 15%, el profesor explica siempre para que los estudiantes copien pero es el 30% el que siempre copia. Sólo un 61% dice que se proponen guías y aunque aquí el porcentaje de estudiantes que siempre las desarrollan coincide, este número no se explica pues el trabajo en esta clase siempre es con guías. Un 69% dice que siempre se trabaja en grupo pero únicamente el 61% participa siempre de ese trabajo.

Los estudiantes del resto de los profesores. Estos estudiantes contestaron que siempre se revisa la tarea (46%) y un 41% participa de ello. También aquí hay inconsistencias cuando el 55% dice que el profesor siempre explica para que los estudiantes copien lo que escribe en el tablero mientras que el 65% siempre copia del tablero; cuando un 50% dice que se proponen guías y un 55% las desarrollan siempre; cuando un 9% indica que siempre se trabaja en grupo y un 52% participa siempre de ese trabajo.

13. Forma de realizar el trabajo en clase

Los estudiantes de los cinco profesores. Tampoco aquí hay una forma en que la mayoría de los estudiantes prefiera trabajar siempre en clase. Unicamente a veces el 54% prefiere hacerlo de manera individual, el 60% con un compañero que sabe más, el 40% con sus amigos, el 56% con un compañero al que le puede ayudar y el 53% con la ayuda del profesor.

Los estudiantes del profesor del Caso 2. El 53% de estos estudiantes prefiere trabajar en clase a veces de manera individual o prefiere hacerlo con un compañero que sabe más (54%), en un 53% casi siempre con amigos, a veces con un compañero al que pueden ayudar (50%) y con ayuda de su profesor (50%).

Los estudiantes del resto de los profesores. Estos estudiantes prefieren en ocasiones trabajar de manera individual (51%), con un compañero que sabe más (61%), hacerlo con amigos (42%), con un compañero al que usted puede ayudar (57%), con ayuda del profesor (53%).

14. Lo que hace en clase

Los estudiantes de los cinco profesores. La mayoría de los estudiantes durante la clase casi siempre copia lo que el profesor escribe en el tablero (78%), pone atención a lo que el profesor dice (72%) y desarrolla el trabajo solicitado (69%). Los demás estudiantes ponen atención (28%) y desarrollan el trabajo (31%) sólo a veces, pero no hay estudiantes que nunca lo hagan. Sólo 2% de los estudiantes nunca copia lo que el profesor escribe en el tablero. Un poco más de la mitad de los estudiantes (52%) nunca deja de hacerle saber al profesor que no entendió y nunca hace tareas de otras materias en clase de matemáticas. El resto de las actividades consideradas en la pregunta son realizadas en ocasiones por más o menos la mitad de los estudiantes.

Los estudiantes del profesor del Caso 2. Estos estudiantes casi siempre ponen atención (69%) y desarrollan el trabajo solicitado (62%) y un 38% lo hace a veces, por tanto que no hay estudiantes que nunca desarrollen el trabajo. A veces, el 46% le hace saber al profesor que no entiende, un 66% exponen por iniciativa propia; en ocasiones más de la mitad de la clase (53%) se distrae y pierde el hilo de la clase, pero sólo el 23% a veces molesta y juega con sus compañeros; el 61% de estos estudiantes a veces comenta con su compañeros el tema que se está abordando.

Los estudiantes del resto de los profesores. Casi siempre estos estudiantes ponen atención a lo que el profesor dice (73%), copian lo que el profesor les escribe en el tablero (88%), desarrollan el trabajo solicitado (71%) y el resto lo desarrolla a veces. En ocasiones el

61% le hace saber al profesor que no entiende; el 57% nunca hace tareas de otras materias pero el 34% sí lo hace a veces.

15. Para responder preguntas

Los estudiantes de los cinco profesores. A veces más de la mitad de los estudiantes utiliza palabras especiales que el profesor usa pero sólo cuando entiende su significado (53%). Un poco más de la mitad de los estudiantes a veces piensa que hay otras respuestas y no se lo hace saber al profesor (63%) o sí se lo hace saber al profesor (55%). Cabe destacar que igualmente casi la mitad de los estudiantes a veces utiliza las palabras que el profesor usa sin entender su significado (46%) y dan respuestas sin estar seguros o sin haber entendido la pregunta (49%).

Los estudiantes del profesor del Caso 2. Estos estudiantes a veces utilizan palabras especiales que el profesor usa sólo cuando entienden su significado (46%) o aun cuando no es así (38%). Dan respuestas sin estar seguros o sin haber entendido la pregunta a veces (53%) y casi siempre (30%). El 38% de la clase piensa a veces que hay otras respuestas pero no se lo hacen saber al profesor y sí lo hacen (30%).

Los estudiantes del resto de los profesores. Aunque a veces más de la mitad de los estudiantes utiliza palabras especiales que el profesor usa pero sólo cuando entiende su significado (53%), un poco menos de la mitad también lo hace en ocasiones sin entender su significado (48%). También un poco menos de la mitad de los estudiantes a veces dan respuestas sin estar seguros o sin haber entendido la pregunta (48%). Un 69% a veces piensa que hay otras preguntas pero no se lo hacen saber al profesor y un 61% sí se lo hace saber.

16. Para desarrollar ejercicios

Los estudiantes de los cinco profesores. En el desarrollo de los ejercicios que el profesor propone, los estudiantes a veces siguen los pasos que el profesor hizo sólo cuando los han entendido (34%), hacen lo que el profesor hizo aunque no lo hayan entendido (41%) y buscan otras formas de hacerlos (54%). Un 22% de los estudiantes nunca hace lo que el profesor hizo sin entenderlo y un 11% siempre hace lo que el profesor hizo, así no lo haya entendido.

Los estudiantes del profesor del Caso 2. Estos estudiantes a veces siguen los pasos que el profesor hizo sólo cuando los han entendido (61%), hacen lo que el profesor hizo aunque no lo hayan entendido (46%); un 38% nunca intenta hacer lo que no ha entendido, un 53% en ocasiones busca otras formas de hacerlo.

Los estudiantes del resto de los profesores. Un poco más de la mitad de estos estudiantes busca y usa otras formas de hacer los ejercicios (53%), un 44% casi siempre sigue los pasos que el profesor hizo sólo cuando los ha entendido. A veces hacen lo que el profesor hizo aunque no lo hayan entendido (40%) y siempre lo hacen (28%). Un 17% de estos estudiantes nunca hace lo que el profesor hizo sin entenderlo.

17. En las discusiones

Los estudiantes de los cinco profesores. En las discusiones que se generan en clase sólo a veces cerca de la mitad de los estudiantes responde preguntas (63%), hace preguntas (45%), analiza las intervenciones de otros (58%), discute las posiciones de sus compañeros (57%), escucha y comenta críticamente (45%), escucha y no participa (44%). Un 6% de los estudiantes dice que siempre no escuchan y un 64% dice nunca hacerlo, el 26% de los estudiantes a veces no escuchan, el 2% casi siempre no escuchan. Igualmente un 6% de los estudiantes dice siempre escuchar y comentar críticamente y un 30% dice nunca hacerlo. Un 20% y un 24% de los estudiantes dice nunca hacer preguntas y discutir las posiciones de los compañeros en las discusiones, respectivamente. Sólo muy pocos estudiantes indican otros elementos involucrados en las discusiones que se generan en clase, el 1% de los estudiantes considera nunca tener pereza, el 3% dice que a veces alegan sobre los temas tratados, faltan a clase o llegan tarde.

Los estudiantes del profesor del Caso 2. En las discusiones que se generan en clase un poco más de la mitad de estos estudiantes a veces responde preguntas (58%), casi siempre o siempre hacen preguntas en igual porcentaje (33%), siempre hacen análisis de las preguntas o respuestas planteadas (41%) o a veces lo hacen (33%), discuten la posición de sus compañeros a veces (66%), nunca escuchan o comentan (33%). Un poco más la mitad escucha y no participa (54%) y el 58% nunca deja de escuchar.

Los estudiantes del resto de los profesores. . En las discusiones que se generan en clase el 63% de estos estudiantes a veces responden preguntas, la mitad en ocasiones hace preguntas (50%), pero el 23% nunca hace preguntas. Un 63% a veces hace análisis de las preguntas o respuestas planteadas, discuten las posiciones de sus compañeros (54%), pero un 25% nunca discute. Un 46% escucha y comenta críticamente a veces y un 28% nunca lo hace; un 46% ocasionalmente escucha pero no participa. El 64% nunca deja de escuchar.

18. 19. y 20. Para realizar las tareas en la casa

Los estudiantes de los cinco profesores. Mientras que más de la mitad de los estudiantes nunca usa en la realización de las tareas para la casa, calculadoras graficadoras (69%) o programas matemáticos de computador (67%) ni consulta páginas en Internet (54%), unos pocos siempre utilizan otras calculadoras (3%) y programas matemáticos de computador (5%). También más o menos la mitad de los estudiantes a veces solicita la ayuda de un compañero que sabe más (54%), solicita la ayuda del profesor (49%), solicita la ayuda de otros adultos (46%), trabaja con sus amigos (46%), trabaja con un compañero al que le puede ayudar (62%), consulta el libro de texto (48%), consulta otros documentos (40%), utiliza otras calculadoras (51%) para la realización de las tareas en la casa. De los estudiantes que utilizan el libro de texto, a veces el 42% lo hace para estudiar la teoría, el 37% para saber cómo hacer los ejercicios, el 47% para hacer los ejercicios que allí se proponen y el 47% para copiar información. Más o menos la misma cantidad de estudiantes nunca usan el libros de texto para estudiar la teoría (12%), hacer los ejercicios de allí (14%) o copiar información de allí (19%). De los estudiantes que emplean otros documentos, sólo a veces cerca de la mitad emplea otros documentos en la realización de las tareas con el fin de copiar información (58%), leer información (41%), buscar aplicaciones de las matemáticas (46%) y buscar información que no está en los libros de texto (38%). Unos pocos estudiantes nunca leen información (5%) en estos documentos, ni buscan allí aplicaciones de las matemáticas (3%). Un número levemente mayor nunca copia información de allí (14%) ni busca información adicional a la de los libros de texto (17%).

Los estudiantes del profesor del Caso 2. El 61% de estos estudiantes trabajan de manera individual en ocasiones; a veces solicitan ayuda de un compañero (46%). Porcentajes iguales (33%) a veces o siempre solicitan la ayuda de un adulto; en ocasiones el 38%

solicita la ayuda del profesor y el 61% trabaja con un compañero al que le puede ayudar. Un poco menos de la mitad de la clase 46% nunca consulta páginas en Internet y el 15% lo hace siempre. Nunca usan en la realización de las tareas para la casa, calculadoras graficadoras (61%) o programas matemáticos de computador (41%), y esto sorprende pues las profesoras de este caso no reportaron el uso de tecnología; casi siempre o siempre utilizan material didáctico (68%). Consultan el libro de texto a veces (53%) y un 23% siempre, consultan otros documentos (38%) y el 30% nunca lo hace. En el libro de texto a veces consultan cómo hacer los problemas (50%), la teoría (38%), hacen los problemas (46%); un 23% nunca lo utiliza para copiar la información, ni para estudiar la teoría. Las respuestas que se refieren al libro de texto tampoco se explican pues para esta clase no se han definido libros de texto y el trabajo se centra en el desarrollo de las guías elaboradas por las profesoras. Cuando consultan otros documentos a veces es para copiar información (61%), leer la información (46%), buscar aplicaciones de las matemáticas (46%) y buscar información que no está en los libros de texto (33%).

Los estudiantes del resto de los profesores. . El 40% de estos estudiantes casi siempre trabaja de manera individual y el 34% lo hace siempre. Un poco más de la mitad solicita ayuda a veces de un compañero que sabe más (55%) y la mitad solicita en ocasiones la ayuda de sus padres o de un adulto; a veces solicitan la ayuda del profesor (51%) o trabajan con sus amigos (48%); el 60% en ocasiones trabaja con un compañero al que le puede ayudar. El 48% consulta el libro de texto a veces y el 30% lo hace casi siempre; en ocasiones consultan otros documentos (40%). Sólo el 26% consulta a veces en Internet, el 72% nunca utiliza programas de computador, ni calculadora graficadora. A veces utilizan otras calculadoras (53%) y a veces utilizan material didáctico (35%). Cuando consultan el libro de texto a veces lo hacen para copiar la información (48%), hacer los ejercicios (46%), estudiar la teoría (42%) y un 38%, para saber cómo hacer los problemas o ejercicios. Consultan otros documentos con el fin de copiar información (55%), leer la información que allí se presenta 42%, buscar una aplicación de las matemáticas 46% y buscar información que no está en los libros de texto 40%. El 15% nunca busca información complementaria a los libros de texto.

21. Las tareas de matemáticas sirven para...

Los estudiantes de los cinco profesores. A un poco menos de la mitad de los estudiantes las tareas de matemáticas le sirven a veces para identificar conceptos o procedimientos que aprendió (43%) y no aprendió en clase (45%). Esta identificación de lo que aprendió se da además en el resto de los estudiantes en mayor o menor medida con el trabajo en las tareas para la casa; en un 28% se da siempre y en un 29% casi siempre. A números similares de estudiantes también estas tareas les sirven en ocasiones para cumplir con un requisito (34%), mantenerse ocupados en la casa (34%), repasar el tema tratado en clase (33%), preparar el tema de la siguiente clase (37%), reconocer sus errores y superarlos (31%).

Los estudiantes del profesor del Caso 2. A más de la mitad de estos estudiantes las tareas de matemáticas le sirven a veces para identificar conceptos o procedimientos que aprendió (61%) y para identificar los que no aprendió (33%). Al 30% le sirven para cumplir con un requisito a veces, al 46% para mantenerse ocupado en la casa y repasar el tema a veces, para preparar el tema para la siguiente clase en ocasiones al 53%, para identificar conceptos que no aprendió al 41% casi siempre.

Los estudiantes del resto de los profesores. . Al 40% de estos estudiantes las tareas de matemáticas les sirven a veces para identificar conceptos o procedimientos que aprendió y al

48% para identificar conceptos que no aprendió. También les sirven en ocasiones para cumplir con un requisito (32%), mantenerse ocupado en la casa (32%), repasar el tema (29%) y preparar el tema para la siguiente clase en un 40%, reconocer errores y superarlos casi siempre 40%. A un 40% las tareas nunca le sirven para mantenerse ocupado.

22. Factores importantes en el aprendizaje de las matemáticas

Los estudiantes de los cinco profesores. Casi todos los factores considerados en esta pregunta son indicados por los estudiantes como importantes para el aprendizaje, con frecuencias variables entre 12% y 53% para a veces y casi siempre. En concordancia con lo expresado al principio por los estudiantes acerca del buen rendimiento en matemáticas, para cerca de la mitad de ellos en el aprendizaje es importante siempre poner atención a lo que dice el profesor (57%), desarrollar el taller que el profesor propone (49%) y hacer la tarea para la casa (46%). Igualmente no hay un solo estudiante que no reconozca la relevancia de poner atención al profesor en algún momento y muy pocos que consideran que desarrollar el taller y hacer la tarea nunca son importantes (2% y 6%, respectivamente). También hay muy pocos estudiantes que crean que algunos otros factores no son importantes para el aprendizaje, como encontrarle gusto al tema (4%), poner atención a los aportes de los compañeros (2%), participar en las discusiones en clase (5%), usar instrumentos como escuadra, transportador, compás, etc. (2%). Sólo 6 estudiantes mencionaron otros factores que siempre, casi siempre o a veces son importantes en el aprendizaje de las matemáticas como trabajar temas previstos; también unos de estos estudiantes dicen que el aprendizaje de las matemáticas es importante para la vida diaria y para nuevas materias.

Los estudiantes del profesor del Caso 2. Los factores considerados en esta pregunta son todos indicados como importantes para porcentajes similares de estos estudiantes. Siempre les parece importante poner atención al profesor (46%), desarrollar el taller que el profesor propone en clase (46%), hacer la tarea para la casa casi siempre (46%); entre el 30% y 38% de estos estudiantes indica que a veces el uso de materiales, instrumentos y juegos son importantes para el aprendizaje. El 61% nunca utiliza calculadora graficadora ni otras calculadoras, en cambio a veces usan otros programas matemáticos (46%) y nunca lo hacen en un 30%. Al 15% no le parece importante hacer la tarea y al 23% realizar una gran cantidad de ejercicios.

Los estudiantes del resto de los profesores. . Para más de la mitad de estos estudiantes es importante para el aprendizaje: poner atención a lo que dice el profesor siempre (62%), desarrollar siempre el taller que el profesor propone (51%), hacer siempre la tarea para la casa (55%). A veces es importante realizar una gran cantidad de ejercicios (54%), reflexionar y trabajar más sobre el tema después de clase (50%), usar materiales (50%), leer el libro de texto (47%), leer otros documentos (46%), participar en las discusiones (36%) y poner atención a los aportes de los compañeros (29%). El 48% nunca utiliza calculadora graficadora y el 36% otras calculadoras, pero el 32% y el 42% lo hace a veces, respectivamente. A veces el 36% usa programas matemáticos y el 38% nunca lo hace.

23. Indicios del aprendizaje

Los estudiantes de los cinco profesores. Tres de las opciones consideradas en esta pregunta son indicios de su aprendizaje para todos los estudiantes con alguna frecuencia: entender las explicaciones del profesor (siempre 42%, casi siempre 34%, a veces 24%), ser capaz de resolver los ejercicios (siempre 39%, casi siempre 39%, a veces 22%), y la aprobación por parte del profesor del trabajo, (siempre 14%, casi siempre 30%, a veces 56%).

Para cerca de la mitad de los estudiantes también casi siempre son indicios de su aprendizaje, ser capaz de recordar algo ya estudiado (42%) y obtener buenos resultados en las evaluaciones (50%); a veces son indicios, el ser capaz de escribir un texto relacionado con el tema (51%), el poder explicarle a un compañero (42%), el poder justificar sus respuestas (45%) y el contar con la aprobación de un compañero acerca de su trabajo (50%). Para únicamente entre un 2% y un 5%, estas últimas opciones nunca son indicios del aprendizaje. Unicamente el 3% de los estudiantes consideraron otro indicio de su aprendizaje en matemáticas como cuando el estudiante se ayuda a sí mismo; estos estudiantes creen que siempre aprenden algo en matemáticas.

Los estudiantes del profesor del Caso 2. Estos estudiantes consideran a veces que han aprendido cuando el profesor aprueba lo que dicen (66%). Para el 58% un indicio de aprendizaje siempre es ser capaz de resolver los ejercicios. Para la mitad de estos estudiantes siempre son indicios de su aprendizaje, entender las explicaciones del profesor, poder escribir un texto relacionado con el tema, ser capaz de justificar sus respuestas y obtener buenos resultados en las evaluaciones. Para el 33% casi siempre un indicio de su aprendizaje es poder explicar el tema a un compañero o para el 41% casi siempre ser capaz de recordar lo que había estudiado antes.

Los estudiantes del resto de los profesores. . Estos estudiantes consideran a veces que han aprendido cuando pueden escribir un texto relacionado con el tema (55%), si el profesor aprueba lo que dicen (52%): para la mitad de estos estudiantes es indicio de su aprendizaje casi siempre el obtener buenos resultados en las evaluaciones. A veces son indicios cuando pueden justificar sus respuestas (46%), cuando son capaces de recordar lo que había estudiado antes (28%), cuando pueden explicar el tema a un compañero (44%), cuando un compañero aprueba su trabajo (48%). Para el 42% son indicios casi siempre el ser capaz de resolver los ejercicios y para el 40% el entender la explicación del profesor siempre.

24. Aprendizaje reciente en matemáticas

Los estudiantes de los cinco profesores. De los 49 estudiantes que indican haber aprendido algo en matemáticas recientemente, unos pocos señalan haber aprendido cosas generales como el desarrollo de talleres o guías (3%), cosas que no se acordaban y las aprenden despacio. El 76.5% de los estudiantes consideran haber aprendido algo con respecto a temas específicos que son nombrados en general o por el título del tópico y además en muchos casos son ilustrados con dibujos o con e procedimiento mismo para un ejemplo concreto: rectas, semirrectas, segmentos, ángulos; los sistemas de conversión entre unidades de medida, diferentes objetos y formas de medición y sus propiedades; parábolas y la construcción de su gráfica, solución de ecuaciones cuadráticas; suma, resta, multiplicación y división de polinomios; la función lineal, el teorema de Pitágoras; encontrar el mínimo común denominador o múltiplo, descomposición en factores primos, los números racionales, los criterios de divisibilidad. Algunos estudiantes de los profesores del Caso 2 y del Caso 3, presentan enunciados matemáticos como algo aprendido, tales como 'las rectas son infinitas', 'una recta está conformada por millones de puntos'. Todos los tópicos mencionados son relativos a los temas tratados en las clases observadas.

25. Para indicar los errores

Los estudiantes de los cinco profesores. El profesor para indicar un error, según números similares de estudiantes, siempre, casi siempre o a veces, corrige la respuesta con el estudiante (21%, 28%, 45%, respectivamente), corrige la respuesta frente a todos (41%, 28%, 25%, respectivamente), hace otras preguntas para que el estudiante vea el error (23%, 36%, 32%, respectivamente), indica a otro estudiante que corrija la respuesta (18%, 25%, 45%). Para un número pequeño de estudiantes, entre el 6% y el 12%, el profesor nunca hace estas acciones para señalar un error.

Los estudiantes del profesor del Caso 2. Según estos estudiantes el profesor a veces corrige las respuestas en frente de todos los estudiantes (46%) y hace otras preguntas al estudiante para que corrija el error (46%). Sin embargo, para el 38% siempre el profesor indica a otro estudiante que corrija el error. El 76% dice que el profesor a veces corrige la respuesta con el estudiante. El profesor nunca corrige la respuesta en frente de todos los estudiantes (23%).

Los estudiantes del resto de los profesores. De acuerdo con el 50% de estos estudiantes el profesor siempre corrige la respuesta en frente de todos los estudiantes. A veces el profesor indica a otro estudiante que corrija el error (44%) o corrige la respuesta con el estudiante en cuestión (36%). Un 40% dice que el profesor casi siempre hace otras preguntas al estudiante para que vea el error.

26. Para evaluar el rendimiento

Los estudiantes de los cinco profesores. Con el fin de evaluar el rendimiento de los estudiantes según un poco menos de ellos, el profesor propone evaluaciones escritas (43%) y revisa las tareas (42%). Lo que menos hace según un número similar de estudiantes es proponer evaluaciones orales (42%), exposiciones (44%), trabajos escritos en grupo (37%) y evaluaciones escritas en grupo (35%). Todas las posibilidades consideradas en esta pregunta, son a veces usadas por los profesores de acuerdo con cantidades parecidas de estudiantes (entre 23% y 46%), para evaluar el rendimiento.

Los estudiantes del profesor del Caso 2. Según un poco más de la mitad de los estudiantes para evaluar su rendimiento el profesor a veces hace evaluaciones orales individuales (53%), les hace preguntas o ejercicios en el tablero (46%), trabajos escritos individuales (46%) y exposiciones (46%). Casi siempre el profesor hace evaluaciones escritas (38%) y evaluaciones escritas individuales (41%). Según el 41% de estos estudiantes para evaluar su rendimiento el profesor nunca revisa tareas, pero para el 33% lo hace a veces y para el 25% lo hace siempre.

Los estudiantes del resto de los profesores. Estos estudiantes dicen que el profesor a veces hace evaluaciones escritas en grupo (48%) pero el 40% contestó que nunca lo hace. El profesor a veces propone trabajos escritos en grupo (45%) pero para el 41% nunca lo hace. Siempre hace evaluaciones escritas individuales (45%); a veces lleva a cabo evaluaciones orales individuales (31%) pero el 49% contestó que el profesor nunca hace estas evaluaciones. A veces el profesor propone trabajos escritos (37%) y preguntas o ejercicios en el tablero (34%). Mientras que el 52% dice que nunca se hacen exposiciones, el 40% contestó que a veces se hacen. Para un 44% siempre se revisan tareas.

27. En las evaluaciones es posible usar recursos

Los estudiantes de los cinco profesores. La mayoría de los estudiantes (67%) dice que en las evaluaciones no se permite el uso de calculadoras graficadoras y computadores, lo que coincide con lo encontrado anteriormente acerca del poco uso de estos recursos en las clases. Sólo a veces, según un poco menos de la mitad de los estudiantes, se permite la consulta de apuntes o del libro de texto (43%) y la utilización de material didáctico (41%).

Los estudiantes del profesor del Caso 2. El 53% de estos estudiantes dice que el profesor les permite a veces el uso de materiales didácticos en las evaluaciones; a veces o siempre les permite la consulta de apuntes o libro de texto (30%). Nunca usan computadores o calculadoras graficadoras (53%) para las evaluaciones.

Los estudiantes del resto de los profesores. El 70% de estos estudiantes dice que en las evaluaciones no se permite el uso de calculadoras graficadoras y computadores. Sólo a veces, según el 46% se permite la consulta de apuntes o del libro de texto y la utilización de material didáctico (40%).

28. Qué tienen que responder los estudiantes en las evaluaciones

Los estudiantes de los cinco profesores. Para casi la mitad de los estudiantes, en las evaluaciones que su profesor les propone siempre tienen que solucionar ejercicios (45%), y casi siempre, resolver problemas (47%). Ocasionalmente, dicen más o menos la mitad de los estudiantes, en las evaluaciones les toca r responder preguntas de selección múltiple (51%), responder preguntas de verdadero o falso (40%), responder preguntas de establecer correspondencias (44%), responder preguntas de completar información (38%), construir ejemplos (46%), presentar diversas estrategias de solución (48%), formular problemas (52%), escribir textos (41%), explicar los procedimientos realizados (44%) y justificar las respuestas (42%). Varios estudiantes dicen que en las evaluaciones, nunca deben hacer trabajo como el anotado en las cuatro primeras opciones anteriores (28%, 45%, 28%, 40%, respectivamente) que se indicaron arriba, ni formular problemas (22%) ni escribir textos (45%), tal y como se observó en las clases y como lo dijeron los profesores en sus respuestas.

Los estudiantes del profesor del Caso 2. Para más de la mitad de estos estudiantes, en las evaluaciones que su profesor les propone a veces deben responder preguntas de verdadero o falso (69%), construir ejemplos (61%). Para la mitad de los estudiantes en las evaluaciones a veces deben presentar diversas estrategias de solución y formular problemas. El 46% señala que en las evaluaciones siempre deben resolver ejercicios y en ocasiones deben responder preguntas de selección múltiple, preguntas de establecer correspondencias, resolver problemas, escribir textos y explicar los procedimientos realizados. Para el 30% nunca deben responder preguntas de completar.

Los estudiantes del resto de los profesores. Para la mitad de los estudiantes, en las evaluaciones que su profesor les propone a veces deben responder preguntas de escoger la respuesta, presentar diversas estrategias de solución y formular problemas. Para el 46%, en las evaluaciones siempre deben resolver ejercicios. Deben construir ejemplos a veces (44%), y a veces explicar los procedimientos (42%) y justificar las respuestas (43%). Para el 53% nunca les proponen responder preguntas de verdadero o falso mientras que el 30% dice que a veces. El 42% dice que a veces deben responder preguntas de establecer correspondencias mientras que el 32% dicen que nunca lo hacen. Según el 40% a veces responden preguntas de completar y otro 40% nunca lo hacen. Un 52% contestó que nunca les hacen escribir textos pero un 39% dice que a veces deben hacerlo.

29. Qué se tiene en cuenta en las evaluaciones

Los estudiantes de los cinco profesores. Para entre un 21% y 28% de los estudiantes, los indicios de aprendizaje que los profesores siempre tienen en cuenta en las evaluaciones, son la presentación y el orden, las respuestas finales, las fórmulas usadas, los procedimientos realizados, los dibujos y las tablas realizadas, las explicaciones suministradas. Para los demás estudiantes estos indicios son tenidos en cuenta por sus profesores casi siempre o a veces. Algunos estudiantes dicen que sus profesores nunca tiene en cuenta los indicios considerados como opciones en esta pregunta y las que menos contemplan, son las respuestas finales (17%) y los textos elaborados (28%).

Los estudiantes del profesor del Caso 2. Para una gran parte de estos estudiantes, el profesor tiene en cuenta en las evaluaciones a veces las fórmulas que escogen usar (61%). Para porcentajes de estudiantes entre el 23% y el 38% a veces se tienen en cuenta los procedimientos realizados, la presentación y el orden, las respuestas finales, los dibujos y tablas realizadas, los textos elaborados, las explicaciones suministradas. Para el 46%, siempre se consideran las respuestas finales y la presentación y el orden. Para el mismo porcentaje casi siempre se tienen en cuenta los procedimientos realizados y los dibujos y tablas. Para el 30% los textos elaborados nunca se tienen en cuenta, pero otro 30% dice que a veces se tienen en cuenta.

Los estudiantes del resto de los profesores. Para parte de estos estudiantes el profesor tiene en cuenta en las evaluaciones a veces las explicaciones suministradas (53%), las fórmulas que escogen usar (44%), la presentación y el orden (38%), los dibujos y tablas realizadas (32%) y los textos elaborados (36%). El 28% dice que los textos elaborados nunca se tienen en cuenta Para el 30% siempre se consideran los procedimientos y los dibujos y tablas realizados.

30. Aporte de las evaluaciones

Los estudiantes de los cinco profesores. Al 45% de los estudiantes las evaluaciones de matemáticas les sirven siempre, y al 37% casi siempre, para reconocer sus errores y superarlos. Al 33% de los estudiantes, les sirven siempre, y al 39% casi siempre, para identificar los conceptos y procedimientos aprendidos. También al 33% le sirven siempre para identificar los conceptos y procedimientos que no aprendió. A porcentajes de estudiantes similares a los indicados, tales evaluaciones les sirven ocasionalmente para los fines mencionados. Un 27% de los estudiantes cree que el fin de la evaluación siempre es cumplir con un requisito y para un 37% a veces este es el fin.

Los estudiantes del profesor del Caso 2. Para estos estudiantes las evaluaciones les sirven a veces para cumplir un requisito (58%). Las evaluaciones les sirven a todos estos estudiantes para identificar los conceptos o los procedimientos que han aprendido en clase y los que no han aprendido a veces (50%), siempre (25%) o casi siempre (25%). También siempre les sirven para reconocer sus errores y superarlos (41%) y a veces (33%).

Los estudiantes del resto de los profesores. Para más de la mitad de estos estudiantes las evaluaciones les sirven para cumplir un requisito a veces (33%), casi siempre (25%) y siempre (25%). De igual forma les sirven siempre para identificar los conceptos o los procedimientos que han aprendido en clase (32%) y lo que no han aprendido (23%). para el 2% nunca les sirven para identificar lo aprendido y para un 12% nunca sirven para ver lo que no han aprendido. Siempre y casi siempre les sirve para reconocer sus errores y superarlos (44% y 42% respectivamente).

31. Preparación para las evaluaciones

Los estudiantes de los cinco profesores. Cerca de la mitad de los estudiantes estudia siempre los apuntes del cuaderno (44%) para prepararse para las evaluaciones, casi siempre resuelve los problemas ya trabajados (44%) y a veces resuelve otros problemas (53%). Pocos dicen nunca hacer las dos primeras acciones (3%, 5%, respectivamente) y un poco más de los estudiantes aceptan que nunca estudian la teoría del libro de texto (28%) o que nunca resuelven otros problemas (19%). Aunque más de la mitad de los estudiantes (52%) niega hacer resúmenes para mirarlos durante las evaluaciones, un 23% dice hacerlo a veces, un 19% casi siempre y un 6% siempre.

Los estudiantes del profesor del Caso 2. El 46% de estos estudiantes estudian los apuntes del cuaderno como preparación para las evaluaciones, tanto siempre como a veces. Más de la mitad de estos estudiantes casi siempre resuelve los problemas ya trabajados (53%) pero sólo un 30% resuelve a veces otros problemas. Nunca estudian la teoría del libro de texto (38%) y el 23% sí lo hace a veces o casi siempre. Aunque el 38% niega hacer resúmenes para mirarlos durante las evaluaciones, el 23% lo hace siempre y el 30% lo hace a veces.

Los estudiantes del resto de los profesores. El 45% de estos estudiantes estudia siempre los apuntes del cuaderno para las evaluaciones. A veces el 43% estudia la teoría del libro, el 41% resuelve los problemas ya trabajados, el 58% resuelve otros problemas. El 23% casi siempre elabora un resumen para mirarlo durante la evaluación, el 21% lo hace a veces y el 52% nunca lo hace.

Discusión

En el análisis de las respuestas a este cuestionario sobresalen dos grandes resultados. Por un lado, es claro que para muy pocas preguntas se pueden detectar tendencias dadas por las respuestas de la mayoría de los estudiantes que permitan generalizar algo, y por lo tanto caracterizar el grupo de estudiantes. Esto es válido aun para estudiantes del mismo curso —los del colegio reportado en el Caso 2—, e incluso para lo que el profesor de todos ellos hace. Por otro lado se ha hecho evidente que las preguntas formuladas no contribuyeron a obtener información que permitiera describir algunos aspectos del aprendizaje. Se podría decir incluso más: muchas no fueron pertinentes para esto, una de las preguntas no se entendió y la mayoría por ser de opinión del estudiante, proporcionan sólo una visión de cómo se ven los estudiantes a sí mismos, pero no se tiene la información sobre su trabajo para poder relacionar las respuestas con su aprendizaje matemático. Estos resultados se podrían explicar por diversas razones. En primer lugar, no sorprende que los estudiantes no sean conscientes sobre la forma en que se hace la clase y sobre la forma en que ellos aprenden, cada uno habla de su propia experiencia al vivir su formación y en consecuencia sus repuestas son disímiles, la interpretación de las preguntas también es diferente, y el significado de ciertas palabras varía entre ellos. En segundo lugar, dados los limitados recursos asignados al estudio y la magnitud del trabajo implicado en explorar las rutas de enseñanza, en la propuesta original de nuestro grupo para la convocatoria no se ofreció indagar acerca de las rutas de aprendizaje; sólo como respuesta a la presión ejercida por el IDEP posteriormente, se accedió a elaborar un cuestionario para estudiantes, pero no relativo al contenido matemático.

En la contrastación de los dos grupos de datos en que posteriormente se organizaron estas respuestas, distinguiendo uno de los colegios que presenta características especiales en sus clases (el reportado como el Caso 2) de los otro cuatro, hay pocas diferencias en cuanto a las estadísticas de frecuencia para las distintas posibilidades de las preguntas. Tampoco hay diferencias significativas entre las estadísticas de frecuencia de las respuestas de estos grupos con las del grupo total. Así, a continuación hacemos un resumen de lo encontrado en las respuestas en general luego de su análisis. En las situaciones en que se puede ver una diferencia relevante entre los grupos, ésta se destaca explícitamente.

La mayoría de los estudiantes piensa que su rendimiento es bueno y que sus padres y profesores opinan lo mismo; dedica en promedio media hora diaria en la casa para hacer tareas de matemáticas y nunca realiza actividades relacionadas con las matemáticas adicionales a las de sus clases en la institución. No obstante que es frecuente escuchar que muchos estudiantes no se consideran 'buenos' para las matemáticas, estos estudiantes tienen una buena opinión de sí mismos y por consiguiente escogieron posibilidades de las preguntas en ese sentido, sobre su trabajo y rendimiento. Con relación a las razones por las que les agrada o desagrada la clase de matemáticas es de esperar que las opiniones sobre su profesor y sobre lo que él hace sean favorables, pues eso compromete la imagen del profesor. Así la mayoría expresa la importancia de las matemáticas, la manera en que el profesor hace la clase, el conocimiento matemático del profesor , la preparación de la clase por parte del profesor, la atención especial que el profesor les dedica, la manera del ser del profesor, la forma de evaluar. Y en referencia a su desagrado por la clase de matemáticas, igualmente para la mayoría de los estudiantes las razones relativas al profesor no son la causa con excepción para algunos de la atención del profesor sólo a algunos estudiantes. Las causas que alegan muchos están ligadas a los estudiantes mismos como el desinterés de ellos, la indisciplina, la falta de conocimiento de los estudiantes, las diferencias en el rendimiento. Para un poco menos estudiantes su desagrado se debe al mal estado del salón de clase y a la dificultad de las matemáticas.

De acuerdo a las respuestas de los estudiantes no se pueden detectar tendencias con respecto a actividades específicas que los profesores realicen en clase, que permitan indicar que moldean o tienen incidencia en su aprendizaje. Se evidencia una diferencia con lo que la mayoría de los profesores dicen hacer siempre en sus clases: revisar la tarea para la casa, repasar temas ya vistos, explicar el tópico a tratar, proponer solución de ejercicios, asignar tarea para la casa. Por el contrario se ve que los estudiantes consideran que hacen su trabajo en la clase y por consiguiente marcan las posibilidades de su trabajo desligadas de si el profesor propone o no la actividad correspondiente. Actividades como copiar lo que está escrito en el tablero, desarrollar los talleres y participar del trabajo en el grupo son actividades que realizan muchos estudiantes. Para la mayoría de los estudiantes de los colegios distintos al reportado en el Caso 2, los profesores exigen llevar un cuaderno de apuntes y para los estudiantes de dicho Caso se exige llevar una carpeta que contenga las guías trabajadas. A los estudiantes de todos los profesores se les exige llevar instrumentos como regla, escuadra, compás, etc., y nunca se les exige calculadora graficadora ni otro tipo de calculadora, Todo esto coincide con lo dicho por los profesores. No tantos estudiantes conocen los objetivos de aprendizaje de las clases y si lo hacen en algunos momentos es porque el profesor los dice o porque se evidencian en el trabajo que él propone. Con respecto a las evaluaciones que los profesores les proponen tampoco se percibe una tendencia pues según los estudiantes se hacen indistintamente de manera oral, escrita, en grupo o individualmente, y por medio de preguntas de todo tipo. Coinciden muchos estudiantes de todos los grupos en que siempre les ponen a resolver ejercicios, lo que también es aseverado por los profesores en sus respuestas. Las evaluaciones para el Caso 2 se diferencian porque a veces son orales y se proponen problemas para resolver. Solamente a veces los profesores permiten el uso de apuntes y libros en las evaluaciones y nunca posibilitan la utilización de calculadoras graficadoras u otras calculadoras. Para corregir las respuestas de los estudiantes en general lo hacen en frente de todos los estudiantes y en las clases del profesor del Caso 2, lo hacen con el estudiante en cuestión. Como indicios del aprendizaje para los estudiantes los profesores tienen en cuenta en ocasiones e indistintamente el orden y la presentación, las respuestas finales, los procedimientos realizados, las fórmulas usadas, los dibujos y tablas elaborados, las explicaciones suministradas. Como se ve no hay tendencias. ALgunos dicen que nunca tiene en cuenta los textos elaborados mientras que estudiantes del mismo colegio dicen los contrario. Son notorias las respuestas para una misma posibilidad con frecuencias similares y opciones encontradas.

En cuanto a lo que hace el estudiante no aparecen tampoco tendencias visibles. Durante la clase a mayoría de los estudiantes copia lo que el profesor escribe en el tablero, pone atención a lo que el profesor dice y desarrolla el trabajo solicitado y no hay estudiantes que dejen de desarrollarlo. Esto es coherente con lo expresado en las respuestas a otras preguntas. Adicionalmente muchos estudiantes dicen que nunca dejan de hacerle saber al profesor que no entienden y nunca hacen tareas de otras materias en clase de matemáticas. Varios reconocen que en ocasiones se distraen y pierden el hilo de la clase, pero pocos aceptan molestar y jugar con sus compañeros. Es común que los estudiantes a veces comente con su compañeros el tema que se esta abordando.

Para realizar el trabajo en clase o la tarea que el profesor propone para la casa, los estudiantes ocasionalmente prefieren hacerlo individualmente, con un compañero que sabe más, con sus amigos, con un compañero al que le pueden ayudar y con la ayuda del profesor. La mayoría de los estudiantes nunca usa en la realización de las tareas para la casa, calculadoras graficadoras u otras calculadoras, programas matemáticos de computador ni consulta páginas en Internet. Algunos consultan el libro de texto y otros documentos para estudiar la teoría, para saber cómo hacer los ejercicios, para hacer los ejercicios que allí se proponen, para copiar información, para leer información y buscar aplicaciones de las matemáticas.

A los estudiantes del profesor del Caso 2 las tareas de matemáticas le sirven en mayor proporción que al resto de los estudiantes para identificar conceptos o procedimientos que aprendió. A algunos estudiantes de los cinco colegios las tareas les ayudan a detectar lo que no aprendió, para cumplir con un requisito, para mantenerse ocupado en la casa, para repasar el tema a veces, para preparar el tema para la siguiente clase. También lo que hacen los estudiantes al desarrollar los ejercicios propuestos o las respuestas a las preguntas del profesor son variadas y no se evidencian tendencias específicas. Los estudiantes utilizan las palabras especiales usadas por el profesor o siguen los pasoso que él hizo indistintamente, aunque hayan o no entendido su significado o sin estar seguros. Muchos piensan que hay otras respuestas y se lo hacen saber o no al profesor y buscan otras formas de hacer los ejercicios. En las discusiones que se generan en clase la mayoría de los estudiantes siempre escucha. Sólo ocasionalmente la mitad de ellos responde preguntas, hacen preguntas, analizan las intervenciones de otros, discuten las posiciones de sus compañeros, escuchan y comentan críticamente, escuchan y no participan.

Las evaluaciones de matemáticas a los estudiantes les sirven en proporciones iguales para reconocer sus errores y superarlos, para identificar los conceptos y procedimientos aprendidos y no aprendidos, y para cumplir un requisito. Estudiar los apuntes del cuaderno y resolver los problemas ya trabajados son indicados como acciones que muchos realizan en la preparación para las evaluaciones; en menor proporción los estudiantes resuelven otros problemas y aún menores porcentajes de estudiantes estudian la teoría del libro de texto. Algunos aceptan hacer un resumen para mirarlo durante la evaluación.

Para la mayoría de los estudiantes las principales razones que determinan un buen rendimiento en matemáticas incluyen tener disposición, escuchar atentamente al profesor, seguir sus instrucciones y estudiar y hacer las tareas. En menor proporción también es importante para ellos memorizar los apuntes. Aunque cuando se refieren a los factores que inciden en el aprendizaje también las razones de poner atención al profesor, desarrollar el taller que se propone en la clase y hacer las tareas son los más indicados, el porcentaje de estudiantes se acerca más a la mitad que a la mayoría, como si los mismos estudiantes no asociaran un buen rendimiento con el aprendizaje. Otros factores que inciden en el aprendizaje a veces para algunos estudiantes son realizar una gran cantidad de ejercicios, consultar el libro de texto u otros documentos. El uso de calculadoras graficadoras u otras calculadoras para la gran mayoría nunca influye en su aprendizaje. No se puede ver una tendencia definida en cuanto a lo que los estudiantes consideran como indicios de su aprendizaje. En ocasiones, para algunos estudiantes la aprobación del profesor y los buenos resultados de las evaluaciones son reflejo de su aprendizaje. Para un poco menos de ellos también a veces ser capaz de resolver ejercicios, recordar algo ya estudiado, ser capaz de escribir un texto relacionado con el tema, justificar sus respuestas, entender las explicaciones del profesor y poder explicarle a un compañero le indican que ha aprendido.

Como tópicos recientemente aprendidos los estudiantes en su gran mayoría indican temas de los tratados en las clases observadas, lo que es natural dado que el cuestionario se aplicó en esa misma época. Unos pocos estudiantes aluden sólo al nombre del tema, pero muchos suministran un ejemplo tal y como lo pedía la pregunta. Tanto los nombres como los ejemplos se refieren casi en su totalidad a procedimientos como la elaboración de la gráfica de la parábola, la solución de la ecuación cuadrática, la solución de un determinante por la regla de Kramer, encontrar el mínimo común múltiplo, sumar, restar, multiplicar o dividir polinomios, hacer conversión de unidades, medir. Esto es coherente con el énfasis propiciado por el profesor en el conocimiento procedimental que se evidenció en las clases de cuatro de los grados. Muy pocos estudiantes indican como algo aprendido un enunciado matemático: algunos estudiantes de la clase del profesor del Caso 2 que trabajan con guías donde se presentan dichos enunciados y los del profesor del Caso 3 que trabajaron en la clases observadas con los criterios de divisibilidad y por lo tanto son estos criterios los enunciados expresados por los estudiantes.

Consideraciones finales

En este capítulo se presentan algunas consideraciones que complementan la caracterización sobre la enseñanza de las matemáticas de los profesores participantes ya hecha, que dimensionan de manera más concisa los aportes del estudio para así cerrarlo.

En la primera sección damos cuenta de conclusiones adicionales que emergieron de nuestras interpretaciones a observaciones que fueron percibidas como comunes y se pueden por lo tanto generalizar. En la segunda sección, presentamos algunas de las posibles diferencias de los resultados obtenidos con otros estudios que al respecto se han realizados anteriormente. Para finalizar, mencionamos algunas dificultades encontradas en el desarrollo del proyecto que impusieron limitaciones al alcance del estudio mismo.

Otros resultados

Innovaciones encontradas e influencia de teorías existentes

Detrás de las actitudes y acciones de los profesores en las clases analizadas en este estudio, reconocemos intenciones y esfuerzos de su parte encaminados a abordar problemas específicos de su práctica que han identificado y, en general, a implementar estrategias —puntuales o no— que contribuyan a lograr el aprendizaje de sus alumnos y hacer de la clase un evento amable para ellos. A continuación destacamos de manera sucinta algunos hechos en los que vislumbramos lo mencionado:

- la motivación y disposición de los estudiantes hacia el aprendizaje de las matemáticas se percibe como un asunto que le concierne abordar al profesor y en consecuencia éste implementa una estrategia especial —en el sentido de que no hace parte del repertorio de las estrategias empleadas para desarrollar los temas matemáticos— que le permita al estudiante tener una vivencia de la clase de matemáticas algo diferente de la que tiene a través de las actividades usuales de la clase;
- la realización de tareas por parte del estudiante en horario diferente al de la clase no es una condición que se pueda garantizar para su proceso de aprendizaje, así que el profesor percibe que la clase es el espacio donde el aprendizaje principalmente puede ocurrir y en consecuencia, ésta tiene que aprovecharse lo más posible; para ello, buena parte del tiempo de la clase se ocupa en el desarrollo de ejercicios del tipo que se quiere que el estudiante llegue a realizar diestramente;
- la participación de los estudiantes en la clase se percibe como una condición importante para que ellos vayan aprendiendo los temas tratados en clase y en consecuencia, incluso durante la exposición del profesor, se abren espacios para que los alumnos tengan alguna participación;
- la invitación a los alumnos para que trabajen en grupo para realizar las tareas asignadas en la clase o por lo menos la aceptación de que interactúen entre ellos en torno a asuntos puntuales de la tarea, el recurso a la lectura de parte de los alumnos para que se informen sobre algún tema, la solicitud a los alumnos para que expresen en sus palabras lo que han entendido de una lectura o la solución que dieron a un problema, la invitación a los alumnos para que discutan entre ellos la solución a un problema, son estrategias de trabajo en clase empleadas por varios de los profesores.

Es probable que algunos de estos hechos, si no todos, representen para los profesores comprometidos en ellos, cambios importantes en su práctica si se tiene como referencia el inicio de su práctica profesional; también es probable que comparada con la práctica de otros docentes, los hechos mencionados se puedan ver como innovaciones. Sin embargo, a pesar de reconocer que los hechos mencionados y otros adicionales puedan haber cambiado pocos o muchos aspectos de la práctica de estos docentes en el aula y sin desconocer la importancia relativa de tales cambios, consideramos que éstos no son suficientes para cambiar sustancialmente los resultados relativos a la formación matemática de los estudiantes. No creemos que éstos sean posibles sin hacer cambios sustanciales en la forma de aproximar a los estudiantes al conocimiento matemático y para ello percibimos que hace falta un mayor compromiso de los profesores con el diseño y desarrollo curricular específico para cada tópico que se pretenda estudiar; esto incluye entre otras cosas, tomar decisiones fundamentadas con respecto a los tópicos matemáticos que es relevante que el estudiante aprenda, a la formación matemática que se quiere lograr en el estudiante (conocimiento conceptual, conocimiento procedimental y conocimiento actitudinal), a la selección o diseño de tareas con objetivos de aprendizaje claros, al desarrollo de estrategias de observación en clase y mecanismos de seguimiento al aprendizaje de los estudiantes, etc.

Al examinar con algún detalle cómo ocurren en las clases los hechos mencionados anteriormente, encontramos que detrás de por lo menos algunos de ellos puede no haber una reflexión seria de parte de los profesores para buscar soluciones reales para los problemas identificados y en cambio se han implementado las soluciones que de manera más intuitiva vienen a la mente del profesor o estrategias que parecen interpretaciones adecuadas para teorías del aprendizaje que son conocidas con mayor o menor detalle por los profesores. Así, por ejemplo, aunque vemos la participación de los alumnos en la exposición del profesor acerca de un determinado tema como una oportunidad real para que el estudiante entienda lo que se está exponiendo, no se puede concretar cuando lo que los estudiantes pueden hacer principalmente es responder preguntas puntuales de respuesta única. No creemos que se logre una motivación genuina hacia el aprendizaje de las matemáticas en los estudiantes con actividades desligadas del tema que se está tratando. En la interacción entre alumnos en torno a asuntos matemáticos, lo que puede aportar al aprendizaje de las matemáticas no es la interacción en sí y por sí misma; es el contenido de tal interacción y la consciencia que logren los alumnos de tal contenido lo que es relevante. Con respecto al punto que se está tocando consideramos importante que el profesor pueda tener espacios dentro de su jornada laboral para hacer reflexión acerca de su práctica de manera individual y como miembro de una comunidad de práctica; además, que pueda contar con la colaboración de agentes externos para que en su interacción con ellos pueda confrontar y enriquecer su perspectiva. En particular, vemos la necesidad e importancia que puede tener en la reflexión del profesor —como agente transformadora de su práctica— una actitud de no "pasar entero" las teorías que de alguna manera se ponen de moda y estudiar a cabalidad los documentos que configuran la legislación oficial del sistema educativo en lo que toca con la enseñanza de las matemáticas.

Reacciones de los profesores al trabajo de los estudiantes

Percibimos que las diversas maneras de reaccionar de los profesores frente al trabajo de los estudiantes y con respecto a lo adecuado o no de éste, surgen primordialmente cuando se presentan errores y por lo tanto se enfocan en destacarlos. A pesar de que en ocasiones se hace un reconocimiento explícito que aprueba las producciones y respuestas apropiadas de los estudiantes, el centro de la atención y por consiguiente de las intervenciones de los profesores es señalar el error, es decir, indicar lo que es incorrecto tanto desde el punto de vista del contenido matemático como también, en ocasiones, desde el punto de vista de la forma, la cual abarca una manera específica de notar, el orden y la presentación.

No es usual que los profesores se refieran a la dificultad inherente al error o a las causas posibles que podrían generarlo, o que hagan preguntas de por qué, o que planteen otras situaciones que arrojen luz para el estudiante sobre cuál es el problema de fondo, o que hagan ver las consecuencias de sus respuestas. Podría decirse así que, de acuerdo con las ideas planteadas por Hewitt (2002c), los profesores han desarrollado y hacen uso de su consciencia sobre su conocimiento matemático, que les permite establecer lo que es correcto o no. Sin embargo, no se evidencia que hayan trabajado y hagan uso de su consciencia acerca de su conocimiento didáctico o acerca de la misma consciencia de los estudiantes, lo que podría ayudarles a que sus reacciones incluyeran poner en práctica estrategias encaminadas a que el estudiante vea y comprenda por qué en su trabajo hay un error, fuera de aceptar que alguna autoridad en la clase lo dice.

Diferencia entre la enseñanza de la aritmética, álgebra y geometría

La observación de los casos permitió ver que en una de las clases de aritmética, y en las dos de álgebra, hay una fuerte tendencia al trabajo de aplicación de procedimientos, muchas veces algorítmicos, previamente especificados, y que las tareas para los estudiantes que involucraran otras actividades matemáticas como la exploración, la resolución de problemas, el hacer conjeturas, fueron pocas o incipientes. Es decir, aunque algunas de estas tareas implicaban actividades como las nombradas, éstas no se propiciaron.

Dada la naturaleza particular de la geometría comparada con la de las asignaturas mencionadas, no sería sorprendente encontrar diferencias en su enseñanza. En especial es de esperar que el énfasis que se hace en clase con respecto al tipo de conocimiento que se pone en juego allí, no apunte necesariamente a reproducir y aplicar unos procedimientos algorítmicos. Aunque en geometría pueden verse cómo procedimientos, por ejemplo, la secuencia de pasos a seguir en una determinada construcción geométrica, no así se pueden encontrar algoritmos. Además, en general la geometría se estudia en torno a objetos, que se definen y para los cuales se establecen propiedades. Esto podría marcar definitivamente una distinción en la enseñanza que de manera natural privilegia los procesos de conceptualización. Aun así, en las clases de geometría observadas las tareas propuestas para trabajar en la comprensión de conceptos se quedaron a medio camino y no se culminaron los esfuerzos realizados al respecto. Para una de las clases, esto impide concretar la diferencia. Para la otra, la diferencia podría indicarse como el establecimiento explícito de conexiones entre algunos de los conceptos tratados.

El aporte de los resultados del estudio a la comunidad

Es claro que en la comunidad de educadores matemáticos y con mayor certeza a nivel internacional, se han realizado numerosas investigaciones con el propósito de caracterizar la enseñanza de las matemáticas. Algunas de estas investigaciones fueron ya referidas en la propuesta a la convocatoria para este estudio. En especial, se aludió a las investigaciones que caracterizan la enseñanza denominada *tradicional*.

En contraste con estas investigaciones, que en su mayoría hacen una descripción de la enseñanza enfocada en algún aspecto, y atienden así por ejemplo a las actividades que se dan en la clase o al discurso matemático que se propicia, en este estudio hemos hecho una caracterización de la práctica docente tanto desde la perspectiva de los profesores como de los investigadores, que abarca no sólo las actividades de la clase y las actividades extraclase, sino que profundiza en el trabajo matemático que se lleva a cabo, en el tipo de conocimiento matemático que se pone en juego, en la comunicación que allí ocurre y en la autoridad que se reconoce. A nuestro juicio, la visión presentada proporciona una mirada amplia y bastante completa de la práctica docente del profesor de matemáticas, desde una óptica que básicamente deja por fuera aspectos relativos a las estructuras y procesos mentales del profesor.

De otra parte, el marco conceptual construido puede verse como una herramienta fundamental que permitirá y de hecho ya nos ha posibilitado, observar la enseñanza y lo que pasa en las clases de matemáticas, de una manera más estructurada y con focos específicos que ayudan a simplificar la mirada.

La riqueza de lo observado y la diversidad de elementos involucrados en la clase ha confirmado nuestras intuiciones acerca de la necesidad imperiosa de complementar los procesos de formación de profesores que llevamos a cabo, con la instrumentación del análisis de clases, bien sea de los mismos profesores en formación o de otros profesores. Este ejercicio realizado de forma sistemática y bajo el marco elaborado, además de evidenciar la complejidad presente en el fenómeno de la enseñanza, pone de manifiesto innumerables aspectos de la práctica a nivel personal de los cuales no se es necesariamente consciente. Ayuda también a inferir muchas de las razones que están por detrás de lo que hacemos como profesores y a explicar los resultados que se obtienen en los estudiantes. Se vislumbran adicionalmente posibilidades más objetivas, y quizás más efectivas, de actuación para los profesores.

Dificultades, encontradas

No obstante que de la información recolectada por medio del cuestionario del estudiante emergen algunos datos interesantes que amplían el conocimiento sobre su trabajo, tal y como se indicó anteriormente esta información no permitió caracterizar el grupo de estudiantes en términos de su aprendizaje ni tampoco posibilitó al menos, describir para la mayoría, aspectos de su aprendizaje. Este cuestionario fue respuesta a una exigencia adicional del IDEP, posterior a la aprobación de nuestra propuesta y por consiguiente, existieron grandes limitaciones para su desarrollo.

Consideramos que esto es reflejo de las tensiones que existen en las entidades financiadoras, principalmente en las estatales, entre la cantidad de recursos disponibles y la forma de gastarlos. Las políticas que en consecuencia se reconocen para la financiación de proyectos académicos, reducen cada vez más las cuantías asignadas y exigen aumentar los compromisos de los proponentes, con las consecuentes implicaciones en la calidad.

Referencias

Alsina, C., Fortuny, J. y Pérez, R. (1997). *¿Por qué geometría? Propuestas didácticas para la ESO*. Madrid: Editorial Síntesis, S. A.

Amaya, G. (1997). La escuela, el maestro y su formación. En IDEP (comp.), *La formación de los educadores en Colombia* (pp. 15-64). Bogotá: IDEP.

Arrieta, M. (1995). Los procedimientos en geometría. En *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 3*, 12-19.

Brousseau , G. (1993). Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas. En E. Sánchez y G. Zubieta (Eds,), *Didáctica de las matemáticas. Escuela francesa*. México: DME-CINVESTAV.

Campbell, N. (1956). Medición. En J. Newman (Ed.), *Sigma. El mundo de las matemáticas.* (tomo V) . Décima edición (pp. 186-201).

Carpenter, T. y Lehrer, R. (1999). Teaching and learning with understanding. En E. Fenema y T. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 19-32). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc., Publishers.

Chamorro, M. y Belmonte, J. (1991). *El problema de la medida. Didáctica de las magnitudes lineales*. Colección: Matemáticas: Cultura y aprendizaje. Madrid: Editorial Síntesis.

Chamorro, M. (1995). Aproximación a la medida de magnitudes en la enseñanza primaria. En *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 3*, 31-53.

Cobb, P. (2000). From representations to symbolizing: Introductory comments on semiotics anf mathematical learning. En P. Cobb, E. Yackel y K. McClain (Eds.), *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms* (pp. 17- 36). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc., Publishers.

Cobb, P. y Yackel, E. (1996). Constructivist, emergent and sociocultural perspectives in the context of developmental research. *Educational Psychologist, 31*, 175-190.

Cooney, T. (1994). Teacher education as an exercise in adaptation. En D. Aichele y A. Coxford (Eds.), *Professional development for teachers of mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Denzin, N. y Lincoln, Y. (1998). Entering the field of qualitative research. En N. Denzin y Y. Lincoln (Eds.), *Strategies of qualitative inquiry.* (pp. 1-34). Thousand Oaks, CA: Sage

Doyle, W. (1986). Classroom organization and management. En M.C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 392-431). New York: Macmillan Publishing Company.

Durán, M., Heilbron, L. y Ortiz, M. (1996). *Matemática hacia el futuro*. Grupo Didáctico Latinoamericano. Grado 7. Tercera edición.

Eisenhart, M. (1988). The etnographic research tradition and mathematics education research. *Journal for Research in Mathematics Education, 19* (2), 99-114.

Eisenhart, M. y Howe, K. (1992). Validity in educational research. En M. LeCompte, W. Millroy, y J. Preissle (Eds.). *The handbook of qualitative research in education* (pp. 643-680). San Diego, CA: Academic Press.

Emerson, R. Fretz, R. y Shaw, L. (1995). Processing fieldnotes: Coding and memoing. En *Writing ethnographic fieldnotes* (pp. 142-168). Chicago, IL: The University of Chicago Press.

Ernest, P. (1989). The knowledge, beliefs and attitudes of the mathematics teacher: A modl. *Journal of Education for Teaching, 15* (1), 13-33.

Flores, P. (2001). La clase como contexto de las tareas académicas (documento de trabajo).

Garcia, G. y Acevedo, M. (2000). La evaluación de las competencias en matemáticas y el currículum un problema de coherencia y consistencia. En D. Bogoya (Ed.), *Hacia una cultura de la evaluación para el siglo XXI* (pp. 93-104). Bogota: Universidad Nacional de Colombia.

Gómez, P., Perry, P., Valero, P., Castro, M. y Agudelo, C. (1998). Desarrollo profesional de directivos y profesores: motor de la reforma de las matemáticas escolares. En IDEP (comp.), *La investigación: fundamento de la comunidad académica*, Serie Investigaciones 2, (pp. 103-156). Bogotá: IDEP.

Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. *Revista EMA, 7* (3), 251-292.

Gravemeijer, K., Cobb, P., Bowers, J. y Whitenack, J. (2000). Symbolizing, modeling and instructional desig. En P. Cobb, E. Yackel y K. McClain (Eds.), *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms* (pp. 225- 274). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc., Publishers.

Gregg, J. (1995). The tensions and contradictions of the school mathematics tradition. *Journal for Research in Mathematics Education, 26* (5), 442-466.

Hewitt, D. (2002a). Lo arbitrario y lo necesario: una forma de ver el currículo de matemáticas. *Revista EMA, 7* (1), 43-64.

Hewitt, D. (2002b). Lo arbitrario y lo necesario: apoyo a la memoria. *Revista EMA, 7* (2), 206-226.

Hewitt, D. (2002c). Lo arbitrario y lo necesario: educación de la consciencia. *Revista EMA, 7* (3), 310-343.

Jaworski, B. (1994). *Investigating mathematics teaching. A constructivist enquiry.* London: The Falmer Press.

Leinhardt, G. (2002). Instructional explanations: A common place for teaching and location for contrast. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (333-357). Washinton, D.C.: American Educational Research Association.

Llinares, S. (2000). Intentando comprender la práctica del profesor de matemáticas. En J. Ponte y L. Serrazina (Eds.), *Educaçao matemática em Portugal, Espanha e Italia. Actas da Escola de Verao-1999* (pp. 109-132). Portugal: Sociedade de Educaçao Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciencias de Educaçao.

Mason, J. (1996). *Personal enquiry: Moving from concern towards research.* United Kingdom: The Open University.

NCTM (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

NCTM (1991). *Professional standards for teaching mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics. Reston,* VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Nickson, M. (1992). The culture of the mathematics classroom: An unknown quantity? En D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics and learning* (pp. 101-114). New York: MacMillan Publishing Company.

Osterman, K. y Kottkamp, R. (1993). *Reflective practice for educators. Improving schooling through professional development.* California: Corwin Press, Inc.

Perry, P., Andrade, L., Fernández, F. y de Meza, M. (2000). Reflexión: componente de la actividad profesional del docente de matemáticas (reporte de investigación). Bogotá: una empresa docente.

Perry, P., Valero, P., Castro, M., Gómez, P. y Agudelo, C. (1998). *Calidad de la educación matemática en secundaria. Actores y procesos en la institución educativa.* Bogotá: una empresa docente.

Ponte, J.P., Boavida, A.M., Graça, M. y Abrantes, P. (1997). Funcionamiento de la clase de matemáticas. En *Didáctica da matemática.* (pp. 71-95). Lisboa: Ministerio de Educaçao, PRODEP.

Quinn, M. (2002). *Qualitative research and evaluation methods.* Thousand Oaks, CA: Sage Publications, Inc.

Rico, L. (1995). Consideraciones sobre el currículo escolar de matemáticas. *Revista EMA, 1* (1), 4-24.

Rico, L. (1997). Consideraciones sobre el currículo de matemáticas para educación secundaria. En L. Rico (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 15-38). Barcelona: ICE/Horsori.

Sanders, D. y McCutcheon, G. (1984). On the evolution of teachers' theories of action through action research. The Action Research Reader, 177-185.

Schmidt, W., McKnight, C., Valverde, G., Houang, R. y Wiley, D. (1996). *Many visions, many aims. A cross-national investigation of curricular intentions in school mathematics.* IEA-TIMSS.

Si no está publicado, entonces cómo y dónde se puede consultar

Schoenfeld, A. (1996). Elements of a model of teaching (documento no publicado). Berkeley: University of California at Berkeley.

Schön, D. (1983). *The reflective practitioner: How professionals think in action*. New York: Basic Books.

Sfard, A. (2000a). On reform movement and the limits of mathematical discourse. *Mathematical Thinking and Learning, 2* (3), 157-189.

Sfard, A. (2000b). Symbolizing mathematical reality into being—or how mathematical discourse and mathematical objects create each other. En P. Cobb, E. Yackel y K. McClain (Eds.), *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms* (pp. 37-98). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc., Publishers.

Sfard, A. (2001). There is more to discourse than meets the ears: Looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning. *Educational Studies in Mathematics, 46* (1/3), 13-57

Sierra, M., González, M.T., García, A. y González, M. (1989). *Divisibilidad*. Madrid: Editorial Síntesis.

TIMSS Study Center (1994a). Teacher Questionnaire. Boston: The Hague.

TIMSS Study Center (1994b). School Questionnaire. Boston: The Hague.

TIMSS Study Center (1994c). Student Questionnaire. Boston: The Hague.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. En A. Coxford y A. Shulte (Eds.), *The ideas of algebra, K - 12* (pp. 8-19). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Voigt, J. (1995). Thematic patterns of interaction and sociomathematical norms. En P. Cobb y H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 163-201). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Yackel, E. (1995). Children´s talk in inquiry mathematics classrooms. En P. Cobb y H, Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 131-162). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Yackel, E. (2000). Introduction: Perspectives on semiotics and instruccional design. En P. Cobb, E. Yackel y K. McClain (Eds.), *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms* (pp. 1-13). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Yackel, E. y Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27* (4), 458-477.

PONENCIA
2003, PP. 1-14

UNA MIRADA DE CERCA A LA PRÁCTICA DEL PROFESOR

FELIPE FERNÁNDEZ, LUISA ANDRADE,
PATRICIA PERRY Y EDGAR GUACANEME
UNIVERSIDAD DE LOS ANDES • "UNA EMPRESA DOCENTE"

Este artículo expone algunos de los resultados encontrados en un estudio realizado en varios colegios de Bogotá, acerca de la enseñanza de las matemáticas en básica secundaria. Bajo una propuesta que consideró la indagación de aspectos de la organización general de la clase, del contenido matemático abordado, de la interacción observada en el discurrir de la clase, y de la valoración de las producciones de los estudiantes, se explicitan cuatro categorías de observación a partir de las cuales se fundamenta la aproximación conceptual y metodológica para describir algunas de las características de la práctica del profesor de matemáticas.

INTRODUCCIÓN

Con el propósito de reunir información que contribuyera a lograr descripciones de la práctica del profesor de matemáticas en instituciones de educación básica secundaria, el equipo de investigadores de "una empresa docente" —como respuesta a la convocatoria del Instituto para la Investigación Educativa y Desarrollo Pedagógico (IDEP), que alentó a la comunidad de educadores matemáticos a presentar propuestas de investigación para identificar, describir y sistematizar las rutas pedagógicas mediante las cuales ocurren la enseñanza y el estudio de las matemáticas escolares— adelantó entre los años 2001 y 2002, el proyecto de investigación "Rutas pedagógicas de las matemáticas escolares. Una mirada a la práctica del profesor"[1]. En las descripciones que resultaron de tal estudio, se puede encontrar una grande y variada cantidad de aspectos considerados, que ayudan a conocer y comprender cómo sucede la enseñanza de las matemáticas en tanto práctica sociocultural.

Para hablar de la práctica del profesor es conveniente empezar señalando que, además de los diferentes contextos y niveles en los que ocurre la enseñanza, en la literatura consultada se identifican diferencias entre los varios

1. La realización de este proyecto de investigación fue financiada por el mismo IDEP.

significados que se atribuyen a la práctica docente (Schön, 1983; Llinares, 2000; Perry et. al, 1998; Sanders y McCutcheon, 1984). La identificación de diferencias conceptuales y la variedad de contextos en la que se puede abordar el estudio de la práctica del profesor, por un lado, imponen la necesidad de delimitar el contexto de su estudio y, por otro lado, llevan a sugerir que para realizar una mirada a la práctica del profesor es relevante observar de manera cuidadosa el trabajo cotidiano del docente en el contexto escolar elegido para su estudio. En este último sentido la observación directa de clases aporta sin dudas, información abundante y variada acerca de la manera como el profesor aborda su práctica.

Cuando se menciona la expresión 'práctica del profesor', entendemos que ésta, en general, se refiere a las acciones que el profesor realiza tendientes a, y relacionadas con, la enseñanza y el aprendizaje de los estudiantes. Si se quiere precisar un poco más, en Perry et al. (2000, p. 10), por ejemplo, se sugiere que la práctica del profesor incluye por un lado, una variedad de acciones relativas a la enseñanza de las matemáticas propiamente dicha, como son el diseño y desarrollo curricular, la evaluación y diagnóstico del aprendizaje de los estudiantes, la realización de proyectos de indagación e innovación como medios para comprender y mejorar su práctica, etc.; y por otro lado, acciones diversas que hacen parte de la carga laboral del profesor como son la atención a los padres de familia, la participación en actividades institucionales, la participación en actividades del grupo de profesores, y acciones como la interacción y cualificación profesional.

Si atendemos a la precisión anterior, vemos que hay una numerosa y diversa cantidad de aspectos que se pueden considerar al realizar una mirada a la práctica del profesor y también una notable complejidad implicada en el estudio de la misma. Por ello, y conscientes de esta circunstancia, en el proyecto que abordamos se implementaron varias estrategias para recopilar y aunar información que diera cuenta no solamente de aspectos que se registran a través de la observación de las clases, sino de otros aspectos externos a la misma como algunas características de la organización escolar. Esta ponencia se centra principalmente en la consideración de resultados obtenidos a partir de la observación directa de clases.

Hemos organizado la exposición así: primero precisamos la definición de las categorías de observación que configuran un marco conceptual para el estudio, luego mencionamos algunos asuntos de carácter metodológico, seguimos con la presentación de los resultados que describen la práctica del profesor en términos de las categorías de observación propuestas y, para cerrar el artículo, hacemos algunas consideraciones finales.

CATEGORÍAS DE OBSERVACIÓN

La propuesta conceptual a la que se llegó en este estudio y, de hecho, fue utilizada para observar y analizar la práctica del profesor en el aula, implicó un proceso cíclico de definición y afinamiento de categorías, fundamentado en nuestra experiencia, en la literatura revisada, en la consideración de la información recogida y en nuestra reflexión. Así, se establecieron cuatro grandes categorías, estrechamente relacionadas pero que separan y organizan los diversos aspectos observados, a saber: el esquema general de la clase, la visión panorámica del contenido matemático tratado en la clase, la interacción a través de la cual discurren la enseñanza y el aprendizaje, y la valoración de las producciones de los estudiantes. En la siguiente tabla presentamos un resumen de los aspectos considerados en cada una de las categorías.

Esquema general

1. Actividades

- Relativas al trabajo con matemáticas (v.g., asignación de tareas, presentación del tema, evaluación, coordinación de discusiones plenarias, trabajo de los estudiantes para desarrollar tareas asignadas).
- Que apoyan el trabajo con matemáticas (v.g., motivación del interés de los estudiantes con asuntos no matemáticos, consideración de técnicas de estudio).
- Referentes a asuntos de interés para la formación integral del estudiante y para el funcionamiento de la clase como parte de una comunidad educativa (v.g., planeación de la participación de los alumnos en algún evento, información sobre fechas y eventos de la institución, rezo, revisión de asistencia).

2. Rasgos de las actividades relativas al trabajo con matemáticas

- Participación y papel de alumnos y profesor en las actividades (v.g., quién las propone, quién las coordina, quién decide cuándo se terminan, qué hacen los estudiantes).
- Énfasis que se hacen (v.g., relacionados con la comprensión de los estudiantes, con la justificación del contenido matemático que se estudia, con el desarrollo de destrezas).
- Modo de realización (v.g., acciones que integran las actividades, límites claros entre las diferentes actividades, recursos usados, tiempo invertido).
- Tipos de tareas propuestos.
- Tipo de actividad matemática implicada en las tareas (v.g., hacer matemáticas, razonar matemáticamente, resolver problemas, comunicar ideas, hacer conexiones, consultar información).
- Propósito o intención que parecen tener las tareas para una situación de enseñanza específica (v.g., centrados en la comprensión, en la obtención de respuestas, en el desarrollo de competencias, en la memorización, en la concentración y disciplina de trabajo, en el orden y la organización, en el cumplimiento).

Visión panorámica de los temas abordados

1. Organización temática

- Cómo es (i.e., se hace alrededor de un tema o de varios, se explicitan o no conexiones entre los temas, sufre modificaciones de acuerdo con lo que va sucediendo en clase, cuál es la secuencia de los temas).

2. Conocimientomatemático y su didáctica

- Los términos, nociones, conceptos, definiciones y enunciados trabajados; las notaciones y convenciones empleadas; los procedimientos ilustrados y usados.
- Tareas matemáticas mediante las cuales se concreta el aprendizaje (v.g., aplicación de procedimientos, generalización de regularidades, formulación de conjeturas, particularización, resolución de problemas).
- Uso de representaciones (v.g., tipo de representación predominante, hay traducción entre sistemas de representación).
- Tipo de conocimiento enfatizado: conceptual (i.e., hechos, conceptos, estructuras conceptuales) o procedimental (i.e., destrezas, razonamientos, estrategias).
- Características del tratamiento que se hace (v.g., sustentado en razones provenientes de las matemáticas o en razones de índole no matemática; enfoque empírico o deductivo).
- Alusión a temas ya vistos recurriendo a las ideas matemáticas involucradas o a anécdotas.
- Las cuestiones que se tratan de forma arbitraria siendo de naturaleza necesaria según la distinción que hace Hewitt (2002a, 2002b, 2002c)[a].
- Uso de recursos (v.g., tecnológicos, instrumentos).

a. Este autor califica los nombres y convenciones matemáticos como arbitrarios, —han sido adoptados por una comunidad, no se puede garantizar que el alumno los descubra por sí solo y deben ser comunicados— y las propiedades y relaciones entre objetos matemáticos como necesarias, pues los estudiantes pueden explorarlas y llegar a enunciarlas.

Interacción a través de la cual discurren la enseñanza y el aprendizaje

1. Contenido de la interacción

- Cuestiones de control y administración (v.g., cómo deben llevar el cuaderno, llamados de atención sobre puntualidad, excusas presentadas por los alumnos, cómo es la asignación de puntos o calificaciones).
- Cuestiones relativas a la ética (v.g., principios de vida, comportamientos deseados, valores).
- Cuestiones matemáticas (v.g., explicación, argumentación, formulación de enunciados categóricos sobre ideas y/o procedimientos matemáticos) en el contexto de la teoría o en el desarrollo de tareas.

2. Rasgos de la interacción

- Monólogo del profesor o diálogo (v.g., oportunidad y tiempo para consideración de las intervenciones de los integrantes del grupo social de la clase; conversación centrada en un objeto específico o dispersa; intervención por iniciativa propia o solicitada; participación de todos los estudiantes o de un grupo reducido, razones que motivan el intercambio).
- Preguntas (v.g., que inducen a explorar, que se pueden contestar con respuestas cortas y puntuales, que representan adivinanzas para los estudiantes, que exigen razones y explicaciones).

Valoración de las producciones de los estudiantes
1. Producciones consideradas como válidas • Cuál es el foco (v.g., las respuestas numéricas correctas, los procedimientos o pasos realizados, explicaciones, argumentos, interpretaciones que reflejen lo entendido, varias estrategias o soluciones diferentes). • Cómo debe ser la presentación (v.g., notación y convenciones especiales, oraciones completas que hagan referencia al objeto del que se está hablando).
2. Papel del profesor y estudiantes • Quién aprueba o desaprueba el trabajo de los estudiantes (v.g., el profesor, el grupo de estudiantes, el libro de texto).
3. Estrategia usada para validar • Tipo de acciones, gestos y frases a través de los cuales se manifiestan los juicios (v.g., frases directas que califican o indirectas, señalamiento del error, llamada de atención sobre aspectos que no son errores, planteamiento de otra situación para cuestionar al estudiante). • Propósitos de la validación (v.g., cuestionar a los estudiantes en su conocimiento, precisar y/o enfatizar aspectos del contenido tratado, explorar la comprensión del estudiante, trabajar en la consciencia del estudiante, como lo sugiere Hewitt (2002c), acerca de sus errores). • Los estudiantes conocen e interpretan las manifestaciones de aceptación o rechazo de sus producciones, reaccionan a regañadientes, sin interés, o aceptando de buena gana. • Se valida cuando se comete un error públicamente, cuando hay producciones insólitas, cuando hay producciones que aunque correctas podrían no ser indicio de comprensión apropiada, en todo momento.

ENFOQUE METODOLÓGICO Y FUENTES DE INFORMACIÓN

El enfoque metodológico seguido en el estudio se puede inscribir dentro de una práctica de investigación cualitativa que se ha derivado de una tradición etnográfica usada en la investigación antropológica. Esta postura, como lo señalan Denzin y Lincoln (1998), ve la investigación como un conjunto de prácticas interpretativas que es multifocal, involucra una aproximación naturalista al fenómeno en cuestión y no privilegia una sola metodología. En consonancia con estas características, en el estudio se acudió a varias fuentes de información, lo que impuso el análisis de una buena cantidad de materiales a saber: las respuestas a un cuestionario aplicado a profesores (63 profesores de 17 colegios), las respuestas a un cuestionario aplicado a estudiantes (65 estudiantes de 5 colegios), notas de campo de los investigadores y grabaciones de audio y video de las clases observadas (en cinco cursos de sendos colegios; excepto uno de los cursos que estaba a cargo de dos profesores, los demás eran atendidos cada uno por un profesor)[2], y notas de campo y grabaciones de audio de entrevistas semiestructuradas. Cada curso estudiado conformó un caso de estudio.

Como lo sugieren Denzin y Lincoln (1998), el uso de diversas metodologías y fuentes de información se constituye en una alternativa de la validación, que añade rigor, amplitud y extensión desligada de prejuicios, y profundidad, a cualquier investigación cualitativa. En este sentido, y aunque los resultados que aquí se reportan provienen principalmente de los profesores observados, también se analizaron los resultados de los cuestionarios y entrevistas —como opciones complementarias para la recolección de información. Además otros elementos que aportan validez al estudio realizado son: la observación a cargo de varias personas; el empleo de diferentes recursos para registrar dicha observación; el proceso seguido para llegar a consensos, tanto en lo concerniente a la definición de las categorías como en lo relativo al análisis e interpretación de los resultados encontrados.

RESULTADOS

Esquema general de la clase

En cuatro de los cinco casos estudiados es un solo profesor el que se reúne con los alumnos del curso para desarrollar el currículo. Los propósitos para la enseñanza son generales relativos a la formación matemática del estudiante y particulares de aprendizaje sobre temas matemáticos. El otro caso —que además llama la atención por ser un curso donde la forma predominante de trabajo de los estudiantes es en grupos de cuatro— lo constituye un colegio en el que la clase está a cargo de dos profesores, lo que significa que ambos comparten el mismo espacio con los estudiantes al desarrollar el currículo, fijan en común sus propósitos y preparan conjuntamente los temas que se consideran en clase mediante guías escritas para los alumnos.

El esquema general de la clase que se observó en cuatro de los casos, está configurado por actividades como la revisión de la tarea asignada para realizar por fuera de la clase, el repaso de temas vistos en clases anteriores, la exposición de un nuevo tema por parte del profesor, la resolución —individual o en grupos— de ejercicios o problemas por parte de los estudiantes y la asignación de la tarea para la siguiente clase. Cabe anotar que para algunas de estas actividades se perciben diferencias en sus intencionalidades y formas de ocurrir. Algunas actividades como el rezo o la asignación de pu

Propongo insertar en XXX.lo siguiente:

2. En cada curso se observaron de cuatro a seis clases consecutivas; cada observación estuvo a cargo de dos investigadores quienes tomaron notas de campo y del camarógrafo quien hizo las respectivas grabaciones de video.

tos por el trabajo realizado, que también se observaron, fueron particulares a las clases de un profesor.

Las principales tareas asignadas para realizar por fuera de la clase fueron la consulta de información matemática y la aplicación de procedimientos matemáticos. Usualmente, las acciones que los profesores llevan a cabo con el fin de revisar las tareas propuestas para trabajar en la casa, parecen tener tres intenciones distinguibles: de un lado, a los profesores les interesa determinar quién hizo la tarea y quién no; de otro lado, les compete establecer la calidad de los desarrollos de las tareas; también en algunos casos usan los desarrollos de dichas tareas para realizar la clase.

En la mayoría de los casos, el tipo de tareas de índole matemática que se proponen tanto para desarrollar en el aula como para la casa, no difieren considerablemente, y consisten en la identificación de información matemática a través de una lectura y/o la realización de ejercicios en los que de manera prioritaria se replican procedimientos matemáticos previamente abordados en la clase.

En todos los casos, las tareas deben desarrollarse de manera escrita; no obstante no en todos los casos este registro es objeto de valoración al momento de revisar el desarrollo logrado para la tarea. La asignación de tareas se hace frecuentemente a través de enunciados orales con algún breve registro escrito en el tablero. Si bien hay ocasiones en las que las tareas se asignan a través de guías escritas preparadas por los profesores, también se reconocen ocasiones en las que se dan ampliaciones o explicaciones que se plantean de manera oral.

En la mayoría de casos reconocemos que los profesores hacen exposiciones a través de las cuales pretenden transmitir una información matemática que se refiere prioritariamente a procedimientos matemáticos; esta información se comunica generalmente mostrando o exhibiendo cómo se aplica el procedimiento para resolver un ejercicio. El tratamiento de ideas matemáticas referidas a conceptos y objetos matemáticos es poco frecuente en tales exposiciones. Usualmente luego de la exposición, los profesores proponen a sus estudiantes el desarrollo de ejercicios que algunas veces se rotulan con la palabra "taller", pero sólo implican la réplica del procedimiento expuesto con las reglas sintácticas y de notación expresadas en la exposición.

Los estilos de las exposiciones varían de un caso a otro. Dos de los profesores realizan exposiciones del contenido matemático en el tablero frente a sus estudiantes y los involucran en éstas a través de preguntas que les formulan o de breves tareas que les proponen vinculadas con la exposición. Otro, incorpora respuestas de sus estudiantes a preguntas que va planteando durante la exposición e incluso aborda en detalle algunas de tales respuestas para intentar aclarar el sentido de las mismas o los significados y afirmaciones que éstas contienen; aun así, es relativamente fácil identificar que a través de estas acciones el profesor está transmitiendo una información matemática preestablecida. El otro profesor, casi siempre propone una tarea que conduce a que los estudiantes desarrollen una actividad que podría constituirse en una aproximación a una idea matemática, pero frecuentemente después del trabajo de los estudiantes, es él quien verbaliza y concluye la idea matemática a la que los estudiantes deberían haberse aproximado.

Visión panorámica del contenido matemático tratado

Las temáticas matemáticas de estudio que se reconocieron en las clases, están algunas veces delimitadas de manera arbitraria en términos de los tópicos que se tratan y tienen en general una estructura débil en términos de conexiones entre los diferentes tópicos que las conforman. La organización y forma de abordar las temáticas parecen estar preestablecidas por el profesor y se concretan mediante las actividades realizadas en el aula; la interacción con los estudiantes —sus respuestas, reacciones, intereses, etc.— no parecen afectar sustancialmente el esquema preestablecido o el guión del profesor para la clase.

En tres de los casos observados, los correspondientes a un curso de aritmética y dos de álgebra, se aborda fundamentalmente un conocimiento procedimental de las matemáticas; mientras que en dos casos en que se abordan temas de geometría, hay un tratamiento más conceptual. Estos hechos permiten reconocer que en aritmética y álgebra los procedimientos son objeto central de estudio en tanto que en geometría no; esto se debe quizá a la falta de precisión acerca de los aspectos procedimentales del conocimiento geométrico y/o a la ausencia de reflexión acerca de la aproximación casi que exclusivamente algorítmica a la aritmética y al álgebra escolar., propuesta por los textos e implementada por los profesores de manera desorganizada y poco cuidadosa.

La mayoría de los procedimientos tratados se presentan sin una justificación o argumentación matemática o ésta es muy débil y no reside en las conexiones y dependencias que se puedan establecer con los aspectos conceptuales que los sustentan. En consecuencia el tratamiento que se da a los procedimientos puede hacer pensar a los estudiantes que se está frente a un conocimiento arbitrario en el sentido mencionado por Hewitt (2002). Un ejemplo de lo afirmado lo constituye el caso de un profesor que se preocupa de que sus estudiantes logren un manejo de los criterios de divisibilidad sin que haya alusión alguna a posibles deducciones de dichos criterios.

Aunque no predominantemente, en todos los casos, se consideran elementos conceptuales de la temática abordada. En general, se enuncian y estudian términos matemáticos que se refieren a objetos o conceptos matemáticos. Se presentan y utilizan notaciones matemáticas y, en algunos casos, se enfatiza el uso correcto e imprescindible de una determinada notación. Se reconoce una aproximación a enunciados o ideas matemáticas mediante acciones como, por ejemplo, exponer el enunciado o idea a tratar y luego ejemplificarlo, ilustrar la idea o enunciado con casos particulares y luego formalizarla, o, hacer una actividad en donde se descubra la idea o el enunciado en cuestión. Tal aproximación casi siempre queda a medio camino pues hace falta explicitar conexiones con otros tópicos, abordar el tema desde otras perspectivas, trabajar la traducción entre sistemas de representación, entre otros; esta aproximación no siempre conduce a los estudiantes a asumir una significación matemática específica, y es así como en la mayoría de los casos, los estudiantes deben aprender los enunciados sin lograr una comprensión efectiva de las ideas matemáticas que les dan significados, y en el futuro, eventualmente, la referencia al enunciado o idea matemática no va más allá del recuerdo de la actividad desarrollada o de los materiales o instrumentos que se utilizaron en la misma.

Interacción a través de la cual discurren la enseñanza y el aprendizaje

En el caso en que siempre se trabaja en grupos y con guías escritas, se dan diálogos entre profesor y estudiantes, el profesor no es quien domina la conversación pues los estudiantes interactúan entre ellos en cada grupo y las preguntas del profesor apuntan más a que el estudiante vea y comprenda el trabajo que hace.

En los otros casos, a pesar de que hay ligeras variaciones en cuanto a la cantidad y el tiempo de las oportunidades para que los estudiantes se expresen, y no obstante la existencia de intervenciones orales y escritas de los profesores y de los estudiantes, no puede decirse que se establezca un diálogo ni una discusión en los que ambas partes intervengan de manera similar, no sólo en cuanto a que cada uno exprese sus ideas, las explique y éstas se consideren seriamente, sino en cuanto a que ambas partes dediquen el mismo tiempo para expresarse.

En estos casos el profesor es quien domina la conversación, no sólo por ser la persona que más habla para todo el grupo, o con algunos estudiantes, sino también porque es quien la conduce y finaliza, aunque la interacción sea propiciada unas pocas veces por los estudiantes. Las preguntas que el profesor hace son puntuales e implican usualmente respuestas cortas de los estudiantes sin explicaciones o justificaciones; otras veces las preguntas incluyen la información necesaria, y casi que la respuesta, para que los estudiantes digan lo que se espera.

Las intervenciones del profesor, la mayoría de las veces tienen un carácter asertivo y son para presentar información, ejemplificar, hacer énfasis con respecto al contenido matemático, recordar los pasos de procedimientos y la secuencia de éstos. Rara vez inducen al diálogo, confrontan las concepciones o visiones de los estudiantes, o exhiben ideas completas, explicadas y justificadas desde el punto de vista matemático. Lo más usual es que las explicaciones de los profesores para ayudar a los estudiantes en el trabajo que realizan, básicamente sean instrucciones sobre lo que se debe hacer. El papel principal que juegan los profesores es el de 'proveedores de información'.

Por otra parte, las intervenciones de los estudiantes se reducen a las respuestas cortas que dan, las cuales no incluyen explicaciones o razones; a veces formulan preguntas orales sobre tópicos indirectamente vinculados al trabajo matemático, sobre lo apropiado de su trabajo matemático o acerca de cómo se hace el trabajo. Cuando los profesores preguntan a los estudiantes si entendieron algo que se acaba de trabajar, la no respuesta de los estudiantes o la respuesta afirmativa generalizada, y la ausencia de preguntas adicionales que indaguen más allá, sugieren que para los estudiantes esas preguntas no crean la oportunidad real de solicitar una nueva explicación. Entonces, aun cuando pueda verse que la intención de las preguntas que los profesores formulan a los estudiantes cuando individualmente les revisan su trabajo —además de señalar el error— sea confrontar al estudiante en su conocimiento, dicha intención no necesariamente se materializa pues es común que enseguida haya una respuesta o más preguntas o comentarios por parte del mismo profesor. Así pues, no hay un espacio real para que el estudiante dé cuenta de las razones de sus respuestas y, por consiguiente, en pocas ocasiones responde y parece conocer que tal debe ser su proceder. Dadas estas características de la interacción entre profesor y estudiantes, es común observar que el estudiante se da cuenta de que su respuesta no es correcta o de que algo anda mal, pero no parece advertir cuál es el problema o la dificultad que lo causa.

El contenido de algunas de las intervenciones de los profesores se refiere a valores morales y éticos, según dicen, para que algo les quede a los alumnos en el largo plazo. Por otra parte, la interacción de los profesores con los estudiantes que pasan al tablero es poca y es usual que una vez que el estudiante ha terminado de copiar su trabajo, los profesores sean quienes terminen presentando de manera oral y para todo el curso, el trabajo del alumno.

No obstante que el trabajo en clase en estos casos es casi siempre individual, los estudiantes interactúan entre ellos cuando trabajan en el desarrollo de ejercicios y comentan acerca de la tarea y de muchos otros temas, aun cuando no estén sentados juntos y en general se advierte bastante indisciplina. En las clases hay algunas intervenciones o llamados de atención de los

1-8

RUTAS PEDAGÓGICAS DE LAS MATEMÁTICAS EN COLEGIOS DE BOGOTÁ

LUISA ANDRADE, PATRICIA PERRY,
EDGAR GUACANEME Y FELIPE FERNÁNDEZ

El conocimiento detallado de la práctica de la enseñanza de las matemáticas en nuestro medio es indispensable para dirigir las acciones de los profesores y de las entidades financiadoras en relación con innovaciones que apunten a superar dificultades e introducir cambios esenciales en la escuela, y para proporcionar bases a la formación de profesores de matemáticas.

Dentro de la convocatoria abierta por el IDEP en el año 2001 para develar rutas pedagógicas, "una empresa docente" centro de investigación de la Universidad de los Andes, propuso el estudio "Rutas pedagógicas de las matemáticas escolares. Una mirada a la práctica del profesor", con la intención de caracterizar la enseñanza de las matemáticas en instituciones de educación básica secundaria de Bogotá. Este estudio, que se adelantó desde entonces hasta principios de este año, acopió información de diversas fuentes (un cuestionario para los profesores, un cuestionario para los estudiantes, cinco observaciones directas de clase y entrevistas para cada uno de los profesores de cinco estudios de caso), elaboró un marco conceptual para hacer la descripción y consideró una gran y variada cantidad de aspectos que pueden ayudar a conocer y comprender cómo sucede la enseñanza en tanto práctica sociocultural. El análisis realizado fue predominantemente cualitativo y permeó la recolección de datos y definición de categorías del marco conceptual.

El foco principal del estudio fue el salón de clase. Nos interesaba conocer las acciones predominantes que el profesor realiza allí, determinar el contenido matemático abordado y su didáctica, los rasgos más característicos del discurso que se da en la interacción entre los integrantes del grupo, y por último, la relación del profesor y los estudiantes con la autoridad sobre el conocimiento matemático que se pone en juego.

También en el estudio se dio cuenta de otras actividades de la práctica docente, no directamente relacionadas con las clases pero que determinan e influyen el actuar del profesor y por consiguiente inciden en lo que allí pasa, como las actividades para la preparación de clase y para la planeación institucional.

LA CONCEPTUALIZACIÓN CONSTRUIDA Y LOS RESULTADOS ENCONTRADOS

En el intento de caracterizar un fenómeno tan complejo como la enseñanza de las matemáticas, resulta imprescindible construir un marco conceptual que permita centrar la mirada.

La propuesta conceptual a la que se llegó en este estudio y fue utilizada para observar y analizar la práctica del profesor en el aula, implicó un proceso cíclico de definición y afinamiento de categorías, fundamentado en nuestra experiencia, en la literatura revisada, en los datos recogidos y en la reflexión. Desde un principio fue claro que el marco debía proporcionar una mirada profunda a lo que pasa en la clase de matemáticas que fuera más allá de reportar las actividades realizadas. Se establecieron cuatro categorías relacionadas que organizan los diversos asuntos, y se describen a continuación, junto con lo observado.

Esquema general

El esquema general se concibe como el esquema usual de cada profesor para hacer su clase, conformado por las actividades para las que se detectan regularidades en el modo en que ocurren y en su intención. Se incluyen tanto actividades específicas para el aprendizaje de las matemáticas como actividades que se relacionan indirectamente con éste (informar sobre fechas y eventos de la institución, rezar, revisar la asistencia).

Las principales actividades de clase en los casos observados son la revisión de las tareas asignadas para la casa o para desa-

rrollar en clase, la asignación de tareas, el desarrollo en clase de tareas por parte de los estudiantes, la presentación de información matemática y eventualmente, la comunicación de otra información. En general, el tiempo empleado para exponer información matemática es poco, mientras que al trabajo de los estudiantes se asigna gran parte de la sesión. Los profesores intentan involucrar a sus estudiantes en sus exposiciones mediante preguntas y tareas que les formulan y que esperan que contesten. Es usual que la exposición continúe sólo cuando ha surgido la respuesta adecuada. Algunos profesores incorporan la respuesta de los estudiantes a nuevas preguntas que van planteando. La información que se expone se refiere prioritariamente a procedimientos matemáticos y ocasionalmente a conceptos matemáticos. Así la mayoría de las tareas propuestas se centran en aplicar tales procedimientos; también a veces se proponen tareas para que los estudiantes consulten información. Mientras los estudiantes trabajan, los profesores pasan por los puestos, miran el trabajo y atienden preguntas de los estudiantes.

Visión panorámica de los temas abordados

La visión panorámica esboza el camino seguido al tratar el contenido matemático. Se identifican los tópicos abordados y su secuencia, los conceptos, nociones, términos, procedimientos, representaciones y notaciones usadas, y las tareas propuestas. Se establece el tipo de conocimiento que se enfatiza en la clase de acuerdo a la organización que propone Rico (1995, 1997), en la cual los hechos, conceptos y estructuras conceptuales constituyen el conocimiento conceptual, caracterizado por la cantidad de unidades de información y por la riqueza de relaciones entre ellas; y las destrezas, razonamientos y estrategias constituyen el conocimiento procedimental, que hace referencia a los modos de ejecución ordenada de una tarea.

En las clases observadas los profesores desarrollan organizaciones temáticas alrededor de uno o varios temas específicos. Casi siempre abordan en clase procedimientos para resolver ejercicios matemáticos, exhibiendo cómo se aplican; a veces tratan conceptos matemáticos que comunican simplemente nombrándolos y/o definiéndolos. También los profesores presentan notaciones y esperan que los estudiantes las utilicen.

Interacción a través de la cual discurren la enseñanza y el aprendizaje

Esta categoría registra la interacción que se da entre profesor y estudiantes, y entre los estudiantes mismos en las distintas actividades que se llevan a cabo en la clase. Se atiende tanto al modo de la interacción como al contenido que es objeto del intercambio.

El profesor y los estudiantes se comunican durante las exposiciones mediante las preguntas que se hacen y son respondidas, y mientras los estudiantes desarrollan en clase las tareas asignadas. Es usual que, tal y como Hewitt (2002c) lo describe, se hable acerca de cuestiones de control y de administración, de enunciados descriptivos o de la enumeración de las acciones realizadas o por realizar, pero muy poco sobre lo que guía las acciones y las ideas matemáticas. A veces como resultado de mirar el trabajo de los estudiantes, los profesores reaccionan con comentarios para todo el grupo o dirigidos a un estudiante en particular, que se refieren a errores matemáticos detectados, a reconvenciones disciplinarias o a sugerencias "de vida". Durante el desarrollo de las tareas, los estudiantes interactúan entre ellos con motivos diversos, relacionados tanto con las tareas que desarrollan y con la clase, como ajenos a ella.

Valoración de las producciones de los estudiantes

Esta categoría comprende el conocimiento que se considera importante aprender en la clase, la manera en que se determina y valora este aprendizaje y quién lo hace.

En los casos se evidencia que lo que se valora de las producciones de los estudiantes incorpora tanto la validez matemática de las mismas como otros aspectos específicamente no matemáticos. Los profesores son quienes tienen y hacen uso del poder de decisión sobre la validez de las respuestas de los estudiantes aunque en ocasiones, el libro de texto es considerado también una fuente de validación por los estudiantes. Las explicaciones o argumentaciones dadas por un estudiante no son suficientes para sustentar una postura sobre un aspecto o procedimiento matemático, si no son corroboradas por el profesor o por el libro; en este sentido, los intentos, si ocurren, de dar participación a los estudiantes en la determinación de la validez parecen quedar a medio camino. Se percibe que los profesores han modificado sobre todo la forma en que desaprueban las respuestas o producciones de los estudiantes. No es común encontrar expresiones que descalifiquen directa y expresamente, tales como "está mal"; es más usual que los profesores indiquen tácitamente, mediante sus reacciones, la validez o no del trabajo. Frente a las respuestas erróneas se señalan los errores cometidos, pero no hay un trabajo acerca de la dificultad que subyace al error evidenciado. Este tipo de reacciones parece configurar parte de la cultura de las clases de matemáticas, que los estudiantes comparten y asumen de manera natural; así, interpretar tales eventos culturales constituye para los estudiantes la forma de saber si la respuesta presentada es o no correcta.

UNA MIRADA CRÍTICA A LOS RESULTADOS

Los docentes de matemáticas no son ajenos a los numerosos indicios que en años recientes han puesto en evidencia la deficiente calidad de la formación matemática de los estudiantes y de algún modo aceptan la necesidad de cambio. Con el ánimo de asumir este reto, los profesores se esfuerzan por hacer modificaciones a sus clases en diversas direcciones y con todas las dificultades que esto conlleva. Sin desconocer la importancia relativa de estos cambios, consideramos que éstos no son suficientes para incidir significativamente, en la dirección pretendida, sobre los resultados concernientes a la formación matemática de los estudiantes.

Al examinar la enseñanza consignada en la caracterización de la práctica docente del profesor de matemáticas construida por Andrade, Perry, Guacaneme y Fernández (2002) y resumida anteriormente, emergen ideas sobre posibles razones que inciden tanto en el desempeño poco satisfactorio de los estudiantes en matemáticas como en su limitada formación al respecto.

Así, aunque el hecho de que los estudiantes dispongan de un mayor tiempo en la clase para trabajar podría ser coherente con visiones del aprendizaje centradas en la interacción social, no se propende por un intercambio cercano al diálogo entre el profesor y los estudiantes ni entre los mismos estudiantes. La interacción que se da es en general corta, la participación del profesor y los estudiantes no es necesariamente en condiciones iguales pues es el primero quien usualmente inicia el intercambio, habla la mayor parte del tiempo y decide cuándo terminarlo. Las preguntas que el profesor hace usualmente pueden ser contestadas con una palabra o con una breve frase y casi nunca se exige que las respuestas expresen una idea matemática completa o se argumenten. Dado que con frecuencia las tareas propuestas consisten en aplicar procedimientos que el profesor explica, la interacción al respecto se refiere a lo que hay que hacer. Los señalamientos que se hacen sobre las respuestas no propician que éstas se exploren ni llegan a cuestionar al estudiante.

A través del estudio realizado se evidencian variaciones mínimas con respecto a lo que se viene haciendo desde años atrás, en cuanto al contenido matemático que se presenta y a la manera en que éste se aborda. Uno de los problemas detectados es el tratamiento parcial de los tópicos; en particular, sobresale la ausencia de conexiones que se explicitan o que se propone explorar, y la irrelevancia o debilidad de las que sí se indican, entre los temas mismos que se abordan y con otros que les podrían asignar referencia o significado, ya sea de la asignatura matemática o de otras relacionadas. Los procedimientos se presentan sin justificar matemáticamente y no se establecen conexiones o dependencias con los aspectos conceptuales que los sustentan. Aun cuando se tratan algunas nociones, términos y notaciones matemáticas, el estudio de elementos conceptuales se relega a un segundo plano. Señala Bodin (1993, citado en De Lange, 1995) que como consecuencia de la enseñanza enfocada en aprender los nombres de los conceptos y en seguir procedimientos específicos, los estudiantes solucionan ejercicios sin ser capaces de describir los pasos realizados, de justificar los resultados, de determinar a qué tipo de problema corresponden y de usar los procedimientos como herramientas en otras situaciones.

Es común que los profesores presenten la mayor parte del conocimiento matemático en la clase como convenciones establecidas que es necesario respetar; es decir, normalmente no sólo tratan las notaciones y denominaciones como arbitrarias en el sentido señalado por Hewitt (2002a, 2002b, 2002c) sino también muchas ideas matemáticas.

Rara vez los profesores hacen preguntas de porqué a las respuestas de los estudiantes, para que las respuestas se argumenten y se den razones que le permitan al estudiante ganar más comprensión acerca de lo que se trata, o para obtener más información sobre los logros de los estudiantes. Tampoco los profesores al suministrar información matemática, argumentan matemáticamente las ideas presentadas. Por ende, la validez del conocimiento matemático tratado en clase no recae en la racionalidad matemática sino en la autoridad en la clase, que bien puede ser el profesor, el libro de texto, otro estudiante, y está ligada directamente a una respuesta correcta en la forma prevista.

Además, el hecho de que en la cultura del salón de clase esté establecido, tácita o explícitamente, que las respuestas adecuadas no se cuestionan ni se amplían, que para las respuestas no adecuadas se señala el error pero no se abordan las posibles dificultades detrás de éste, lleva a los estudiantes a ver las matemáticas como un conjunto de enunciados, definiciones y hechos fijos que se deben memorizar y por lo tanto se saben o no.

Se necesitan cambios más de fondo que apunten a transformar el modo en que los estudiantes se aproximan y trabajan el conocimiento matemático, de manera que tales cambios tengan una incidencia real en el aprendizaje de los estudiantes. Se requiere entonces un mayor compromiso de los profesores con el diseño y desarrollo curricular específico para cada tópico que se pretenda estudiar, y una reflexión seria de su parte para buscar soluciones reales a los problemas identificados; esto incluye, entre otras cosas, tomar decisiones fundamentadas con respecto a los tópicos matemáticos que es relevante que el estudiante aprenda, a la formación matemática que se quiere lograr en el estudiante (conocimiento conceptual, conocimiento procedimental y conocimiento actitudinal), a la selección o diseño de tareas con objetivos de aprendizaje claros y relevantes, al desarrollo de estrategias de observación en clase y mecanismos de seguimiento al aprendizaje de los estudiantes.

REFERENCIAS

Andrade, L., Perry, P., Fernández, F. y Guacaneme, E. (2002). Rutas pedagógicas de las matemáticas escolares. Una mirada a la práctica del profesor (documento no publicado). Bogotá: una empresa docente.

De Lange, J. (1995). Assessment: No change without problems. En T. Romberg (Ed.), *Reform in school mathematics and authentic assessment* (pp. 87-172). Albany: State University of New York Press.

Hewitt, D. (2002a). Lo arbitrario y lo necesario: una forma de ver el currículo de matemáticas. *Revista EMA, 7* (1), 43-64.

Hewitt, D. (2002b). Lo arbitrario y lo necesario: apoyo a la memoria. *Revista EMA, 7* (2), 206-226.

Hewitt, D. (2002c). Lo arbitrario y lo necesario: educación de la consciencia. *Revista EMA, 7* (3), 310-343.

Rico, L. (1997). Consideraciones sobre el currículo de matemáticas para educación secundaria. En L. Rico (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 15-38). Barcelona: ICE-Horsori.

Se entregará un ejemplar del libro "Rutas pedagógicas en matemáticas: ¿azar o construcción?", a:

Instituciones que colaboraron con el diligenciamiento del cuestionario del profesor y del estudiante
Colegio Distrital Luis Carlos Galán Sarmiento (J.M. y J.T.)
Colegio Distrital República de Estados Unidos de América (J.T.)
Centro Educativo Distrital República Bolivariana de Venezuela (J.M.)
Centro Educativo Distrital El Libertador (J.M.)
Centro Educativo de Nuestra Señora de la Paz
Instituto San Bernardo de la Salle
Colegio Compartir Suba (J.M. y J.T.)
Colegio Compartir Bochica (J.M. y J.T.)
Instituto Politécnico Nacional Femenino
Centro Educativo Distrital Grancolombiano
Colegio María Inmaculada
Centro Educativo Distrital San Cristóbal Sur (J.M.)
Colegio Teresiano
INEM Francisco de Paula Santander
Colegio San Bartolomé la Merced
Colegio Fundación Colombia

Profesores que colaboraron facilitando la observación de sus clases y participando en las entrevistas
Lucía de Aranda - Colegio Distrital Luis Carlos Galán Sarmiento (J.M.)
Gustavo Parra - Colegio Distrital Luis Carlos Galán Sarmiento (J.T.)
Carmen Elisa Saavedra - Colegio Distrital República de Estados Unidos de América (J.T.)
Gladys Fandiño - Colegio Distrital República de Estados Unidos de América (J.T.)
Aracelly de Cortés - CED República Bolivariana de Venezuela (J.M.)
María del Carmen Contreras - CED El Libertador (J.M.)

Dependencias de la Universidad de los Andes
Rectoría
Decanatura Facultad de Ciencias
Biblioteca central
Biblioteca "una empresa docente"
Ediciones Uniandes

Otras entidades educativas
Ministerio de Educación Nacional
Secretaría de Educación de Cundinamarca
Facultades de Educación de universidades del país

Bibliotecas
Biblioteca Luis Angel Arango
Biblioteca Nacional
Biblioteca del Congreso
Biblioteca Central de la Universidad Nacional

Investigadores
Pedro Gómez
Cristina Gómez
Vilma Mesa
Paola Valero
Pablo Flores

Base de datos para indexación de publicaciones
ZDM (Zentralblatt für Didaktik der Mathematik)

INFORME FINAL DE EJECUCION FINANCIERA
INSTITUTO PARA LA INVESTIGACION EDUCATIVA Y EL DESARROLLO PEDAGOGICO - IDEP-
CONTRATO No.21 del 28 de Agosto de 2001
01/11/2002 - 31/05/2003

	APORTES DEL IDEP					
	PRESUPUESTO Modificado	DESEMBOLSOS	GASTOS ACUMULADO	EJECUCION DE ESTE PERIODO	RECURSOS COMPROM	SALDOS
PERSONAL						
Patricia Perry, investigador	11.655.000	8.158.500	11.655.000			0
Felipe Fernández, investigador	11.655.000	8.158.500	11.655.000			0
Luisa Andrade, Inv. Principal	11.655.000	8.158.500	11.655.000			0
Edgar Guacaneme, investigador	11.655.000	8.158.500	11.655.000			0
Rubiela Nomezqui, administración	2.590.000	1.813.000	2.590.000			0
Marivel Acosta, administración	2.590.000	1.813.000	2.590.000			0
Cristina Gómez Garzón, asesora	3.000.000	2.100.000	3.000.000	1.190.550		0
Total personal	54.800.000	38.360.000	54.800.000	1.190.550		0
BIBLIOGRAFÍA	500.000	350.000	500.000	-69.067		0
MATERIALES DE APOYO	1.690.000	1.183.000	1.690.000	50.939		0
EQUIPOS						
FORMACIÓN Y SOCIALIZACIÓN	1.010.000	707.000	1.010.000	352.126		0
PUBLICACIÓN LIBRO	2.000.000	1.400.000	414.920	414.920	1.585.080	0
TOTALES	60.000.000	42.000.000	58.414.920	1.939.468	1.585.080	0

Nota: Los costos relacionados en este informe de ejecución financiera los asigno una empresa docente

Firma Contador

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
Nit. 860.007386 - 1

LUZ STELLA MONCALEANO QUESADA
MAT 16902-T

Firma Director de Proyecto

LUISA ANDRADE ESCOBAR

24/06/2003

CONTRATO 21 del año 2001
ANEXO DE GASTOS EJECUTADOS
PERIODO INFORMADO: 01/11/2002 - 31/05/2003
FECHA: 24/06/2003

Fecha	Documento	Número	Factura	Nit	Concepto	Valor	Nombre/razon soCial
Personal							
28-febr-03	CNOM	6337		51655864	Contr. prestación de servicios $1.190.550 de $2.863.637	1.190.550	Cristina Gómez Garzon
Bibliografia							
31-mayo-03					Ajuste:mayor valor ejecutado en compra de libros	-69.067	Aportes U.Andes
Materiales de apoyo							
20-novi-02	CECP	20357	398357	805005795	Cart impresora láser	64.206	Ofixpres S.A.
20-novi-02	CECP	20357	398357	805005795	Acetato P/ink c/banda	49.010	Ofixpres S.A.
31-mayo-03					Ajuste: mayor valor ejecutado	-62.277	Aporte U.Andes
Total materiales de apoyo						50.939	
Formación y Socialización							
20-novi-02	CECP	20357	398357	805005795	Sobres Manila, Cartucho Tinta, Papel	50.907	Ofixpres S.A.
12-febr-03	CECP	2175	570	830096165	Focopias, argollados y espirales	212.280	Fotocopiadora Eduardo & Cia Ltda
26-febr-03	CECP	3044	97734	805005795	Cart. Impminjet canon	27.840	Ofixpres S.A.
28-marz-03	COMA	387		899999486	Portes de marzo/2003, $30750 de $77100	30.750	Administracion Postal Nacional
9-abri-03	CECP	6324	01-013064	830077655	15 CD grabable Verbatim 80	31.146	Panamericana Outsourcing S.A.
31-mayo-03					Ajuste: mayor valor ejecutado	-797	Aporte U.Andes
Total formación y socialización						352.126	
Publicación Libro							
28-febr-03	CNOM	6337		51968403	Sueldo y factor prest. (10%)	95.485	Marivel Acosta Pino
31-marz-03	CNOM	6496		51968403	Sueldo y factor prest. (10%)	95.485	Marivel Acosta Pino
30-abri-03	CNOM	6590		51968403	Sueldo y factor prest. (10%)	95.485	Marivel Acosta Pino
31-mayo-03	CNOM	6808		51968403	Sueldo y factor prest.	129.075	Marivel Acosta Pino
31-mayo-03					Ajuste: mayor valor ejecutado	-610	Aporte U.Andes
						414.920	
COMPROMISOS:		**Publicación Libro**					
19-juni-03	Radicación	91951	10100626	800096812	340 ejemplares libro "Rutas"	1.585.080	Cagraphics S.A.

Firma Contador

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

LUZ STELLA MONCALEANO QUESADA
MAT 16902-T

Firma Director de Proyecto

LUISA ANDRADE ESCOBAR

Y a la hora de la verdad, en las clases de matemáticas ¿quién decide sobre la verdad?

Por: **Edgar Guacaneme, Luisa Andrade, Patricia Perry, Felipe Fernández**
Universidad de los Andes – una empresa docente

Y, ¿por qué no te diste cuenta de que lo que hiciste estaba mal? —le preguntaba un padre a su hijo adolescente quien simplemente le respondió: *Y acaso, ¿cuándo los adultos me han dado la posibilidad de decidir si algo está bien o mal?*

Si se considera que al referirse a los adultos el muchacho incluye a sus profesores de matemáticas, se colige que el estudiante tiene la percepción de que en las clases de matemáticas, sus profesores no le han dado la oportunidad de decidir —entre otros aspectos— sobre la validez de las afirmaciones y procedimientos matemáticos que se enuncian y estudian en las clases. Pero, ¿tendrá razón el joven?

A partir de septiembre de 2001 y durante quince meses, "una empresa docente" —centro de investigación en Educación Matemática de la Universidad de los Andes— adelantó el proyecto de investigación "Rutas pedagógicas de las matemáticas escolares. Una mirada a la práctica del profesor"[1], con el propósito de acopiar información que contribuyera a lograr descripciones de la práctica del profesor de matemáticas en instituciones de educación básica secundaria de Bogotá. Una de las estrategias usadas para tal fin fue la observación y registro de alrededor de cinco clases de matemáticas en cada uno de cinco cursos de los grados sexto a noveno. A partir de la información recogida se lograron descripciones y análisis que pueden ayudar a conocer y comprender cómo sucede la enseñanza de las matemáticas en tanto práctica sociocultural.

Para aproximarse a la complejidad implicada en los procesos observados se definieron cuatro categorías, que abordan: el esquema usual para las clases en términos de las actividades que se llevan a cabo; una caracterización del contenido del discurso matemático, de las tareas matemáticas que se proponen y del tipo de conocimiento matemático que se moviliza; el discurso no matemático y la manera en que se da la comunicación en el salón de clase; y, la autoridad que se reconoce y lo que se considera válido frente al trabajo de los estudiantes. Precisamente en los resultados acerca de esta última categoría, denominada "Valoración de las producciones de los estudiantes", es donde se encuentra información relativa a la situación del joven y el adulto planteada al inicio de este escrito.

A continuación se presenta una breve descripción de tal categoría y una síntesis de los resultados de lo observado en las clases, acompañada de una postura ante los mismos. Se espera que la lectura de los resultados pueda ayudar a los lectores a reflexionar —entre otras— sobre su práctica pedagógica

---

[1]Este proyecto contó con el apoyo financiero del Instituto para la Investigación Educativa y el Desarrollo Pedagógico, IDEP. Para ampliar la información sobre el proyecto sugerimos remitirse a Andrade et al. (2002) o consultar la página http://ued.uniandes.edu.co/servidor/ued/proyectos/rutas/reporte/Paginicial.htm.

y sobre las posibilidades que los profesores de matemáticas brindan a sus estudiantes para decidir sobre la validez de sus afirmaciones y procedimientos.

¿Qué se entiende por "valoración de las producciones de los estudiantes"?

La clase de matemáticas constituye un complejo ámbito de interacción en el que a través de los comportamientos del profesor y los estudiantes en torno de la enseñanza y aprendizaje de un conocimiento, se evidencian rasgos de una cultura que allí se define y circula. Tal cultura tiene una expresión específica en los comportamientos suscitados en torno a la valoración de las respuestas y producciones de los estudiantes. Lograr una descripción parcial de tal expresión implica observar:

i) Las respuestas y producciones de los estudiantes que se consideran y aceptan como correctas o válidas y lo que se tiene en cuenta de ellas para ser juzgadas como tal; específicamente, establecer si se exige que éstas incluyan los procedimientos o pasos realizados, si deben contener explicaciones y argumentos, si se requiere que estén presentadas con notación y convenciones especiales, si se exige que sean originales, etc.

ii) El papel que juega cada cual al momento de decidir sobre la validez de una afirmación o procedimiento; por ejemplo determinar quién —o qué— constituye la autoridad en la clase con respecto al conocimiento que se trata, quién es el encargado de aprobar o desaprobar el trabajo de los estudiantes, si el libro de texto juega un papel preponderante en este sentido, si existe la posibilidad de que sean los mismos estudiantes quienes en algunas situaciones manifiestan esta aprobación, etc.

iii) Cómo, para qué y en qué momentos se juzgan las producciones de los estudiantes; particularmente, explicitar por medio de qué tipo de acciones, gestos o frases se manifiestan los juicios al respecto; si en las expresiones verbales (escritas u orales) se emplean palabras directas que califican explícitamente el trabajo o si son indirectas; si los estudiantes conocen e interpretan las manifestaciones de aceptación o rechazo de su trabajo escolar y cómo reaccionan frente a ellas; si en lugar de ver los errores como respuestas inadecuadas éstos se ven como oportunidades para cuestionar a los estudiantes; si en los juicios que se hacen se explora el problema detrás del error o solamente se señala éste.

Algunos resultados relativos a la valoración de las producciones de los estudiantes

El resumen de la información recopilada y analizada, que se presenta en este documento, no da cuenta cabal de todo lo contemplado en los aspectos antes descritos y sólo constituye una descripción de las clases observadas; en este sentido, de manera alguna pretende ser una generalización de lo que pasa en cualquier clase de matemáticas —sin que ello implique la inexistencia de muchos cursos con expresiones de la cultura de clase semejantes a la aquí reportada.

En aras de una adecuada organización, pero entendiendo que cualquier intento de tratamiento analítico de la complejidad de la valoración de la producción de los estudiantes desdibuja tal complejidad, los resultados relativos a los tres aspectos descritos en el anterior apartado se reportan a continuación bajo sendos y correspondientes títulos.

¿Qué se considera como válido?

Al examinar las producciones o respuestas de los estudiantes que se consideran válidas se percibe que hay varios aspectos matemáticos que determinan su validez en la clase. El carácter correcto de la respuesta es uno de tales aspectos. Cuando algunos de los profesores proponen como tarea la realización de un ejercicio, parecen esperar que los estudiantes, a través de la adecuada aplicación del procedimiento enseñado, encuentren *la* respuesta correcta al ejercicio. Como en la mayoría de los ejercicios esta respuesta es única, cualquiera otra es incorrecta, por tanto —independientemente de la estrategia usada por los estudiantes— sólo hay una posibilidad de acertar, la cual es valorada positivamente por el profesor y por los estudiantes.

Al parecer, los estudiantes extrapolan esta idea de la existencia de *la* respuesta correcta a tareas diferentes a la realización de un ejercicio; por ejemplo, es relativamente habitual —en algunos de los cursos— que a través de palabras o frases cortas intenten contestar las preguntas de carácter matemático formuladas por el profesor, de manera semejante a cómo un grupo pretende dar respuesta a una adivinanza, es decir nombrando varias respuestas, una tras otra, hasta lograr acertar.

Además del carácter correcto de la respuesta hay al menos dos aspectos matemáticos adicionales que son tenidos en cuenta al momento de juzgar la validez de una respuesta, a saber: los pasos de un ejercicio y la exactitud en la notación. En efecto, algunos profesores exigen que en los ejercicios escritos realizados por los estudiantes aparezcan además del enunciado propuesto y la respuesta obtenida, las operaciones y/o los pasos implementados en la aplicación del algoritmo. También se reconoce que algunos profesores exigen que la notación empleada en los ejercicios se ajuste a la enseñada a través de su exposición.

En general, el juicio sobre una respuesta para determinar si es o no correcta está en correspondencia con los elementos que previamente se han enfatizado en la exposición, o se han excluido de ésta, respectivamente. Así, por ejemplo, un profesor destacó los términos "comparar" y "unidad" en la aproximación a la idea de medir, y al valorar la respuesta que escribieron los estudiantes a la pregunta ¿qué es medir?, exigió el uso de dichos términos. Por otra parte, un profesor no hizo referencia significativa a las características de las parábolas —adicionales a ser una curva— y, en consecuencia, no señaló como dibujos no representativos de una parábola aquellos que contenían cualquier curva simétrica y abierta. No obstante, también se evidenciaron hechos particulares de incoherencia entre lo expuesto y lo exigido, como aquel en el que el profesor no acepta como respuesta válida una que incluye una significación del término "número" que no se corresponde con la de "dígito", cuando antes no se había hecho ningún trabajo sobre la significación de éstos.

Ahora bien, la validez de las respuestas y producciones de los estudiantes no sólo atiende a aspectos matemáticos; los profesores parecen tener en cuenta también otros aspectos tales como: la forma de anotar las operaciones, el orden en el desarrollo de un ejercicio, el uso de sustantivos en las oraciones, la escritura de respuestas con sus respectivas preguntas, y el recapitular ideas sin copiarlas textualmente. Para uno de los profesores es sumamente importante que los estudiantes desarrollen los ejercicios que les propone utilizando la misma forma de anotar que ha utilizado en su explicación y que los ejercicios estén escritos con bastante orden a tal punto que condiciona la revisión de las producciones de los estudiantes a la satisfacción de tales criterios. A otro profesor le interesa que las respuestas verbales de los estudiantes incorporen el sustantivo al que se refieren (en el caso de que la pregunta se refiera a una definición de un objeto o procedimiento) y que al tomar nota los estudiantes copien tanto la pregunta como la respuesta. A otros tres profesores parece interesarles mucho que lo que los estudiantes registren por escrito en sus cuadernos como desarrollo de las tareas que implican la indagación de una información matemática, tenga los elementos relevantes y esté escrito con un lenguaje generado por los mismos estudiantes y no sea una copia literal del texto consultado.

Si bien estos aspectos matemáticos y no matemáticos son expresados por los profesores como imprescindibles en las respuestas y producciones de los estudiantes y constituyen criterios de validez de las mismas, las acciones docentes no siempre contribuyen a ello.

Si se reconoce que en matemáticas los procesos de argumentación, explicación, demostración y comprobación son fundamentales a la hora de decidir sobre la validez de una producción matemática, se sigue que en la escuela la validez de las ideas y procedimientos matemáticos debería recaer en tales procesos de racionalidad. Las observaciones de las clases permitieron reconocer que si bien estos procesos se incorporan parcialmente en las exposiciones a cargo del profesor, son casi inexistentes en la actividad de los estudiantes. Al parecer, las demandas del profesor para que los estudiantes expliquen su trabajo no van más allá de la exigencia de dar cuenta de los pasos en los ejercicios. Acciones tales como explicitar las razones que sustentan los pasos de un algoritmo utilizado para resolver un ejercicio, justificar la selección o descarte de una estrategia de solución o comprobar que la respuesta obtenida es coherente con las condiciones del problema, tienen una limitada aparición en las clases. Estas acciones no sólo podrían permitir que el profesor se entere de una información que regularmente permanece vedada, sino que además exigirían a los estudiantes el desarrollo de una actividad cognitiva —o quizá sea mejor denominarla metacognitiva— que podría permitirles una oportunidad adicional para cualificar y mejorar su comprensión del asunto matemático en cuestión.

De seguro los formadores de docentes en ejercicio y muchos docentes, coinciden en aceptar que sería deseable que incluso los profesores desarrollaran este tipo de acciones pues con ello mejorarían su comprensión de los asuntos matemáticos y didácticos en cuestión. En suma, reconocerían que la pregunta acerca del porqué, debería tener un papel protagónico tanto en la actividad docente (antes, durante y después de clase) como en la actividad del discente.

De otro lado, incorporar aspectos no matemáticos como parte integral de la validez de la respuesta de los estudiantes puede ser una acción legítima, pero es recomendable reflexionar en si la exigencia desmesurada de tales aspectos no desplaza el centro de interés del aprendizaje de las matemáticas, como lo reporta Kline (1986) al referirse al rigor característico de las matemáticas modernas en la escuela. Además, vale la pena pensar en si efectivamente la enseñanza ofrece las condiciones necesarias para que los estudiantes puedan satisfacer los requisitos ligados a tales aspectos; al parecer esto no siempre sucede.

Por ejemplo, reescribir "con sus palabras" una información que se ha consultado en un texto —tarea propuesta por varios de los profesores— puede resultar una actividad bastante exigente para el estudiante, para la cual puede no estar preparado o no contar con las herramientas necesarias. Piénsese, por ejemplo, en las posibilidades que tiene un estudiante de redactar una definición propia de "medir" a partir de la siguiente que encontraría en el diccionario de la Real Academia Española "Comparar una cantidad con su respectiva unidad, con el fin de averiguar cuántas veces la segunda está contenida en la primera". A más de la dificultad implícita de tal tarea reconocible sólo "poniéndose en los zapatos del estudiante", las limitaciones que experimentan los estudiantes se podrían justificar en la carencia de acciones docentes —o a la poca efectividad de éstas— en actividades que exijan y promuevan la lectura comprensiva de información matemática, así como a que quizá difícilmente en las casas se propicia un ambiente y acciones que favorezcan tal tipo de lectura.

Un segundo ejemplo, mucho más específico, se establece al observar que uno de los profesores usualmente no copia en el tablero frases u oraciones completas y con significado para los estudiantes, sino se limita a escribir palabras o frases breves, pero exige a los estudiantes escribir en sus cuadernos definiciones completas a través de oraciones bien estructuradas.

¿Qué papel desempeñan profesores y estudiantes?

En cuatro de los cursos observados, para los estudiantes las explicaciones o argumentos dados por uno de sus compañeros no son suficientes para sustentar una postura sobre un aspecto o procedimiento matemático, si no son corroborados por el profesor o por el texto; en estos cursos los profesores son quienes tienen —y hacen uso de— el poder de decisión sobre la validez de las respuestas expresadas por los estudiantes. Además, en tres de estos cursos, se identificó que el texto es considerado también una fuente de validación por los estudiantes, sobre todo cuando se realizan ejercicios allí planteados y se dispone de un listado de respuestas a tales ejercicios. En suma, al parecer para los estudiantes tiene más peso o poder de validez una afirmación enunciada por el profesor o encontrada en un texto, que las conexiones que se puedan establecer de manera racional para argumentar, explicar o demostrar.

Estas observaciones coinciden con lo encontrado por Gregg (1995): el profesor y el libro de texto son vistos como las autoridades en la clase. El reconocimiento al profesor o al texto como fuente de verdad puede verse respaldado en el hecho de que se considera que la mayoría de las veces ni uno ni otro enuncian ideas falsas y que son poseedores de un saber erudito que minimiza la posibilidad de que se equivoquen o enuncien información errada; pero sobre todo, en la ausencia de otro recurso de validación, mediada por el tratamiento que se hace del contenido matemático. De un lado, a menudo en clase no se enfocan elementos del significado de los objetos que se estudian, los cuales aportarían criterios a los estudiantes para juzgar si las producciones que circulan en la clase son válidas o no lo son. Por ejemplo, si al tratar el tema relativo a la gráfica cartesiana de funciones cuadráticas se hubiera considerado lo que significa e implica en una gráfica cartesiana el ser función, los estudiantes habrían tenido elementos para cuestionar por qué se consideraron bajo la misma unidad temática relaciones no funcionales. De otro lado, quizá en clase se hace más énfasis en la comprensión de las ideas enunciadas que en la actividad de juzgar su validez. Para identificar algunos ejemplos que ilustren lo anterior, se invita al lector que intente contestar si al enseñar aspectos sobre operaciones con números negativos logra justificar satisfactoriamente por qué el producto de dos negativos da un positivo, o por qué es válido trazar una curva suave que "une" los puntos correspondientes a una tabla de datos de una función cuadrática.

De otra parte, el hecho de mirar en el libro de texto la respuesta del ejercicio puede hacer parte de la estrategia de aprendizaje —sobre todo cuando la intención de la tarea propuesta puede ir más allá de obtener una respuesta. A cualquier profesor le bastaría con hacer memoria de la época de estudiante de pregrado para identificar una serie de eventos de su aprendizaje de las matemáticas en los que al mirar las respuestas de los libros logró entender el procedimiento e identificar las fallas que estaba cometiendo al resolver un ejercicio. En uno de los cursos, se observó cómo unos estudiantes luego de intentar trabajar en varios de los ejercicios que implicaban operar polinomios con exponentes no numéricos —los cuales no se habían trabajado en los ejemplos explicados durante las clases—, al apoyarse en la respuesta del libro como primera instancia y luego tratar de dilucidar por qué era esa la respuesta al ejercicio propuesto descubrieron y enunciaron en sus palabras reglas para operar los exponentes en general. ¿Por qué no, entonces, repensar el uso de los textos para generar actividad matemática en las clases a través de la cual la validación de la respuesta sea más un medio que un fin?

Uno de los cursos exhibe un manejo un tanto diferente al de los cuatro reseñados antes; allí, se intenta promover la argumentación como elemento de validación de las producciones de los estudiantes, procurando que sean precisamente ellos quienes tengan que convencerse y convencer a sus compañeros de grupo y a sus profesores, que han comprendido lo que están estudiando, que han solucionado el problema de manera adecuada y/o que lo que escribieron es suficientemente claro y da cuenta efectiva del proceso y de la respuesta.[2]

Este propósito es apoyado por los profesores a través de acciones en las que exigen y promueven, en cada grupo, la discusión de las elaboraciones individuales y de grupo. De esta manera propician una oportunidad de delegar en los estudiantes buena parte de la responsabilidad sobre la validez de sus producciones.

Como se puede apreciar, la estrategia empleada incluye el trabajo en grupo y la discusión sobre la validez de las afirmaciones como una tarea explícitamente propuesta. No obstante, como lo señalan Sfard y Kieran (2001), no se puede desconocer que la conversación entre alumnos no necesariamente los conduce a establecer la validez de su trabajo y que al momento de decidir sobre tal validez, entre ellos puede pesar más el carácter de "buen estudiante" —y la consecuente credibilidad en sus afirmaciones— que los argumentos esgrimidos sobre el asunto en cuestión. Igualmente, hay que considerar que por la carga cognitiva que ello implica, no siempre los estudiantes pueden reproducir para su profesor la discusión en la que han participado y con la que lograron convencerse de la validez de su trabajo.

¿Cómo, para qué y cuándo se valida?

En cuatro de los cursos se observó que ante respuestas correctas de los estudiantes hay una aceptación, tácita o explícita, por parte del profesor. Esta aceptación se reconoce a través de diferentes reacciones del profesor; por ejemplo, es usual que los profesores expresen frases cortas de aceptación a las producciones, que parafraseen la respuesta del estudiante, que hagan un gesto que evoca la aceptación, e incluso que continúen el trabajo sin cuestionar la respuesta.

Este tipo de reacciones parece configurar parte de la cultura del salón y particularmente de las clases de matemáticas; cultura que los estudiantes interiorizan y asumen de manera natural; así, interpretar tales eventos culturales constituye la forma de saber si la respuesta presentada es o no correcta.

De esta cultura también hacen parte las reacciones de los profesores ante una respuesta errónea o incompleta; en efecto, los estudiantes aprenden a reconocer que, por lo general, los profesores sólo cuestionan las respuestas incorrectas o incompletas, repiten una pregunta varias veces cuando las respuestas que escuchan no les satisfacen, no prosiguen la clase hasta encontrar la respuesta esperada o anuncian explícitamente que la respuesta es incorrecta o que van a hacer algo (fuera del libreto o guión de la clase) para que los estudiantes puedan responder correctamente; particularmente, frente a las respuestas erróneas se señalan los errores cometidos, pero no hay un trabajo acerca de la dificultad que subyace al error evidenciado.

Al advertir que es suficiente que un estudiante aprenda a reconocer en las reacciones del profesor —más que en los argumentos— el acierto o el error en sus respuestas, surge de manera natural una estrategia para trabajar la validación. Si el profesor comenzara conscientemente a reaccionar de manera diferente a cómo lo ha venido haciendo y, por ejemplo, cuestionara tanto las respuestas incorrectas como las correctas, sus estudiantes reconocerían una alteración de la cultura de la clase y muy posiblemente se sentirían conminados a iniciar un cambio: basar la validación de sus respuestas ya no en las reacciones del docente sino en la argumentación razonada.

---

[2] Este curso es atendido por dos profesores y regularmente los alumnos trabajan en la clase en grupos de cuatro estudiantes.

Referencias

Andrade, L., Perry, P., Fernández, F. y Guacaneme, E. (2002). *Rutas pedagógicas de las matemáticas escolares. Una mirada a la práctica del profesor.* Reporte de investigación no publicado. Bogotá: una empresa docente.

Gregg, J. (1995). The tensions and contradictions of the school mathematics tradition. *Journal for Research in Mathematics Education, 26* (5), 442-466.

Kline, M. (1986). *El fracaso de la matemática moderna. ¿Por qué Juanito no sabe sumar?* México: Siglo veintiuno editores.

Sfard, A. y Kieran, C. (2001). Cognition as communication: Rethinking learning–by–talking through multifaceted analysis of students' mathematical interactions. *Mind, culture and activity, 8* (1), 42-76.

0 0 0 6 7 3

Señor
Edgar Torres
Asesor académico
Instituto para la Investigación Educativa y el Desarrollo Pedagógico - IDEP
Ciudad

LA-114

JUN 26 1 25 PM 2003

Bogotá, 25 de junio de 2003

Estimado Edgar:

Para finalizar el cumplimiento de los compromisos acordados con el IDEP en el marco del proyecto "Rutas pedagógicas de las matemáticas escolares. Una mirada a la práctica del profesor", mediante el contrato Nº 21 de 2001, suscrito con la Universidad de los Andes, estamos enviando los siguientes documentos:

- copia escrita del texto de la ponencia sobre el estudio realizado, con las modificaciones propuestas por el IDEP;
- copia escrita y digital del texto del segundo artículo sobre los resultados del estudio para el magazín Aula Urbana, titulado "Rutas pedagógicas de las matemáticas en colegios de Bogotá";
- treinta y cuatro ejemplares del libro sobre el estudio, titulado "Rutas pedagógicas en matemáticas: ¿azar o construcción?", que corresponden al 10% del total de libros cuya impresión ordenó "una empresa docente";
- la lista de las instituciones y entidades a las cuales "una empresa docente" va a entregar un ejemplar del libro;
- el informe final de ejecución financiera donde se da cuenta del presupuesto ejecutado para todo el proyecto.

Esperamos así que se pueda proceder a dar por terminado el contrato de manera satisfactoria para ambas partes.

Sea esta la ocasión para agradecer al IDEP por brindarnos la valiosa oportunidad que representó para nosotros el desarrollo de este proyecto. En especial, te agradecemos a tí y a María Cristina Dussán el constante apoyo y buena disposición hacia el equipo y el trabajo de "una empresa docente" a lo largo del proyecto.

Cordialmente,

Luisa Andrade E.
Investigadora principal

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
APARTADO AÉREO 4976
BOGOTÁ - COLOMBIA
TELÉFONOS: 3394949- 3520466 EXT. 2717 • FAX: 3394949 EXT. 2709
E-MAIL: LANDRADE@UNIANDES.EDU.CO